

## 3.7 Ein Beispiel

Wir studieren in diesem Abschnitt ein Modellbeispiel, für das wir alle Hypothesen der Theoreme 3.1 und 3.2 verifizieren können. Die Modellgleichung besitzt die folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ f(x(t), c) + \gamma x(t - \chi)z(t) \\ \frac{2}{3}(L(z_t) - z(t)) + g(z(t), \lambda, c) + k(x(t))z(t) \end{pmatrix}. \quad (3.189)$$

Hierbei sind  $x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), k(\cdot), f(\cdot, c), g(\cdot, \lambda, c)$  reellwertige Funktionen,  $\chi, \gamma, \zeta, c, \in \mathbb{R}$  Konstanten,  $L : C^0([-2\pi, 2\pi], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte lineare Abbildung und  $\lambda \approx 0$  ein reeller Parameter. Also definiert (3.189) eine Forward-Backward-Delay Gleichung auf  $[-2\pi, 2\pi]$ , falls  $|\chi| < 2\pi$  und sonst auf  $[-2\pi, \chi]$  oder  $[\chi, 2\pi]$ .

Im Grunde genommen besteht die Gleichung (3.189) aus einer zweidimensionalen, gewöhnlichen Differentialgleichung bezüglich  $x, y$  durch den Term  $\gamma x(t - \chi)z(t)$  an die  $z$ -Gleichung gekoppelt. Die  $z$ -Gleichung ist eine Forward-Backward-Delay Gleichung, bei der in Abhängigkeit des Parameters  $\lambda$  eine superkritische Hopfverzweigung auftritt. Ist  $z = 0$ , so reduziert sich die Dynamik von (3.189) für  $\lambda = 0$  auf

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ f(x(t), c) \end{pmatrix}, \quad (3.190)$$

falls  $g(0, 0, c) = 0$  ist.

Dies ist ein zweidimensionales Hamiltonsystem und wir wollen für  $c = 1$  die Existenz eines homoklinen Orbits  $h(\cdot)$  annehmen, so dass das Gleichgewicht  $(x, y) = (0, 0)$  in der  $\alpha$ - und  $\omega$ -Limesmenge von  $h(\cdot)$  liegt. Wir können etwa den expliziten Fall

$$f(x, c) = x - x^2 + (c - 1)x \quad (3.191)$$

betrachten, siehe Abbildung 3.12.

In unserer Beispielgleichung sind also die Hopfverzweigung und der homokline Orbit „separiert“, also ist der homokline Orbit ganz in einem endlichdimensionalen Unterraum enthalten, in dem das Gleichgewicht hyperbolisch ist. Deswegen konvergiert der homokline Orbit in Vorwärts- und Rückwärtszeit mit exponentieller Rate gegen null. Für  $c \neq 0$  besitzt die gewöhnliche (3.190) weiterhin eine homokline Lösung. Diese induziert aber nach unserer späteren Annahme ii) an die Abbildung  $g$  in der  $\dot{z}$ -Gleichung *keine* Lösung der vollen Gleichung (3.189), da die  $(x, y)$ -Ebene für  $\lambda \neq 0$  nicht mehr invariant ist.

Wir zeigen nun, dass ein  $\chi \in \mathbb{R}$  und Funktionen  $L, g(\theta, \lambda, c), k(\theta), \rho(\theta)$  existieren, so dass alle Voraussetzungen der Theoreme 3.1, 3.2 erfüllt sind; insbesondere existieren dann Lösungen  $h^\sigma(\cdot)$ , die in Vorwärts- und Rückwärtszeit gegen einen periodischen Orbit konvergieren. Wir wollen bemerken, dass die konstruierten Lösungen  $h^\sigma$  unserer Modellgleichung (3.189) keine Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung (3.190) sind, da die Hopfverzweigung in der  $\dot{z}$ -Gleichung auftritt.

Wir machen zunächst folgende Annahmen an die in (3.189) auftretenden Größen:

- $L$  hat die Form  $L\varphi = \frac{1}{20}\varphi(-2\pi) + \frac{1}{5}\varphi(0) + \frac{3}{4}\varphi(2\pi)$ , wobei  $\frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{3}{4} = 1$ . Also ist  $L(\mathbf{1}) = 1$
- $k(0) := 0$  und  $g(0, 0, 1) = 0$ .

Allerdings werden wir im Folgenden weitere Annahmen an die in der Modellgleichung auftretenden Größen stellen. Es werden nun sukzessive alle Voraussetzungen der Sätze 3.1, 3.2 überprüft.

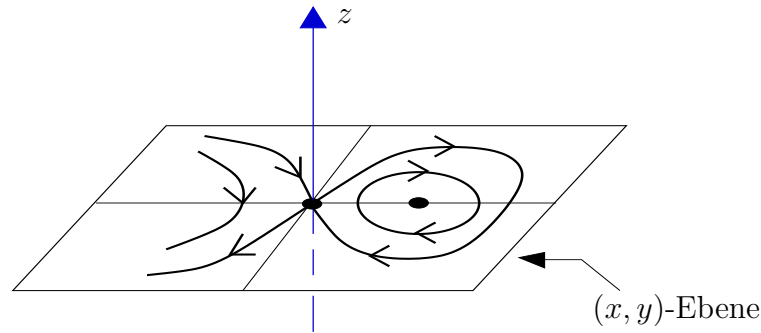


Abbildung 3.12: Die Abbildung zeigt die Dynamik der Gleichung (3.189) in der invarianten  $x, y$ -Ebene für den kritischen Parameterwert  $(\lambda, c) = (0, 0)$  und  $f$  wie in Gleichung (3.191).

### Existenz einer homoklinen Lösung

Nach Annahme an  $f(\cdot)$  besitzt das System (3.189) mit  $c = 1$  eine homokline Lösung  $(h_1(t), h_2(t), 0)$ , die in Vorwärts- und Rückwärtszeit gegen das Gleichgewicht null konvergiert. Wie in dem Fall  $f(x, 1) = x - x^2$  nehmen wir an, dass  $h_1(t) > 0$  für alle  $t$  ist.

Da das Gleichgewicht für das  $x, y$ -System (mit  $z = 0$ ) hyperbolisch ist, konvergiert  $(h_1(t), h_2(t), 0)$  exponentiell gegen Null. Also besitzt (3.189) eine homokline Lösung  $H(t)$ , mit  $H(t) = (h_1(t), h_2(t), 0)$  und Hypothese „Existenz“ ist erfüllt.

### Hopfverzweigung

Wir linearisieren nun das System (3.189) in dem Gleichgewicht  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Die charakteristische Funktion  $\Gamma(\mu)$ , deren Nullstellen Eigenwerte der Linearisierung entsprechen, nimmt in diesem Fall folgende Gestalt an:

$$\Gamma(\mu, \lambda, c) = (\mu^2 - \partial_1 f(0, c)) \cdot \left( \frac{2}{3}(L(e^{\mu}) - 1) + \partial_1 g(0, \lambda, c) - \mu \right). \quad (3.192)$$

Wir machen nun zunächst den Ansatz

$$g(x, \lambda, c) := \tilde{g}(x, \lambda) + (c - 1)x$$

für eine noch zu bestimmende Funktion  $\tilde{g}(\cdot, \lambda)$  und  $x \in \mathbb{R}$ . Dann beobachten wir, dass  $\partial_c \Gamma(\mu, \lambda, c)|_{c=1} = 0$  gilt und wir können aufgrund von Bemerkung b) am Ende des Abschnitts 3.2 alle Hypothesen bezüglich der Parameter  $\lambda, c$  überprüfen.

Von nun an betrachten wir  $\Gamma(\mu, 0, 1) =: \tilde{\Gamma}(\mu)$ . Wir sehen nun, dass rein imaginäre Eigenwerte genau dann auftreten, wenn der zweite Faktor  $(\frac{2}{3}(L(e^{\mu}) - 1) + \tilde{g}'(0, 0) - \mu)$  für ein  $\mu \in i\mathbb{R}$  verschwindet. Man beachte, dass dieser Term gerade der charakteristischen Funktion der  $z$ -Gleichung von (3.189) für  $x = 0$  entspricht.

Für  $\mu = is$  und  $s \in \mathbb{R}$  erhalten wir aus (3.192) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(is) &= \frac{2}{3}L(\sin(s\bullet)) - s \\ \operatorname{Re}(is) &= \frac{2}{3}(L(\cos(s\bullet)) - 1) + \partial_1 \tilde{g}(0, 0). \end{aligned} \quad (3.193)$$

Es existiert eine Nullstelle  $s_N \neq 0$  des Imaginärteils, da  $\frac{2}{3}L(\theta) > 1$  ist. Wir beobachten, dass die Taylorentwicklung des Imaginärteils als Funktion von  $s$  in  $s_0 = 0$  mit

$$\operatorname{Im}(is) = 0 + \left(\frac{2}{3}L(\bullet) - 1\right)s + \mathcal{O}(s^2)$$

beginnt und es existiert nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle  $s_N \in (0, \frac{2}{3})$ . Man beachte, dass es für  $s > \frac{2}{3}$  keine Nullstelle des Imaginärteils mehr geben kann, da dann  $s > \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}L(\sin(s\bullet))$ .

Wir machen nun folgende Annahme.

- *Annahme i)* Die Funktion  $\tilde{g}$  erfüllt  $\partial_1 \tilde{g}(0, 0) := -\frac{2}{3}(L(\cos(s_N\bullet)) - 1)$ .

Mit dieser Annahme besitzt dann auch der Realteil die Nullstelle  $s_N$ .

Wir zeigen nun, dass es keine weiteren, rein imaginären Nullstellen geben kann. Sei etwa  $s_*$  eine reelle Zahl, die (3.193) erfüllt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cos(s_* 2\pi) \left[ \frac{1}{20} + \frac{3}{4} \right] + \frac{2}{3} \cos(0) \frac{1}{5} &= \partial_1 \tilde{g}(0, 0) \\ \frac{2}{3} \sin(s_* 2\pi) \left[ \frac{3}{4} - \frac{1}{20} \right] &= s_* \end{aligned}$$

Quadrieren und anschließende Addition beider Gleichungen liefert eine quadratische Gleichung in  $s_*$ , die genau zwei reelle Nullstellen besitzt: nämlich  $s_* = \pm s_N$ . Also existieren keine weiteren Nullstellen.

Eine analoge Rechnung zeigt nun, dass die Nullstelle  $\mu = is_N$  der charakteristischen Funktion  $\tilde{\Gamma}(\mu)$  einfach sein muss. D.h. es gilt  $\partial_\mu \tilde{\Gamma}(\mu) \neq 0$  für  $\mu = \pm is_N$ . Nehmen wir hingegen an, es gäbe ein  $\tilde{s} \in \mathbb{R}$ , dass die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}L(\bullet \cos(\tilde{s}\bullet)) - 1 &= 0 \\ \frac{2}{3}L(\bullet \sin(\tilde{s}\bullet)) &= 0 \end{aligned} \tag{3.194}$$

löst. Dann gilt  $(2/3) \cdot L(\sin(s\bullet)\bullet) = 2\pi \sin(s \cdot 2\pi)(16/20)$  und quadrieren führt auf den Ausdruck  $(4/9)4\pi^2 \sin^2(2 \cdot \pi)(16/20)^2$ . Außerdem ergibt quadrieren des Termes  $(2/3) \cdot L(\cos(s\bullet)\bullet)$  den Ausdruck  $(4/9)4\pi^2 \sin^2(2 \cdot \pi)(14/20)^2$ . Quadriert man also beide in (3.194) auftretenden Gleichung und summiert sie anschließend, so erhält man

$$1 = \frac{4}{9}4\pi^2 \left(\frac{16}{20}\right)^2 - \left[ \left(\frac{16}{20}\right)^2 - \left(\frac{14}{20}\right)^2 \right] \cos(s \cdot 2\pi)^2 \cdot 4\pi^2 \frac{4}{9}$$

und diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\frac{-1 + \frac{4}{9}4\pi^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2}{4\pi^2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left[ \left(\frac{16}{20}\right)^2 - \left(\frac{14}{20}\right)^2 \right]} = \cos(s \cdot 2\pi)^2.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist negativ, die rechte positiv. Dieser Widerspruch zeigt, dass  $\partial_\mu \tilde{\Gamma}(\mu) \neq 0$  für  $\mu = is_N$  ist.

Um zu zeigen, dass der kritische Eigenwert  $\mu(\lambda)$ , mit  $\mu(0) = is_N$  mit nicht verschwindender Geschwindigkeit bezüglich des Parameters  $\lambda$  die imaginäre Achse kreuzt, bestimmen wir  $\partial_\lambda \operatorname{Re}\mu(\lambda)$  für  $\lambda = 0$ . Es gilt nun

$$\partial_\lambda \mu(\lambda) = -\partial_\mu \tilde{\Gamma}(\mu(\lambda), \lambda)^{-1} \left[ \partial_\lambda \tilde{\Gamma}(\mu(\lambda), \lambda) \right] \quad (3.195)$$

nahe  $\lambda = 0$ . Außerdem ist  $\partial_\lambda \Gamma(\mu, \lambda, 1) = \partial_\lambda \tilde{g}(0, \lambda)$ . Wir machen also die folgende Annahme.

- *Annahme ii):* Es gelte  $\partial_\lambda \tilde{g}(0, \lambda) \neq 0$  für  $\lambda = 0$ .

Dann ist zunächst die komplexe Zahl  $\partial_\lambda \mu(0)$  von null verschieden. Der Realteil ist nun durch

$$\partial_\lambda \operatorname{Re}\mu(0) = -C(-s_N^2 - f'(0, 1)) \left[ \frac{2}{3} L((\bullet)\cos(s_N \bullet)) - 1 \right] \partial_\lambda \tilde{g}(0, 0) \quad (3.196)$$

gegeben, wobei  $C > 0$  eine positive Konstante ist und der Term  $\frac{2}{3} L((\bullet)\cos(s_N \bullet)) - 1$  wegen von null verschieden ist.

Somit haben wir alle Voraussetzungen für eine Hopfverzweigung gezeigt. Um zu verifizieren, ob diese Verzweigung sub- oder superkritisch ist, müssen wir die Taylorapproximation des nahe null auf der Zentrumsmannigfaltigkeit reduzierten Systems (3.189) bestimmen.

### Die Taylorentwicklung des reduzierten Vektorfeldes

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass unter geeigneten Voraussetzungen an die Funktionen  $\tilde{g}(\cdot, \lambda)$  und  $k(\cdot)$  die Hopfverzweigung superkritisch ist. Wir bezeichnen von nun an die Ableitung nach der ersten Komponente einer Funktion mit einem „ $\dot{\phantom{x}}$ “. Die abstrakte Form der Gleichung (3.189) für  $c = 1$  lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \\ \dot{\Phi}(t, \cdot) \\ \dot{\Gamma}(t, \cdot) \\ \dot{\Psi}(t, \cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ f'(0, 1)x(t) \\ \frac{2}{3}(L(\Psi(t, \cdot)) - z(t)) + \tilde{g}'(0, 0)z \\ \partial_\theta \Phi(t, \cdot) \\ \partial_\theta \Gamma(t, \cdot) \\ \partial_\theta \Psi(t, \cdot) \end{pmatrix} \quad (3.197)$$

$$+ \begin{pmatrix} y(t) \\ f(x(t), 1) - f'(0, 1)x(t) + \gamma x(t - \chi)z(t) \\ (\tilde{g}(x(t), \tilde{\lambda})z(t) - \tilde{g}'(0, 0)z(t)) + k(x(t))z(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist  $(x(t), y(t), z(t), \Phi(t, \cdot), \Gamma(t, \cdot), \Psi(t, \cdot))$  für jedes feste  $t$  in  $X$  mit

$$X = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{\Phi}(\cdot), \tilde{\Gamma}(\cdot), \tilde{\Psi}(\cdot)) \in \mathbb{R}^3 \times H^1([-2\pi, 2\pi], \mathbb{R}^3) : \tilde{x} = \tilde{\Phi}(0), \tilde{y} = \tilde{\Gamma}(0), \tilde{z} = \tilde{\Psi}(0)\},$$

wobei wir hier  $|\chi| < 2\pi$  annehmen (ansonsten würden wir das Intervall  $[-2\pi, \chi]$  im Fall  $\chi \geq 2\pi$  bzw.  $[\chi, 2\pi]$  im Fall  $\chi \leq -2\pi$  betrachten). Der erste Klammerterm der rechten Seite von (3.197) definiert eine beschränkte lineare Abbildung  $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ , wobei wir

$Y = \mathbb{R}^3 \times L^2([-2\pi, 2\pi], \mathbb{R}^3)$  gesetzt haben. Der zweite Klammerterm in (3.197) kann als differenzierbare Abbildung  $G : X \rightarrow Y$  aufgefasst werden und es gilt  $G(0, 0, 0, 0, 0, 0) = DG(0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0$ .

Nach unseren Annahmen, besitzt die lineare Abbildung  $\mathcal{A}$  zwei einfache, rein imaginäre Eigenwerte  $\pm is_N$ . Also existiert nach dem Satz 2.6 eine zweidimensionale Zentrumsmanifoldigkeit, die als Graph  $\mathcal{G}$  einer genügend oft differenzierbaren Funktion über dem Zentrumseigenraum dargestellt werden kann. Bezeichnen wir die dazugehörige Projektion auf den Zentrumseigenraum  $E_c$  mit  $P_c$ , so ist  $P_c : Y \rightarrow Y$  eine beschränkte lineare Abbildung und es gilt

$$P_c \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} (\mathcal{A} - \mu)^{-1} d\mu \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{u_3}{a_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ e^{is_N} \end{pmatrix} + \frac{u_3}{\tilde{a}_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-is_N} \end{pmatrix}$$

wobei  $a_1 := D_\mu \det \Delta(is_N)$ ,  $\tilde{a}_1 := D_\mu \det \Delta(-is_N)$  und  $\det \Delta(\mu)$  die charakteristische Funktion der Abbildung  $\mathcal{A}$  bezeichnet.

Das reduzierte Vektorfeld nimmt die Gestalt

$$\dot{X}_c(t) = \mathcal{A}X_c(t) + P_c G(X_c(t) + \mathcal{G}(X_c(t))) =: \mathcal{A}X_c(t) + G_c(X_c(t)) =: \mathcal{F}(X_c(t)) \quad (3.198)$$

an, wobei  $X_c(t) \in E_c = P_c Y$  für jedes feste  $t$ . Zur Vereinfachung machen wir nun folgende Annahme

- *Annahme iii):* Es gelte  $k''(0) + \tilde{g}''(0, 0) = 0$ .

Man beachte, dass unter dieser Voraussetzung die zweiten Ordnungsterme von (3.198) in der Taylorentwicklung nahe des Gleichgewichtes  $U_* = 0$  verschwinden: Berechnung des Terms  $P_c D^2 G(X)|_{X=U_*}$  liefert nämlich

$$D^2 G(X)|_{X=U_*} [U, V] = \begin{pmatrix} 0 \\ f''(0, 1)u_1 v_1 + 2\gamma u_3 v_3 \\ (\tilde{g}''(0, 0) + k''(0))u_3 v_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für  $U = (u_1, u_2, u_3, \Psi_1(\cdot), \Psi_2(\cdot), \Psi_3(\cdot))$ ,  $V = (v_1, v_2, v_3, \Phi_1(\cdot), \Phi_2(\cdot), \Phi_3(\cdot))$  und  $U, V \in X$ . Also gilt

$$P_c D^2 G(X)|_{X=U_*} [U, V] = \frac{((\tilde{g}''(0, 0) + k''(0))u_3 v_3)}{a_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ e^{is_N} \end{pmatrix} + \frac{((\tilde{g}''(0, 0) + k''(0))u_3 v_3)}{\tilde{a}_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-is_N} \end{pmatrix}.$$

Also verschwinden sämtliche zweiten Ordnungsterm der Taylorentwicklung von (3.198) in  $X_c = U_*$ , falls  $k''(0) + \tilde{g}''(0, 0) = 0$  ist. Um die Koeffizienten der Taylorentwicklung bezüglich der dritten Ordnung zu bestimmen, berechnen wir den Term  $P_c D^3 G(U_*)[U, V, W]$ . Dieser Term hat dann die Form

$$P_c D^3 G(X)|_{X=U_*}[U, V] = \frac{((\tilde{g}'''(0, 0) + k'''(0))u_3 v_3 w_3)}{a_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ e^{is_N \cdot} \end{pmatrix} + \frac{((\tilde{g}'''(0, 0) + k'''(0))u_3 v_3 w_3)}{\tilde{a}_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-is_N \cdot} \end{pmatrix},$$

wobei  $U = (u_1, u_2, u_3, \Psi_1(\cdot), \Psi_2(\cdot), \Psi_3(\cdot))$ ,  $V = (v_1, v_2, v_3, \Phi_1(\cdot), \Phi_2(\cdot), \Phi_3(\cdot))$  und  $W = (w_1, w_2, w_3, \Gamma_1(\cdot), \Gamma_2(\cdot), \Gamma_3(\cdot)) \in X$ . Damit dieser Term nichttrivial ist, wollen wir folgendes annehmen:

- *Annahme iv*): Es ist  $\tilde{g}'''(0, 0) + k'''(0) \neq 0$ .

Wir beobachten nun, dass der Term  $P_c D^3 G(U_*)$  der einzige ist, der bei der Berechnung der dritten Ableitung des Terms  $P_c G(X_c + \mathcal{G}(X_c))$  in  $X_c = U_*$  nicht verschwindet. Vor allen anderen Termen steht der Ausdruck  $P_c D^2 G(U_*)$  oder  $P_c DG(U_*)$ ; beide sind Null. Wir können nun die Taylorentwicklung von (3.198) in  $X_c = U_*$  einschließlich dritter Ordnungsterme berechnen. Dazu verschieben wir zunächst das Gleichgewicht  $U_*$  in den Ursprung, indem wir die Gleichung  $\dot{X}_c(t) = \mathcal{F}(X_c(t) + U_*)$  betrachten. Bezeichne nun mit  $z \in \mathbb{C}$  bzw.  $\bar{z}$  die Koordinate des Basisvektors  $(0, 0, 1, 0, 0, e^{is_N \cdot})$  bzw.  $(0, 0, 1, 0, 0, e^{-is_N \cdot})$ . Wir erhalten dann

$$\dot{z} = is_N z + c_{111} z^3 + c_{211} |z|^2 z + c_{221} |z|^2 \bar{z} + c_{222} \bar{z}^3 + \mathcal{O}(z^4, z^2 \bar{z}^2, \bar{z}^4, \bar{z}^3 z) \quad (3.199)$$

Es existiert nun nach Normalformtheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen eine analytische Variablentransformation nahe  $z = 0$ , die fast alle Terme dritter Ordnung der Gleichung (3.199) eliminiert (siehe [25], Kapitel 3.5). Allein der Term  $c_{221} |z|^2 z$  ist resistent und lässt sich nicht wegtransformieren. Berechnung dieses Terms führt auf

$$c_{221} = K \frac{\tilde{g}'''(0, 0) + k'''(0)}{a_1} \in \mathbb{C}$$

für eine reelle, positive Konstante  $K > 0$ , siehe Gleichung 3.18 und 3.19 von Kapitel 3.5 in [25]. Berechnung der komplexen Zahl  $a_1$  liefert  $a_1 = (\frac{2}{3}L(\bullet e^{is_N \cdot}) - 1)(-s_N^2 - f'(0, 1))$ . Also ist der Realteil des Koeffizienten  $c_{221}$  durch

$$\operatorname{Re}(c_{221}) = \tilde{K} (\partial_1 \tilde{g}'''(0, 0) + k'''(0)) (-s_N^2 - f'(0, 1)) (\frac{2}{3}L(\bullet e^{is_N \cdot}) - 1) \neq 0$$

gegeben, wobei  $\tilde{K} > 0$  eine positive Zahl ist.

Damit die Hopfverzweigung superkritisch ist, müssen wir sicherstellen, dass: 1)  $\partial_\lambda \operatorname{Re}\mu(\lambda) < 0$  ist und 2)  $\operatorname{Re}(c_{221}) = \operatorname{Re}(c_{221}(\lambda)) < 0$  für  $\lambda = 0$  gilt. Wir machen also folgende zusätzliche Annahme an  $\tilde{g}(\cdot, \lambda)$  und  $k'''(\cdot)$ :

- *Annahme v)*: Sei  $\partial_\lambda \tilde{g}(0, \lambda) \neq 0$  für  $\lambda = 0$  und das Vorzeichen so gewählt, dass

$$-(-s_N^2 - f'(0, 1)) \left[ \frac{2}{3} L((\bullet)\cos(s_N \bullet)) - 1 \right] \partial_\lambda \tilde{g}(0, 0) > 0.$$

- *Annahme vi)*: Sei das Vorzeichen von  $\tilde{g}'''(0, 0) + k'''(0)$  so gewählt, dass

$$(\tilde{g}'''(0, 0) + k'''(0))(-s_N^2 - f'(0, 1)) \left( \frac{2}{3} L((\bullet)\cos(s_N \bullet)) - 1 \right) < 0.$$

Sind diese beiden Annahmen erfüllt, so tritt im Gleichgewicht Null bezüglich  $\lambda$  eine superkritische Hopfverzweigung auf.

### Eindeutigkeit von Lösungen der Linearisierung

Die Linearisierung von (3.189) entlang des heteroklinen Orbits  $(h_1(t), h_2(t), 0)$  nimmt für die Parameterwerte  $c = 1$  und  $\lambda = 0$  folgende Form an:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ f'(h_1(t), 1)u(t) + \gamma \cdot (h_1(t - \chi))w(t) \\ \frac{2}{3}(L(w_t) - w(t)) + \partial_1 \tilde{g}(0, 0)w(t) + k(h_1(t))w(t) \end{pmatrix}. \quad (3.200)$$

Wir überprüfen nun die Gültigkeit der „Eindeutigen-Fortsetzungs-Eigenschaft“ (EFE). Sei dazu  $(u(t), v(t), w(t))$  eine beschränkte Lösung dieser Gleichung, so dass  $(u_\tau, v_\tau, w_\tau) = 0$  für ein  $\tau \in \mathbb{R}$ . Wir müssen nun zeigen, dass  $(u(\cdot), v(\cdot), w(\cdot)) = 0$  ist. Wegen Satz 3.16 ist dann zunächst  $w(\cdot) = 0$ . Damit reduziert sich (3.200) auf die ersten beiden Gleichungen, die ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen widerspiegelt. Also gilt  $(u(\cdot), v(\cdot), w(\cdot)) = 0$  und damit ist Hypothese „EFE“ gezeigt.

### Eindimensionaler Kern des Operators $\mathcal{L}$

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass der Kern der linearen Abbildung  $\mathcal{L} : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$  eindimensional ist. Hierbei ist

$$(\mathcal{L}(u(\cdot), v(\cdot), w(\cdot)))(t) = \partial_t(u(t), v(t), w(t)) - L(t)(u_t, v_t, w_t) \quad (3.201)$$

und der Term  $L(t)(u_t, v_t, w_t)$  ist durch die rechte Seite der Gleichung (3.200) definiert. Wir zeigen im folgenden, dass der Kern unter gewissen Voraussetzungen an die Konstante  $\chi$  eindimensional ist. Dazu betrachten wir zunächst den Kern der  $w$ -Gleichung

$$\dot{w}(t) = \left( \frac{2}{3}(L(w_t) - w(t)) + \partial_1 \tilde{g}(0, 0)w(t) + k(h_1(t))w(t) \right) =: \Lambda(t)w_t. \quad (3.202)$$

Unser Anliegen ist es zu zeigen, dass es höchstens 3 linear unabhängige  $L^2$ -Funktionen gibt, die Lösungen dieser Gleichung auf  $\mathbb{R}$  definieren. Wir nutzen dabei stark die Tatsache aus, dass der Forward- bzw. Backward Delay der linearen Gleichung (3.202) symmetrisch zur Null ist. Als wichtiges Hilfsmittel für skalare Gleichungen dieser Art ist der Satz 7.3 von Mallet-Paret und Lunel in [31]. Bezeichne dazu mit  $W_0^{1,\infty}(-\zeta, \zeta)$  die Menge aller Funktionen  $w(\cdot) \in W^{1,\infty}(-\zeta, \zeta)$ , für die  $w(\zeta) = w(-\zeta) = 0$  gilt. Dann gilt:

**Satz 3.21 (Mallet-Paret und Lunel)**

Betrachte die skalare Gleichung

$$\dot{w}(t) = a(t)w(t - 2\pi) + b(t)w(t) + c(t)w(t + 2\pi)$$

wobei  $a, b, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und messbar sind. Gelte außerdem

$$a(t) > 0, \quad c(t) > 0$$

oder

$$a(t) < 0, \quad c(t) < 0$$

für fast alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $\text{Kern}(\mathcal{B}^\zeta) = \{0\}$  für jedes  $\zeta > 0$ , wobei  $\mathcal{B}^\zeta : W^{1,\infty}(-\zeta, \zeta) \rightarrow L^\infty(-\zeta, \zeta)$  durch

$$(\mathcal{B}^\zeta w(\cdot))(t) := \partial_t w(t) - (a(t)w(t - 2\pi) + b(t)w(t) + c(t)w(t + 2\pi))$$

gegeben ist und wir  $w(\cdot)$  außerhalb von  $(-\zeta, \zeta)$  durch null fortsetzen.

In unserem Fall gilt  $a(t) = \frac{1}{20}$  und  $c(t) = \frac{3}{4}$ . Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun folgendes zeigen:

- i) Der Kern des Operators  $\mathcal{B}^\zeta$  mit  $(\mathcal{B}^\zeta w(\cdot))(t) := \partial_t w(t) - \Lambda(t)w_t$  ist höchstens dreidimensional.
- ii) Sei  $w(\cdot)$  eine nichttriviale Lösung von (3.202) auf  $\mathbb{R}$ . Dann existiert höchstens ein Intervall  $J \subset \mathbb{R}$  mit  $|J| = 4\pi$  auf dem  $w(\cdot)$  Nullstellen besitzt. Besitzt  $w(\cdot)$  mehr als eine Nullstelle, so ist  $w(\cdot)$  zwischen je zwei aufeinander folgenden Nullstellen identisch Null.

Um dies einzusehen, seien etwa  $w^1, w^2, w^3, w^4 \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vier Lösungen von (3.202) aus. Wähle nun ein  $\zeta > 0$  beliebig. Dann existieren Linearkombinationen  $v^1$  von  $w^1, w^2$  und  $v^2$  von  $w^3, w^4$ , so dass  $v^2(\zeta) = v^1(\zeta) = 0$ . Sind nun  $v^1$  und  $v^2$  linear unabhängig, so gäbe es eine nichttriviale Linearkombination  $z$  von  $v^1, v^2$ , so dass  $z(-\zeta) = z(\zeta) = 0$  gilt.  $z$  definiert nun in natürlicher Weise ein Kernelement von  $\mathcal{B}^\zeta$ . Ist  $\zeta$  groß genug, so dass etwa  $[-2\pi, 2\pi] \subset (-\zeta, \zeta)$ , so haben wir gezeigt, dass  $z(t) = 0$  für alle  $t \in [-2\pi, 2\pi]$  und deswegen ist  $z$  identisch Null auf  $\mathbb{R}$  aufgrund von Hypothese „EFE“. Also sind  $v^1, v^2$  linear abhängig.

Nehme nun an, es gäbe eine nichttriviale Lösung  $w(\cdot)$  der Gleichung (3.202), die mindestens zwei Nullstellen  $s_1 < s_2$  besitzt. Weiterhin gelte  $s_2 - s_1 > 4\pi$ . Bezeichne dann mit  $s_*$  den Mittelpunkt des Intervalls  $[s_1, s_2]$  und betrachte die Abbildung  $v(t) := w(t - s_*)$ . Diese löst dann die Gleichung

$$\dot{v}(t) = \dot{w}(t - s_*) = \Lambda(t - s_*)w_{t-s_*} = \Lambda(t - s_*)v_t$$

und  $v(\cdot)$  besitzt die Nullstellen  $\pm(|s_2 - s_1|/2)$ . Also gilt  $v(t) = 0$  für  $t \in (-(|s_2 - s_1|/2), (|s_2 - s_1|/2))$  nach Satz 3.21. Da nach Voraussetzung  $(-2\pi, 2\pi) \subset (-(|s_2 - s_1|/2), (|s_2 - s_1|/2))$ , folgt wieder  $v(\cdot) \equiv 0$  nach Hypothese „EFE“. Man beachte, dass wir für dieses Argument benötigen, dass die Differenz zweier Nullstellen größer oder gleich der Intervalllänge des ursprünglichen Intervalls (bei uns  $[-2\pi, 2\pi]$ ) sein muss: im allgemeinen können durchaus Lösungen einer skalaren, linearen Forward-Backward-Delay Gleichung existieren, die auf einem Intervall der Länge  $2\pi$  (also der halben Intervalllänge) verschwinden, aber nicht identisch Null sind.



Man beachte nun, dass ein Kernelement von  $\mathcal{L}$  durch die Funktion  $(h'_1(t), h'_2(t), 0)$  gegeben ist. Hierbei konvergieren die Abbildungen  $h'_1(t), h'_2(t)$  sogar für  $|t| \rightarrow \infty$  exponentiell gegen Null. Ein nichttrivialer Kern-Vektor der adjungierten Gleichung  $\mathcal{L}^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}^*) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$  ist

$$t \mapsto (-h'_2(t), h'_1(t), 0). \quad (3.203)$$

Bezeichne nun mit  $\Theta : \mathcal{D}(\Theta) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  diejenige lineare Abbildung, die durch

$$\Theta(u, v)(t) = (\partial_t u(t), \partial_t v(t)) - (v(t), f'(h_1(t), 1)u(t)).$$

definiert ist. Wir zeigen nun, dass eine Konstante  $\chi \in \mathbb{R}$  existiert, so dass die  $L^2$ -Funktion  $(0, h_1(\cdot - \chi)w(\cdot)) \notin \text{Bild}\Theta$  für eine beliebige Lösung  $w(\cdot)$  von (3.202) ist. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\int_{\mathbb{R}} [h_1(s - \chi)w(s)]h'_1(s)ds \neq 0, \quad (3.204)$$

da wir später zeigen, dass es bis auf skalare Vielfache nur ein Kernelement des adjungierten Operators  $\Theta^*$  gibt. Zunächst einmal zeigt nun unser voriges Argument, dass es höchstens drei linear unabhängige Lösungen der Gleichung (3.202) gibt. Wir bezeichnen diese mit  $w^1, w^2, w^3$ . Die Funktion  $h'_1(t) = h_2(t)$  ist ungleich Null für alle Zeiten  $t > t_*$  und einem geeigneten  $t_*$  und konvergiert exponentiell gegen Null für  $|t| \rightarrow \infty$ . Nun existiert ein  $M > 0$ , so dass kein  $w^i(t)$  einen Vorzeichenwechsel auf dem Intervall  $(M, \infty)$  hat und wir nehmen o.B.d.A. an, dass alle Funktionen positiv sind. Wir machen nun folgende Annahme an  $\chi$ .

- *Annahme vii):* Wähle  $\chi$  so, dass (3.204) für die Funktionen  $w = w^i, i = 1, 2, 3$  erfüllt ist.

Also haben wir gezeigt, dass der Kern von  $\mathcal{L}$  eindimensional ist, falls dieses für den Kern der linearen Abbildung  $\Theta$  zutrifft. Man beachte, dass Lösungen im Kern von  $\Theta$  eine lineare, nichtautonome Differentialgleichung auf  $\mathbb{R}$  lösen. Das folgende, wohlbekanntes Theorem von Palmer [35] sagt uns, dass  $\Theta$  ein Fredholmoperator vom Index Null ist.

### Satz 3.22 (Palmer)

Betrachte den Operator  $\mathcal{J} : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ , definiert durch

$$(\mathcal{J}U)(t) := \partial_t U(t) - A(t)U(t),$$

wobei  $A(t)$  für jedes feste  $t$  eine reelle  $N \times N$ -Matrix bezeichnet. Gelte weiterhin  $A(t) \rightarrow A_{\pm}$  für  $t \rightarrow \pm\infty$ . Sind dann die Matrizen  $A_{\pm}$  hyperbolisch, so ist  $\mathcal{J}$  ein Fredholmoperator vom Index

$$i = i_- - i_+$$

und  $i_{\pm}$  gibt die Dimension des instabilen Eigenraumes der Matrizen  $A_{\pm}$  an. Außerdem besitzt das lineare Problem

$$\partial_t U(t) = A(t)U(t)$$

exponentielle Dichotomien auf  $\mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{R}_-$ .

Man beachte, dass alle Aussagen dieses Theorems bis auf die Gleichung zur Bestimmung des Fredholmindex bereits als Spezialfall des Theorems 3.4 folgen, da eine gewöhnliche Differentialgleichung eine triviale Forward-Backward-Delay Gleichung ist.

In unserem Fall ist  $\mathcal{J} := \Theta$  und es gilt  $i_- = i_+ = 1$ , also ist der Fredholmindex von  $\Theta$  Null. Weiterhin existiert eine nichttriviale, exponentiell abklingende Lösung im Kern von  $\Theta$ .

Bezeichne nun mit  $E^s(t)$  den stabilen Unterraum von  $\mathbb{R}^2$  für  $t \geq 0$ , der alle Anfangswerte beschränkter Lösungen in Vorwärtszeit enthält und mit  $E^u(s)$  den instabilen Unterraum von  $\mathbb{R}^2$  für  $s \leq 0$ , der alle Anfangswerte beschränkter Lösungen in Rückwärtszeit enthält. Wir beobachten, dass die Dimensionen beider Unterräume stets 1 ist. Außerdem liegt  $(h'_1(0), h'_2(0))$  im Schnitt von  $E^s(0)$  und  $E^u(0)$ . Jedes weitere Element  $U_N(\cdot)$  im Kern von  $\Theta$  klingt exponentiell ab und erfüllt ebenfalls  $U_N(0) \in E^s(0) \cap E^u(0)$ . Da dieser Schnitt eindimensional ist, ist  $U_N$  ein skalares Vielfaches von  $(h'_1, h'_2)$ . Also haben wir gezeigt, dass der Kern eindimensional ist. Deswegen gilt schließlich  $\text{Kern}(\mathcal{L}) = 1$ .

### Transversalität

Wir können nun zeigen, dass Hypothese „Transversalität“ erfüllt ist. Dazu müssen wir u.a. zeigen, dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ h'_1(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix} \notin \text{Bild}(\mathcal{L}) \quad (3.205)$$

gilt. Man beachte, dass man diesen Vektor erhält, indem man die rechte Seite (3.189) an der Stelle  $(h'_1, h'_2, 0)$  nach  $c$  ableitet. Nach Lemma 3.20 und dessen Beweis müssen wir nur zeigen, dass

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ h'_1(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -h'_2(\cdot) \\ h'_1(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \neq 0 \quad (3.206)$$

gilt und hierbei bezeichnet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$  Skalarprodukt. Wir beobachten nun, dass  $\int_{\mathbb{R}} h'_1(s)h'_1(s)ds \neq 0$  gilt und deswegen (3.206) erfüllt ist.

### Der Operator $\mathcal{L}_\eta$

Schließlich wollen wir zeigen, dass der Operator  $\mathcal{L}^\eta : H^{1,\eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \rightarrow L^{2,\eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ , definiert durch

$$\mathcal{L}^\eta U := \mathcal{L}U$$

einen eindimensionalen Kern hat und für alle  $\eta \in (0, \eta_*)$  und ein geeignetes  $\eta_* > 0$  ein Fredholmoperator vom Index Null ist. Äquivalent dazu zeigen wir dies für den Operator  $\mathcal{L}_\eta : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ , der durch

$$(\mathcal{L}_\eta U(\cdot))(t) := \partial_t U(t) + \eta U(t) - L(t)(e^{\eta(\cdot)} U(t + \cdot)) \quad (3.207)$$

definiert ist. Man beachte, dass (3.207) ein Fredholmoperator für genügend kleine  $\eta < \eta_*$  ist. Sei nun  $U = (u, v, w)$  ein Kernelement der Gleichung  $\mathcal{L}_\eta U = 0$ . Die dritte Komponente dieser Gleichung liest sich dann

$$0 = -\partial_t w(t) + \eta w(t) + \frac{2}{3}(\tilde{L}(e^\eta w_t(\cdot)) - w(t)) + (\tilde{g}'(0, 0) + k(h_1(t)))w(t). \quad (3.208)$$

Wir wählen nun  $\eta_* > 0$  so klein, dass (3.207) stets ein Fredholmoperator für alle  $\eta \in (0, \eta_*)$  ist. Man kann nun wieder den Satz von Mallet-Paret 3.21 anwenden und wie im Fall  $\eta = 0$  argumentieren, um zu zeigen, dass der Kern von (3.207) eindimensional ist.

Es bleibt zu klären, ob der Index  $i$  von  $L_\eta$  für alle  $\eta \in (0, \eta_*)$  null ist. Dies ist in unserem Fall klar: wir wissen bereits, dass (3.207) asymptotisch hyperbolisch ist (mit identischen

Linearteilen für  $t = \infty$  oder  $t = -\infty$ ), da  $h_1(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \pm\infty$ . Diese lineare Abbildung bezeichnen wir mit  $L_\infty$ , also

$$L_\infty\phi(\cdot) := -\eta\phi(0) - L(t)(e^{\eta(\cdot)}\phi(\cdot))$$

für ein  $\phi(\cdot) \in C^0([-a, b], \mathbb{R})$ . Nun ist der Operator

$$(\mathcal{L}(\infty)U(\cdot))(t) := \partial_t U(t) - L_\infty U_t(\cdot)$$

als Abbildung von  $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  nach  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  invertierbar, also insbesondere ein Fredholmoperator vom Index Null. Eine Standardhomotopie zwischen  $\mathcal{L}(\infty)$  und  $\mathcal{L}_\eta$ , die jeweils die asymptotischen Linearteile  $L_\infty$  festhält, zeigt also, dass dann auch  $\mathcal{L}_\eta$  den Fredholmindex Null besitzt. Man beachte, dass die Summe  $A + B$  eines Fredholmoperators  $A$  vom Index  $i$  und einer kleinen beschränkten Störung  $B$  immer noch einen Fredholmoperator vom Index  $i$  liefert; siehe etwa [23].

