

# Charged Quantum Fields Associated with Endomorphisms of CAR and CCR Algebras

Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde, beim  
Fachbereich Physik der Freien Universität Berlin  
eingereicht im Mai 1998, von

Carsten Binnenhei

Author address: Institut für Theoretische Physik der Freien Universität Berlin,  
Arnimallee 14, D-14195 Berlin  
E-mail address: [Carsten.Binnenhei@physik.fu-berlin.de](mailto:Carsten.Binnenhei@physik.fu-berlin.de)

ERSTGUTACHTER: PROF. BERT SCHROER  
ZWEITGUTACHTER: PROF. ROBERT SCHRADER  
TAG DER DISPUTATION: 11. JUNI 1998

ABSTRACT. The appearance of the Cuntz algebras  $\mathcal{O}_d$  is a generic feature of local quantum field theory. This fact has been discovered by S. Doplicher and J. E. Roberts within the algebraic theory of superselection sectors. Generators of the Cuntz algebras arise as charged field operators which implement localized endomorphisms of the observable algebra. Whereas the existence of such operators can be derived from first principles, little is known about the actual construction of these fields in concrete models.

In view of this apparent discrepancy, we develop a comprehensive theory of quasi-free endomorphisms of the CAR and CCR algebras which give rise to representations of the Cuntz algebras  $\mathcal{O}_d$  on Fock space. The number  $d$  is the statistics dimension of the endomorphism. It can be any power of 2 (including 1 and  $\infty$ ) in the CAR case, but takes only the values 1 and  $\infty$  in the CCR case.

We obtain necessary and sufficient conditions for implementability of quasi-free endomorphisms. By studying extensions of partial Fock states, we find that the semigroup of implementable quasi-free endomorphisms has a simple structure: It can be written as a product of a group of automorphisms which are close to the identity, and the semigroup of endomorphisms which leave the given Fock state invariant.

We describe the construction of the implementers of a quasi-free endomorphism in terms of annihilation and creation operators in detail. These implementers span a  $d$ -dimensional *Fock space of isometries*. The Fock structure of the space of implementers is the key to the determination of the charge quantum numbers of the endomorphism. It entails that implementable endomorphisms with statistics dimension  $d \neq 1$  are always reducible.

We compare the structure of the semigroup of (gauge invariant) quasi-free endomorphisms with the generic superselection structure of quantum field theory.

ZUSAMMENFASSUNG. Wie S. Doplicher und J. E. Roberts gezeigt haben, treten die Cuntz-Algebren  $\mathcal{O}_d$  ganz allgemein in der lokalen Quantenfeldtheorie auf. Darstellungen der Cuntz-Algebren werden erzeugt von ladungstragenden Quantenfeldern, welche lokalisierte Endomorphismen der Observablenalgebra implementieren. Es sind aber bisher keine Beispiele für die Konstruktion solcher geladenen Felder in konkreten Modellen bekannt.

Angesichts dieser unbefriedigenden Lage entwickeln wir eine vollständige Theorie derjenigen quasifreien Endomorphismen der CAR- und CCR-Algebren, die zu Darstellungen der Cuntz-Algebren  $\mathcal{O}_d$  auf dem Fockraum führen. Dabei ist  $d$  die statistische Dimension des Endomorphismus. Wie sich zeigt, kann  $d$  im CAR-Fall eine beliebige Potenz von zwei sein, im CCR-Fall jedoch nur eins oder unendlich.

Wir beweisen ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Implementierbarkeit quasifreier Endomorphismen. Die Halbgruppe der implementierbaren Endomorphismen hat eine einfache Struktur: Jeder implementierbare Endomorphismus läßt sich zerlegen in ein Produkt eines Automorphismus, der „nahe“ bei der Identität liegt, und eines Endomorphismus, der den gegebenen Fockzustand invariant läßt.

Wir finden explizite Formeln für die geladenen Felder, die einen gegebenen Endomorphismus implementieren. Aus diesen Formeln läßt sich ableiten, daß der von den Feldern aufgespannte  $d$ -dimensionale Hilbertraum selbst eine Fockraumstruktur trägt. Weiter lassen sich die Ladungsquantenzahlen der Endomorphismen bestimmen. Endomorphismen mit statistischer Dimension ungleich eins sind stets reduzibel.

Wir diskutieren Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen der Halbgruppe der (eichinvarianten) quasifreien Endomorphismen und der Halbgruppe der lokalisierten Endomorphismen in der Theorie der Superauswahlsektoren.

# Contents

Introduction	1
The Algebraic Theory of Superselection Sectors	2
What We Have Done	14
Review of the perspective	14
Quasi-free endomorphisms of CAR and CCR algebras	15
Endomorphisms of CAR and CCR Algebras	27
1. The Cuntz Algebras $\mathcal{O}(H)$	27
2. Quasi-free Endomorphisms of the CAR Algebra	31
2.1. Quasi-free endomorphisms and quasi-free states	31
2.2. Representations of the form $\pi \circ \varrho$	34
2.3. The semigroup of implementable endomorphisms	41
2.4. Normal form of implementers	49
2.5. Bosonized statistics	59
3. Quasi-free Endomorphisms of the CCR Algebra	62
3.1. The selfdual CCR algebra	62
3.2. Implementability of quasi-free endomorphisms	64
3.3. The semigroup of implementable endomorphisms	67
3.4. Normal form of implementers	72
4. Superselection Sectors Reached by Gauge Invariant Quasi-free Endomorphisms	78
4.1. Gauge invariant endomorphisms of the CAR algebra	80
4.2. Gauge invariant endomorphisms of the CCR algebra	94
What We Have Not Learnt Yet	99
Curriculum Vitae	101
Acknowledgements	102
Bibliography	103

*Daß mit den steigenden Ansprüchen an die Genauigkeit der Messungen auch die Kompliziertheit der Instrumente immer größer wird, findet ohne weiteres Verständnis und Billigung. Aber daß bei der fortgesetzten Verfeinerung der gesetzlichen Zusammenhänge zu ihrer Formulierung Definitionen und Begriffe benutzt werden, die sich immer weiter von altgewohnten Formen und anschaulichen Vorstellungen entfernen, macht man stellenweise der theoretischen Forschung zum Vorwurf, ja man will darin Anzeichen dafür erblicken, daß sie sich auf einem Irrweg befindet.*

*Nichts kann kurzsichtiger sein als eine derartige Vermutung.*

Max Planck, *Sinn und Grenzen der exakten Wissenschaft*,  
1941

## CURRICULUM VITAE.

### **Persönliche Daten:**

Name: Carsten Binnenhei  
Anschrift: Braunschweiger Str. 70, 12055 Berlin  
Geburtsdatum: 24. August 1965  
Geburtsort: Duisburg/Ndrh.  
Familienstand: verheiratet, 1 Kind  
Staatsangehörigkeit: deutsch

### **Schulbildung:**

1971–1975 Paul–Gerhardt–Grundschule in Rheinberg  
1975–1984 Amplonius–Gymnasium in Rheinberg, Abitur

### **Zivildienst:**

1984–1986 Evangelisches Alten– und Pflegeheim Orsoy

### **Hochschulbildung:**

1986–1993 Studium der Physik an der Rheinischen Friedrich–  
Wilhelms–Universität Bonn und an der Universität  
Hamburg, Diplomarbeit auf dem Gebiet der  
Quantenfeldtheorie unter der Betreuung von  
Prof. Klaus Fredenhagen und Prof. Werner Nahm,  
Physik–Diplom in Bonn 1993  
1994–1998 Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Sfb 288  
„Differentialgeometrie und Quantenphysik“ an der  
FU Berlin, Doktorand unter der Betreuung von  
Prof. Bert Schroer und Prof. Robert Schrader am  
Institut für Theoretische Physik der FU Berlin

## DANKSAGUNG.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Bert Schroer für die verständnisvolle und geduldige Betreuung; meiner Frau Marion aus den gleichen Gründen; Prof. Robert Schrader für die prompte Bereitschaft zur Übernahme des Zweitgutachtens und sonstige Unterstützung; sowie Dr. Hans-Werner Wiesbrock für zahlreiche kritische Bemerkungen und Diskussionen, und für sein Interesse an dieser Arbeit. Prof. Piotr Grinevich verdanke ich den harten Teil der Abschätzungen im Beweis von Lemma 4.9. Für hilfreiche Diskussionen möchte ich mich ferner bei Dr. Florian Nill, Dr. Martin Schmidt, Frank Hauser und Jens Mund bedanken.

Die Arbeit ist teilweise mit finanzieller Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Sfb 288 „Differentialgeometrie und Quantenphysik“) zustande gekommen.

## ERKLÄRUNG.

Ich versichere, daß ich die Arbeit selbständig verfaßt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

Berlin, im Mai 1998