

3.5 Lösungen, die ein Gleichgewicht mit einem periodischen Orbit verbinden

Wir zeigen in diesem Kapitel, dass Lösungen $U^{\tilde{\lambda}}(t)$ der Gleichung

$$\dot{U}(t) = \mathcal{F}(U(t), \tilde{\lambda}, c) \quad (3.119)$$

existieren, die für $\tilde{\lambda} > 0$ in Vorwärtszeit gegen eine periodische Lösung und in Rückwärtszeit exponentiell gegen das Gleichgewicht null konvergieren. Genauer wollen wir Lösungen der Gleichung (3.119) suchen, die für Parameterwerte $(\tilde{\lambda}, c) \neq (0, c_0)$ in Vorwärtszeit gegen die periodischen Lösungen $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(\cdot)$ konvergieren und für $t \rightarrow -\infty$ gegen das Gleichgewicht. Aber wie konstruieren wir solche Lösungen? Dazu machen wir folgende Beobachtung: Für $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c_0)$ besitzt (3.119) die homokline Lösung $H(t)$. Diese liegt sowohl in der zentrumsstabilen Mannigfaltigkeit $W_{0, c_0}^{cs, +}(0)$ als auch in der instabilen Mannigfaltigkeit $W_{0, c_0}^{u, -}(0)$ der Null (man beachte, dass $H(t)$ für $t \rightarrow -\infty$ exponentiell schnell gegen null konvergiert). Insbesondere besitzen also die Mannigfaltigkeiten $W^{cs, +}(0)$ und $W^{u, -}(0)$ einen Schnittpunkt und es liegt deswegen nahe, die gesuchten Lösungen mit der Hilfe eines Störungsargumentes durch einen Schnittpunkt der Mannigfaltigkeiten $W^{cs, +}(0)$ und $W^{u, -}(0)$ für Parameterwerte $(\tilde{\lambda}, c) \neq (0, c_0)$ zu konstruieren. Allerdings ist a priori nicht klar, ob es überhaupt einen Schnittpunkt dieser Mannigfaltigkeiten für Parameterwerte $(\tilde{\lambda}, c) \neq (0, c_0)$ gibt.

Nehmen wir kurz mal an, es gäbe einen Schnittpunkt $U^{\tilde{\lambda}}$ für einen Parameterwert $(\tilde{\lambda}, c) \neq (0, c)$ (mit $\tilde{\lambda} > 0$) genügend nahe an $(0, c_0)$. Dieser Schnittpunkt gibt dann Anlass zu einer Lösung $U^+(t)$ von (3.119) für $t > 0$, die $U^+(0) = U^{\tilde{\lambda}}$ erfüllt. Ist $U^{\tilde{\lambda}}$ genügend nahe an $H(0)$, so konvergiert $U^+(t)$ gegen null oder gegen $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t)$ für $t \rightarrow \infty$. Außerdem ist $U^{\tilde{\lambda}} \in W_{\tilde{\lambda}, c}^{u, -}(0)$, also existiert eine Lösung $U^-(t)$ von (3.119), die in Rückwärtszeit $t \leq 0$ mit exponentieller Rate gegen null konvergiert. Wir müssen also nur ausschließen, dass $U^+(t)$ in Vorwärtszeit $t > 0$ gegen null konvergiert (was ohnehin nicht der generische Fall ist). Genau an dieser Stelle müssen wir allerdings eine wichtige Fallunterscheidung machen: Konvergiert $H(t)$ in Vorwärtszeit mit exponentieller Rate gegen null oder nähert sich $H(t)$ der Gleichgewichtslösung in Vorwärtszeit entlang der Zentrumsrichtung.

Wir gehen nun folgendermaßen vor. In dem nächsten Abschnitt klären wir zunächst, wie sich unsere in Kapitel 3.2 formulierte Hypothese „Transversalität“ auf die abstrakte Gleichung (3.119) überträgt.

Die Hypothese „Transversalität“ für die abstrakte Gleichung

Wir bemerken zunächst einmal, dass die Hypothese „Transversalität“ Annahmen an den Operator $\mathcal{L}_{0, c_0}^\eta : H^{1, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \rightarrow L^{2, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$, wobei

$$(\mathcal{L}_{0, c_0}^\eta w(\cdot))(t) = \partial_t w(t) - D_1 f(h_t, 0, c_0) w_t \quad (3.120)$$

gilt. Wir bemerken, dass der Operator $\mathcal{L}_{0, c_0}^0 = \mathcal{L}^0$ kein Fredholmoperator ist, da die asymptotischen Linearteile für $t \rightarrow \pm\infty$ nicht hyperbolisch sind. Nach Hypothese „Transversalität“ existiert aber ein $\eta_0 > 0$, so dass $\mathcal{L}_{0, c_0}^\eta : H^{1, \eta} \rightarrow L^{2, \eta}$ ein Fredholmoperator vom Index Null für alle $\eta \in (0, \eta_0)$ ist und einen eindimensionalen Kern besitzt.

Wir zeigen nun, dass in dem vorliegenden Fall tatsächlich immer ein η_0 existiert, so dass $\mathcal{L}^\eta = \mathcal{L}_{0, c_0}^\eta : H^{1, \eta} \rightarrow L^{2, \eta}$ für $\eta \in (0, \eta_0)$ ein Fredholmoperator vom Index Null ist.

Betrachte dazu $\mathcal{L}^\eta w = v$ für ein $w(\cdot) \in H^{1,\eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ und ein $v(\cdot) \in L^{2,\eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. Dann ist $\tilde{w}(t) := e^{-\eta t} w(t)$ in $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ und eine Lösung von $\mathcal{L}_\eta \tilde{w} = \tilde{v}$ mit $\tilde{v}(t) := e^{-\eta t} v(t) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. Hierbei ist $\mathcal{L}_\eta : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ durch

$$(\mathcal{L}_\eta \tilde{w})(t) := \dot{\tilde{w}}(t) + \eta \tilde{w}(t) - D_1 f(h_t, 0, c_0)(e^{\eta t} \tilde{w}_t(\cdot)) \quad (3.121)$$

gegeben. Aus dieser Überlegung kann man schließen, dass $\dim \text{Kern}(\mathcal{L}_\eta) = \dim \text{Kern}(\mathcal{L}^\eta)$ ist. Eine analoge Aussage gilt für $\text{Kern}((\mathcal{L}^\eta)^*)$ und $\text{Kern}(\mathcal{L}_\eta^*)$. Da der Operator \mathcal{L}_η aber stets ein Fredholmoperator vom Index Null ist (die asymptotischen Linearteile sind identisch und hyperbolisch), folgt die Behauptung.

Es wird sich als nützlich herausstellen, mit dem Operator $\mathcal{T}_\eta := \mathcal{T}_{0,c,\eta}$ anstatt dem Operator $\mathcal{L}_{0,c}^\eta$ für $\eta \in [0, \eta_0)$ zu arbeiten. Dabei bezeichnet $\mathcal{T}_\eta : L^2(\mathbb{R}, Y) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, Y)$ den dicht definierten Operator

$$(\mathcal{T}_\eta V)(t) := (\mathcal{T}_{0,c_0,\eta} V)(t) := \partial_t V(t) - \mathcal{A}_{0,c_0}^\eta(t) V(t)$$

wobei

$$\mathcal{A}_{0,c_0}^\eta(t)(\xi, \phi(\cdot)) = \begin{pmatrix} D_1 f(h_t, 0, c_0) e^{\eta t} \phi(\cdot) - \eta \xi \\ \partial_\theta \phi(\cdot) \end{pmatrix}$$

ist und wir in Zukunft $L_{\tilde{\lambda},c}(t) := D_1 f(h_t, \tilde{\lambda}, c)$ schreiben. Außerdem ist $V(\cdot) \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_{0,c_0,\eta}) = \mathcal{D}(\mathcal{T})$ und dieser Definitionsbereich ist kurz nach (3.24) definiert. Nach Satz 3.6 gilt nun, dass \mathcal{T}_η ein Fredholmoperator vom Index Null mit eindimensionalem Kern ist. Also hat \mathcal{T}_η tatsächlich immer den gleichen Fredholmindex wie \mathcal{L}^η und einen eindimensionalen Kern für alle $\eta \in (0, \eta_0)$.

Notation

Im folgenden schreiben wir $\mathcal{A}^\eta(t) = \mathcal{A}_{0,c_0}^\eta(t)$ und $\mathcal{T}_\eta = \mathcal{T}_{0,c_0,\eta}$ und unterdrücken damit die Parameter $\tilde{\lambda}, c$. Außerdem beziehen sich die mit einem „ $\tilde{}$ “ versehenen Vektorräume wie z.B. $\tilde{E}_+^{cs}(0), \tilde{E}_-^u(0)$ etc. auf das \tilde{Y} -Setting; d.h. wir setzen $\tilde{E}_+^{cs}(0) := E_+^{cs}(0) \cap \tilde{Y}, \tilde{E}_-^u := E_-^u(0) \cap \tilde{Y}$ etc. Diese definieren dann abgeschlossene Unterräume bzgl. \tilde{Y} .

Fehlende Transversalität der zentrumsstabilen und instabilen Mannigfaltigkeit der Null

Wir sind nun an der Frage interessiert, welche Kodimension der Unterraum $E_+^{cs}(0) + E_-^u(0)$ in Y besitzt. Man beachte dabei, dass der Unterraum $\tilde{E}_+^{cs}(0) = E_+^{cs}(0) \cap \tilde{Y}$ gerade der Tangentialraum der zentrumsstabilen Mannigfaltigkeit $W_{0,c_0}^{cs,+}(0)$ an der Stelle $H(0)$ ist und der Unterraum $\tilde{E}_-^u(0) = E_-^u(0) \cap \tilde{Y}$ mit dem Tangentialraum der instabilen Mannigfaltigkeit $W_{0,c_0}^{u,-}(0)$ an der Stelle $H(0)$ übereinstimmt. Ist die Kodimension des Unterraumes $E_+^{cs}(0) + E_-^u(0)$ null, so sind die Mannigfaltigkeiten $W^{cs,+}(0)$ und $W^{u,-}(0)$ transversal zueinander und der Schnittpunkt persistiert bezüglich kleiner Variationen von $(\tilde{\lambda}, c) \approx (0, c_0)$. Allerdings zeigen wir in Lemma 3.20, dass die Kodimension eins ist. Bevor wir beweisen, dass der Unterraum $E_+^{cs}(0) + E_-^u(0)$ in Y abgeschlossen ist, benötigen wir einige Vorbereitungen.

Nach Satz 3.4 besitzt nun die Gleichung $\dot{V}(t) = \mathcal{A}_\eta(t)V(t)$ exponentielle Dichotomien auf \mathbb{R}_+ und \mathbb{R}_- . Wir bezeichnen nun mit $P_{\eta,+}^s(t), P_{\eta,+}^u(t)$ für $0 \leq t$ die Projektionen der exponentiellen Dichotomien auf \mathbb{R}_+ . Dann existieren Lösungsoperatoren $\Phi_{\eta,+}^s(\xi, \zeta)$ für

$\xi \geq \zeta \geq 0$ bzw. $\Phi_{\eta,+}^u(\xi, \zeta)$ für $\eta \geq \xi \geq 0$. Weiterhin seien $\Phi_{\eta,-}^s(\xi, \zeta)$ für $\zeta \leq \xi \leq 0$ und $\Phi_{\eta,-}^u(\zeta, \xi)$ für $\zeta \leq \xi \leq 0$ die Lösungsoperatoren der exponentiellen Dichotomie auf \mathbb{R}_- mit zugehörige Projektionen $P_{\eta,-}^{s/u}(t)$ für $t \leq 0$.

Wir zeigen nun zunächst die nichttriviale Tatsache, dass der Unterraum $E_+^{cs}(0) + E_-^u(0)$ in Y abgeschlossen ist.

Lemma 3.19

Der Vektorraum $E_+^{cs}(0) + E_-^u(0) \subset Y$ ist abgeschlossen.

Beweis

Es reicht zu zeigen, dass der Unterraum $E_{+,\eta}^s(0) + E_{-,\eta}^u(0) \subset Y$ in Y abgeschlossen ist. Man beachte nämlich, dass $E_+^{cs}(0) + E_-^u(0) = \mathbf{e}_\eta^0[E_{\eta,+}^{cs}(0) + E_{\eta,-}^u(0)]$ (siehe (3.70) für die Definition von \mathbf{e}_η^0). Außerdem ist die linke Seite $E_+^{cs}(0) + E_-^u(0)$ genau dann abgeschlossen, wenn $E_{\eta,+}^{cs}(0) + E_{\eta,-}^u(0)$ abgeschlossen ist, was man sofort an der Definition der Abbildung \mathbf{e}_η^0 ablesen kann.

Als nächstes eliminieren wir den gemeinsamen Schnitt S dieser beiden Unterräume. Man beachte, dass S endlichdimensional ist, da jedes Element aus S ein Kernelement des Fredholmoperators \mathcal{T}_η definiert und der Kern endlichdimensional ist. Definiere nun (etwa durch Orthogonalprojektion) ein abgeschlossenes Komplement \hat{E}_+^{cs} bezüglich S in $E_+^{cs}(0)$. Dann gilt weiterhin $\hat{E}_+^{cs} + E_-^u(0) = E_+^{cs} + E_-^u(0)$. Wir zeigen nun, dass $\hat{E}_+^{cs} + E_-^u(0)$ abgeschlossen ist.

Sei dazu $U^n = V^n + W^n$, mit $V^n \in \hat{E}_+^{cs}$, $W^n \in E_-^u(0)$, so dass $U^n \rightarrow U$ in Y gilt. Wir können (gegebenenfalls durch Approximation) annehmen, dass $V^n, W^n \in X$ sind und damit V^n, W^n, U^n folgende Form haben

$$V^n = \begin{pmatrix} \xi^n \\ \Phi^n(\cdot) \end{pmatrix} \quad W^n = \begin{pmatrix} \eta^n \\ \Psi^n(\cdot) \end{pmatrix} \quad U^n = \begin{pmatrix} \rho^n \\ \Gamma^n(\cdot) \end{pmatrix}.$$

Da $V^n \in E_+^{cs}(0)$ und $W^n \in E_-^u(0)$ existieren insbesondere Funktionen $\hat{\xi}^n(t)$ und $\hat{\eta}^n(t)$ für $t \geq -a$ bzw. $t \leq b$, die $\hat{\xi}_0^n(\cdot) = \Phi^n(\cdot)$ bzw. $\hat{\eta}_0^n(\cdot) = \Psi^n(\cdot)$ erfüllen und die lineare Gleichung

$$\dot{x}(t) = D_1 f(h_t, 0, c_0)x_t \tag{3.122}$$

auf \mathbb{R}_+ bzw. \mathbb{R}_- lösen. Es können nun folgende Fälle eintreten:

- i) beide Folgen $\Phi^n(\cdot)$ und $\Psi^n(\cdot)$ sind in der $L^2([-a, b], \mathbb{C}^n)$ -Norm beschränkt
- ii) eine Folge ist unbeschränkt

Wir betrachten den ersten Fall. Dazu beachte man, dass der lineare Operator $P_+ : \hat{E}_+^{cs} \rightarrow \mathbb{R} \times L^2([0, b], \mathbb{R})$, definiert durch

$$(\xi, \Phi(\cdot)) \rightarrow (\xi, \xi_0(\cdot)|_{[0,b]}), \tag{3.123}$$

kompakt ist, wobei $\xi(\cdot) \in L^2([-a, \infty), \mathbb{C}^n) \cap H^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)$ die eindeutige Lösung von (3.122) zum Anfangswert $\Phi(\cdot)$ bezeichnet. Dies folgt ganz analog zum Beweis des äquivalenten Settings im Fall einer autonomen, linearen Gleichung, siehe Satz 3.10. Analog gilt, dass der Operator $P_- : E_-^u \rightarrow \mathbb{R} \times L^2([-a, 0], \mathbb{R})$, definiert durch

$$(\eta, \Psi(\cdot)) \rightarrow (\eta, \eta_0(\cdot)|_{[-a,0]}) \tag{3.124}$$

kompakt ist, wobei $\eta(\cdot) \in L^2([-\infty, b], \mathbb{C}^n) \cap H^1(\mathbb{R}_-, \mathbb{C}^n)$ die eindeutige Lösung von (3.122) zum Anfangswert $\Psi(\cdot)$ bezeichnet. Da die Folgen $\Phi^n(\cdot), \Psi^n(\cdot)$ nach Annahme beschränkt sind, konvergiert o.E. der L^2 -Anteil $P_+(V^n)$ in $L^2([0, b], \mathbb{C}^n)$ und wegen $W^n = U^n - V^n$ auch der L^2 -Anteil von W^n eingeschränkt auf $(0, b)$. Mit der analogen Argumentation konvergiert o.E. $\Psi^n(\cdot)$ auf $(-a, 0)$ und deswegen konvergiert auch $\Phi^n(\cdot)$ auf $(-a, 0)$. Insbesondere konvergieren also die Folgen $\Phi^n(\cdot)$ und $\Psi^n(\cdot)$ bereits in $L^2((-a, b), \mathbb{C}^n)$. Diese Folgen besitzen dann Grenzwerte in \hat{E}_+^{cs} bzw. $E_-^u(0)$, da diese Unterräume abgeschlossen sind. Damit ist der erste Fall gezeigt.

Der zweite Fall verläuft (genau wie der erste Fall) ganz analog zur Argumentation des Beweises von Satz 3.11, weswegen wir diesen Schritt auslassen. Man beachte, dass wir bei diesem Schritt (analog zum Beweis des Satzes 3.11) ausnutzen, dass der Schnitt der beiden Unterräume $E_-^u(0)$ und \hat{E}_+^{cs} trivial ist. \square

Mit der Hilfe des folgenden Lemmas sind wir in der Lage, die Kodimension des Unterraumes $E_+^{cs}(0) + E_-^u(0)$ in Y zu bestimmen.

Lemma 3.20

Sei der Kern von $\mathcal{T}_\eta : L^2(\mathbb{R}, Y) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, Y)$ eindimensional und \mathcal{T}_η ein Fredholmoperator. Dann gilt: Ist der Fredholmindex von \mathcal{T}_η Null, so ist $E_{\eta,+}^s(0) + E_{\eta,-}^u(0)$ ein abgeschlossener Unterraum von Y , der die Kodimension 1 besitzt.

Beweis

Wir betrachten nun die Abbildung $\iota : Y \times Y \rightarrow Y$, definiert durch

$$\iota : (\Gamma, \Psi) \longmapsto \Phi_{\eta,+}^s(0, 0)\Gamma - \Phi_{\eta,-}^u(0, 0)\Psi.$$

Eine kurze Berechnung des adjungierten Operators $\iota^* : Y \rightarrow Y \times Y$ ergibt die explizite Darstellung

$$\iota^* : z \longmapsto ((\Phi_{\eta,+}^s(0, 0))^*z, -(\Phi_{\eta,-}^u(0, 0))^*z).$$

Sei nun $\Psi^0 \in \text{Kern}(\iota^*)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \Psi^0 \in \text{Bild}(id - \Phi_{\eta,+}^s(0, 0)^*) &\iff \Psi^0 \in \text{Bild}((id - \Phi_{\eta,+}^s(0, 0))^*) \\ &\iff \Psi^0 \in \text{Bild}(\Phi_{\eta,+}^u(0, 0)^*) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Psi^0 \in \text{Bild}(id - \Phi_{\eta,-}^u(0, 0)^*) &\iff \Psi^0 \in \text{Bild}((id - \Phi_{\eta,-}^u(0, 0))^*) \\ &\iff \Psi^0 \in \text{Bild}(\Phi_{\eta,-}^s(0, 0)^*). \end{aligned}$$

Wir haben also $\Psi^0 \in \text{Bild}(\Phi_{\eta,-}^s(0, 0)^*) \cap \text{Bild}(\Phi_{\eta,+}^u(0, 0)^*)$ und genauer $\Psi^0 = \Phi_{\eta,-}^s(0, 0)^*\Psi^0 = \Phi_{\eta,+}^u(0, 0)^*\Psi^0$ gezeigt.

Die adjungierten Operatoren

$$\Phi_{\eta,+}^u(\zeta, t)^*, \quad \Phi_{\eta,-}^s(\zeta, t)^* \tag{3.125}$$

sind hierbei für $t \geq \zeta \geq 0$ bzw. $t \leq \zeta \leq 0$ definiert. Ψ^0 definiert nun via

$$W(t) = \begin{cases} (\Phi_{\eta,+}^u(0, t))^*\Psi^0 & : t \geq 0 \\ (\Phi_{\eta,-}^s(0, t))^*\Psi^0 & : 0 \geq t \end{cases}$$

eine (auch für $t = 0$) wohldefinierte Lösung der adjungierten Gleichung $\dot{W}(t) = -\mathcal{A}(t)^*W(t)$, also der Gleichung $\mathcal{T}_\eta^*W(\cdot) = 0$ (wobei $\mathcal{A}(t)^*$ hierbei den adjungierten Operator von $\mathcal{A}(t)$ für festes t bezüglich des Y -Skalarproduktes bezeichnet): Differenziert man etwa $\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0)V$ für ein $V \in X$ nach der Anfangszeit t_0 (was nach Lemma 3.8 gerechtfertigt ist), so zeigt eine kurze Rechnung, dass

$$-\partial_t \Phi_{\eta,+}^u(0, t_0)V = \Phi_{\eta,+}^u(0, t_0)\mathcal{A}(t_0)V$$

gilt (für die Rechnung siehe Scheel et al [44], Lemma 5.1). Betrachten wir nun das Skalarprodukt bezüglich Y und dem Vektor $\Psi^0 \in Y$, so folgt aus der letzten Gleichung

$$-\langle \partial_t \Phi_{\eta,+}^u(0, t_0)V, \Psi^0 \rangle_Y = \langle \Phi_{\eta,+}^u(0, t_0)\mathcal{A}(t_0)V, \Psi^0 \rangle_Y. \quad (3.126)$$

Wir nehmen nun zunächst einmal an, dass $\Psi^0 \in \mathcal{D}((\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0)\mathcal{A}(t_0))^*) \subset Y$ ist, wobei $\mathcal{D}((\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0)\mathcal{A}(t_0))^*)$ den Definitionsbereich des dicht definierten adjungierten Operators bezeichnet. Dann gilt für ein $h > 0$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{h} \langle \Phi_{\eta,+}^u(0, t_0 + h)V - \Phi_{\eta,+}^u(0, t_0)V, \Psi^0 \rangle_Y = \\ & -\frac{1}{h} \langle V, (\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0 + h))^*\Psi^0 - (\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0))^*\Psi^0 \rangle_Y \rightarrow \langle V, (\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0)\mathcal{A}(t_0))^*\Psi^0 \rangle_Y \end{aligned}$$

für $h \rightarrow 0$ und alle $V \in X$. Also existiert $\partial_t(\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0))^*\Psi^0$ und nach Standard-Theorie für Semigruppen [37] folgt nun, dass diese Ableitung auch für alle $t \geq t_0$ existiert: Also ist $\Psi^0 \in \mathcal{D}((\Phi_{\eta,+}^u(0, t)\mathcal{A}(t))^*)$ für alle $t \geq t_0$. Da der Operator $\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0) : Y \rightarrow Y$ beschränkt ist, folgt unter Benutzung der Gleichung (3.126) die Identität

$$-\langle V, \partial_t(\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0))^*\Psi^0 \rangle_Y = \langle \mathcal{A}(t_0)V, (\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0))^*\Psi^0 \rangle_Y.$$

Also ist $(\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0))^*\Psi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*(t_0))$ nach Definition des Definitionsbereiches eines adjungierten Operators und wir erhalten schließlich die Gleichung

$$-\langle V, \partial_t(\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0))^*\Psi^0 \rangle_Y = \langle V, \mathcal{A}^*(t_0)(\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0))^*\Psi^0 \rangle_Y$$

für alle $V \in X$ und haben deswegen $\partial_t(\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0))^*\Psi^0 = \mathcal{A}^*(t_0)(\Phi_{\eta,+}^u(0, t_0))^*\Psi^0$ gezeigt, was für ein beliebiges $t_0 \geq 0$ gilt. Da wir im Beweis auch gesehen haben, dass zwangsläufig $\Psi^0 \in \mathcal{D}((\Phi_{\eta,+}^u(0, t)\mathcal{A}(t))^*)$ für alle $t \geq t_0$ ist, zeigt die gleiche Überlegung auch, dass $\partial_t(\Phi_{\eta,+}^u(0, t))^*\Psi^0 = \mathcal{A}^*(t)(\Phi_{\eta,+}^u(0, t))^*\Psi^0$ gilt. Setzen wir $t_0 = 0$ (man beachte, dass wir $h > 0$ betrachtet haben, so dass alle Terme weiterhin wohldefiniert sind), so haben wir gezeigt, dass $t \mapsto (\Phi_{\eta,+}^u(0, t))^*\Psi^0$ die adjungierte Gleichung $\dot{Z}(t) = -\mathcal{A}^*(t)Z(t)$ auf \mathbb{R}_+ löst und analoges gilt für $t \mapsto (\Phi_{\eta,-}^s(0, t))^*\Psi^0$ auf \mathbb{R}_- . Dies zeigt, dass $t \mapsto W(t)$ eine Lösung der adjungierten Gleichung auf \mathbb{R} ist, falls $\Psi^0 \in \mathcal{D}((\Phi_{\eta,+}^u(0, 0)\mathcal{A}(0))^*) \cap \mathcal{D}((\Phi_{\eta,-}^s(0, 0)\mathcal{A}(0))^*)$. Ist $\Psi^0 \notin \mathcal{D}((\Phi_{\eta,+}^u(0, 0)\mathcal{A}(0))^*) \cap \mathcal{D}((\Phi_{\eta,-}^s(0, 0)\mathcal{A}(0))^*)$ (der Schnitt könnte auch trivial sein), so approximiere Ψ^0 zunächst durch eine Folge $z^n \in \mathcal{D}((\Phi_{\eta,+}^u(0, 0)\mathcal{A}(0))^*)$. Wir verfahren nun analog zu der vorherigen Argumentation, um eine Lösung der adjungierten Gleichung auf \mathbb{R}_+ zu erhalten. Mit Hilfe der expliziten Darstellung der adjungierten Gleichung in Lemma 3.3 kann man nun die erste und zweite Komponente der adjungierten Gleichung integrieren. In den integrierten Gleichungen tritt nun der Anfangswert bezüglich der approximierenden Folge z^n auf. Man kann nun den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ betrachten und beobachten, dass die Lösung $t \mapsto \Phi_{\eta,+}^u(0, t)\Psi^0$ tatsächlich glatt ist. Approximiert man hingegen Ψ^0 durch eine Folge y^n in $\mathcal{D}((\Phi_{\eta,-}^s(0, 0)\mathcal{A}(0))^*)$, so kann man analog sehen,

dass die Abbildung $t \mapsto \Phi_{\eta,-}^s(0, t)\Psi^0$ glatt ist. Also ist $W(t)$ (kurz nach (3.125) definiert) bezüglich t eine differenzierbare Funktion und ein Kernelement von \mathcal{T}^* . Außerdem fällt $W(t)$ exponentiell für $t \rightarrow \pm\infty$; deswegen ist $W(\cdot)$ in $L^2(\mathbb{R}, Y)$ und im Definitionsbereich von \mathcal{T}_η^* .

Weiterhin kann es bis auf ein skalares Vielfaches nur eine beschränkte Lösung der adjungierten Gleichung geben, da nach Voraussetzung der Kern des adjungierten Operators \mathcal{T}_η^* eindimensional ist. Wir haben also gezeigt, dass das Bild der Abbildung ι Kodimension 1 in Y hat. Das Bild dieser Funktion ist aber gerade $E_{\eta,+}^s(0) + E_{\eta,-}^u(0)$, also ist die Behauptung gezeigt. \square

Bemerkungen

- Man beachte, dass der vorherige Beweis nicht davon abhängt, ob der Operator \mathcal{T}_η von der Linearisierung entlang einer homoklinen Lösung stammt oder nicht. Tatsächlich haben wir neben der Dimension des Kernes und der Kenntnis des Fredholmindex nur die Tatsache benutzt, dass der Fredholmoperator \mathcal{T}_η Lösungoperatoren $\Phi_{\eta,+}^u$ und $\Phi_{\eta,-}^s$ induziert.
- In dem Beweis des Lemmas 3.20 haben wir insbesondere gezeigt, dass die Abbildung $\iota : E_{\eta,+}^s(0) \times E_{\eta,-}^u(0) \rightarrow Y$ ein Fredholmoperator ist, da das Bild $E_{\eta,-}^u(0) + E_{\eta,+}^s(0)$ abgeschlossen ist und der Fredholmindex von ι mit dem der Abbildung \mathcal{T}_η übereinstimmt (dies gilt auch, wenn der Kern von \mathcal{T}_η nicht eindimensional ist und/oder der Index von \mathcal{T}_η nicht Null ist): Wie man nämlich sofort an der Definition der Abbildung ι abliest, erfüllen Elemente $U \in \text{Kern}(\iota)$ gerade $U \in E_{\eta,+}^s(0) \cap E_{\eta,-}^u(0)$ und induzieren damit ein Kernelement $W(\cdot)$ des Operators \mathcal{T}_η via $W(t) = \Phi_{\eta,+}^s(t, 0)U$ für alle $t \geq 0$ und $W(t) = \Phi_{\eta,-}^u(t, 0)U$ für alle $t \leq 0$.

Korollar 3.1

Der in Y abgeschlossene Unterraum $E_+^{cs}(0) + E_-^u(0)$ besitzt die Kodimension eins.

Beweis

Wir haben in Lemma 3.20 bewiesen, dass die Kodimension von $E_{\eta,+}^s(0) + E_{\eta,-}^u(0)$ genau 1 ist. Diese Unterräume beziehen sich dabei auf den Fredholmoperator \mathcal{T}_η , für ein kleines $\eta > 0$. Beachtet man, wie wir die Dichotomien für den Operator $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{0,c_0,0} = \mathcal{T}_{\eta=0}$ konstruiert haben (der kein Fredholmoperator ist), so sieht man, dass ebenfalls die Kodimension von $E_+^{cs}(0) + E_-^u(0)$ eins ist. Es gilt nämlich $E_+^{cs}(0) + E_-^u(0) = \mathbf{e}_\eta^0[E_{\eta,+}^s(0) + E_{\eta,-}^u(0)]$ (siehe (3.70) für die Definition von \mathbf{e}_η^0). \square

Setzen wir noch $\tilde{E}_+^{cs} := E_+^{cs}(0) \cap \tilde{Y}$ und $\tilde{E}_-^u := E_-^u(0) \cap \tilde{Y}$, die jeweils abgeschlossene Unterräume bezüglich \tilde{Y} definieren, so sehen wir, dass auch die Kodimension des Unterraumes $\tilde{E}_+^{cs}(0) + \tilde{E}_-^u(0)$ bezüglich \tilde{Y} eins ist: die Unterräume $\tilde{E}_+^{cs/u}(0)$ liegen nämlich bezüglich der Y -Norm dicht in $E_+^{cs/u}(0)$.

Zusammenfassend haben wir in diesem Kapitel gezeigt, dass sich die zentrumsstabile Mannigfaltigkeit $W^{cs,+}(0)$ und die instabile Mannigfaltigkeit $W^{u,-}(0)$ nicht transversal schneiden. Genauer ist die Kodimension der Summe $\tilde{E}_+^{cs}(0) + \tilde{E}_-^u(0)$ eins. Wir betrachten daher im nächsten Kapitel die um den Parameter c erweiterten Mannigfaltigkeiten in dem Raum $\tilde{Y} \times \mathbb{R}$.

3.5.1 Algebraisch abklingende homokline Lösungen

In diesem Abschnitt betrachten wir nun den generisch auftretenden Fall, dass sich die homokline Lösung $H(t)$ für $t \rightarrow \infty$ entlang der schwächsten Richtung dem Gleichgewicht nähert und damit für große Zeiten t nicht auf der stark-stabilen Mannigfaltigkeit $W^{ss,loc}(0)$ liegt.

Um sicherzustellen, dass $W^{cs,+}(0)$ und $W^{u,-}(0)$ für gewisse Parameter $(\tilde{\lambda}, c) \neq (0, c_0)$ und $\tilde{\lambda} \neq 0$ einen Schnittpunkt besitzen, betrachten wir die *erweiterten* Mannigfaltigkeiten

$$\begin{aligned}\hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{cs,+} &:= \{(U, c) : |c - c_0| < \delta, \quad U \in W_{\tilde{\lambda}, c}^{cs,+}(0)\} \\ \hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{u,-} &:= \{(U, c) : |c - c_0| < \delta, \quad U \in W_{\tilde{\lambda}, c}^{u,-}(0)\}\end{aligned}$$

zu betrachten. Diese sind C^2 -Mannigfaltigkeiten in $\tilde{Y} \times \mathbb{R}$. Wir zeigen nun, dass sich diese beiden Mannigfaltigkeiten in $(H(0), c_0)$ für $\tilde{\lambda} = 0$ transversal schneiden; d.h. wir zeigen

$$T_{(\tilde{H}(0), c_0)} \hat{W}_0^{cs,+} + T_{(\tilde{H}(0), c_0)} \hat{W}_0^{u,-} = \tilde{Y} \times \mathbb{R}. \quad (3.127)$$

Man beachte, dass der Schnitt der Tangentialräume den von $\partial_t H(0)$ aufgespannten Unterraum $\text{span}\{\partial_t H(0)\}$ enthält. Wir können nun folgendes Lemma beweisen, das uns die gewünschte Transversalität liefert (siehe Abbildung 3.5).

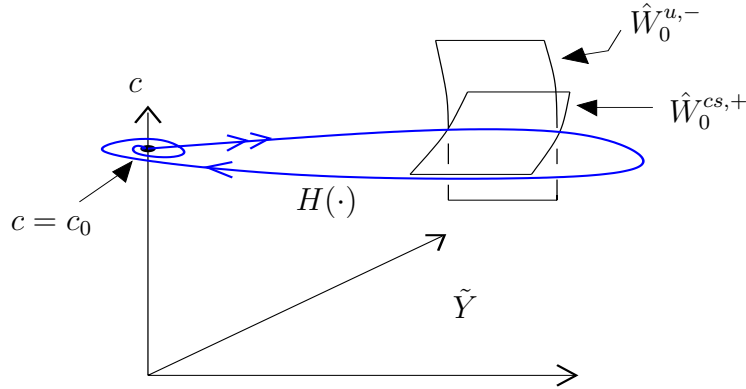


Abbildung 3.5: Die Abbildung zeigt den Schnitt der beiden Mannigfaltigkeiten $\hat{W}_0^{cs,+}$ und $\hat{W}_0^{u,-}$ entlang der Lösung $(H(\cdot), c_0)$ im erweiterten Phasenraum $\tilde{Y} \times \mathbb{R}$.

Lemma 3.21

Es gilt

$$T_{(H(0), c_0)} \hat{W}_0^{cs,+} + T_{(H(0), c_0)} \hat{W}_0^{u,-} = \tilde{Y} \times \mathbb{R}$$

für $\tilde{\lambda} = 0$.

Beweis

Für die Parameterwerte $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c_0)$ gilt $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) \equiv 0$. Außerdem gilt für die Tangentialräume von $\hat{W}_0^{cs,+}$ und $\hat{W}_0^{u,-}$

$$\begin{aligned}T_{(H(0), c_0)} \hat{W}_0^{cs,+} &= (\tilde{E}_+^{cs}(0) \times \{0\}) + \text{span}\{(H'(0), 0)\} + \text{span}\{(\tilde{V}_{0, c_0}^{cs,+}(0), 1)\}, \\ T_{(H(0), c_0)} \hat{W}_0^{u,-} &= (\tilde{E}_-^u(0) \times \{0\}) + \text{span}\{(H'(0), 0)\} + \text{span}\{(\tilde{V}_{0, c_0}^{u,-}(0), 1)\}\end{aligned}$$

Wie wir eben gezeigt haben, ist $\tilde{E}_+^{cs}(0) + \tilde{E}_-^u(0)$ ein abgeschlossener Unterraum von \tilde{Y} der Kodimension 1. Die Vektoren $\tilde{V}_{0,c_0}^{cs,+}(0)$ und $\tilde{V}_{0,c_0}^{u,-}(0)$ repräsentieren dabei Vektoren der Tangentialräume in „c-Richtung“ und können durch Ableiten der Integralgleichungen (3.100) und (3.114) nach c an der Stelle $V_0^{cs} = \Phi_+^{cs}(0,0)H(0)$ bzw. $V_0^u = \Phi_-^u(0,0)H(0)$ bestimmt werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{0,c_0}^{cs,+}(0) &= \int_{-\infty}^0 \Phi_+^u(0, \xi) \partial_c \mathcal{G}(\xi, 0, 0, c_0) d\xi, \\ \tilde{V}_{0,c_0}^{u,-}(0) &= \int_{-\infty}^0 \Phi_-^{cs}(0, \xi) \partial_c \mathcal{G}(\xi, 0, 0, c_0) d\xi.\end{aligned}\tag{3.128}$$

Bezeichne nun mit Ψ^0 einen Vektor in Y , der das Orthogonalkomplement des Unterraumes $E_+^{cs}(0) + E_-^u(0)$ bezüglich des umgebenden Raumes Y aufspannt. Um den Beweis abzuschließen, reicht es offenbar zu zeigen, dass

$$\left\langle \Psi^0, \tilde{V}_{0,c_0}^{cs,+}(0) \right\rangle_Y \neq \left\langle \Psi^0, \tilde{V}_{0,c_0}^{u,-}(0) \right\rangle_Y\tag{3.129}$$

gilt. Ist diese Ungleichung nämlich erfüllt, so besitzt der Vektor $\tilde{V}_{0,c_0}^{u,-}(0) - \tilde{V}_{0,c_0}^{cs,+}(0)$ einen Anteil, der nicht in $E_+^{cs}(0) + E_-^u(0)$ (also auch nicht in $\tilde{E}_+^{cs}(0) + \tilde{E}_-^u(0) \subset E_+^{cs}(0) + E_-^u(0)$) liegt und damit wäre die Behauptung des Lemmas bewiesen.

Die letzte Ungleichung ist äquivalent zu

$$\left\langle \Psi^0, \int_{-\infty}^0 \Phi_-^{cs}(0, \xi) \partial_c \mathcal{G}(\xi, 0, 0, c_0) d\xi - \int_{-\infty}^0 \Phi_+^u(0, \xi) \partial_c \mathcal{G}(\xi, 0, 0, c_0) d\xi \right\rangle_Y \neq 0$$

bzw. zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \tilde{\Psi}(\xi) \Psi^0, \partial_c \mathcal{G}(\xi, 0, 0, c_0) \right\rangle_Y d\xi \neq 0,\tag{3.130}$$

wobei wir

$$\tilde{\Psi}(t) = \begin{cases} \Phi_+^u(0, t)^* & : t > 0 \\ \Phi_-^{cs}(0, t)^* & : 0 > t \end{cases}$$

gesetzt haben. Man beachte, dass die $H^1([-a, b], \mathbb{R}^N)$ -Komponente des Vektors $\partial_c \mathcal{G}(\xi, 0, 0, c_0)$ identisch Null ist für alle ξ .

Aufgrund von $\Psi^0 \in (E_+^{cs}(0) + E_-^u(0))^\perp$ gilt $\Phi_+^u(0, 0)^* \Psi^0 = \Phi_-^{cs}(0, 0)^* \Psi^0$ nach dem Beweis von Lemma 3.20; also induziert $\tilde{\Psi}(t) \Psi^0$ eine Lösung der Gleichung $V'(t) = -\mathcal{A}^*(t)V(t)$ auf ganz \mathbb{R} . Nach dem Beweis von Lemma 3.3 und der Bemerkung kurz danach gilt nun $\tilde{\Psi}(t) \Psi^0 = (\rho(t), E(t, \cdot))$, wobei $\rho(\cdot)$ eine Lösung der Gleichung (3.14) ist, also

$$\partial_t \rho(t) = - \int_{-a}^b p^*(t - \theta, \theta, 0, c_0) \rho(t - \theta) d\theta - \sum_{k=1}^m A_k^*(t - r_k, 0, c_0) \rho(t - r_k)\tag{3.131}$$

auf \mathbb{R} erfüllt. Man beachte, dass diese Gleichung zu $\mathcal{L}_{0,c_0}^* \rho(\cdot) = 0$ äquivalent wäre, wenn $\rho(\cdot)$ eine L^2 -Funktion wäre. Die genaue Gestalt der zweiten Komponente $E(\cdot, \cdot)$ von $\tilde{\Psi}(t) \Psi^0$ ist für die weitere Argumentation unerheblich.

Erneut wegen $\tilde{\Psi}(t) \Psi^0 = \Phi_+^u(0, t)^* \Psi^0$ für $t \geq 0$ und $\tilde{\Psi}(t) \Psi^0 = \Phi_-^{cs}(0, t)^* \Psi^0$ für $t < 0$ und $\|\Phi_+^u(0, t)\|_Y \leq M e^{-\beta|t|}$ bzw. $\|\Phi_-^{cs}(0, t)\|_Y \leq M$ für gewisse Konstanten $M, \beta > 0$ (man beachte, dass wir hierbei benutzen, dass die homokline Lösung $h(t)$ für $t \rightarrow -\infty$

exponentiell abklingt und deswegen der Operator $\Phi_-^{cs}(0, t)$ nach Satz 3.15 tatsächlich uniform beschränkt ist), klingt auch die Abbildung $\rho(\cdot)$ für $t \rightarrow \infty$ exponentiell ab und ist für $t \rightarrow -\infty$ beschränkt. $\rho(\cdot)$ ist deswegen als Lösung der Gleichung (3.131) mit diesem asymptotischen Verhalten für $|t| \rightarrow \infty$ bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig: Jede Lösung $\rho(\cdot)$ von (3.131) liefert nämlich via $\varphi(t) := e^{nt}\rho(t)$ ein wohldefiniertes Kernelement des Operators \mathcal{L}_η^* (also insbesondere eine L^2 -Funktion), wobei \mathcal{L}_η der in (3.121) definierte Operator ist und \mathcal{L}_η^* den zu $\mathcal{L}_\eta : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ adjungierten Operator bezeichnet. Also induziert $\varphi(\cdot)$ nach Lemma 3.3 ein Kernelement von \mathcal{T}_η^* , dass nach Hypothese 5 und Abschnitt 3.5 bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig ist.

Nun hat wegen der Bemerkung nach (3.88) der Term $\partial_c \mathcal{G}(\cdot, 0, 0, c_0)$ die Form

$$\partial_c \mathcal{G}(t, 0, 0, c_0) = \begin{pmatrix} \partial_c g(t, h_t, 0, c_0) \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\partial_c g$ wie in Hypothese „Transversalität“ des Kapitels 3.2 ist. Nach Hypothese „Transversalität“ gilt also gerade (3.130), da $\tilde{\Psi}(t)\Psi^0 = (\rho(t), E(t, \cdot))$ ist. \square

Korollar 3.2

$\hat{W}_\lambda^{cs,+}$ und $\hat{W}_\lambda^{u,-}$ besitzen für $\tilde{\lambda} > 0$ einen Schnittpunkt $(U^{\tilde{\lambda}}, c(\tilde{\lambda}))$. Dieser hängt stetig von $\tilde{\lambda}$ ab.

Beweis

Der Beweis folgt aus dem impliziten Funktionensatz. Bezeichne dazu mit $\Psi_i^{\tilde{\lambda}}(\cdot, \cdot)$, $i = 1, 2$ die folgenden differenzierbaren Abbildungen: für festes $\tilde{\lambda}$ sei $\Psi_1^{\tilde{\lambda}}(\cdot, \cdot) : (\tilde{E}_+^{cs}(0) \times (-\delta + c_0, c_0 + \delta)) \cap \mathcal{U} \rightarrow \tilde{E}_+^u(0)$ und $\Psi_2^{\tilde{\lambda}}(\cdot, \cdot) : (\tilde{E}_-^u(0) \times (-\delta + c_0, c_0 + \delta)) \cap \mathcal{U} \rightarrow \text{Bild}(\Phi_-^{cs}(0, 0)|_{\tilde{Y}})$, wobei

$$\begin{aligned} (\text{Graph}[\Psi_1^{\tilde{\lambda}}], \cdot) + (H(0), c_0) &= \tilde{W}_\lambda^{cs,+} \\ (\text{Graph}[\Psi_2^{\tilde{\lambda}}], \cdot) + (H(0), c_0) &= \tilde{W}_\lambda^{u,-} \end{aligned}$$

gilt und $\mathcal{U} \subset \tilde{Y} \times \mathbb{R}$ eine genügend kleine Umgebung der Null ist (man siehe (3.101) und die Argumentation kurz vor und nach (3.114)). Dann kann man die Abbildungen $\Psi_i^{\tilde{\lambda}}$ differenzierbar bezüglich $\tilde{\lambda}$ wählen und es gilt $\Psi_1^0(0, c_0) = \Psi_2^0(0, c_0) = 0$. Bezeichne weiterhin mit $P_i : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$, $i = 1, 2$, diejenigen Projektionen, die durch $P_1(U) := \Phi_+^{cs}(0, 0)U$ und $P_2(U) := \Phi_-^u(0, 0)U$ für $U \in \tilde{Y}$ definiert sind. Wir betrachten nun für eine kleine Umgebung $\tilde{\mathcal{U}}$ des Punktes $(0, 0, c_0) \in \tilde{Y} \times \tilde{Y} \times \mathbb{R}$ die Abbildung $\Gamma : ((\tilde{E}_+^{cs}(0) \times \tilde{E}_-^u(0) \times \mathbb{R}) \cap \tilde{\mathcal{U}}) \times (-\delta_0, \delta_0) \rightarrow \tilde{Y} \times \mathbb{R}$, mit

$$\Gamma(V, \tilde{V}, c, \tilde{\lambda}) := \left[(H(0) + V + \Psi_1^{\tilde{\lambda}}(V, c), c) \right] - \left[(H(0) + \tilde{V} + \Psi_2^{\tilde{\lambda}}(\tilde{V}, c), c) \right].$$

Dann gilt $\Gamma((0, 0, c_0), 0) = 0$ und die Linearisierung $D_{(V, \tilde{V}, c)} \Gamma$ von Γ bezüglich der Variablen (V, \tilde{V}, c) in dem Punkt $((V, \tilde{V}, c), \tilde{\lambda}) = ((0, 0, c_0), 0)$ ist wegen (3.127) surjektiv.

Wir bezeichnen nun den Kern von $D_{(V, \tilde{V}, c)} \Gamma((0, 0, c_0), 0)$ mit \mathcal{K} . Dieser ist eindimensional und in $\tilde{E}_+^{cs}(0) \times \tilde{E}_-^u(0) \times \mathbb{R}$ abgeschlossen. Außerdem existiert ein abgeschlossenes Komplement \mathcal{C} von \mathcal{K} in $\tilde{E}_+^{cs}(0) \times \tilde{E}_-^u(0) \times \mathbb{R}$, da wir uns in einem Hilbertraum befinden. Wir können also Γ als Abbildung von $((\mathcal{C} \cap \tilde{\mathcal{U}}) \times (\mathcal{K} \cap \tilde{\mathcal{U}})) \times (-\delta_0, \delta_0)$ nach $\tilde{Y} \times \mathbb{R}$ auffassen. Die

Linearisierung $D_1\Gamma((0, 0, c_0)_C, (0, 0, c_0)_K, 0)$ ist damit stetig invertierbar. Hier bezeichnet der Index „ \mathcal{C} “ bzw. „ \mathcal{K} “ den auf das Komplement \mathcal{C} bzw. den Kern \mathcal{K} projizierten Anteil von $(0, 0, c_0)$. Nach dem impliziten Funktionensatz existiert nun eine eindeutige Lösung $(V, \tilde{V}, c) = (V(\tilde{\lambda}, l), \tilde{V}(\tilde{\lambda}, l), c(\tilde{\lambda}, l))$ der Gleichung $\Gamma = 0$, wobei $l \in \mathbb{R}$ die Koordinate des eindimensionalen Kerns der Abbildung $D_{(V, \tilde{V}, c)}\Gamma$ bezeichnet. Man beachte nämlich, dass sich die Tangentialräume in (3.127) nur entlang des Orbits der homoklinen Lösung schneiden. Da jeder Punkt $(V, c) + (H(0), c_0) \in \hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{cs,+}$ bzw. $(\tilde{V}, c) + (H(0), c_0) \in \hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{u,-}$ Anlass zu einer Lösung gibt, die für kleine Zeiten in der entsprechenden Mannigfaltigkeit enthalten ist, parametrisiert l lediglich den Orbit dieser Lösung (der für $\tilde{\lambda} = 0$ gerade der homoklinen Lösung $H(\cdot)$ entspricht). Wir wählen nun ein zulässiges $l_* \neq 0$, so dass die lokal definierte Lösung $(V(\tilde{\lambda}, l_*), \tilde{V}(\tilde{\lambda}, l_*), c(\tilde{\lambda}, l_*))$ definiert ist und definieren den gesuchten Schnittpunkt durch:

$$(U^{\tilde{\lambda}}, c(\tilde{\lambda})) := \left(V(\tilde{\lambda}, l_*) + H(0) + \Psi_1^{\tilde{\lambda}}(V(\tilde{\lambda}, l_*), c(\tilde{\lambda}, l_*)), c(\tilde{\lambda}, l_*) \right)$$

□

Asymptotisches Verhalten und Patching

Wir haben im letzten Kapitel gezeigt, dass auch $\hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{cs,+}$ und $\hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{u,+}$ für $\tilde{\lambda} > 0$ einen Schnittpunkt $(U^{\tilde{\lambda}}, c(\tilde{\lambda}))$ besitzen. Es bleiben also die Fragen zu klären, wie es mit dem asymptotischen Verhalten dieser Lösung steht?

Lemma 3.22

Der Punkt $U^{\tilde{\lambda}}$ induziert eine auf \mathbb{R} definierte Funktion $U^{\tilde{\lambda}}(\cdot)$ und es gilt $U^{\tilde{\lambda}}(t) = (h^{\tilde{\lambda}}(t), h_t^{\tilde{\lambda}})$ mit einer auf \mathbb{R} definierten Lösung $h^{\tilde{\lambda}}(t)$ der ursprünglichen Mixed-Type Gleichung (3.1).

Beweis

Da $U^{\tilde{\lambda}} \in W_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})}^{cs,+}(0)$ gilt, existiert eine stetige Funktion $U^{\tilde{\lambda},1}(\cdot)$ auf $(0, \infty)$ mit Werten in \tilde{Y} von der Form $U^{\tilde{\lambda},1}(t) = (h^{\tilde{\lambda},1}(t), h_t^{\tilde{\lambda},1})$, wobei $h^{\tilde{\lambda},1}(t)$ eine auf \mathbb{R}_+ definierte Lösung der Gleichung (3.77) ist. Wegen $U^{\tilde{\lambda}} \in W_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})}^{u,-}(0)$ existiert ebenfalls eine auf $(-\infty, 0)$ definierte Funktion, die wir mit $U^{\tilde{\lambda},2}(\cdot)$ bezeichnen und die von der Form $U^{\tilde{\lambda},2}(t) = (h^{\tilde{\lambda},2}(t), h_t^{\tilde{\lambda},2})$ ist, wobei $h^{\tilde{\lambda},2}(t)$ eine auf \mathbb{R}_- definierte Lösung der Gleichung (3.77) ist. Außerdem ist die Funktion $t \mapsto U^{\tilde{\lambda},1}(t)$ stetig als Abbildung von $[0, \infty)$ nach \tilde{Y} und ebenso ist die Abbildung $t \mapsto U^{\tilde{\lambda},2}(t)$ stetig als Abbildung von $(-\infty, 0]$ nach \tilde{Y} . Beide Abbildungen stimmen an der Stelle $t = 0$ überein und induzieren eine stetige Lösung $h^{\tilde{\lambda}}(t)$ von (3.77) auf \mathbb{R} , wobei $h^{\tilde{\lambda}}(t) := h^{\tilde{\lambda},1}(t)$ für $t \geq 0$ und $h^{\tilde{\lambda}}(t) := h^{\tilde{\lambda},2}(t)$ für $t \leq 0$. □

Die Lösung $U^{\tilde{\lambda}}(\cdot)$ von (3.119) für $c = c(\tilde{\lambda})$ konvergiert nach Konstruktion für $t \rightarrow -\infty$ exponentiell gegen null. Außerdem ist $U^{\tilde{\lambda}}(t)$ für $t > 0$ in $W_{c(\tilde{\lambda}), \tilde{\lambda}}^{cs,+}(0)$ enthalten. Also konvergiert $U^{\tilde{\lambda}}(t)$ für $t \rightarrow \infty$ entweder gegen das Gleichgewicht oder gegen den Orbit der periodischen Funktion $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})}(\cdot)$ und diese Abbildung ist nach Definition der Parameter eine nichttriviale, periodische Lösung für $\tilde{\lambda} > 0$.

Lemma 3.23

Konvergiere $H(t)$ in Vorwärtszeit subexponentiell gegen Null, d.h. es gilt $|H(t)|_Y e^{\delta t} \rightarrow \infty$ für alle $\delta > 0$ und $t \rightarrow \infty$. Dann gilt $U^{\tilde{\lambda}}(t) \rightarrow \Gamma_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})}(t + \theta_*)$ für $t \rightarrow \infty$ und einer asymptotischen Phase $\theta_* = \theta_*(\tilde{\lambda})$.

Beweis

Da $U_0(0) = H(0) \in W_{0,c_0}^{cs,+}(0)$ und $W_{0,c_0}^{cs,+}(0) \subset W_{0,c_0}^{cs,loc}$ nahe 0 gilt, ist auch $U^{\tilde{\lambda}}(0) \in W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{cs,loc}$. Außerdem gilt $H(0) \notin W_{0,c_0}^{ss,loc}(0) \subset W_{0,c_0}^{cs,loc}$, da $H(\cdot)$ nach Annahme nur algebraisch gegen Null konvergiert. Wegen der Stetigkeit von $W_{\tilde{\lambda},c}^{ss,loc}(0)$ bezüglich der Parameter existiert ein $\rho > 0$ klein genug und eine Umgebung $B_\rho(H(0))$, so dass $U \notin W_{\tilde{\lambda},c}^{ss,loc}(0)$ für alle $U \in B_\rho(H(0))$ und $(\tilde{\lambda}, c) \approx (0, c_0)$. Also ist wegen der Stetigkeit bezüglich $\tilde{\lambda}$ auch $U^{\tilde{\lambda}}(0) \notin W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{ss,loc}(0)$ und damit konvergiert $U^{\tilde{\lambda}}(t)$ in Vorwärtszeit gegen den Orbit der periodischen Funktion $\Gamma_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}(\cdot)$, die für $\tilde{\lambda} > 0$ nichttrivial ist und bezüglich der Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit stabil ist. \square

Um die Abhängigkeit der Familie $h^{\tilde{\lambda}}(\cdot)$ von dem Parameter $\tilde{\lambda}$ zu untersuchen, stellen wir zunächst einmal fest, dass der durch die Transversalität gegebene Schnittpunkt $U^{\tilde{\lambda}}(0)$ stetig von $\tilde{\lambda}$ für $\tilde{\lambda} \approx 0$ abhängt. Da $U^{\tilde{\lambda}}(0) \in W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{cs,+}(0)$, hängt die dadurch induzierte Lösung $U^{\tilde{\lambda},1}(\cdot) \in BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \tilde{Y})$ für ein festes $\gamma > 0$ stetig von $\tilde{\lambda}$ ab. Ebenso hängt wegen $U^{\tilde{\lambda}}(0) \in W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{u,-}(0)$ die dadurch induzierte Lösung $U^{\tilde{\lambda},2}(\cdot) \in BC^{-\kappa}(\mathbb{R}_-, \tilde{Y})$ für ein $\kappa > 0$ stetig von $\tilde{\lambda}$ ab. Also ist die Abbildung $\tilde{\lambda} \mapsto U^{\tilde{\lambda}}(\cdot) \in BC^\gamma(\mathbb{R}, \tilde{Y})$ stetig und deswegen auch die Funktion $h^{\tilde{\lambda}}$.

3.5.2 Exponentiell abklingende homokline Lösungen

Als nächstes wollen wir den Fall betrachten, dass $H(t)$ in Rückwärts- und Vorwärtszeit exponentiell gegen Null konvergiert und wir zeigen die Existenz von Lösungen $U^{\tilde{\lambda}}(t)$ der Gleichung (3.119), die für $t \rightarrow -\infty$ gegen das Gleichgewicht Null und für $t \rightarrow \infty$ gegen die periodische Lösung $\Gamma_{\tilde{\lambda},c}(t)$ für $c = c(\tilde{\lambda})$ konvergieren.

Die natürliche Vorgehensweise wäre die folgende: Wir konstruieren die gesuchten Lösungen mit der Hilfe des Schnittpunktes der erweiterten Mannigfaltigkeiten $\hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{cs,+}$ und $\hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{u,-}$, wobei

$$\begin{aligned} \hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{cs,+} &:= \{(U, c) : |c - c_0| < \delta, \quad U \in W_{\tilde{\lambda},c}^{cs,+}(0)\} \\ \hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{u,-} &:= \{(U, c) : |c - c_0| < \delta, \quad U \in W_{\tilde{\lambda},c}^{u,-}(0)\} \end{aligned}$$

gilt. Allerdings stoßen wir auf diese Weise auf folgendes Problem: In dem jetzt betrachteten Fall liegt nämlich $H(t)$ für große t auf der stark-stabilen Mannigfaltigkeit $W_{0,c_0}^{ss,loc}(0)$. Also müssen wir argumentieren, dass die durch den Schnittpunkt der beiden Mannigfaltigkeiten $\hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{cs,+}$ und $\hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{u,-}$ induzierte Lösung für $\tilde{\lambda} > 0$ nicht in der stark-stabilen Mannigfaltigkeit liegt und damit in Vorwärtszeit gegen null konvergiert. Für diese Argumentation ziehen wir es vor, mit einer instabilen „Faser“ eines Punktes auf der Zentrumsmannigfaltigkeit zu arbeiten, die wir im nächsten Abschnitt genauer definieren.

Konstruktion einer instabilen Faser eines Punktes auf der Zentrumsmannigfaltigkeit

Unter einer „instabilen Faser“ $W^{u,loc}(\Lambda)$ eines Punktes Λ auf der Zentrumsmannigfaltigkeit, verstehen wir die Menge aller Punkte $U \in \tilde{Y}$ mit $U \approx \Lambda$, zu denen eine Lösung $U(t)$ für $t \leq 0$ existiert, $|U(t) - \Lambda(t)| \leq Me^{-\beta|t|}$ für $t \rightarrow -\infty$, $\beta > 0$ gilt und $\Lambda(t)$ die zu Λ

assoziierte Lösung auf der Zentrumsmanifold bezeichnet. Wir werden die instabile Faser als lokal definierte C^2 -Mannigfaltigkeit in dem Raum \tilde{Y} konstruieren. Aber zunächst einmal charakterisieren wir die Punkte Λ , für die wir $W^{u,loc}(\Lambda)$ konstruieren wollen.

Wir wählen dazu eine Familie von Punkten $\Lambda_{\tilde{\lambda},c} \in \mathcal{M}_{\tilde{\lambda},c}$ auf der parameterabhängigen Zentrumsmanifold $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\tilde{\lambda},c}$ für $(\tilde{\lambda}, c) \approx (0, c_0)$, so dass $\Lambda_{\tilde{\lambda},c}$ glatt bezüglich c ist und die Abbildung $\tilde{\lambda} \rightarrow \Lambda_{\tilde{\lambda},c}$ für $\tilde{\lambda} > 0$ die Entwicklung

$$\Lambda_{\tilde{\lambda},c} = d_1(c)\tilde{\lambda} + d_2(c)\tilde{\lambda}^2 + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^3) \quad (3.132)$$

für ein $d_1(c_0) \neq 0$ besitzt; also gilt $\Lambda_{\tilde{\lambda},c} = \mathcal{O}(\sqrt{\tilde{\lambda}})$. Weiterhin setzen wir $\Lambda_{\tilde{\lambda},c} = 0$ für $\tilde{\lambda} \leq 0$ und wählen die Punkte $\Lambda_{\tilde{\lambda},c}$ für $\tilde{\lambda} > 0$ im Inneren desjenigen Gebietes, das durch den periodischen Orbit $\Gamma_{\tilde{\lambda},c}(t)$ berandet wird. Da die periodischen Orbits bezüglich der Zentrumsdynamik *stabil* sind, existiert also zu dem Punkt $\Lambda_{\tilde{\lambda},c}$ für $\tilde{\lambda} > 0$ eine auf \mathbb{R}_- definierte Lösung $\Lambda_{\tilde{\lambda},c}(t)$, die für $t \rightarrow -\infty$ gegen null konvergiert. Die instabile Faser $W_{\tilde{\lambda},c}^u(\Lambda_{\tilde{\lambda},c})$ bezüglich eines Punktes $\Lambda_{\tilde{\lambda},c}$ mit $\tilde{\lambda} > 0$ ist nun in Abbildung 3.6 veranschaulicht.

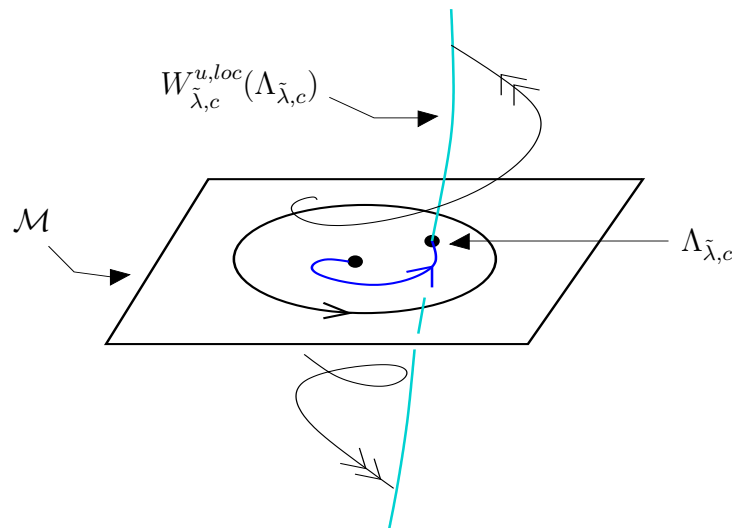


Abbildung 3.6: Ein schematisches Bild der Mannigfaltigkeit $W_{\tilde{\lambda},c}^{u,loc}(\Lambda_{\tilde{\lambda},c})$. Jede Lösung mit Anfangswert in $W_{\tilde{\lambda},c}^{u,loc}(\Lambda_{\tilde{\lambda},c})$ konvergiert in Rückwärtszeit mit exponentieller Rate gegen die Zentrumsmanifold \mathcal{M} und nähert sich für $t \rightarrow -\infty$ dem Gleichgewicht entlang der Lösung $\Lambda_{\tilde{\lambda},c}(t)$.

Notation

Wir unterdrücken von nun an oft die Parameterabhängigkeit und schreiben $W^{u,loc}(\Lambda)$ anstatt $W_{\tilde{\lambda},c}^{u,loc}(\Lambda_{\tilde{\lambda},c})$.

Zur Formulierung des nachfolgenden Satzes sei daran erinnert, dass die Vektorräume $E_c, E_s, E_u \subset Y$, Projektionen $\Pi_c, \Pi_s, \Pi_u : Y \rightarrow Y$ und Halbgruppen $T_c(t) : E_c \rightarrow E_c$, $T_s(t) : E_s \rightarrow E_s$, $T_u(-t) : E_u \rightarrow E_u$ am Anfang des Beweises der Konstruktion von $W^{ss,loc}(0)$ in Abschnitt „Die lokale stark-stabile Mannigfaltigkeit $W^{ss,loc}(0)$ “ definiert wurden.

Satz 3.18 (Die instabile Faser)

Für jedes $(\tilde{\lambda}, c)$ mit $|\tilde{\lambda}| \geq 0$ klein genug, besitzt Gleichung (3.119) eine instabile Faser $W^{u,loc}(\Lambda) \subset \tilde{Y}$, die folgende Eigenschaften besitzt:

- Es gilt $W_{\tilde{\lambda},c}^{u,loc}(\Lambda_{\tilde{\lambda},c}) = \text{Graph}(\Psi_{\tilde{\lambda},c}) + \Lambda_{\tilde{\lambda},c}(0)$ für eine C^2 -Abbildung $\Psi_{\tilde{\lambda},c}(\cdot) : E_u \cap \tilde{Y} \cap \mathcal{U} \rightarrow (E_c + E_s) \cap \tilde{Y}$, wobei die Vektorräume $E_u \cap \tilde{Y}$ bzw. $(E_c + E_s) \cap \tilde{Y}$ mit der \tilde{Y} -Norm versehen sind und \mathcal{U} eine kleine Umgebung der Null bezeichnet.
- $W^{u,loc}(\Lambda)$ ist bei $0 \in W_{0,c_0}^{u,loc}(\Lambda_{0,c_0})$ tangential an $\tilde{E}^u := E_u \cap \tilde{Y}$
- $W^{u,loc}(\Lambda)$ besteht genau aus allen Anfangswerten von Lösungen $U(t)$ der abstrakten Gleichung (3.119), die für $t \leq 0$ in einer kleinen Umgebung der Null bleiben und

$$|U(t) - \Lambda_{\tilde{\lambda},c}(t)| \leq M e^{-\sigma|t|} \quad (3.133)$$

für $t \rightarrow -\infty$ mit einem $\sigma > 0$ erfüllen. σ kann dabei groß genug gewählt werden, so dass die Ungleichung (3.133) mit $U(t) \equiv 0$ nicht erfüllt ist.

- Außerdem ist $W_{\tilde{\lambda},c}^{u,loc}(\Lambda_{\tilde{\lambda},c})$ stetig in $\tilde{\lambda}$ und C^1 bezüglich c (also ist die Abbildung $\Psi_{\tilde{\lambda},c}(V)$ für festes V stetig differenzierbar bezüglich c und stetig in $\tilde{\lambda}$).

Weiterhin ist die Abbildung $\tilde{\lambda} \mapsto D_{V_0^u} \Psi_{\tilde{\lambda},c}(V_0^u)|_{V_0^u=V_u} \in L(\tilde{E}_u, \tilde{Y})$ für ein festes $V_u \in \tilde{E}_u$ stetig.

Beweis

Zunächst einmal gilt

$$\Lambda_{\tilde{\lambda},c}(t) = \begin{pmatrix} \vartheta_{\tilde{\lambda},c}(t) \\ \vartheta_{\tilde{\lambda},c}(t + \cdot) \end{pmatrix}$$

für eine Lösung $\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ der Gleichung $\dot{x}(t) = f(x_t, \tilde{\lambda}, c)$. Wir führen zunächst wieder eine Parametrisierung für Lösungen $U(t)$ von (3.119) ein und schreiben $U(t) = \Lambda_{\tilde{\lambda},c}(t) + V(t)$. Für $V(t)$ erhalten wir dann die folgende Gleichung

$$\dot{V}(t) = \mathcal{A}_{\tilde{\lambda},c}(t)V(t) + G(t, V(t), \tilde{\lambda}, c). \quad (3.134)$$

Hierbei ist $\mathcal{A}_{\tilde{\lambda},c}(t) : X \rightarrow Y$ für $(\xi, \Phi(\cdot)) \in X$ durch

$$\mathcal{A}_{\tilde{\lambda},c}(t) \begin{pmatrix} \xi \\ \Phi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f(\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(t + \cdot), \tilde{\lambda}, c) \Phi(\cdot) \\ \partial_\theta \Phi(\cdot) \end{pmatrix}$$

definiert und $G(t, \cdot, \tilde{\lambda}, c) : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$ ist eine C^2 -Abbildung mit

$$G(t, (\xi, \varphi), \tilde{\lambda}, c) := \begin{pmatrix} f(\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(t + \cdot) + \varphi, \tilde{\lambda}, c) - D_1 f(\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(t + \cdot), \tilde{\lambda}, c) \varphi - f(\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(t + \cdot), \tilde{\lambda}, c) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entscheidend ist nun die Beobachtung, dass die Abbildung $c \mapsto G(\cdot, V, \tilde{\lambda}, c)$ als Abbildung von $(-\delta + c_0, c_0 + \delta)$ nach $BC^0(\mathbb{R}_-, \tilde{Y})$ stetig ist. Für festes $\tilde{\lambda} > 0$ konvergieren nämlich alle Funktionen $\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(t)$ für $t \rightarrow -\infty$ mit $\tilde{\lambda}$ -abhängiger, exponentieller Rate gegen null und besitzen die Amplitude $\mathcal{O}(\sqrt{\tilde{\lambda}})$ (letzteres bedeutet, dass Supremum der Funktion $\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(t)$

auf \mathbb{R}_- von der Ordnung $\sqrt{\tilde{\lambda}}$ ist). Auf die gleiche Art und Weise kann man Differenzierbarkeit der Abbildung $c \mapsto G(\cdot, V, \tilde{\lambda}, c)$ für festes $\tilde{\lambda} \geq 0$ zeigen. Man beachte dabei, dass die Familie $\Lambda_{\tilde{\lambda}, c}(t)$ für $\tilde{\lambda} = 0$ identisch Null ist.

Wir modifizieren G wieder mit einer Cut-off-Funktion $\chi_\varepsilon(\cdot)$ und betrachten also

$$G_{mod}(t, V, \tilde{\lambda}, c) := \chi_\varepsilon(\langle V, V \rangle_{\tilde{Y}}) G(t, V, \tilde{\lambda}, c).$$

Wir schreiben nun die Gleichung (3.134) in einer etwas anderen Form, indem wir den Linearteil $\mathcal{A}_{\tilde{\lambda}, c}(t)$ in der Gestalt $\mathcal{A}_{\tilde{\lambda}, c}(t) = \mathcal{A}_{0, c_0} + B_{\tilde{\lambda}, c}(t)$ schreiben. Dann gilt

$$B_{\tilde{\lambda}, c}(t) \begin{pmatrix} \xi \\ \Phi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f(\vartheta_{\tilde{\lambda}, c}(t + \cdot), \tilde{\lambda}, c) \Phi(\cdot) - D_1 f(0, 0, c_0) \Phi(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$B_{\tilde{\lambda}, c}(t)$ ist damit für jedes feste t eine beschränkte lineare Abbildung von \tilde{Y} nach \tilde{Y} und $c \mapsto B_{\tilde{\lambda}, c}(t)V$ ist als Abbildung mit Werten in \tilde{Y} für ein festes $V \in \tilde{Y}$ stetig differenzierbar (da die Lösungen $\vartheta_{\tilde{\lambda}, c}(\cdot)$ glatt bezüglich ihres Argumentes und differenzierbar bezüglich c sind). Wir betrachten nun die abstrakte Gleichung

$$\dot{V}(t) = \mathcal{A}_{0, c_0}(t)V(t) + \left(B_{\tilde{\lambda}, c}(t)V(t) + G(t, V(t), \tilde{\lambda}, c) \right). \quad (3.135)$$

Man beachte hierbei, dass \mathcal{A}_{0, c_0} autonom ist und Lösungsoperatoren $T_s(t)$, $T_u(t)$ und $T_c(t)$ besitzt. Diese Operatoren erfüllen

$$|T_c(t)\Pi_c V_0|_{\tilde{Y}} \leq M|V_0|_{\tilde{Y}} \quad |T_s(t)\Pi_s V_0|_{\tilde{Y}} \leq M e^{-\sigma t}|V_0|_{\tilde{Y}} \quad |T_u(-t)\Pi_u V_0|_{\tilde{Y}} \leq M e^{-\sigma t}|V_0|_{\tilde{Y}}$$

für $t \in \mathbb{R}$ in der ersten und $t \geq 0$ in den beiden anderen Gleichungen (die Projektionen Π_u, Π_s, Π_c regularisieren; siehe Lemma 3.4). Definiere noch $T_{cs}(t) : E_c + E_s \rightarrow E_c + E_s$ durch $T_{cs}(t) := T_c(t)\Pi_c + T_s(t)\Pi_s$ für $t \geq 0$ und $\Pi_{cs} := \Pi_s + \Pi_c$. Dann gilt $|T_{cs}(t)\Pi_{cs}V|_{\tilde{Y}} \leq M|V|_{\tilde{Y}}$ für alle $t \geq 0$ und $V \in \tilde{Y}$.

Wir suchen nun $V(\cdot)$ als Fixpunkt der Integralgleichung

$$\begin{aligned} V(t) &= T_u(t)V_0^u + \int_0^t T_u(t-s)\Pi_u \left[B_{\tilde{\lambda}, c}(s)V(s) + G_{mod}(s, V(s), \tilde{\lambda}, c) \right] ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^t (T_{cs}(t-s)\Pi_{cs}) \left[B_{\tilde{\lambda}, c}(s)V(s) + G_{mod}(s, V(s), \tilde{\lambda}, c) \right] ds, \end{aligned} \quad (3.136)$$

wobei $V(\cdot) \in BC^{-\rho} := BC^{-\rho}(\mathbb{R}_-, \tilde{Y})$ ist, $V_0^u \in \tilde{E}_u := E_u \cap \tilde{Y}$ gilt und der Raum \tilde{E}_u mit der \tilde{Y} -Norm versehen ist.

Wir haben im Beweis von Lemma 3.15 gesehen, dass ein Fixpunkt $V(\cdot) \in BC^{-\rho}(\mathbb{R}_-, \tilde{Y})$ eine differenzierbare Lösung induziert, wenn man $V(\cdot)$ als Abbildung mit Werten in \tilde{Y} auffasst).

Die rechte Seite von (3.136) definiert nun eine wohldefinierte Abbildung \mathcal{K} von $BC^{-\rho}$ in sich, falls wir $0 < \rho < \sigma$ und das ε der cut-off-Funktion klein genug wählen. Wir erinnern daran, dass Funktionen $V(\cdot) \in BC^{-\rho}$ die Abschätzung $|V|_{BC^{-\rho}} := \sup_{t \leq 0} e^{\rho|t|}|V(t)|_{\tilde{Y}} < \infty$ erfüllen; sie klingen also exponentiell mit Rate größer oder gleich ρ ab. Wir betrachten dazu den Term $\int_{-\infty}^t T_u(t-s)G_{mod}(s, V(s), \tilde{\lambda}, c)ds$; sei dazu $V(\cdot) \in BC^{-\rho}$. Dann haben wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^t T_{cs}(t-s)V(s)ds \right|_{\tilde{Y}} &\leq M \int_{-\infty}^t e^{\rho s} |V|_{BC^{-\rho}} ds \\ &\leq M \int_{-\infty}^t e^{\rho s} ds |V|_{BC^{-\sigma}} \leq M [e^\rho / (\rho)] |V|_{BC^{-\rho}} \\ &\leq \tilde{M} |V|_{BC^{-\rho}} e^{\rho t} \end{aligned}$$

und wegen der Wahl $0 < \rho < \sigma$ kann man ebenfalls die anderen in (3.136) auftauchenden Terme abschätzen. Also definiert die rechte Seite von (3.136) eine wohldefinierte Abbildung von $BC^{-\rho}$ in sich und es gilt

$$\mathcal{K} : \tilde{E}_u \times BC^{-\rho} \times (-\delta, \delta) \times (-\delta + c_0, \delta + c_0) \rightarrow BC^{-\rho}.$$

Man beachte nun, dass die Operatornorm $|B_{\tilde{\lambda},c}(t)|_{L(\tilde{Y},\tilde{Y})}$ uniform klein bezüglich t ist und für $\tilde{\lambda} \rightarrow 0$ und $c \rightarrow c_0$ gegen null konvergiert. Daher brauchen wir diesen Term nicht zusätzlich mit einer cut-off-Funktion zu modifizieren. Ist also $\tilde{\lambda} \approx 0$, $\varepsilon \approx 0$ und $c \approx c_0$, so definiert \mathcal{K} eine Kontraktion von $BC^{-\rho}$ in sich, die von den Parametern $V_0^u, \tilde{\lambda}, c$ abhängt. Dabei hängt \mathcal{K} für festes $c, \tilde{\lambda}$ zweimal stetig differenzierbar von V_0^u ab. Desweiteren ist $\mathcal{G}_{mod}(t, V, \tilde{\lambda}, c) = \mathcal{O}(|V|_{\tilde{Y}}^2)$ uniform in $\tilde{\lambda}, c$ und damit ist die Nichtlinearität \mathcal{G}_{mod} eine C^2 -Abbildung von $BC^{-\rho}$ in sich. Wählt man nun die globale Lipschitzkonstante von \mathcal{G}_{mod} klein genug (also das ε der Cut-off-Funktion klein genug), so definiert $\mathcal{K}(V_0^u, \cdot, \tilde{\lambda}, c)$ eine zweimal stetig differenzierbare, bezüglich $\tilde{\lambda}, c$ uniforme Kontraktion und besitzt nach dem Banachschen Fixpunktsatz mit Parametern einen Fixpunkt $V_*(\cdot)$, der zweimal stetig differenzierbar von V_0^u , stetig differenzierbar von c und stetig von $\tilde{\lambda}$ abhängt. Man kann deswegen eine Abbildung $\Psi : \tilde{E}_u \times (-\delta, \delta) \times (-\delta + c_0, c_0 + \delta) \rightarrow \tilde{E}_s + \tilde{E}_c$ mit $\Psi : (V_0^u, \tilde{\lambda}, c) \mapsto (id - \Pi_u)V_*(0)$ definieren, wobei wir $id - \Pi_u$ als Abbildung von \tilde{Y} nach \tilde{Y} auffassen. Die gesuchte Mannigfaltigkeit $W_{\tilde{\lambda},c}^{u,loc}(\Lambda_{\tilde{\lambda},c})$ ist dann durch

$$W_{\tilde{\lambda},c}^{u,loc}(\Lambda_{\tilde{\lambda},c}) = \text{Graph}\Psi(\cdot, \tilde{\lambda}, c) + \Lambda_{\tilde{\lambda},c}(0) \quad (3.137)$$

gegeben.

Um zu zeigen, dass die Abbildung $\tilde{\lambda} \mapsto D_{V_0^u}\Psi_{\tilde{\lambda},c}(V_0^u)|_{V_0^u=V_u} \in L(\tilde{E}_u, \tilde{Y})$ für ein festes $V_u \in \tilde{E}_u$ stetig ist, leiten wir die Fixpunktgleichung (3.136) angewendet auf ein Element $Z_u \in \tilde{E}_u$ nach V_0^u ab. Dies ist erlaubt, da der Fixpunkt zweimal stetig differenzierbar von V_0^u abhängt. Die Ableitung des Fixpunktes nach V_0^u erfüllt die entstehende Fixpunktgleichung

$$\begin{aligned} D_{V_0^u}V(t, V_u)Z_u &= T_u(t)\Pi_u D_{V_0^u}V(0, V_u)Z_u + \int_0^t T_u(t-s)\Pi_u [B_{\tilde{\lambda},c}(s)D_{V_0^u}V(t, V_u)Z_u] \\ &+ T_u(t-s)\Pi_u [D_V G_{mod}(s, V(s), \tilde{\lambda}, c)D_{V_0^u}V(t, V_u)Z_u] ds \\ &+ \int_{-\infty}^t (T_{cs}(t-s)\Pi_{cs}) [B_{\tilde{\lambda},c}(s)D_{V_0^u}V(t, V_u)Z_u] \\ &+ (T_{cs}(t-s)\Pi_{cs}) [D_V G_{mod}(s, V(s), \tilde{\lambda}, c)D_{V_0^u}V(t, V_u)Z_u] ds. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung definiert nun wiederum eine uniforme Kontraktion $\tilde{K}(\cdot, Z_u, \tilde{\lambda}, c)$ bezüglich $\tilde{\lambda}, c$ auf $BC^{-\rho}$, die stetig von $\tilde{\lambda}$ abhängt. Daher hängt auch der Fixpunkt $D_{V_0^u}V(\cdot, V_u)Z_u$ stetig von $\tilde{\lambda}$ ab. Tatsächlich gilt sogar $\|D_{V_0^u}V(0, V_u)Z_u\|_{\tilde{Y}} \leq \|D_{V_0^u}V(\cdot, V_u)Z_u\|_{BC^{-\rho}} \leq M|Z_u|_{\tilde{Y}}$ mit einem bezüglich $Z_u, \tilde{\lambda}, c$ uniformen M und die Operatornorm von $D_{V_0^u}V(0, V_u) \in L(\tilde{E}_u, \tilde{Y})$ hängt stetig von $\tilde{\lambda}$ ab; damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Lemma 3.24

Sei $U^{\tilde{\lambda}} \in W^{u,loc}(\Lambda)$ mit $U^{\tilde{\lambda}} := \Lambda_{\tilde{\lambda},c} + V_0^u + \Psi(V_0^u, \tilde{\lambda}, c)$ für ein festes c und $V_0^u \in \tilde{E}_u$. Dann gilt $U^{\tilde{\lambda}} - U^0 = \mathcal{O}(\sqrt{\tilde{\lambda}})$.

Beweis

Betrachten wir die Fixpunktgleichung (3.136), so stellen wir folgendes fest: Sei $V_0^u \in \tilde{E}_u$ fest gewählt und $U^{\tilde{\lambda}} := \Lambda_{\tilde{\lambda},c}(0) + (V_0^u + \Psi(V_0^u, \tilde{\lambda}, c))$. Dann gilt $U^{\tilde{\lambda}} - U^0 = \Lambda_{\tilde{\lambda},c} + (\Psi(V_0^u, \tilde{\lambda}, c) - \Psi(V_0^u, 0, c)) = \mathcal{O}(\sqrt{\tilde{\lambda}})$, da die Gleichung (3.136) diese Eigenschaft erfüllt, d.h. es gilt $\mathcal{K}(V(\cdot), V_0^u, \tilde{\lambda}, c) - \mathcal{K}(V(\cdot), V_0^u, 0, c) = \mathcal{O}(\sqrt{\tilde{\lambda}})$. Deswegen erfüllt auch der Fixpunkt $V_*(\cdot, \tilde{\lambda})$ diese Eigenschaft und wegen $U^{\tilde{\lambda}} = \Lambda_{\tilde{\lambda},c} + V_*(V_0^u, 0, \tilde{\lambda}, c)$ gilt die Behauptung. \square

Die erweiterten Mannigfaltigkeiten und Transversalität

Wir können nun die erweiterten Mannigfaltigkeiten $\bar{W}_{\tilde{\lambda}}^{u,-}$ und $\hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{cs,+}$ betrachten, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned}\hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{cs,+} &:= \{(U, c) : |c - c_0| < \delta, \quad U \in W_{\tilde{\lambda},c}^{cs,+}(0)\} \\ \bar{W}_{\tilde{\lambda}}^{u,-} &:= \{(U, c) : |c - c_0| < \delta, \quad U \in W_{\tilde{\lambda},c}^{u,loc}(\Lambda_{\tilde{\lambda},c})\}.\end{aligned}$$

Man beachte, dass beide Mannigfaltigkeiten stetig bezüglich $\tilde{\lambda}$ sind. Wir wählen nun die homokline Lösung $H(t)$ in einer Weise, dass o.E. $(H(0), c_0) \in W_{0,c_0}^{u,loc}(\Lambda_{0,c_0})$ gilt (ansonsten betrachten wir die homokline Lösung $\tilde{H}(t) = H(t + t_0)$ für ein $t_0 < 0$). Analog zu dem vorigen Kapitel kann man nun zeigen, dass sich beide Mannigfaltigkeiten in $(H(0), c_0)$ transversal schneiden, siehe Abbildung 3.11.

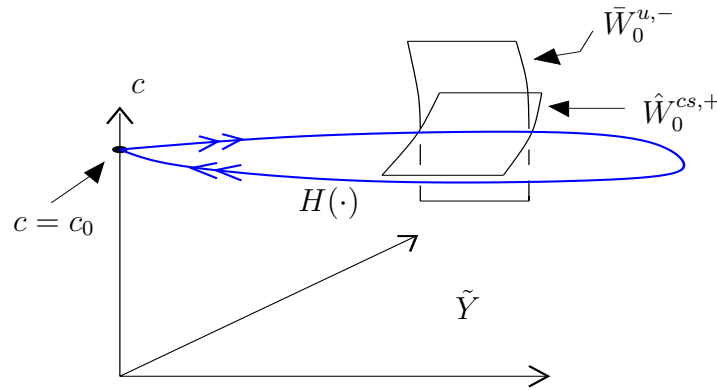


Abbildung 3.7: Die Abbildung zeigt den Schnitt der beiden Mannigfaltigkeiten $\hat{W}_0^{cs,+}$ und $\bar{W}_0^{u,-}$ entlang der Lösung $(H(\cdot), c_0)$ im erweiterten Phasenraum $\tilde{Y} \times \mathbb{R}$.

Lemma 3.25

Es gilt

$$T_{(H(0),c_0)}\hat{W}_0^{cs,+} + T_{(H(0),c_0)}\bar{W}_0^{u,-} = \tilde{Y} \times \mathbb{R}$$

für $\tilde{\lambda} = 0$.

Beweis

Für die Parameterwerte $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c)$ gilt $\Lambda_{\tilde{\lambda},c}(t) = \Lambda_{0,c}(t) \equiv 0$. Außerdem gilt für die

Tangentialräume von $\hat{W}_0^{cs,+}$ und $\bar{W}_0^{u,-}$

$$\begin{aligned} T_{(H(0),c_0)}\hat{W}_0^{cs,+} &= (\tilde{E}_+^{cs}(0) \times \{0\}) + \text{span}\{(H'(0), c_0)\} + \text{span}\{(\tilde{V}_{0,c_0}^{cs,+}(0), 1)\}, \\ T_{(H(0),c_0)}\bar{W}_0^{u,-} &= (\tilde{E}_-^u(0) \times \{0\}) + \text{span}\{(H'(0), c_0)\} + \text{span}\{(\tilde{V}_{0,c_0}^{u,-}(0), 1)\} \end{aligned}$$

Speziell die zweite dieser Aussagen ist nicht ganz trivial. Bezeichne dazu mit $W_{0,c}^{u,-}(0) \subset \tilde{Y}$ die instabile Mannigfaltigkeit nahe des Punktes $H(0)$ bezüglich der Parameterwerte $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c)$, die in Abschnitt 3.4.1 eingeführt wurde. Wir argumentieren nun, dass $\hat{W}_-^u := \{(U, c) : |c - c_0| \leq \delta, U \in W_{0,c}^{u,-}(0)\}$ nahe $(H(0), c_0)$ mit $\bar{W}_0^{u,-}$ übereinstimmt. Sei dazu etwa $(U_+, c) \in \bar{W}_0^{u,-}$. Dann existiert eine Lösung $U(\cdot)$ von (3.119) auf \mathbb{R}_- , die für $t \rightarrow -\infty$ exponentiell gegen das Gleichgewicht $\Lambda_{0,c}(t) \equiv 0$ konvergiert. Da $U(t)$ für $t < 0$ eine klassische Lösung von (3.119) ist, erfüllt $V(\cdot)$ mit $U(\cdot) = H(\cdot) + V(\cdot)$ die Fixpunktgleichung (3.114). Also ist $(U(0), c) = (U_+, c) \in \hat{W}_-^u$.

Sei andererseits $(Y_+, c) \in \hat{W}_-^u$. Dann gilt $Y_+ = H(0) + V(0)$ für eine exponentiell abklingende Funktion $V(\cdot) \in BC^{-\gamma}$, die die Fixpunktgleichung (3.114) erfüllt. Also konvergiert $Y(\cdot)$ exponentiell gegen $0 = \Lambda_{0,c}(\cdot)$ (da $H(0)$ in Rückwärtszeit ebenfalls exponentiell gegen Null konvergiert). Nach Definition von $W_{\tilde{\lambda},c}^{u,loc}(\Gamma_{\tilde{\lambda},c}(0))$ ist also $Y(0) \in W_{0,c}^{u,loc}(\Lambda_{0,c}(0))$. Deswegen ist $(Y(0), c) \in \bar{W}_{0,c}^{u,-}$. Der Rest des Lemmas folgt nun ganz analog zum Lemma 3.21. \square

Korollar 3.3

$\hat{W}_{\tilde{\lambda}}^{cs,+}$ und $\bar{W}_{\tilde{\lambda}}^{u,+}$ besitzen für $\tilde{\lambda} > 0$ einen Schnittpunkt $(U^{\tilde{\lambda}}, c(\tilde{\lambda}))$. Dieser hängt stetig von $\tilde{\lambda}$ ab.

Beweis

Für die Definitionen der im Beweis auftretenden Projektionen $P_{cs} := \Phi^{cs,+}(0, 0)|_{\tilde{Y}} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$ und $\Pi_u : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$ sei auf Gleichung (3.115) und den Abschnitt kurz nach Gleichung (3.90) verwiesen. Zum Beweis des Korollars betrachten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \tilde{E}_+^{cs}(0) \times \tilde{E}_u &\times (-\delta + c_0, c_0 + \delta) \times (-\delta, \delta) \rightarrow \tilde{Y} \times \mathbb{R} \\ \mathcal{H} : (V_0^{cs}, V_0^u, c, \tilde{\lambda}) &\mapsto (\Lambda_{\tilde{\lambda},c} + (V_0^u + \Psi(V_0^u, \tilde{\lambda}, c)), c) \\ &- \left((H(0) + V_0^{cs} + \Psi^{cs}(V_0^{cs}, \tilde{\lambda}, c), c) \right) \end{aligned} \quad (3.139)$$

wobei $(H(0) + \text{Graph}(\Psi^{cs}(\cdot, \tilde{\lambda}, c)), c) = (W^{cs,+}(0), c)$ und $(\Lambda_{\tilde{\lambda},c} + \text{Graph}(\Psi(\cdot, \tilde{\lambda}, c)), c) = (W_{\tilde{\lambda},c}^{u,loc}(\Lambda_{\tilde{\lambda},c}), c)$ gilt. Nun gilt $\mathcal{H}(0, \Pi_u H(0), 0, c_0) = 0$ und wegen des vorigen Lemmas können wir den impliziten Funktionensatz anwenden. Da die Abbildung \mathcal{H} hingegen nicht differenzierbar bezüglich $\tilde{\lambda}$ ist, müssen wir etwas vorsichtiger argumentieren. Wir bezeichnen dazu mit $C \subset \tilde{E}_+^{cs}(0) \times \tilde{E}_u \times \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Komplement zu $K := \text{Kern}(D_{(V_0^{cs}, V_0^u, c)} H(0, \Pi_u H(0), c_0, 0))$, setzen $\tilde{L} := (D_{(V_0^{cs}, V_0^u, c)} \mathcal{H}(0, \Pi_u H(0), c_0, 0)|_C)^{-1} : \tilde{Y} \times \mathbb{R} \rightarrow C$ und definieren

$$\begin{aligned} H_{hilf} &: C \times K \times \mathbb{R} \rightarrow C \\ H_{hilf} &: (W, l, \tilde{\lambda}) \mapsto W - \tilde{L}\mathcal{H}(P_{cs}(W + l), \Pi_u(W + l), c, \tilde{\lambda}). \end{aligned} \quad (3.140)$$

Dann gilt

$$H_{hilf}((0, \Pi_u H(0), c_0)_C, (0, \Pi_u H(0), c_0)_K, 0) = (0, \Pi_u H(0), c)_C$$

wobei der Index „C“ bzw. „K“ den auf C bzw. K projizierten Anteil von $(0, \Pi_u H(0), c_0)$ bezeichnet. Es gilt auch $D_{(V_0^{cs}, V_0^u, c)} H_{hilf}((0, \Pi_u H(0), c_0)_C, (0, \Pi_u H(0), c_0)_K, 0) = 0$. Wegen der Tatsache, dass die Abbildung $\tilde{\lambda} \mapsto D_{V_0^u} \Psi_{\tilde{\lambda}, c}(V_0^u)|_{V_0^u=V_u} \in L(\tilde{E}_u, \tilde{Y})$ für ein festes $V_u \in \tilde{E}_u$ stetig ist (siehe Satz 3.18), gilt nun auch, dass

$$\tilde{\lambda} \mapsto D_{(V_0^{cs}, V_0^u, c)} \mathcal{H}(V_0^{cs}, V_0^u, \tilde{\lambda}, c)$$

als Abbildung mit Werten in $L(C, \tilde{Y} \times \mathbb{R})$ stetig ist und deswegen ist die Operatornorm $\|\tilde{L}D_{(V_0^{cs}, V_0^u, c)} \mathcal{H}(V_0^{cs}, V_0^u, \tilde{\lambda}, c)\| < \theta < 1$ für ein $0 < \theta < 1$, falls $(V_0^{cs}, V_0^u, \tilde{\lambda}, c) \approx (0, \Pi_u H(0), 0, c_0)$. Man kann deswegen auf H_{hilf} in (3.140) den Banachschen Fixpunktsatz mit Parametern anwenden (siehe etwa [19], Seite 13), um die Existenz eines Fixpunktes zu gewährleisten, der stetig von $\tilde{\lambda} \approx 0$ abhängt. Wir nennen diesen Fixpunkt $W = W(\tilde{\lambda}, l) = (V_0^{cs}(\tilde{\lambda}, l), V_0^u(\tilde{\lambda}, l), c(\tilde{\lambda}, l))$ mit $l \in K$ und definieren für ein beliebiges, fest gewähltes $l_* \neq 0$:

$$(U^{\tilde{\lambda}}, c(\tilde{\lambda})) := (H(0) + V_0^{cs}(\tilde{\lambda}, l_*) + \Psi(V_0^{cs}(\tilde{\lambda}, l_*), c(\tilde{\lambda}, l_*), \tilde{\lambda}), c(\tilde{\lambda}, l_*))$$

□

Man beachte, dass jeder Punkt $(U^{\tilde{\lambda}}, c(\tilde{\lambda})) \in \bar{W}_{\tilde{\lambda}}^{u,-}$ Anlass zu einer Lösung von (3.119) gibt, die für $t \rightarrow -\infty$ gegen das Gleichgewicht Null konvergiert (mit $\tilde{\lambda}$ -abhängiger exponentieller Rate).

Darlegung der Strategie für den Abschluss des Beweises von Satz 3.2

Um den Beweis des Theorems 3.2 abzuschließen, zeigen wir, dass die Funktion $U^{\tilde{\lambda}}(\cdot)$ nicht in der stark-stabilen Mannigfaltigkeit $W_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})}^{ss,+}(0)$ enthalten ist und deswegen in Vorwärtszeit gegen den periodischen Orbit von $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})}$ konvergieren muss. Man beachte, dass alle Lösungen der lokalen zentrumsstabilen Mannigfaltigkeit, die in Vorwärtszeit gegen das Gleichgewicht konvergieren, tatsächlich mit exponentieller Rate gegen null konvergieren müssen, da das Gleichgewicht auf der Zentrumsmannigfaltigkeit instabil ist. Der Beweis des Satzes 3.2 wird direkt geführt; zur Erklärung der Beweisidee ist es allerdings einfacher, ein indirektes Argument anzuführen. Das folgende Szenario ist in Abbildung 3.8 veranschaulicht. Wir nehmen nun an, dass $U^{\tilde{\lambda}}$ in der stark stabilen Mannigfaltigkeit $W^{ss,+}(0)$ liegt und zeigen, dass der Abstand von $W^{ss,+}(0) = W_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})}^{ss,+}(0)$ zu $W_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})}^{loc,u}(0)$ von der Ordnung $\tilde{\lambda}$ ist. Mit „Abstand“ meinen wir hier die Norm der Differenz des Punktes $U^{\tilde{\lambda}}$ zu einem geeigneten Punkt $Z^{\tilde{\lambda}} \in W_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})}^{u,loc}(0)$, den wir etwas später genauer definieren werden.

Außerdem liegt der Punkt $U^{\tilde{\lambda}}$ in der instabilen Faser $W_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})}^{u,loc}(\Lambda_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})})$ und wir zeigen, dass der Abstand von $U^{\tilde{\lambda}}$ zu $Z^{\tilde{\lambda}}$ nun von der Ordnung $C\sqrt{\tilde{\lambda}}$ für ein $C \neq 0$ ist. Dieser Widerspruch zeigt dann, dass sich die stark-stabile Mannigfaltigkeit $W^{ss,+}(0)$ und die instabile Faser $W^{u,loc}(\Lambda)$ für Parameterwerte $(\tilde{\lambda}, c) \approx (0, c_0)$ mit $\tilde{\lambda} > 0$ nicht schneiden können. Wir beginnen mit einem technischen Lemma.

Lemma 3.26

Es gilt $|c(\tilde{\lambda}) - c_0| \leq K|\tilde{\lambda}|$

Beweis

Wir betrachten die erweiterte zentrumsinstabile Mannigfaltigkeit

$$\tilde{W}_{\tilde{\lambda}}^{cu,-} := \{(U, c) : |c - c_0| < \delta, U \in W_{\tilde{\lambda}, c}^{cu,-}\},$$

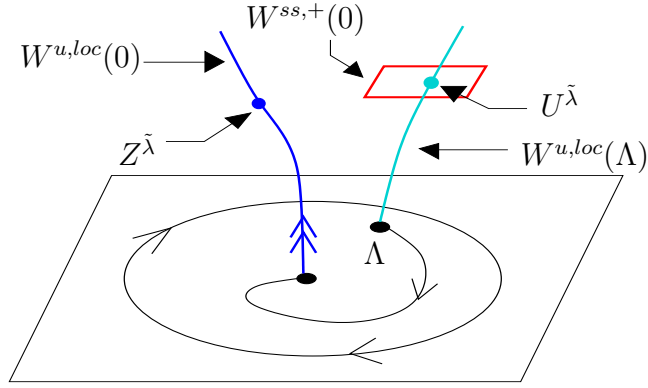


Abbildung 3.8: Die Abbildung zeigt die Mannigfaltigkeiten $W^{u,loc}(0)$, $W^{u,loc}(\Lambda)$ und $W^{ss,+}(0)$ für einen Parameterwert $(\tilde{\lambda}, c) \approx (0, c_0)$, $\tilde{\lambda} > 0$ in dem Szenario des Abschnittes „Darlegung der Strategie für den Abschluss des Beweises von Satz 3.2“

siehe Abschnitt 3.4.1 für die Definition von $W_{\tilde{\lambda},c}^{cu,-}$. Beide Mannigfaltigkeiten $\tilde{W}_{\tilde{\lambda}}^{cu,-}$, $\tilde{W}_{\tilde{\lambda}}^{cs,+}$ sind glatt bezüglich $\tilde{\lambda}$. Seien nun $(U_+, c) \in \tilde{W}_{\tilde{\lambda}}^{cs,+}$; $(U_-, c) \in \tilde{W}_{\tilde{\lambda}}^{cu,-}$ beliebige Punkte nahe $(H(0), c_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (U_+, c) &= (\tilde{H}(0), c_0) + (V_+^{cs}, 0) + (c - c_0)(\tilde{V}_{0,c_0}^{cs}(0), 1) + \\ &\quad \mathcal{O}((c - c_0)^2 + |V_+^{cs}|^2 + |\tilde{\lambda}|) \\ (U_-, c) &= (\tilde{H}(0), c_0) + (V_-^{cu}, 0) + (c - c_0)(\tilde{V}_{0,c_0}^{cu}(0), 1) + \\ &\quad \mathcal{O}((c - c_0)^2 + |V_-^{cu}|^2 + |\tilde{\lambda}|) \end{aligned}$$

mit $V_+^{cs} \in \tilde{E}_+^{cs}(0)$, $V_-^{cu} \in \tilde{E}_-^{cu}(0)$. Wir projizieren nun die Differenz $(U_+, c) - (U_-, c)$ auf den von $(\Psi^0, 0)$ erzeugten², eindimensionalen Unterraum entlang eines beliebig fest gewählten Komplements und erhalten

$$\langle (\Psi^0, 0), (U_+, c) - (U_-, c) \rangle_Y = (c - c_0)M + \mathcal{O}(|c - c_0|^2 + |V_+^{cs}|^2 + |V_-^{cu}|^2 + |\tilde{\lambda}|).$$

Setzen wir nun den Punkt $(U^{\tilde{\lambda}}, c(\tilde{\lambda}))$ in diese Gleichung ein, so verschwindet die linke Seite. Außerdem ist der Abstand von $(U^{\tilde{\lambda}}, c(\tilde{\lambda}))$ zu $(H(0), c_0)$ von der Ordnung $\sqrt{\tilde{\lambda}}$, d.h. es gilt $(U^{\tilde{\lambda}}, c(\tilde{\lambda})) - (H(0), c_0) = \mathcal{O}(\sqrt{\tilde{\lambda}})$: Man beachte nämlich, dass aufgrund des Lemmas 3.24 die $(U^{\tilde{\lambda}}, c(\tilde{\lambda}))$ definierende Funktion \mathcal{H} (siehe (3.139)) diese Eigenschaft besitzt (d.h. es gilt $\mathcal{H}(V_0^{cs}, V_0^u, c, \tilde{\lambda}) - \mathcal{H}(V_0^{cs}, V_0^u, c, 0) = \mathcal{O}(\sqrt{\tilde{\lambda}})$). Deswegen gilt dies auch für die Abbildung $(U^{\tilde{\lambda}}, c(\tilde{\lambda}))$.

Damit ergibt sich

$$(c(\tilde{\lambda}) - c_0) = \mathcal{O}(|\tilde{\lambda}|)$$

und daraus die Behauptung. \square

Wir benötigen nun die Existenz einer stark-stabilen Mannigfaltigkeit $W^{ss,+}(0) \subset W^{cs,+}(0)$ nahe des Punktes $H(0)$. Diese soll alle Lösungen enthalten, die in Vorwärtszeit $t \rightarrow \infty$ exponentiell schnell gegen das Gleichgewicht konvergieren und deren Anfangswerte genügend

²siehe den Beweis von Lemma 3.21 für die Definition von Ψ^0

nahe $H(0)$ sind. Man beachte, dass die Existenz dieser Mannigfaltigkeit im Fall algebraischer Konvergenz der homoklinen Lösung $H(t)$ für $t \rightarrow \infty$ nur *lokal* in der Nähe der Null gezeigt werden konnte.

Lemma 3.27

Gelte $H(t) \rightarrow 0$ exponentiell schnell für $t \rightarrow \infty$. Dann existiert eine stark-stabile C^2 -Mannigfaltigkeit $W^{ss,+}(0) = W_{\tilde{\lambda},c}^{ss,+}(0) \subset \tilde{Y}$ nahe $H(0)$, die folgende Eigenschaften besitzt:

- $W^{ss,+}(0)$ ist lokal invariant und enthält alle Punkte $U_+ \in \tilde{Y}$, die nahe genug an $H(0)$ liegen und zu denen eine Lösung $U(t)$ von (3.119) existiert, die $U(0) = U_+$ und $|H(t) - U(t)|_{\tilde{Y}} \leq Me^{-\varsigma t}$ für $t \rightarrow \infty$ und einem $\varsigma > 0$ erfüllt
- Ist andererseits $U_+ \in W^{ss,+}(0)$, so existiert eine auf \mathbb{R}_+ definierte Lösung $U(\cdot)$, die mit exponentieller Rate ς gegen null konvergiert.
- Die Mannigfaltigkeit $W_{\tilde{\lambda},c}^{ss,+}(0)$ hängt zweimal stetig differenzierbar von den Parametern $\tilde{\lambda}$ und c ab. Dies bedeutet, dass $W_{\tilde{\lambda},c}^{ss,+}(0)$ lokal durch den Graph einer Funktion $\Psi(\cdot, \tilde{\lambda}, c)$ in \tilde{Y} dargestellt werden kann und die Abbildung $(\tilde{\lambda}, c) \mapsto \Psi(U, \tilde{\lambda}, c)$ mit Werten in \tilde{Y} und für ein festes $U \in \tilde{Y}$ zweimal stetig differenzierbar ist.

Beweis

Wir behaupten, dass ein (bezüglich \tilde{Y}) abgeschlossener Unterraum $\tilde{E}_+^s \subset \tilde{E}_+^{cs}(0)$ und ein Lösungsoperator $\Phi_+^s(t, \tau)$ für $t \geq \tau \geq 0$ existiert, so dass $\tilde{E}_+^s = \text{Bild}(\Phi_+^s(0, 0)|_{\tilde{Y}})$ und

$$|\Phi_+^s(t, \tau)V_+|_{\tilde{Y}} \leq Me^{-\beta|t-\tau|}|V_+|_{\tilde{Y}}$$

für alle $V_+ \in \tilde{Y}$ gilt. Um dies einzusehen, erinnern wir uns, wie wir die Dichotomien für die linearisierte Gleichung

$$\dot{V}(t) = \mathcal{A}_{0,c_0}(t)V(t) \tag{3.141}$$

konstruiert haben. Wir haben Lösungen $V(t)$ mittels der Transformation $X(t) := e_{-\mu}^t V(t)$ für ein $\mu > 0$ zu Lösungen eines asymptotisch hyperbolischen System transferiert. Das Spektrum des asymptotischen Linearteils von (3.141) wurde mit dieser Transformation nach „links“ translatiert. Ganz analog erhält man nun Lösungsoperatoren $\Phi_+^{cu}(t, \tau)$ und $\Phi_+^s(t, \tau)$ bezüglich (3.141) für $0 \leq t \leq \tau$ bzw. $0 \leq \tau \leq t$, wenn man die Transformation $Y(t) := e_{\mu}^t V(t)$ betrachtet, also das Spektrum in die andere Richtung translatiert. Diese Lösungsoperatoren erfüllen nun

$$|\Phi_+^{cu}(t, \tau)V_+|_Y \leq M|V_+|_Y \quad |\Phi_+^s(t, \tau)V_+|_Y \leq Me^{-\beta|t-\tau|}|V_+|_Y$$

einem $\beta > 0$, $V_+ \in Y$ bezüglich der Y -Norm. Wegen (3.93) gilt nun auch eine analoge Aussage bezüglich der \tilde{Y} -Norm mit einer möglicherweise größeren, aber uniformen Konstanten $M > 0$. Setzen wir nun $\tilde{E}_+^s := \Phi_+^s(0, 0)[\tilde{Y}]$, so ist sicherlich $\tilde{E}_+^s \subset \tilde{E}_+^{cs}(0)$ und abgeschlossen bezüglich der \tilde{Y} -Norm.

Wir konstruieren die gesuchte Mannigfaltigkeit $W_{\tilde{\lambda},c}^{ss,+}(0)$ mit Hilfe von Fixpunkten der Integralgleichung

$$V(t) = \Phi_+^s(t, 0)V_0^s + \int_0^t \Phi_+^s(t, s)\mathcal{G}_{mod}(t, V(t), \tilde{\lambda}, c)ds + \int_{\infty}^t \Phi_+^{cu}(t, s)\mathcal{G}_{mod}(t, V(t), \tilde{\lambda}, c)ds, \tag{3.142}$$

für $V_0^s \in \tilde{E}_+^s$ und $V(\cdot) \in BC^{-\varsigma}(\mathbb{R}_+, \tilde{Y})$ für ein geeignetes $\varsigma > 0$. \mathcal{G}_{mod} bezeichnet die mit einer cut-off-Funktion modifizierte Nichtlinearität \mathcal{G} , die in (3.89) definiert wurde. Die Konstruktion der gesuchten Mannigfaltigkeit verläuft nun analog zur Konstruktion der Mannigfaltigkeit $W^{cs,+}(0)$. \square

Abschluss des Beweises von Satz 3.2

Wir wollen nun die Distanz von Punkten auf $W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{ss,+}(0)$ und $W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{loc,u}(\Lambda_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}(0))$ abschätzen. Sei dazu $U_{loc}^u \in W_{\tilde{\lambda},c}^{loc,u}(\Lambda_{\tilde{\lambda},c}(0))$. Dann gilt

$$\begin{aligned} U_{loc}^u &= \Lambda_{\tilde{\lambda},c}(0) + V_0^u + \Psi(V_0^u, \tilde{\lambda}, c) \\ &= d_1(c_0)\sqrt{\tilde{\lambda}} + V_0^u + \Psi(V_0^u, \tilde{\lambda}, c) + \mathcal{O}(|\tilde{\lambda}| + |c - c_0|), \end{aligned} \quad (3.143)$$

für $d_1(c_0) \neq 0$ und $V_0^u \in \text{Bild}(\Pi_u)$. Wir schätzen zunächst den Abstand der beiden Mannigfaltigkeiten $W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{u,loc}(\Lambda_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}(0))$ und $W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{u,loc}(0)$ nahe $H(0)$ ab. Hierbei bezeichnet $W_{\tilde{\lambda},c}^{u,loc}(0)$ die lokale, instabile Mannigfaltigkeit der Null (siehe (3.118)), die in der Form $W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{u,loc}(0) = \text{Graph}(\Psi_u(\cdot, \tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})))$ geschrieben werden kann.

Der Abstand von $W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{u,loc}(\Lambda_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}(0))$ und $W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{u,loc}(0)$ nahe $H(0)$

Bezeichne nun mit $V_{\tilde{\lambda}}^u := \Pi_u U^{\tilde{\lambda}}$ den auf den Eigenraum \tilde{E}_u projizierten Anteil des Schnittpunktes $U^{\tilde{\lambda}}$. Dann gilt sicherlich $H(0) = U^0 \in W_{0,c(0)}^{u,loc}(\Lambda_{0,c(0)}(0)) = W_{0,c(0)}^{u,loc}(0)$. Setzen wir $V_{\tilde{\lambda}}^u$ in die Taylorentwicklung der instabilen Mannigfaltigkeit $W^{u,loc}(0)$ für die Parameter $(\tilde{\lambda}, c) = (\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda}))$ ein, so erhalten wir einen Punkt $Z^{\tilde{\lambda}} \in W^{u,loc}(0)$. Wir interessieren uns nun für den Abstand von $Z^{\tilde{\lambda}}$ und $U^{\tilde{\lambda}}$, siehe Abbildung 3.9.

Ψ sei nun wie in Gleichung (3.143) charakterisiert. Wir behaupten nun, dass dann

$$\Psi(V_{\tilde{\lambda}}^u, \tilde{\lambda}, c) - \Psi(V_0^u, 0, c) = \mathcal{O}(\tilde{\lambda} + r\sqrt{\tilde{\lambda}}) \quad (3.144)$$

gilt, wobei r der Abstand des Punktes $H(0)$ vom Ursprung bezeichnet (außerdem gilt natürlich $V_0^u + \Psi(V_0^u, 0, c_0) = V_0^u + \Psi_u(V_0^u, 0, c_0) = U^0$). Um (3.144) zu zeigen, gehen wir zurück zur Definition von Ψ zwei Zeilen vor (3.137). Dann gilt (man bedenke $B_{0,c}(\tau) = 0$):

$$\begin{aligned} \Psi(V_{\tilde{\lambda}}^u, \tilde{\lambda}, c) - (\Psi(V_0^u, 0, c)) &= \Pi_{cs} \int_{-\infty}^0 T_{cs}(-s) [B_{\tilde{\lambda},c}(s)V_{\tilde{\lambda}}(s)] ds \\ &- \Pi_{cs} \int_{-\infty}^0 T_{cs}(-s) [G_{mod}(s, V_{\tilde{\lambda}}(s), \tilde{\lambda}, c) - G_{mod}(s, V_0(s), 0, c)] ds. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Sei $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \in (-\delta, \delta)$, dann bezeichnen wir mit $V_{\tilde{\lambda}_1}(\cdot, V_{\tilde{\lambda}_2}^u) \in BC^{-\rho}$ den Fixpunkt der Integralgleichung (3.136) bezüglich $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_1$ und $V_{\tilde{\lambda}_2}^u \in \tilde{E}_u$. Da $|V_{\tilde{\lambda}_1}^u - V_0^u|_{\tilde{Y}} \leq L\sqrt{\tilde{\lambda}}$, gilt nun auch $|V_{\tilde{\lambda}_1}(\cdot, V_{\tilde{\lambda}_1}^u) - V_0(\cdot, V_0^u)|_{BC^{-\rho}} = |V_{\tilde{\lambda}_1}(\cdot, V_{\tilde{\lambda}_1}^u) - V_0(\cdot, V_0^u)|_{BC^{-\rho}} \leq M\sqrt{\tilde{\lambda}}$. Dies erfolgt erneut aus Lemma 3.24 und der Differenzierbarkeit des Fixpunktes der Gleichung (3.136) nach der \tilde{E}_u -Komponente, denn es gilt:

$$\begin{aligned} |V_{\tilde{\lambda}_1}(\cdot, V_{\tilde{\lambda}_1}^u) - V_0(\cdot, V_0^u)|_{BC^{-\rho}} &\leq |V_{\tilde{\lambda}_1}(\cdot, V_{\tilde{\lambda}_1}^u) - V_0(\cdot, V_{\tilde{\lambda}_1}^u)|_{BC^{-\rho}} \\ &+ |V_0(\cdot, V_{\tilde{\lambda}_1}^u) - V_0(\cdot, V_0^u)|_{BC^{-\rho}}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Differenz $G_{mod}(s, V_{\tilde{\lambda}}(s), \tilde{\lambda}, c) - G_{mod}(s, V_0(s), 0, c)$ (und unterdrücken die Bezeichnung „mod“ in der folgenden Rechnung). Dann gilt mit $V_{\tilde{\lambda}}(s) = (\xi^{\tilde{\lambda}}(s), \phi_s^{\tilde{\lambda}})$:

$$\begin{aligned} & G(s, V_{\tilde{\lambda}}(s), \tilde{\lambda}, c) - G(s, V_0(s), 0, c) = \\ & \left(\begin{array}{c} f(\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(s + \cdot) + \phi_s^{\tilde{\lambda}}, \tilde{\lambda}, c) - f(\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(s + \cdot), \tilde{\lambda}, c) - D_1 f(\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(s + \cdot), \tilde{\lambda}, c) \phi_s^{\tilde{\lambda}} \\ 0 \end{array} \right) \\ & \quad - \left(\begin{array}{c} f(\phi_s^0, 0, c) - f(0, 0, c) - D_1 f(0, 0, c) \phi_s^0 \\ 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Benutzen wir in dieser Gleichung die mit Hilfe der Taylorentwicklung erhaltenen, folgenden drei Identitäten:

$$\begin{aligned} f(\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(s + \cdot) + \phi_s^{\tilde{\lambda}}, \tilde{\lambda}, c) - f(\phi_s^0, 0, c) &= D_1 f(\phi_s^0) [\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(s + \cdot) + \phi_s^{\tilde{\lambda}} - \phi_s^0] + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}); \\ -f(\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(s + \cdot), \tilde{\lambda}, c) &= -D_1 f(0, 0, c) [\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(s + \cdot)] + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}); \\ -D_1 f(\vartheta_{\tilde{\lambda},c}(s + \cdot), \tilde{\lambda}, c) [\phi_s^{\tilde{\lambda}}] + D_1 f(0, 0, c) [\phi_s^0] &= -D_1 f(0, 0, c) \phi_s^0 + D_1 f(0, 0, c) \phi_s^0 + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}) \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} & G(s, V_{\tilde{\lambda}}(s), \tilde{\lambda}, c) - G(s, V_0(s), 0, c) = \\ & \left(\begin{array}{c} (D_1 f(0, 0, c) - D_1 f(\phi_s^0, 0, c)) [\phi_s^0 - \phi_s^{\tilde{\lambda}}] + (D_1 f(\phi_s^0, 0, c) - D_1 f(0, 0, c)) [\Lambda_{\tilde{\lambda},c}(s + \cdot)] \\ 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

und dieser Term ist zunächst für festes s von der Ordnung $\mathcal{O}(r\sqrt{\tilde{\lambda}})$, wobei $r > 0$ den Abstand des Anfangswertes $H(0)$ von der Null bezeichnet. Allerdings ist dieser Ausdruck wegen der vorher gezeigten Abhängigkeit der Abbildung $V_{\tilde{\lambda}}(\cdot, V_0^u)$ von $\tilde{\lambda}$ auch bezüglich $BC^{-\rho}$ (also aufgefasst als Abbildung bezüglich $s \leq 0$) ein $\mathcal{O}(r\sqrt{\tilde{\lambda}})$. Dies zeigt schließlich, dass der Integralterm $\int_{-\infty}^0 T_{cs}(-s) [G_{mod}(s, V_{\tilde{\lambda}}(s), \tilde{\lambda}, c) - G_{mod}(s, V_0(s), 0, c)] ds \in \tilde{Y}$ von der Ordnung $\mathcal{O}(r\sqrt{\tilde{\lambda}})$ ist.

Ebenso ist der erste in (3.145) auftauchende Integralterm von der Ordnung $\mathcal{O}(r\sqrt{\tilde{\lambda}})$ und damit ist (3.144) gezeigt. Da die in (3.144) auftretende Funktion differenzierbar bezüglich c ist und $c(\tilde{\lambda}) - c_0 = \mathcal{O}(\tilde{\lambda})$ gilt (siehe das Lemma 3.26), gilt nun auch:

$$\Psi(V_{\tilde{\lambda}}^u, \tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})) - (\Psi(V_0^u, 0, c_0)) = \mathcal{O}(\tilde{\lambda} + r\sqrt{\tilde{\lambda}}). \quad (3.146)$$

Schließlich haben wir damit gezeigt, dass

$$\Pi_c \left(\Pi_u(V_{\tilde{\lambda}}^u - V_0^u) + \Psi(V_{\tilde{\lambda}}^u, \tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})) - (\Psi(V_0^u, 0, c_0)) \right) = \mathcal{O}(\tilde{\lambda} + r\sqrt{\tilde{\lambda}}) \quad (3.147)$$

erfüllt ist, wobei $V_0^u + \Psi(V_0^u, 0, c_0)$ natürlich der Schnittpunkt $U^{\tilde{\lambda}}$ für $\tilde{\lambda} = 0$ ist.

Wir betrachten nun die Mannigfaltigkeit $W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{u,loc}(0)$ und speziell ein $U \in W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{u,loc}(0)$, dann gilt:

$$U = V^u + \mathcal{O}(\tilde{\lambda} + |c - c_0| + |V^u|^2)$$

für ein $V^u \in \text{Bild}(\Pi_u)$, da diese Mannigfaltigkeit glatt bezüglich c und $\tilde{\lambda}$ ist (d.h. für festes V^u mindestens zweimal stetig differenzierbar). Für den speziellen Fall $V^u = V_{\tilde{\lambda}}^u$ gilt nun nach Subtraktion des Punktes $V_0^u + \Psi_u(V_0^u, 0, c_0) = U^0$

$$V_{\tilde{\lambda}}^u + \Psi(V_0^u, 0, c_0) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda} + |c - c_0| + |V_{\tilde{\lambda}}^u|^2) - V_0^u - \Psi_u(V_0^u, 0, c_0) = V_{\tilde{\lambda}}^u - V_0^u + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}), \quad (3.148)$$

wobei $\Psi(V_{\tilde{\lambda}}^u, \tilde{\lambda}, c) = \Psi(V_0^u, 0, c_0) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda} + |c - c_0| + |V_{\tilde{\lambda}}^u|^2)$ gilt. Man beachte, dass $c(\tilde{\lambda}) - c_0 = \mathcal{O}(\tilde{\lambda})$ gilt und $\Psi(V_0^u, 0, c_0) = \Psi_u(V_0^u, 0, c_0)$ gilt. Nach Anwendung der Projektion Π_c (die in Gleichung (3.115) definiert wurde) ist nun die rechte Seite der letzten Gleichung von der Ordnung $\mathcal{O}(\tilde{\lambda})$, da der Term $V_{\tilde{\lambda}}^u - V_0^u \in \text{Bild}(\Pi_u)$ im Kern dieser Projektion liegt. Zusammengefasst ergibt nun die Differenz von $V_{\tilde{\lambda}}^u - V_0^u + \mathcal{O}(\tilde{\lambda})$ und $U^{\tilde{\lambda}} - U^0 = \Lambda_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})} + V_{\tilde{\lambda}}^u + \Psi(V_{\tilde{\lambda}}^u, \tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})) - U^0$ nach anschließender Anwendung der Projektion Π_c die Abschätzung:

$$\begin{aligned} & |\Pi_c(\Lambda_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})} + V_{\tilde{\lambda}}^u + \Psi(V_{\tilde{\lambda}}^u, \tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})) - U^0) - \Pi_c(V_{\tilde{\lambda}}^u - V_0^u + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}))|_{\tilde{Y}} \\ & \geq \sqrt{\tilde{\lambda}} |\tilde{d}_1(c_0)|_{\tilde{Y}} - |\Pi_c(V_{\tilde{\lambda}}^u + \Psi(V_{\tilde{\lambda}}^u, \tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})) - U^0)|_{\tilde{Y}} \\ & \quad - |\Pi_c(V_{\tilde{\lambda}}^u - V_0^u + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}))|_{\tilde{Y}} \\ & \geq \sqrt{\tilde{\lambda}} |\tilde{d}_1(c_0)| - K \sqrt{\tilde{\lambda}} (r + \tilde{\lambda}) - M \tilde{\lambda} \end{aligned} \quad (3.149)$$

wegen der oberen Gleichung (3.147) für ein $\tilde{d}_1 \neq 0$, da die Lösung $\Lambda_{\tilde{\lambda}, c}(t)$ auf der Zentrumsmanigfaltigkeit lebt und damit einen nichtverschwindenden Zentrumsanteil besitzt. Wählen wir r klein genug, so ist die rechte Seite von (3.149) größer als $\tilde{\rho} \sqrt{\tilde{\lambda}}$, für ein $\tilde{\rho} > 0$.

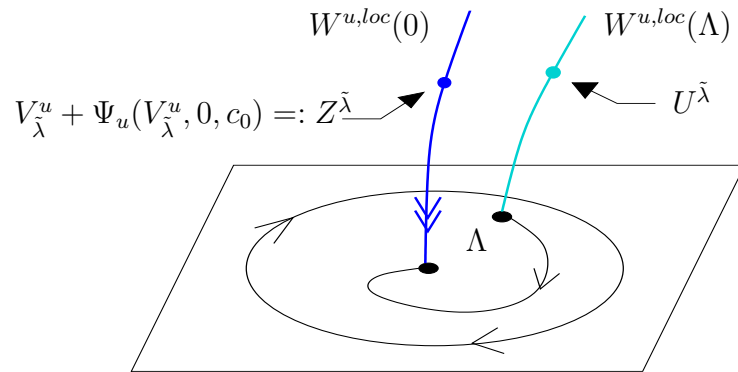


Abbildung 3.9: Die Abbildung zeigt die lokal null definierte instabile Mannigfaltigkeit $W^{u,loc}(0)$ und die instabile Faser $W^{u,loc}(\Lambda)$ des Punktes $\Lambda = \Lambda_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})}$ für die Parameterwerte $(\tilde{\lambda}, c) = (\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda}))$.

Der Abstand von $W^{ss,+}(0)$ und in $W^{u,loc}(0)$ nahe $H(0)$

Auf der anderen Seite ist der Abstand zweier Punkte in $W_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})}^{ss,+}(0)$ und in $W_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})}^{u,loc}(0)$ von der Ordnung $\tilde{\lambda}$, da beide zweimal stetig differenzierbar in $\tilde{\lambda}$ sind: Dazu betrachten wir

den Punkt $U^{\tilde{\lambda}}$, projizieren $U^{\tilde{\lambda}} - H(0)$ bzw. $U^{\tilde{\lambda}}$ auf den Unterraum $\tilde{E}_+^s(0)$ bzw. \tilde{E}_u und bezeichnen die so konstruierten Komponenten mit $U_s^{\tilde{\lambda}}$ bzw. $U_u^{\tilde{\lambda}}$. Wir setzen nun $U_s^{\tilde{\lambda}}$ bzw. $U_u^{\tilde{\lambda}}$ in die Entwicklung von $W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{ss,+}$ bzw. $W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{u,loc}$ ein, subtrahieren die so konstruierten Punkte $H_s^{\tilde{\lambda}}$ und $H_u^{\tilde{\lambda}}$ voneinander und projizieren die Differenz $H_s^{\tilde{\lambda}} - H_u^{\tilde{\lambda}}$ mittels einer Projektion \tilde{P}_c auf ein fest gewähltes Komplement zu dem Unterraum $\tilde{E}_+^s(0) + \tilde{E}_u$ bezüglich des umgebenden Raumes $\tilde{E}_+^{cs}(0) + \tilde{E}_u$ (also ist nur der Kern der Projektion \tilde{P}_c eindeutig bestimmt). Den so definierten Vektor bezeichnen wir mit Z . Dieses Szenario haben wir in Abbildung 3.10 veranschaulicht. Dann gilt:

$$\begin{aligned} Z = \tilde{P}^c[H_s^{\tilde{\lambda}} - H_u^{\tilde{\lambda}}] &= \tilde{P}^c[U_s^{\tilde{\lambda}} - U_u^{\tilde{\lambda}}] + \mathcal{O}(|U_u^{\tilde{\lambda}}|^2 + |c(\tilde{\lambda}) - c_0| + \tilde{\lambda}) \\ &= \mathcal{O}(|U_s^{\tilde{\lambda}}|^2 + |c(\tilde{\lambda}) - c_0| + \tilde{\lambda}). \end{aligned}$$

Für $\tilde{\lambda} \geq 0$ hat der so erhaltene Vektor Z also die Gestalt $Z = \tilde{\lambda} \cdot \mathcal{O}(\tilde{\lambda} + |(c(\tilde{\lambda}) - c_0)| + |U_s^{\tilde{\lambda}}| + |U_u^{\tilde{\lambda}}|)$, da der Vektor $U_s^{\tilde{\lambda}} - U_u^{\tilde{\lambda}}$ nach Projektion auf den Zentrumsanteil stets verschwindet und alle anderen Termen in der Entwicklung mit $\tilde{\lambda}$ beginnen (man beachte Lemma 3.26 für die Entwicklung von $|c(\tilde{\lambda}) - c_0|$). Man beachte, dass sich alle Terme in der Entwicklung ohne $\tilde{\lambda}$ sowieso auf $\tilde{\lambda} = 0$ beziehen. Für diesen Parameterwert schneiden sich aber die Mannigfaltigkeiten $W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{ss,+}(0)$ und $W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{u,loc}(0)$, so dass die Differenz Null ist. Zusammengefasst zeigt diese Argumentation, dass die *Zentrumskomponente* vom Abstand des Schnittpunktes zwischen diesen beiden Mannigfaltigkeiten von der Ordnung $\tilde{\lambda}$ ist.

Also können sich

$$W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{ss,+}(0) \quad W_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}^{u,loc}(\Lambda_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}(0))$$

nicht nahe $H(0)$ schneiden.

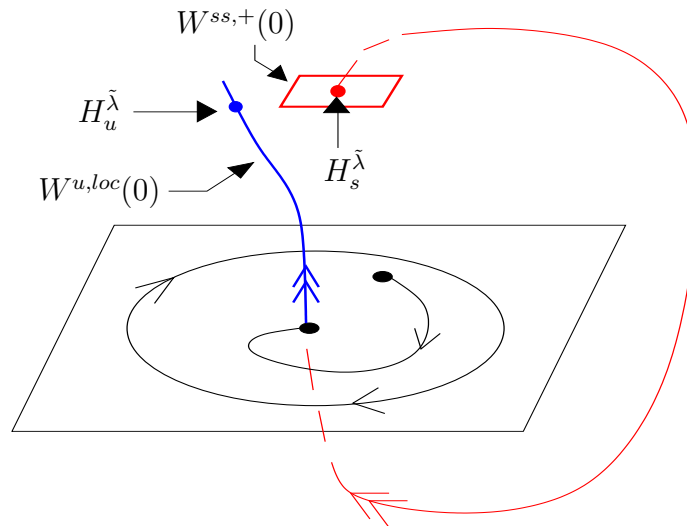


Abbildung 3.10: Die Abbildung zeigt die lokal null definierte instabile Mannigfaltigkeit $W^{u,loc}(0)$ und die stark-stabile Mannigfaltigkeit $W^{ss,+}(0)$ für die Parameterwerte $(\tilde{\lambda}, c) = (\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda}))$.

Damit ist gezeigt, dass $U^{\tilde{\lambda}}(t)$ in Vorwärtszeit $t \rightarrow \infty$ gegen den Orbit der periodischen Lösung $\Gamma_{\tilde{\lambda},c(\tilde{\lambda})}(\cdot)$ konvergiert. Sei nun $U^{\tilde{\lambda}}(t) = (h^{\tilde{\lambda}}(t), h^{\tilde{\lambda}}(t + \cdot))$, dann erfüllt die Familie

$h^{\tilde{\lambda}}(\cdot)$ alle behaupteten Eigenschaften des Satzes 3.2 und wir haben unsere gewünschte Familie von Lösungen gefunden.

