Eine Mehrgitter-Methode zur Lösung des Eigenwertproblems der komplexen Helmholtzgleichung

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Freien Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker Tilmann Friese

Berlin, 1998

Gutachter: Prof. Dr. Peter Deuflhard, Berlin
Prof. Dr. Harry Yserentant, Tübingen

Disputation: 27. November 1998

Inhaltsverzeichnis

A Zusammenfassung

Die Berechnung von Eigenlösungen partieller Differentialoperatoren ist eine in den Natur- und Ingenieurwissenschaften häufig auftretende Problemstellung. In der integrierten Optik beispielsweise läßt sich die Bestimmung geführter Lichtmoden optischer Komponenten unter geeigneten Modellannahmen auf die Lösung des Eigenwertproblems der skalaren Helmholtzgleichung

$$-\Delta u(x,y) - f(x,y)u(x,y) = \lambda u(x,y) \qquad (*)$$

mit Dirichlet-Randbedingung auf einem beschränkten, zweidimensionalen Gebiet zurückführen. Dabei kann die beschränkte Funktion f, die Materialparameter enthält, sowohl reellwertig (selbstadjungiertes Eigenwertproblem) als auch komplexwertig (nichtselbstadjungiertes Eigenwertproblem) sein. Während die Untersuchung des selbstadjungierten Problems als ein im wesentlichen abgeschlossenes Forschungsgebiet angesehen werden kann, stellt die Behandlung des nichtselbstadjungierten Falls einen wichtigen, aktuellen Forschungsschwerpunkt dar.
In der Dissertation werden zunächst einige bekannte Aussagen über die analytischen Eigenschaften des Problems $(*)$ (Struktur des Spektrums des assoziierten Helmholtzoperators, Vollständigkeit der Eigenfunktionen, Abhängigkeit der Eigenlösungen von Störungen in der Funktion f), insbesondere im nichtselbstadjungierten Fall, dargestellt. Den Schwerpunkt der Arbeit bildet daran anschließend die numerische Lösung des Eigenwertproblems $(*)$. Ausgehend von der Variationsformulierung des Problems wird die Methode der finiten Elemente über Dreiecksgittern zur approximativen Berechnung der gewünschten Eigenlösungen benutzt. Es werden einige Standardverfahren (zum Beispiel Krylovraum-Methoden) zur Lösung des dabei entstehenden diskreten Eigenwertproblems

$$Au = \lambda Bu \qquad (**)$$

mit den dünn besetzten und hochdimensionalen Matrizen A und B beschrieben. Da die effiziente Berechnung möglichst guter Approximationen der kontinuierlichen Eigenlösungen die Verwendung einer Folge von adaptiv verfeinerten Triangulierungen erforderlich macht, bieten sich alternativ zur Lösung von $(**)$ Mehrgitter-Methoden an. Der Forschungsbeitrag der Dissertation besteht in der Verallgemeinerung eines bekannten Mehrgitter-Verfahrens zur Lösung des selbstadjungierten Eigenwertproblems (Rayleigh-Quotienten-Mehrgitter-Minimierung von Mandel und McCormick) auf den nichtselbstadjungierten Fall. Dazu werden vorbereitend zum einen die Konvergenzeigenschaften des Verfahrens der konjugierten Gradienten zur Minimierung des Rayleigh-Quotienten auf einem Gitter untersucht, zum anderen wird die Methode von Mandel und McCormick in einer äquivalenten Formulierung dargestellt, wobei sich zusätzlich die Erweiterung des Verfahrens zur Berechnung invarianter Unterräume (simultane Berechnung mehrerer Eigenlösungen) ergibt. Diese Formulierung erlaubt dann die Verallgemeinerung der Methode auf den nichtselbstadjungierten Fall. Die für Mehrgitter-Verfahren typische optimale Komplexität wird abschließend anhand einiger repräsentativer Beispiele dokumentiert.

B Lebenslauf

- geboren am 4. Juni 1968 in Schwerin
- 1975-1985: zehnklassige allgemeinbildende polytechnische Oberschule in Schwerin
- 1985-1988: Berufsausbildung mit Abitur zum Facharbeiter für Anlagentechnik im Kabelwerk Nord Schwerin
- 1988-1989: Grundwehrdienst
- 1990-1995: Diplomstudium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Freien Universität Berlin (Diplomarbeit mit dem Titel „Eine adaptive Spektralmethode zur Berechnung periodischer Orbits“, Betreuer: Prof. Dr. P. Deuflhard)
- 1994-1995: Forschungstutor am Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin
- seit 1995: wissenschaftlicher Angestellter am Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin