5 Schlußbemerkung und Ausblick

Die Diskretisierung des Eigenwertproblems der skalaren, komplexen Helmholtzgleichung in schwacher Formulierung mittels finiter Elemente führt auf das algebraische Eigenwertproblem

$$Au = \lambda Bu$$

mit der im allgemeinen nichtselbstadjungierten Matrix A und der selbstadjungierten, positiv definiten Matrix B. In dieser Arbeit wurde eine Mehrgitter-Methode zur effizienten Lösung dieses diskreten Problems entwickelt.
Durch eine Sensitivitätsanalyse des kontinuierlichen Eigenproblems konnte zunächst gezeigt werden, daß die stabile Berechnung der gewünschten Eigenwerte und korrespondierenden Eigenfunktionen nur auf der Grundlage der Approximation des zugehörigen invarianten Unterraumes, das heißt der simultanen Bestimmung der zum gesuchten Teil des Spektrums korrespondierenden Eigenlösungen, erfolgen kann. Dabei wurde aus Konditionsgründen zur Darstellung des invarianten Unterraumes nicht die Basis aus Eigenvektoren, sondern die aus Schurvektoren bestehende Orthonormalbasis gewählt. In dem nun zur simultanen Berechnung dieser Schurvektoren hergeleiteten Mehrgitter-Verfahren basiert sowohl jeder Glättungs- als auch Grobgitter-Korrekturschritt analog zur Finite-Elemente-Approximation auf der Lösung eines projizierten Eigenproblems. Damit läßt sich das Verfahren insgesamt in die Klasse der orthogonalen Projektionsmethoden einordnen, der unter anderem auch die Krylovraum-Methoden zur approximativen Lösung von Eigenwertproblemen angehören. Im speziellen selbstadjungierten Fall liegt dem Verfahren außerdem ein Minimalprinzip zugrunde, so daß dieses dann zusätzlich zu den monotonen Mehrgitter-Methoden zählt.
In dem in dieser Arbeit betrachteten Kontext waren stets die Eigenlösungen zu den Eigenwerten mit kleinsten Realteilen von Interesse. Durch eine einfache Modifikation der vorgestellten Algorithmen kann das Verfahren auch zur Bestimmung von anders charakterisierten Eigenwerten, beispielsweise der betragskleinsten oder -größten, und des zugehörigen invarianten Unterraumes eingesetzt werden. Aufgrund der allgemein gehaltenen Herleitung der Methode lassen sich dabei auch Probleme, die nicht notwendigerweise aus der Diskretisierung eines partiellen Differentialoperators entstanden sind, bearbeiten. Voraussetzungen für den Einsatz des Mehrgitter-Algorithmus sind das Vorliegen einer hierarchischen Multilevel-Struktur (ähnlich der hier durch fortgesetzte adaptive Gitterverfeinerung erhaltenen) und gleiche analytische Eigenschaften (diskretes Spektrum, Vollständigkeit der Eigenlösungen) wie im Fall des Eigenwertproblems der Helmholtzgleichung. Zur Behandlung nichtlinearer Eigenwertprobleme kann die Methode zudem, beispielsweise im Rahmen des Newton-Verfahrens, zur Lösung auftretender Teilprobleme benutzt werden.
Die für Mehrgitter-Verfahren typische optimale Komplexität konnte anhand einiger ausgewählter Beispielrechnungen belegt werden. Ein Beweis dieser Beobachtung ist

bislang nur für den selbstadjungierten Fall und der Berechnung einer einfachen Eigenlösung bekannt. Die Erweiterung dieser Theorie auf den nichtselbstadjungierten Fall und auf die Bestimmung beliebiger invarianter Unterräume ist eine Aufgabe zukünftiger Forschungsarbeit.