3 Mathematische Optimierungsmodelle

Mathematische Optimierung tritt in der betriebswirtschaftlichen Praxis insbesondere im Rahmen der Planung bzw. Entscheidungsfindung auf. Das Lösen von Optimierungsproblemen ist im Allgemeinen Teil eines Entscheidungsprozesses. Für eine reale Entscheidungssituation werden Handlungsalternativen identifiziert und die entscheidungsrelevanten Daten ermittelt. Diese werden dann in einem mathematischen Modell abgebildet. Ein mathematisches Modell ist somit eine vereinfachte Darstellung der Wirklichkeit, in der die wesentlichen entscheidungsrelevanten Parameter erfasst sind. Da die Wirklichkeit nicht exakt abgebildet werden kann, wird bei Optimierungssystemen auch von Entscheidungs*unterstützenden* Systemen gesprochen.

Nachdem ein Modell aufgestellt und mit einem Optimierungssystem gelöst wurde, liegt ein Entscheidungsvorschlag vor, der vom Entscheidungsträger auf seine Plausibilität geprüft werden muss.

Ein mathematisches Optimierungsmodell besteht immer aus den folgenden Hauptteilen.

- Entscheidungsvariablen
- Restriktionen
- Zielfunktion
- Daten

Ein deterministisches Optimierungsproblem lässt sich in allgemeiner Form folgendermaßen darstellen.

$$\textit{max oder min}\ \ f(x)$$

$$g_i(x)\begin{Bmatrix}\leq\\=\\\geq\end{Bmatrix}b_i, \quad \forall i \in M \tag{3.1}$$

$$x \in X, \quad X \subset \mathbb{R}^n$$

$$b_i \in \mathbb{R}\ \ \textit{und}\ \ M = \{1,\dots,m\}$$

$$f : X \to \mathbb{R},\ g_i : X \to \mathbb{R}$$

Mathematische Modelle können in verschiedene Modellklassen eingeteilt werden. Grundlage für die Bestimmung der Zuordnung einzelner Modelle in die entsprechenden Klassen sind sowohl die Art der Entscheidungsvariablen als auch die Art und Weise, wie Restriktionen und Zielfunktionen modelliert sind.

3.1 Lineare Modelle

Die allgemeinen Merkmale bzw. Voraussetzungen von linearen Modellen sind:

- Die Zielfunktion muss eine lineare Funktion sein.
- Nebenbedingungen müssen lineare Gleichungen oder Ungleichungen sein.
- Die Entscheidungsvariablen dürfen bei linearen Modellen reelle Werte annehmen.

Eine Vielzahl unterschiedlichster Probleme können als lineare Modelle modelliert werden. Um diese linearen Modelle mit z. T. Tausenden von Variablen und Restriktionen lösen zu können, wurde eine Reihe von schnellen und zuverlässigen Algorithmen entwickelt. Ausgewählte Übersichtsartikel über den Stand der Algorithmen für die Lineare Optimierung sind in [Beas96; Vand97; Bixb02] zu finden. Lineare Modelle werden entweder mit Varianten des Primalen Simplex Verfahrens [Dant51], des Dualen Simplex Verfahrens [Lemk54] oder des Innere- Punkte- Verfahrens [Karm84] gelöst. Alle drei Lösungsansätze weisen für verschiedene Problemstellungen Vor- und Nachteile auf, ergänzen sich aber auch gegenseitig. Ein entscheidender Vorteil der Simplex-Verfahren ist, dass sie ein sehr gutes Warmstartverhalten haben. Wurde an einem Modell lediglich eine kleine Veränderung vorgenommen, ist also eine fast optimale Basislösung vorhanden, kann das Modell mit einem Simplex-Verfahren sehr schnell reoptimiert werden. Diese Eigenschaft ist insbesondere für das Branch-and-Cut Verfahren von Bedeutung. Im Gegensatz zum Inneren-Punkte-Verfahren produzieren die Simplex-Verfahren Basislösungen. Dadurch sind alle Nicht-Basis-Variablen (abgesehen von freien Variablen, die keine endlichen unteren bzw. oberen Schranken aufweisen) auf ihre Grenzen gesetzt. Das wiederum führt zu weniger Variablen mit einem Wert ungleich Null, da die Untergrenze einer Variablen häufig null ist. Um nach der Lösung eines LPs mit dem Inneren-Punkte-Verfahren eine Basislösung zu erhalten, muss erst ein sogenannter Crossover Algorithmus angewandt werden. Das Innere-Punkte-Verfahren bewegt sich dafür nicht nur auf der Oberfläche des zulässigen Bereichs, sondern macht auch „Sprünge“ im inneren des zulässigen Bereichs. Das führt dazu, dass die Anzahl der Iterationen, die ausgeführt werden müssen, in der Regel relativ gering ist. Weitere Ausführungen zu den drei Lösungsverfahren sind zu finden in [Bixb02, BFGR00; SuWa04; KoSu06].

Die Lösung von linearen Modellen ist sehr wichtig bei der Lösung von ganzzahligen, gemischt-ganzzahligen oder nichtlinearen Problemen, da die zugehörigen Algorithmen fast immer viele LPs lösen müssen.

3.2 Gemischt-ganzzahlige Modelle

Im Rahmen dieser Arbeit spielen insbesondere gemischt-ganzzahlige Modelle eine große Rolle. Gemischt-ganzzahlige Modelle sind lineare Modelle, bei denen für einige oder alle Variablen gefordert wird, dass diese ganzzahlige Werte annehmen müssen. Obwohl lineare Modelle und gemischt-ganzzahlige Modelle formal eine große Ähnlichkeit aufweisen, gehören letztere (bis auf spezielle Ausnahmen) mathematisch zu der Komplexitätsklasse der NP-schweren Probleme, für die keine effizienten Algorithmen bekannt sind.

Im Rahmen dieser Arbeit soll grundsätzlich von einem Minimierungsproblem ausgegangen werden:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j \in J} c_j x_j \\
& Ax = d \\
& lb_j \le x_j \le ub_j && \forall j \in J \qquad (3.2) \\
& x_j \in \mathbb{R} && \forall j \in J \\
& x_j \in \mathbb{Z} && \forall j \in I \subseteq J
\end{aligned}
$$

Wobei $J = \{1,\dots,n\}$, c ein Vektor mit der Länge n, A die Koeffizientenmatrix der Größe $m \; x \; n$, d der Vektor der rechten Seite mit der Länge m ist und ub und lb die Vektoren der Länge n für die Ober- bzw. Untergrenzen der Variablen sind.

Der wichtigste Fall von gemischt-ganzzahligen oder rein ganzzahligen Problemen ist der, bei dem die ganzzahligen Variablen nur die Werte 0 und 1 annehmen dürfen. Mit Hilfe dieser 0-1-Variablen (*Binärvariablen*) lassen sich u. a. Investitionsentscheidungen, Standortentscheidungen oder Tourenplanungen darstellen. Eine Vielzahl von Modellierungstechniken basieren auf Binärvariablen. Ein reines 0-1 Modell lässt sich folgendermaßen darstellen.

$$\begin{aligned} & min \quad \sum_{j \in B} c_j x_j \\ & Ax = d \\ & x_j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in B \subseteq I \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.3 Nicht-lineare Modelle

Insofern die Zielfunktion oder die Restriktionen Nichtlinearitäten aufweisen, wird von nicht-linearen Problemen gesprochen. Nichtlineare Modelle lassen sich abhängig von den Eigenschaften der Funktionen und von dem Wertebereich der Variablen in verschiede Modellklassen einteilen.

Die Lösung solcher Probleme ist entschieden schwieriger, aber generell nicht unmöglich. Es existiert kein Standardlösungsverfahren für nichtlineare Modelle, vielmehr werden die folgenden drei Lösungsmethoden unterschieden:

- Analytische Verfahren
- Lineare Approximation
- Algorithmische Suchverfahren

Handelt es sich um eine Zielfunktion und Restriktionen, die stetig differenzierbar sind, bilden die Kuhn-Tucker-Bedingungen ein notwendiges Kriterium dafür, dass eine optimale Lösung vorliegt. Genau genommen können sie sogar hinreichend sein, bei konvexen Optimierungsmodellen [Gal91].

In [Padb00] wird ein Verfahren zu Modellierung von stückweise linearen Funktionen ausführlich vorgestellt und untersucht. Dabei werden spezielle Nichtlinearitäten sowie stückweise lineare Funktionen, die nichtlineare separable Funktionen approximieren können, mit Hilfe von 0-1 Variablen dargestellt (vlg. auch [NeWo88; Wagn69]). In der Arbeit [Frie07] sind Aspekte zu Implementierung von linearisierten Gruppen von Variablen für nichtlineare separable Funktionen zu finden.

So wird ein nichtlineares Modell in ein lineares Modell umgewandelt und es kann wieder auf die Verfahren zur Lösung von linearen Modellen zurückgegriffen werden.

3.4 Klassische gemischt-ganzzahlige Optimierungsmodelle

Bei den zu lösenden Problemstellungen der mathematischen Optimierung, wird in der Regel eine Verteilung von beschränkten Ressourcen gesucht, die eine bestimmte Zielsetzung optimieren soll. Besteht bei der Optimierung für einige Variablen die Bedingung der Ganzzahligkeit, hat dies zur Folge, dass die Lösung der Probleme erheblich schwerer wird. In vielen möglichen Anwendungsgebieten ist aber die Ganzzahligkeit eine wesentliche Bedingung für den Einsatz der mathematischen Optimierung. So soll beispielsweise durch die Variable etwas nicht Teilbares repräsentiert werden (z.B. Anzahl von zu bauenden Flugzeugen, Anzahl an Arbeitskräften). Des Weiteren können durch die Beschränkung des Wertebereichs der ganzzahligen Variablen auf die Werte 0 und 1 Entscheidungen dargestellt werden.

In der Praxis werden die unterschiedlichsten Modelle aufgestellt, die aufgrund ihrer verschiedenen Einsatzbereiche nicht bzw. nur sehr schwer generalisiert werden können.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt allerdings auf den Lösungsverfahren. Im Folgenden sollen nur einige klassische gemischt-ganzzahlige Probleme, die immer wieder auftreten, vorgestellt werden. Einen umfassenden Überblick der mögliche Einsatzfelder der gemischt-ganzzahlingen Optimierung gibt [Gröt92]. Für konkrete Anwendungsbeispiele sei auf [SuSu99; Suhl01; StKS04] verwiesen.

3.4.1 Fixkosten Probleme

Alle Problemstellungen, bei denen Fixkosten eine Rolle spielen, erscheinen erst einmal problematisch, da es sich bei der entsprechenden Kostenfunktion

$$K(x)=\begin{cases} F + c * x\,, & für\ x>0 \\ 0\,, & für\ x=0 \end{cases}$$

um eine nichtlineare Funktion handelt. $K(x)=0$, wenn $x=0$ .Wenn $x>0$ fallen sowohl variable Kosten *c*, als auch Fixkosten $F>0$ an.

Fixkosten können z.B. Investitionskosten oder Rüstkosten in der Produktionsplanung sein. Ein beliebtes Beispiel ist auch eine Lagerstandortentscheidung. Wenn ein Lager L geöffnet wird, fallen neben variablen Kosten c auch Fixkosten von F an, bleibt es geschlossen fallen keine Kosten an.

Durch die Einführung einer sogenannten Indikatorvariablen y kann die nichtlineare Kostenfunktion im Rahmen eines gemischt-ganzzahligen Modells dargestellt werden.

Dabei ist $y=\begin{cases} 1, wenn\ x>0 \\ 0, wenn\ x=0 \end{cases}$

Die Kostenfunktion *K* lässt sich äquivalent durch die Funktion *K'* darstellen:

$$K'(x,y)=Fy+c*x$$

Die oben angegebene Forderung, dass $y=\begin{cases} 1, wenn\ x>0 \\ 0, wenn\ x=0 \end{cases}$ muss in Restriktionen ausgedrückt werden.

Der Zusammenhang zwischen *x* und *y* wird wie folgt abgebildet

$$x \le My$$

Diese Art von Ungleichungen wird als Fixed-Charge-Restriktion bezeichnet. Dabei sollte *M* so klein wie möglich, aber mindestens so groß sein, wie der größte Wert, den x annehmen kann. Wenn $y=1$, ist die Ungleichung redundant, wenn $y=0$, wird *x* auf null gezwungen. Die Konstellation $y=1$ und $x=0$ ist zwar theoretisch möglich, wird aber nicht eintreten, da davon auszugehen ist, dass Kosten minimiert werden und somit *y* nur, wenn erforderlich, den Wert 1 annehmen wird.

Es besteht aber auch die Möglichkeit solche Fixkostenprobleme ohne die Einführung einer Indikatorvariablen und zusätzliche Restriktionen zu lösen. Bei *x* handelt es sich um eine sogenannte Semi-Continous Variable, diese Variablen können direkt im Branch-and-Bound/ Cut Verfahren beachtet werden (vgl. Kapitel 5.1).

3.4.2 Set Covering, Partitioning and Packing problems

Die drei Problemklassen Set Covering, Set Partitioning und Set Packing sind sich im Grunde genommen sehr ähnlich. Sie zeichnen sich vor allem dadurch aus, dass die gesamte Koeffizientenmatrix nur aus Nullen und Einsen besteht.

Wenn $A \in \{0,1\}^{mxn}$, $x \in \{0,1\}^n$ und $E \in \{1\}^m$, dann wird mit:

$Ax = E$ ein Set Partitioning Problem,

$Ax \leq E$ ein Set Packing Problem und

$Ax \geq E$ ein Set Covering Problem beschrieben.

Arbeitspläne können z.B. auf diese Art und Weise dargestellt werden. Die Spalten stellen die Arbeiter dar und die Zeilen die zu erledigenden Aufgaben. Steht für einen Arbeiter in einer Zeile eine eins heißt das, dass dieser Arbeiter, wenn er eingesetzt wird, die entsprechende Aufgabe erfüllen würde. So besteht die ganze Matrix ausschließlich aus Nullen und Einsen. Handelt es sich um ein Set Partitioning Problem heißt das, dass eine Aufgabe von einer bestimmten Anzahl von Personen erledigt werden soll. Bei Set Covering Problemen muss mindestens eine bestimmte Anzahl von Personen zur Verfügung stehen. Demgegenüber darf bei Set Packing Problemen nicht mehr als eine bestimmte Anzahl an Arbeitern für eine Aufgabe eingeteilt werden. Trotz der speziellen Struktur dieser Probleme sind sie häufig für praktisch auftretende Entscheidungsprobleme zum Beispiel in der Tourenplanung und der Personaleinsatzplanung einsetzbar. Einen Überblick zu diesen Problemklassen ist in [BaPa76] und [Padb79] zu finden.

3.4.3 Knapsack Probleme

Knapsack Probleme sind Optimierungsprobleme mit nur einer Restriktion und ausschließlich Binärvariablen. Der Name Knapsack kommt von der Vorstellung, dass ein Rucksack gepackt werden soll, in dem maximal das Gewicht W transportiert werden kann. In diesen Rucksack kommen nur unteilbare Gegenstände. Alle Gegenstände, haben ein bestimmtes Gewicht w_i und einen bestimmten Nutzen v_i. Zusammen überschreiten sie die Kapazität des Rucksacks. Der begrenzte Raum des Rucksacks soll optimal ausgenutzt werden, d.h. der Nutzen des

Rucksackinhalts soll maximiert werden. Dazu werden Binärvariablen eingeführt, die den Wert eins annehmen, wenn ein Gegenstand Teil der optimalen Kombination ist.

$$\max \sum_{i \in B} v_i x_i$$

$$\sum_{i \in B} w_i x_i \leq W$$

$$x_i \in \{0,1\}, \qquad \forall i \in B$$

Diese sehr einfach wirkende Klasse von Problemen findet z.B. unterstützend ihre Anwendung bei dem Liften von Cover Cuts (Kapitel 4.7.4.1.2). Lösungsansätze zu Knapsack Problemen sind in [Suhl78; MaTo90] zu finden.