

# 1 Einleitung

Immer mehr Unternehmen und Organisationen im privaten sowie im öffentlichen Bereich setzen in den letzten Jahren bei der Lösung von betriebswirtschaftlichen Entscheidungsprozessen mathematische Optimierungssoftware ein. Neben der linearen Optimierung gewinnt hierbei die gemischt ganzzahlige Optimierung zunehmend an Bedeutung.

Durch den mittlerweile vielseitigen Einsatz entstehen immer komplexere Probleme, die z. T. nach wie vor eine Herausforderung für die vorhandenen Optimierungssysteme darstellen. Obwohl in den letzten Jahren durch intensive Forschung enorme Fortschritte erzielt werden konnten, gibt es immer noch Modelle, die gar nicht oder nur in inakzeptabler Zeit gelöst werden können. Diese Tatsache verdeutlicht, dass in dem Forschungsgebiet der gemischt ganzzahligen Optimierung noch sehr viele offene Fragen existieren und Verbesserungspotentiale genutzt werden können.

Große Erfolge bei der Lösung von gemischt-ganzzahligen Modellen basieren auf dem Konzept der *strengen LP-Relaxierung*. Hierbei wird entweder durch entsprechende Modellierung oder durch automatische Reformulierung des Modells ein äquivalentes Modell bestimmt, dessen LP-Relaxierung im Vergleich zum Originalmodell einen kleineren zulässigen Bereich aufweist. Der kleinere Lösungsbereich ist darauf zurück zu führen, dass implizite, auf der Forderung nach Ganzzahligkeit basierende Zusammenhänge des Originalmodells explizit formuliert werden.

In dieser Arbeit werden wichtige Verfahren der strengen LP-Relaxierung vorgestellt. Dabei wird insbesondere darauf eingegangen, inwiefern die einzelnen Techniken sinnvoll im Rahmen eines *Branch-and-Cut Ansatzes* zum Einsatz kommen können.

Obwohl es bereits eine Reihe von Veröffentlichungen über das Branch-and-Cut Verfahren gibt, bleiben speziell in diesem Bereich viele zu untersuchende Aspekte offen. Inhalt dieser Arbeit sind unter anderem einige neue Überlegungen zu der Frage, wann wie viele Schnittebenen (*Cuts*) abgeleitet werden sollen. Zur Beantwortung dieser Frage werden verschiedene Strategien getestet und entsprechend ausgewertet. Im Ergebnis wird eine Strategie vorgestellt, die bei einer Vielzahl von Modellen zu den besten Lösungszeiten führt.

Des Weiteren werden die Anforderungen erörtert, die ein Cut erfüllen muss, um im Rahmen des Branch-and-Cut Verfahrens eingesetzt zu werden.

Eine der wichtigsten Eigenschaften ist die Gültigkeit eines Cuts. Dabei wird in global und lokal gültige Cuts unterschieden. Eine Vielzahl von Cuts ist lediglich lokal gültig und somit nicht überall im Baum einsetzbar. Im Rahmen dieser Arbeit wird neben einem Liften zur globalen Gültigkeit ein Ansatz zur Handhabung von lokal gültigen Cuts entwickelt.

Da während des Branch-and-Cut Ansatzes nicht alle Techniken beliebig angewandt werden können, wurden die Verfahren im Einzelnen sowie deren Implementierung genau untersucht. Im Rahmen dieser intensiven Beschäftigung mit den jeweiligen Techniken konnten auch in diesem Gebiet allgemein gültige Fortschritte erzielt werden.

Besonders hervorzuheben ist dabei der Ansatz, dass während der Generierung von Cover Cuts verschiedene Reihenfolgen der Variablen getestet werden. Dadurch konnten im Vergleich zur ursprünglichen Veröffentlichung von [GuNS98] deutlich bessere Ergebnisse erzielt werden. Dieser Fortschritt ist darauf zurückzuführen, dass sich verschiedene Lifting-Reihenfolgen ergeben, was wiederum zur Folge hat, dass zusätzliche Cover Cuts abgeleitet werden können.

Weitere Verbesserungen im Rahmen der Cover Cuts konnten dadurch erzielt werden, dass die Knapsack-Probleme, die während des Liftens auftraten, exakt gelöst wurden.

Darüber hinaus wurde ein Lifting-Prozess speziell für Clique Cuts erarbeitet. Zielsetzung dieser Erweiterung von Clique Cuts ist es, einen möglichst verletzten Clique Cut zu generieren.

Neben dem Liften der Cover und Clique Cuts wurden allgemeingültige Überlegungen zum Liften von Variablen angestellt. Diese hatten die Erkenntnis zur Folge, dass theoretisch jede beliebige 0-1-Variable geliftet werden kann.

Im Rahmen der Mixed-Integer-Gomory Cuts werden sinnvolle Auswahlkriterien erarbeitet, die dafür sorgen, dass nur bestimmte Mixed-Integer-Gomory Cuts und insgesamt nicht zu viele an das Modell angehängt werden. Diese Überlegungen sind von besonderer Relevanz, da Mixed-Integer-Gomory Cuts zwar zum einen den Lösungsraum der LP-Relaxierung einschränken, zum anderen aber aufgrund ihrer z. T. sehr dichten Besetzung die Lösungszeit eines LPs entscheidend verlangsamen können. Nur durch das Erarbeiten von sinnvollen Auswahlkriterien bezüglich der Mixed-Integer-Gomory Cuts ist deren standardmäßige Anwendung überhaupt möglich.

Basis für die vorliegende Arbeit bildet die Mathematischen Optimierung Software *MOPS* [Suhl94]. MOPS wird seit mehr als 20 Jahren in den verschiedensten praktischen Anwendungen eingesetzt [SuSu99; Suhl01; StKS04]. Aufgrund der stetigen Verbesserungen im Rahmen der Algorithmen, der Datenstrukturen sowie des Softwaredesigns, zählt MOPS heute zu den

wenigen konkurrenzfähigen Optimierungssystemen zur Lösung von linearen und gemischt-ganzzahligen Modellen. Durch die Möglichkeit die erarbeiteten Überlegungen in diese Optimierungssoftware zu implementieren, konnten die theoretisch behandelten Fragen auch praktisch getestet werden.

