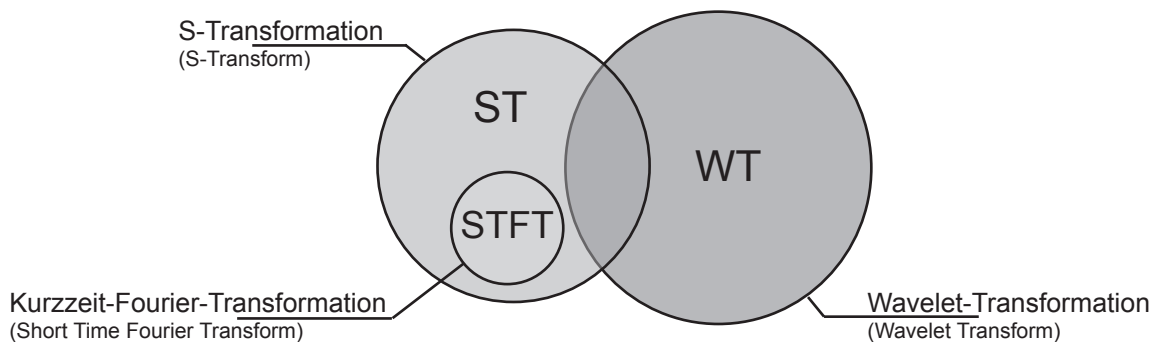


### 3 Zeit-Frequenz-Signalanalyse

Für die Untersuchung ereigniskorrelierter Oszillationen in ihrer zeitlichen Dynamik müssen die EEG-Signale mit Hilfe geeigneter Signalanalyseverfahren<sup>1</sup> in eine so genannte Zeit-Frequenz-Darstellung überführt werden. Bei der Analyse langsamer Frequenzen bis etwa 20 Hz wird hierfür meist die klassische Kurzzeit-Fourier-Transformation (short-time Fourier transform, STFT) benutzt, während für den Bereich der schnellen Beta- und Gamma-Oszillationen bevorzugt die Wavelet-Transformation (WT), meist unter Verwendung des komplexen Morlet-Wavelets, zur Anwendung kommt. Ziel dieses Kapitels ist es, die S-Transformation (ST) als ein sehr flexibles und effizientes Verfahren vorzustellen, das die Vorteile der STFT und der WT vereint und somit erlaubt, hochaufgelöste Zeit-Frequenz-Analysen über den gesamten Frequenzbereich unter Verwendung eines einzigen Verfahrens durchzuführen. Damit ergeben sich neue Möglichkeiten für die Untersuchung funktionaler Interaktionen zwischen langsamen und schnellen Frequenzen. Über diese verbindende Funktion hinsichtlich der praktischen Anwendung hinaus scheint die S-Transformation dem Autor auch als konzeptuelles Bindeglied zwischen STFT und WT für die Vermittlung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden bestens geeignet.



**Abbildung 3.1:** Schematische Darstellung der Beziehungen zwischen den hier besprochenen Verfahren zur Zeit-Frequenz-Analyse.

Der Schwerpunkt der folgenden Darstellungen liegt weniger auf einer exakten und vollständigen mathematischen Darstellung der einzelnen Methoden, als vielmehr auf einer Be-

<sup>1</sup>Hierunter fallen keine Ansätze nach dem Prinzip „Filterung-Quadrierung-Mittelung“ (Bendat & Piersol, 2000, S. 141), die z. B. bei der Berechnung von ERD- oder IBP-Kennwerten (s. Kap. 2.3) verwendet werden. Diese Verfahren gestatten nur eine näherungsweise Berechnung von Ausschnitten aus dem Signalspektrum. Dazu wird das EEG-Signal zunächst mit einem Bandpass-Filter auf den interessierenden Frequenzbereich eingengt, mittels Quadrieren gleichgerichtet und anschließend durch gleitende Mittelwertbildung tiefpassgefiltert (für Details s. Clochon et al., 1996).

schreibung der jeweils zugrunde liegenden Prinzipien und der daraus resultierenden Eigenschaften sowie dem Aufzeigen der zwischen den drei Verfahren bestehenden Beziehungen, wie sie in Abbildung 3.1 schematisch veranschaulicht sind. Angemerkt sei, dass alle drei Verfahren aus mathematischer Sicht zur Klasse der linearen Zeit-Frequenz-Darstellungen gehören und somit den gleichen prinzipiellen Restriktionen hinsichtlich der realisierbaren Zeit-Frequenz-Auflösung unterliegen.<sup>2</sup>

Zunächst werden die benötigten Grundlagen und Begrifflichkeiten aus dem Gebiet der digitalen Signalverarbeitung besprochen. Die Ausführungen orientieren sich dabei im Wesentlichen an Kammeyer und Kroschel (1998), Hoffmann (1998), Smith (1999) sowie Qian (2002), auf die auch in Hinblick auf weiterführende Fragen und Details verwiesen wird. Einen Überblick über verschiedene praktische Aspekte der Signalverarbeitung von EEG-Daten geben Bösel (1996) sowie Bösel und Tamm (2003). Detaillierte Abhandlungen zu verschiedenen Fragen der digitalen Verarbeitung von Biosignalen finden sich in Weitkunat (1991).

## 3.1 Grundlagen

### 3.1.1 Vom Kopf in den Computer

Bei der EEG-Ableitung werden zeit- und amplitudenkontinuierliche bioelektrische Signale gemessen. Voraussetzung für die Weiterverarbeitung solcher analogen Signale im Computer ist ihre *Digitalisierung*, die in der Regel über einen im EEG-Messverstärker integrierten Analog-Digital-Wandler erfolgt. Das Digitalisieren eines Signals umfasst zwei Schritte:

- (i) Die *Abtastung* (sampling) des analogen Signals entlang der Zeitachse. Dies wird als Diskretisierung bezeichnet.
- (ii) Die als *Quantisierung* bezeichnete Umsetzung der Signalamplitude in diskrete Skaleneinheiten.

Moderne EEG-Verstärker verfügen in der Regel über Analog-Digital-Wandler mit einer Auflösung von wenigstens 16 Bit, erlauben also mindestens eine Abstufung der Signalamplitude in  $2^{16}$  Stufen. Das durch die damit verbundenen Rundungen erzeugte Quantisierungsrauschen kann für die hier betrachteten linearen Signalanalyseverfahren vernachlässigt werden.<sup>3</sup> Berücksichtigt werden müssen hingegen Aspekte der Signaldiskretisierung. In der Regel erfolgt eine periodische Signalabtastung, die durch die Wahl der *Abtastrate* (sampling

<sup>2</sup>Im Gegensatz z. B. zur Wigner-Ville-Transformation aus der Klasse der quadratischen Zeit-Frequenz-Darstellungen (Cohen, 1989; Hlawatsch & Boudreaux-Bartels, 1992) oder modellgestützten parametrischen Spektralschätzverfahren (Kammeyer & Kroschel, 1998), die aber bei der Auswertung von EEG-Daten in der Kognitionspsychologie kaum verwendet werden.

<sup>3</sup>Kritischer wirken sich Quantisierungseffekte bei der Anwendung nichtlinearer Analysemethoden, wie z. B. der EEG-Dimensionsanalyse (Lehnertz, 2002), aber auch bei der Berechnung von Filterkoeffizienten für digitale Filter (Kammeyer & Kroschel, 1998, Kap. 4.5) aus.

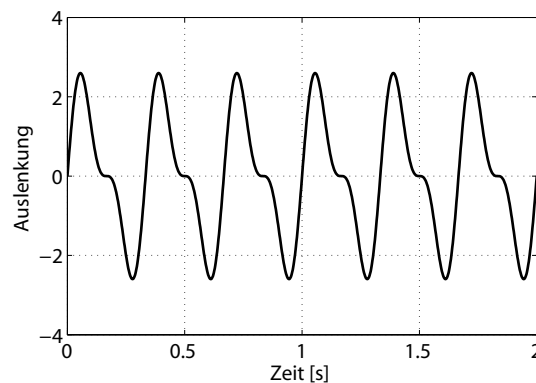
rate) charakterisiert ist. Die Abtastrate gibt die Anzahl der Signalabtastungen entlang der Zeitachse pro Sekunde an. Je höher die Abtastrate, desto genauer wird das EEG-Signal im Rechner abgebildet. Allerdings ist die Wahl einer hohen Abtastrate offensichtlich mit erhöhtem Speicherbedarf und höheren Anforderungen an die Geschwindigkeit der Messverarbeitungssysteme verbunden, so dass sich in der Praxis die Frage nach einer notwendigen minimalen Abtastrate stellt. Bei einer Abtastrate von 10 Hz werden die Signale im Abstand von 100 ms erfasst. Externe Ereignisse wie der Beginn der Reizdarbietung oder die Reaktion der Versuchsperson können somit auch nur mit einer Genauigkeit von  $\pm 50$  ms im EEG-Signal markiert werden. Wichtiger in Hinblick auf die hier betrachteten Zeit-Frequenz-Analysen ist die Tatsache, dass durch die Wahl der Abtastrate festgelegt wird, bis zu welcher maximalen Frequenz das digitalisierte EEG-Signal ausgewertet werden kann. Dabei gilt nach dem so genannten *Abtast-* oder *Nyquist-Theorem* (Hoffmann, 1998): Die Frequenzcharakteristik des periodisch abgetasteten Signals und des zugrunde liegenden kontinuierlichen Signals stimmen nur dann überein, wenn die Abtastrate mehr als dem Doppelten der höchsten im analogen Signal enthaltenen Frequenz entspricht. Soll ein Signal also bis zu einer Frequenz von 100 Hz analysiert werden, muss das EEG-Signal mittels analogem Signalfilter im Messverstärker auf den Bereich bis 100 Hz begrenzt werden und die anschließende Abtastung mit mehr als 200 Hz erfolgen. Die halbe Abtastfrequenz wird auch als *Nyquist-Frequenz* bezeichnet. Wird die Abtastbedingung nicht eingehalten, werden alle Signalanteile mit Frequenzen oberhalb der Nyquist-Frequenz an dieser gespiegelt und überlagern sich untrennbar mit den unteren Frequenzen. Dies wird als *Aliasing* bezeichnet. In der Regel besitzt die Kenntnis der Abtastrate für den EEG-Forscher nur informativen Charakter, als sie ihm angibt, bis zu welcher Frequenz eine Frequenzanalyse möglich ist. Allerdings ist bei jeder Form von Signalveränderung im Zuge der Signalanalyse das Abtasttheorem zu berücksichtigen. Als Beispiel sei die nachträgliche Reduzierung der Abtastwerte (subsampling) durch Weglassen jedes zweiten Datenpunktes erwähnt. Hier muss gegebenenfalls die im Signal enthaltene Maximalfrequenz zunächst durch eine Filterung an die neue Abtastfrequenz angepasst werden.

### 3.1.2 Vom Zeitbereich in den Frequenzbereich: Die Fourier-Analyse

Signale mit einer periodischen Struktur lassen sich häufig einfacher analysieren, wenn sie statt im Zeitbereich (time domain) im Frequenzbereich (frequency domain) betrachtet werden. Hierzu wird das Zeitsignal in Sinus- und Kosinusfunktionen (harmonische Funktionen) zerlegt, die jeweils eindeutig durch einen *Frequenzwert*, also die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde, und einen *Amplitudenwert* gekennzeichnet sind. Die Darstellung eines Signals in Abhängigkeit von der Frequenz wird als *Spektrum* bezeichnet, die Begriffe Spektralanalyse und Frequenzanalyse sind demnach Synonyme.

Die Zerlegung eines Signals in seine Frequenz- bzw. Spektralkomponenten lässt sich nur in sehr einfachen Fällen „per Auge“ vollziehen und gestaltet sich schon bei der Überlage-

zung zweier Sinus-Schwingungen unterschiedlicher Amplitude (s. Abb. 3.2) als schwierig. Eine eindeutige Zerlegung ist hingegen mittels *Fourier-Analyse* möglich, einem mathematischen Verfahren, benannt nach dem französischen Physiker und Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830). Hinter dem Begriff der Fourier-Analyse verbergen sich



**Abbildung 3.2:** Die Zerlegung eines Signals in seine Frequenzkomponenten ist schon in einfachen Fällen nur schwer per Auge möglich. Das hier dargestellte Signal besteht aus zwei Sinuskomponenten mit unterschiedlicher Amplitude (3 Hz, Amplitude 2 und 6 Hz, Amplitude 1).

genau genommen vier verschiedene Transformationsverfahren, je eines für eine der vier Signalklassen, die sich aus den möglichen Kombinationen der Eigenschaften zeitkontinuierlich/zeitdiskret und periodisch/nichtperiodisch ergeben. Da im Computer nur zeitdiskrete Signale endlicher Länge verarbeitet werden können, kommt für numerische Berechnungen von diesen vier Verfahren letztlich nur die *Diskrete Fourier-Transformation* (DFT) für zeitdiskrete periodische bzw. periodisch fortgesetzte Signale in Betracht. Dabei spielt es zunächst keine Rolle, ob das betrachtete Signal wirklich einen Ausschnitt eines periodischen Signals darstellt oder ob der gemessene Signalausschnitt nur periodisch fortgesetzt gedacht wird (für Details s. Hoffmann, 1998, Kap. 3.4). Konsequenzen, die sich aus der impliziten Annahme eines periodisch fortgesetzten Signals bei der Anwendung der DFT ergeben, werden in den folgenden Abschnitten zum Leck-Effekt und zur Signalfensterung sowie bei der S-Transformation im Kapitel 3.4.4 besprochen.

### Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Die DFT kommt, wie erwähnt, bei der Frequenzanalyse zeitdiskreter periodischer oder periodisch fortgesetzter Signale zum Einsatz und dient der Zerlegung eines Signals in seine Sinus- und Kosinuskomponenten. Berechnungen mit diesen Funktionen können aus mathematischer Sicht sehr viel einfacher und kompakter mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion beschrieben werden, wobei nach der Eulerschen Formel für ein beliebiges Argument  $\varphi$  gilt ( $i$  ist die imaginäre Einheit, s. u.):

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi . \quad (3.1)$$

Betrachten wir nun ein aus  $N$  Abtastwerten bestehendes zeitdiskretes Signal  $x(k)$  mit dem diskreten Zeitindex  $k = 0 \dots N - 1$ . Unter Verwendung der komplexen Exponentialfunktion lautet die DFT-Transformation zur Berechnung des komplexen Spektrums  $X(n)$  mit dem diskreten Frequenzindex  $n$  (Hoffmann, 1998, S. 75):

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-i2\pi \frac{kn}{N}} , \quad 0 \leq n \leq N . \quad (3.2)$$

Die entsprechende Rücktransformation für den Übergang vom Frequenz- in den Zeitbereich ist gegeben durch

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{i2\pi \frac{kn}{N}} , \quad 0 \leq k \leq N . \quad (3.3)$$

Von der Hintransformation unterscheidet sie sich nur durch den Skalierungsfaktor  $1/N$  und das Vorzeichen des Exponenten in der Exponentialfunktion.<sup>4</sup> Der Zeitindex  $k$  ist (bis auf die Wahl des Zeitnullpunktes) mit der Zeit  $t$  über die Beziehung  $t = k \cdot \Delta t$  verknüpft, wobei das Abtastintervall  $\Delta t$  dem Reziproken der bereits erwähnten Abtastfrequenz entspricht. Analog lässt sich auch jedem Frequenzindex  $n$  ein entsprechender Frequenzwert  $f$  zuordnen. Der hierzu benötigte Abstand zwischen zwei Frequenzwerten  $\Delta f$  ist dabei durch die reziproke Signaldauer gegeben. Im Weiteren werden die Argumente der Einfachheit halber nur noch mit  $t$  und  $f$  angegeben.

Wie oben erwähnt, liefert die DFT ein komplexes Spektrum, also komplexe Fourier-Koeffizienten  $X$ . Eine solche komplexe Zahl besteht in der kartesischen Darstellung  $X = \alpha + i\beta$  aus zwei Anteilen, dem *Realteil*  $\alpha$  und dem *Imaginärteil*  $\beta$ ,  $i$  ist die imaginäre Einheit.<sup>5</sup> Analog zur geometrischen Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengeraden lassen sich komplexe Zahlen als Punkte in der komplexen Zahlenebene wiedergeben. Der Realteil wird dabei auf der Abszissenachse abgetragen und der Imaginärteil auf der Ordinatenachse. In der kartesischen Form sind die Fourier-Koeffizienten nur schwer interpretierbar, deshalb werden sie üblicherweise in Polarkoordinaten  $X = |X|e^{i\phi}$  umgerechnet:

$$\begin{aligned} |X| &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} && (\text{Amplitude}) \\ \phi &= \arctan \frac{\beta}{\alpha} && (\text{Phasenwinkel}) . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die Darstellungen dieser Werte in Abhängigkeit von der Frequenz werden als *Amplituden-* bzw. *Phasenspektrum* bezeichnet.

Die Berechnung der DFT nach Gleichung (3.2) ist in der Praxis im Prinzip problemlos möglich. Allerdings liegt der Rechenaufwand für  $N$  Datenpunkte in der Größenordnung von  $N^2$  Rechenoperationen, d. h., die Rechenzeit nimmt mit wachsendem  $N$  drastisch zu. Einen kaum zu überschätzenden Beitrag für die praktische Nutzung der Fourier-Analyse liefern

<sup>4</sup>Gelegentlich wird dieser Skalierungsfaktor in der Literatur auch der Rücktransformation zugeordnet.

<sup>5</sup>Es gilt  $i^2 = -1$ .

deswegen numerisch optimierte, als *Fast-Fourier-Transformation* (FFT) bezeichnete DFT-Algorithmen. Die bekannteste Variante stellt dabei der von Cooley und Tukey (1965) entwickelte Algorithmus dar. Für den Fall, dass  $N$  ein ganzzahlig Vielfaches von 2 ist, reduziert dieses Verfahren den Rechenaufwand auf etwa  $N \log_2(N)$  Operationen (Hoffmann, 1998, S. 87). Für ein EEG-Segment mit 512 Datenpunkten (entspricht z. B. einer Messdauer von ca. 2 s bei einer Abtastrate von 250 Hz) bedeutet dies eine Reduzierung des Rechenaufwandes um etwa einen Faktor 57.

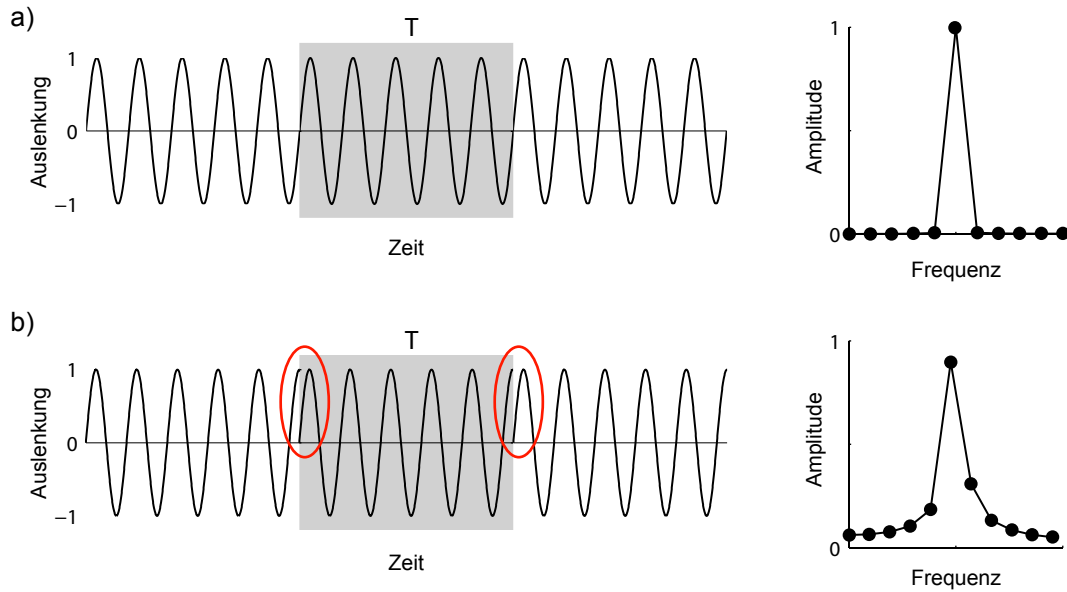
Analog zu den Betrachtungen zur Fourier-Transformation existieren auch bei den noch zu besprechenden Zeit-Frequenz-Analyseverfahren spezielle Transformationsgleichungen für die jeweils betrachtete Signalklasse. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden diese allerdings in der Integralform für zeitkontinuierliche nichtperiodisches Signale angegeben. Für eine Darstellung der entsprechenden „computertauglichen“ Umsetzung wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.

### **Leck-Effekt**

Bei der DFT wird ein Signal der Zeitdauer  $T$  in einen Gleichanteil sowie ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz  $1/T$  zerlegt. Für ein Signal von  $T = 2$  s wird somit alle 0,5 Hz ein Frequenzwert berechnet. Sind nun im Signal Frequenzanteile enthalten, die kein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz darstellen, also zwischen den DFT-Frequenzwerten liegen, so werden diese Signalanteile auf alle anderen Frequenzwerte verteilt. Dieses „Durchsickern“ von Signalanteilen wird, abgeleitet vom englischen leakage, als Leck-Effekt bezeichnet. Alternativ zu dieser Betrachtung im Frequenzbereich kann der Leck-Effekt auch im Zeitbereich veranschaulicht werden. Wie Abbildung 3.3 (b) zeigt, tritt der Leck-Effekt bei Signalen auf, deren Periode nicht ganzzahlig in das Analysefenster passt. Durch die implizite periodische Fortsetzung des Signals entstehen an den Intervallgrenzen Diskontinuitäten, die zu einer Verfälschung des Spektralsignals führen. Eine Verringerung des Leck-Effekts bei vorgegebener Signaldauer  $T$  ist durch die Verwendung von Analysefenstern möglich, die mit dem Signal multipliziert werden und so zu einem weichen Ein- und Ausblenden des zu analysierenden Signalabschnitts führen.

### **Signalfensterung und Faltung**

Unter einer Signalfensterung versteht man die punktweise Multiplikation eines Signals  $x(t)$  mit einer geeignet gewählten Fensterfunktion  $w(t)$ . Neben der erwähnten Verwendung speziell geformter Analysefenster zur Reduzierung des Leck-Effekts ist auch schon das Unterteilen des EEG-Signals in ereignisbezogene Epochen (Segmentieren) aus mathematischer Sicht als eine Multiplikation des Gesamtsignals mit einer Rechteckfunktion zu interpretieren, die im ausgewählten Zeitbereich den Wert 1 und sonst den Wert 0 annimmt. Es stellt sich die Frage, wie die spektrale Charakteristik von  $x$  durch die Fensterung verändert wird.



**Abbildung 3.3:** Leck-Effekt im Zeit- und Frequenzbereich für ein Sinussignal der Länge  $T$ . Die DFT „sieht“ den analysierten, grau hinterlegten Signalausschnitt als periodisch fortgesetztes Signal. (a) Die Frequenz des Sinussignals ist ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz  $1/T$ . Das Spektrum liefert den korrekten Frequenzwert und die korrekte Amplitude. (b) Die Signalfrequenz ist kein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz. Diskontinuitäten an den Anschlussstellen führen im Spektrum zum „Durchsickern“ von Signalenergie zu benachbarten Frequenzwerten.

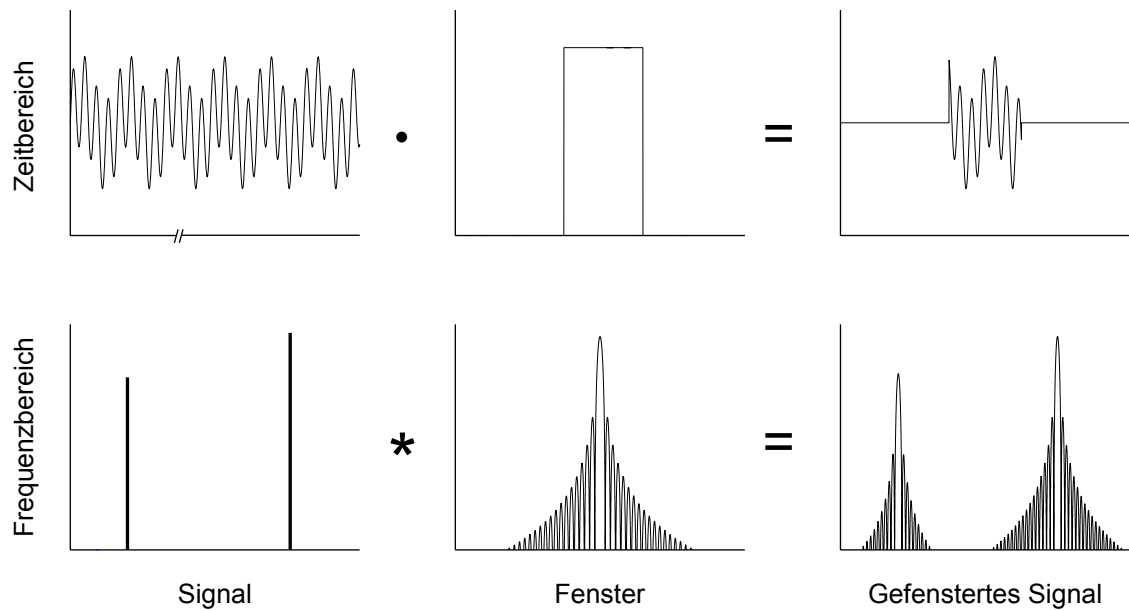
Die Klärung dieser Frage ist von grundlegender Bedeutung für ein Verständnis der Spektralanalyse.

Die Multiplikation zweier Signale im Zeitbereich entspricht einer *Faltung* (Symbol  $*$ ) der Spektren beider Signale im Frequenzbereich. Aufgrund der Symmetrie der Fourier-Transformation ist umgekehrt auch jede Multiplikation im Frequenzbereich mit einer Faltung der inversen Fourier-Transformierten im Zeitbereich verbunden. Bezogen auf die Multiplikation der Signale  $x(t)$  und  $w(t)$  bedeutet dies

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot w(t)\} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)W(f - \nu) d\nu}_{X(f) * W(f)}, \quad (3.5)$$

wobei die Fourier-Transformation abgekürzt in der Operator-Schreibweise  $\mathcal{F}\{\}$  angegeben wurde.

Abbildung 3.4 verdeutlicht die Auswirkungen der Fensterung eines zeitlich unbegrenzten Signals, bestehend aus zwei Sinusfunktionen mit unterschiedlicher Amplitude, mit einem Rechteck-Fenster. Demnach lässt sich die Wirkung der Faltungsoperation dahin gehend beschreiben, dass an die Stelle jeder Spektralkomponente, die vor der Fensterung (Multiplikation) im Signal  $x$  enthalten war, eine entsprechend gewichtete Kopie des Spektrums des Rechteck-Fensters tritt und sich diese einander überlagern.



**Abbildung 3.4:** Die Multiplikation ( $\cdot$ ) von Signal und Fensterfunktion im Zeitbereich führt zu einer Faltung ( $*$ ) der Spektren im Frequenzbereich.

Der konkrete Einfluss einer Fensterung ist abhängig von der Form und der Länge des verwendeten Fensters, wobei generell gilt, dass der Einfluss der Fensterfunktion auf das Spektrum von  $x$  mit zunehmender Fensterlänge abnimmt. Für die Auswertung von EEG-Signalen werden insbesondere das *Hann-Fenster* und das *Hamming-Fenster* bei der Fourier-Analyse sowie das *Gauß-Fenster* bei der Wavelet-Analyse verwendet. Diese Fenster werden im Folgenden kurz vorgestellt. Für eine detaillierte Diskussion der Eigenschaften dieser und weiterer Fenstertypen, insbesondere auch in Hinblick auf Besonderheiten bei der Anwendung mit der DFT, wird auf den Übersichtsartikel von Harris (1978) verwiesen.

#### Das **Hann-Fenster**

$$w(k) = 0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right), \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (3.6)$$

( $N$ : Anzahl Datenpunkte) ist nach dem österreichischen Meteorologen Julius von Hann benannt, wird aber aufgrund seiner Ähnlichkeit zum Hamming-Fenster in der Literatur und in Softwareprogrammen oft als Hanning-Fenster bezeichnet.

#### Das **Hamming-Fenster**

$$w(k) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right), \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (3.7)$$

unterscheidet sich durch einen Sockel der Höhe 0,08 vom Hann-Fenster.

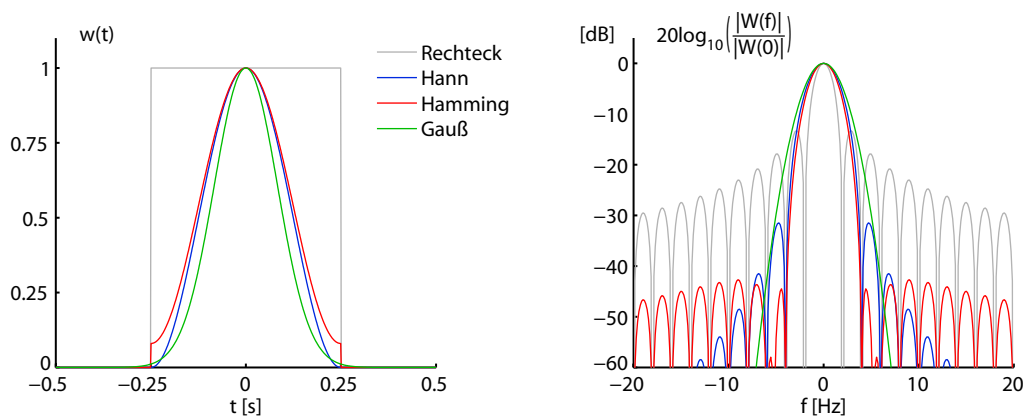


### Die Eigenschaften des Gauß-Fensters

$$w(k) = e^{-\frac{1}{2} \left( \alpha \frac{k - \frac{N}{2}}{N/2} \right)^2}, \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (3.8)$$

können über den Parameter  $\alpha$ , der reziproken Standardabweichung, kontrolliert werden. Die Fourier-Transformierte des Gauß-Fensters ist wieder ein Gauß-Fenster. Das Gauß-Fenster weist von allen Fensterarten die geringste Zeit-Frequenz-Ausdehnung (Unschärfe) auf.

Abbildung 3.5 zeigt die genannten Fenster im Vergleich zum Rechteckfenster. Auf der linken Seite sind die Zeitverläufe für eine Fensterlänge von 500 ms abgetragen, wobei der  $\alpha$ -Parameter des Gauß-Fensters so gewählt wurde, dass es vom Rechteckfenster an den  $3\text{-}\sigma$ -Punkten geschnitten wird. Auf der rechten Seite sind die entsprechenden Spektralverläufe

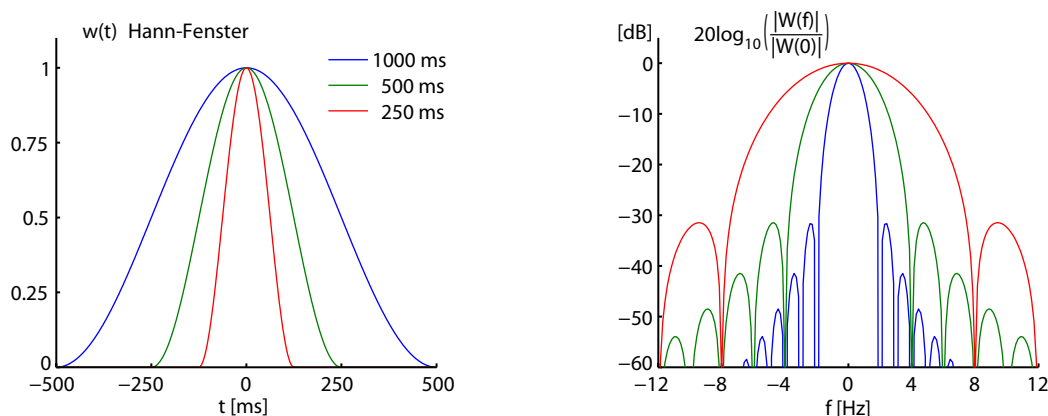


**Abbildung 3.5:** Vergleich der Zeitverläufe (links) und der Frequenzverläufe (rechts) für Rechteck-, Hann-, Hamming- und Gauß-Fenster von jeweils 500 ms Dauer.

angegeben, wie in der Signalverarbeitung üblich als Dämpfung (Dezibel, dB) relativ zum Fenstermaximum bei 0 Hz.<sup>6</sup> Es zeigt sich, dass das Rechteckfenster die höchste spektrale Auflösung, also die schmalste Hauptkeule (main lobe) besitzt, gemessen z. B. als Breite bis zur ersten Nullstelle oder wie bei digitalen Filtern bis zu einem Signalabfall auf  $-3$  dB. Somit können eng benachbarte Frequenzwerte sehr gut mit dem Rechteckfenster aufgelöst werden. Auf der anderen Seite verfügt das Rechteckfenster sowohl über die schlechteste Seitenbanddämpfung, d. h. , es kommt zu deutlichen Übersprecheffekten auf weiter entfernte Frequenzanteile, als auch über die schlechteste zeitliche Auflösung. Bezüglich beider Punkte weisen die anderen Fenster deutliche Vorteile auf, auch wenn dafür eine geringfügig schlechtere Frequenzauflösung in Kauf genommen werden muss. Für die Analyse von EEG-Signalen sind aufgrund der Signalcharakteristik (funktionelle Einteilung in Frequenzbänder) Fenster mit hoher Seitenbanddämpfung vorzuziehen.

<sup>6</sup>Eine Dämpfung auf  $-20$  dB bedeutet eine Verringerung des Signals auf  $1/10$ , eine Dämpfung auf  $-40$  dB einer Verringerung auf  $1/100$  des Maximums bei 0 Hz.

Den Einfluss der Fensterlänge auf die Spektralcharakteristik zeigt Abbildung 3.6 anhand eines Hann-Fensters mit drei unterschiedlichen Fensterlängen. Es ist deutlich der generell



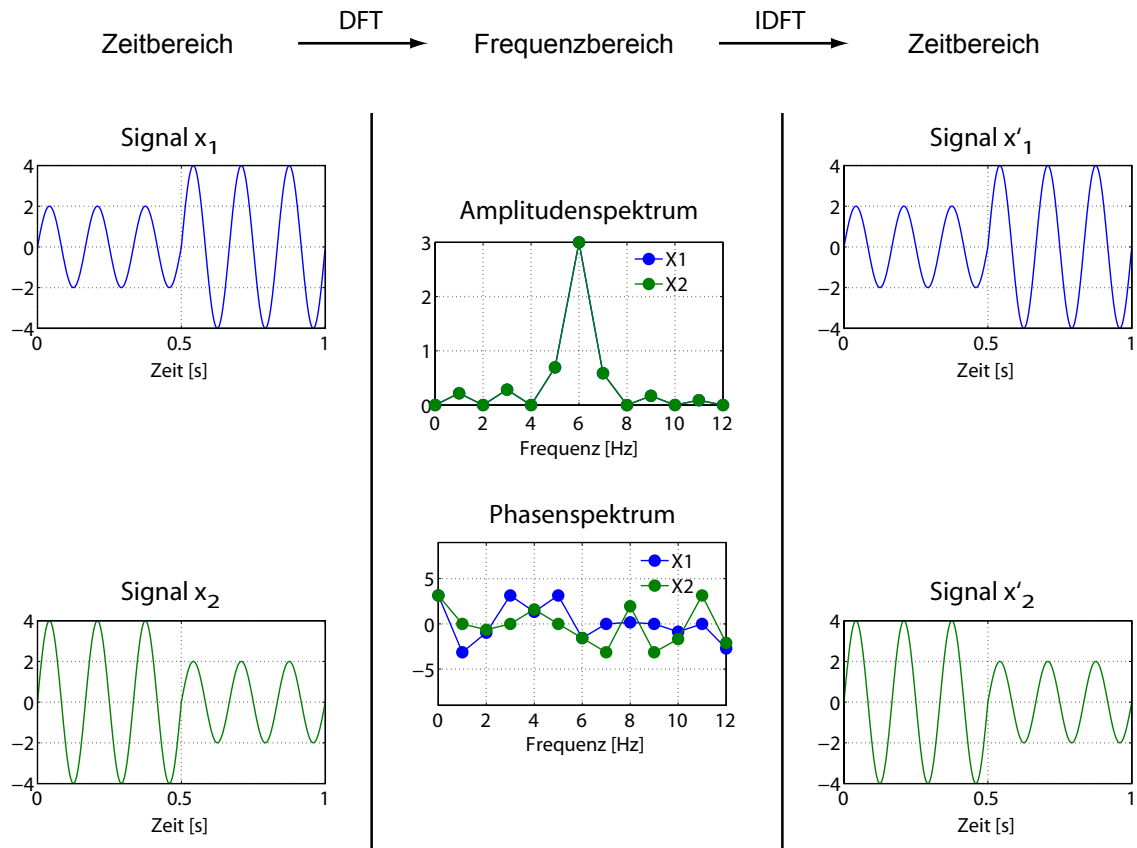
**Abbildung 3.6:** Hann-Fenster mit drei unterschiedlichen Fensterlängen. Zeit- und Frequenzausdehnung verhalten sich invers zueinander.

geltende inverse Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzauflösung zu erkennen: Je besser die zeitliche Auflösung (schmales Zeitfenster), um so schlechter ist die Frequenzauflösung (breite Hauptkeule) und umgekehrt. Speziell für das Hann-Fenster zeigt sich, dass die Seitenbanddämpfung unabhängig von der Fensterlänge ist. Eine Erhöhung der Fensterlänge schiebt die Seitenbänder zusammen und führt somit zu einer besseren Frequenzauflösung.<sup>7</sup>

### 3.1.3 Vom Spektrum zum Spektrogramm: Analyse nichtstationärer Signale

Im Anschluss an die bisherigen Darstellungen bleibt noch die Frage zu klären, wie die Fourier-Transformation mit Signalen umgeht, deren Spektrum sich innerhalb des Beobachtungszeitraums verändert. In Abbildung 3.7 ist ein solcher Fall eines nichtstationären Signals wiedergegeben. Betrachtet werden zwei 6-Hz-Sinussignale  $x_1$  und  $x_2$  über einen Zeitraum von 1 s, wobei die Amplituden nach der Hälfte der Zeit entgegengesetzt wechseln. Während die Signale im Zeitbereich einen deutlich unterschiedlichen Signalverlauf aufweisen, verhalten sich die Amplitudenspektren identisch und liefern außerdem für 6 Hz einen mittleren Amplitudenwert von 3. Wie sich beim Betrachten der rechten Seite der Abbildung zeigt, können beide Signale trotzdem mit Hilfe der inversen Fourier-Transformation rekonstruiert werden, wenn neben den Amplitudeninformationen auch die Phaseninformationen berücksichtigt werden. Die Phaseninformationen sind für beide Signale unterschiedlich und müssen demnach auch die Information über den zeitlichen Signalverlauf enthalten. Aller-

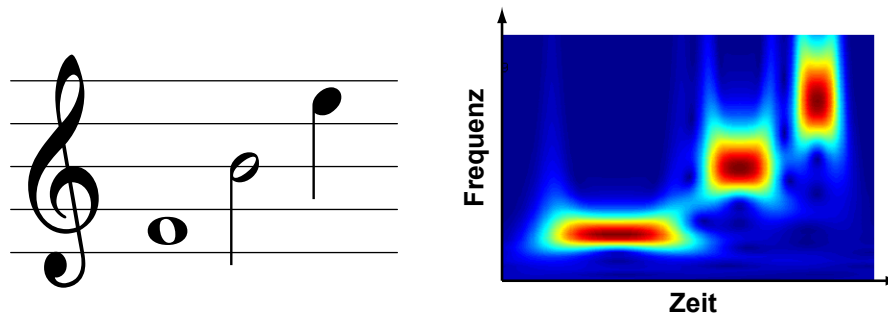
<sup>7</sup>Dies gilt natürlich nur, wenn durch die Erhöhung der Fensterlänge mehr Signalinformation zur Verfügung steht. Ist das Signal kürzer als das Fenster und wird nur durch Auffüllen mit Nullen verlängert (zero padding), so gewinnt man keine zusätzlichen Informationen. Es verringert sich zwar der Abstand der Frequenzabstastpunkte, die Auflösung, also die Fähigkeit benachbarte Spektralwerte zu trennen, verändert sich aber nicht (Kammeyer & Kroschel, 1998, S. 231).



**Abbildung 3.7:** Fourier-Analyse zweier nichtstationärer Signale. Die Amplitudenspektren sind identisch. Die zeitliche Information ist im Phasenspektrum „verborgen“. (DFT: Diskrete Fourier-Transformation; IDFT: Inverse Diskrete Fourier-Transformation)

dings ist diese Information im Phasenspektrum „verborgen“ und dem menschlichen Verständnis nicht direkt zugänglich (Hlawatsch & Boudreaux-Bartels, 1992).

Mit der Fourier-Analyse lässt sich also bei Berücksichtigung von Amplituden- und Phaseninformation der Übergang vom Zeit- in den Frequenzbereich und zurück durchführen. Um allerdings die zeitliche Entwicklung eines nichtstationären Signals im Frequenzbereich verfolgen zu können, werden modifizierte Verfahren benötigt, die das Signal in geeignet gewählte kurze Abschnitte aufteilen und analysieren. Geeignet bedeutet hierbei, einen akzeptablen Kompromiss zu finden zwischen der Forderung, dass sich das Signal in den Abschnitten mehr oder weniger quasistationär verhält, und der gewünschten Frequenzauflösung. Drei Verfahren, die das leisten, werden im folgenden Kapitel vorgestellt. Als Ergebnis erhält man so genannte *Zeit-Frequenz-Darstellungen* bzw. *Spektrogramme*. Diese sind den meisten Menschen vertraut, allerdings in einer etwas anderen Form, als sie bei der Signalanalyse Verwendung finden – als Notenblatt (Abbildung 3.8).



**Abbildung 3.8:** Korrespondenzen zwischen Notendarstellung und Spektrogramm. Das Notenbeispiel zeigt drei aufeinanderfolgende Töne mit abnehmender Klangdauer und zunehmender Tonhöhe, also Frequenz. Das gleiche Signalverhalten spiegelt auch das Spektrogramm wider, wobei hier zusätzlich die Signalstärke als Farbwert kodiert ist, was der Angabe einer Lautstärke im Notenbeispiel entsprechen würde.

## 3.2 Kurzzeit-Fourier-Transformation (STFT)

### 3.2.1 Prinzip

Die Berechnung der Frequenzwerte erfolgt bei der Fourier-Analyse unter Verwendung harmonischer Funktionen, die hinsichtlich ihrer Frequenz perfekt lokalisiert sind, sich gleichzeitig allerdings über die gesamte Zeitachse ausdehnen. Somit können zeitveränderliche Frequenzanteile nichtstationärer Signale auch nur im zeitlichen Mittel beschrieben werden. Dieser Sachverhalt wurde bereits im Abschnitt 3.1.3 anhand von Abbildung 3.7 diskutiert. Anstatt ein Datenssegment der Länge  $T$  in seiner Gesamtheit zu transformieren, wird bei der Kurzzeit-Fourier-Transformation (STFT) ein Analysefenster  $w$  mit einer konstanten Länge  $T_w < T$  schrittweise über die Daten verschoben, zu jedem Analysezeitpunkt  $\tau$  das komplette komplexe Spektrum bis zur halben Abtastfrequenz berechnet und in der Zeit-Frequenz-Ebene dem Fensterschwerpunkt zugeordnet (Abb. 3.9).

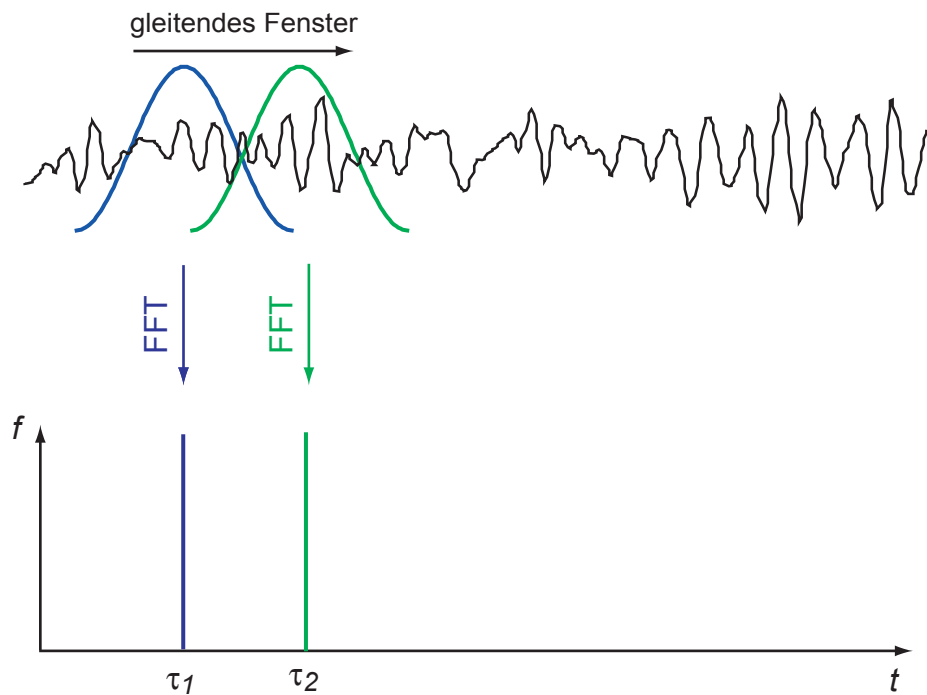
### 3.2.2 Transformationsgleichung

Die STFT für ein Signal  $x$  unter Verwendung eines Zeitfensters  $w$  berechnet sich wie folgt:

$$STFT(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w^*(\tau - t) e^{-i2\pi ft} dt, \quad (3.9)$$

wobei  $\tau$  den betrachteten Analysezeitpunkt angibt. Anstatt der konjugiert komplexen Fensterfunktion<sup>8</sup>  $w^*$  kann für den üblichen Fall einer reellen Fensterfunktion diese auch direkt in Gleichung (3.9) verwendet werden, denn dann gilt  $w = w^*$ .

<sup>8</sup>Für eine komplexe Zahl  $\alpha + i\beta$  lautet die konjugiert komplexe Form  $\alpha - i\beta$ .



**Abbildung 3.9:** Prinzip der STFT. Das Signal wird schrittweise zu den Zeitpunkten  $t = \tau$  einer gefensternten Fourier-Transformation unterzogen. Für jeden betrachteten Zeitpunkt  $\tau$  liefert die FFT alle Frequenzen bis zur halben Abtastfrequenz.

Bei näherer Betrachtung von Gleichung (3.9) fällt auf, dass im Prinzip für jeden Frequenzwert  $f$  ein Fenster  $w(t, f)$  mit geeigneter Länge verwendet werden könnte, somit also eine frequenzangepasste Spektralanalyse möglich sein sollte.<sup>9</sup> Unabhängig davon, ob die zugrunde liegende mathematische Theorie ein solches Vorgehen zuließe oder nicht, in der Praxis wird das gefensternte Signal  $x(t) \cdot w(t)$  mit einem FFT-Verfahren transformiert und dieses liefert für das gewählte Fenster immer *alle* Frequenzen bis zur halben Abtastfrequenz. Trotzdem ist es keineswegs der Fall, dass, wie insbesondere in der Wavelet-Literatur gelegentlich behauptet, mit der STFT prinzipiell keine Spektralanalysen mit frequenzangepassten Fenstern durchgeführt werden können. Der in Abbildung 3.9 dargestellte Prozess müsste allerdings für jede interessierende Frequenz mit einer entsprechend gewählten Fensterlänge wiederholt werden. Auf diese Weise erhielte man eine Vielzahl an Spektrogrammen, eines pro Fensterlänge, deren Daten dann geeignet in eine Zeit-Frequenz-Darstellung integriert werden müssten, wobei der überwiegende Teil der berechneten Daten ungenutzt bliebe. In Hinblick auf die anfallenden Rechenzeiten und Datenmengen wäre eine solche Vorgehensweise aber nicht sinnvoll.

<sup>9</sup>In der Tat unterscheidet sich die S-Transformation in ihrer Definition nur in diesem Punkt von der STFT.

### 3.2.3 STFT-Abtastbedingung

Es bleibt zu klären, welche Bedingungen bei der Wahl der Abstände zwischen den Analysezeitpunkten  $\tau$  zu berücksichtigen sind, wenn Aussagen über den zeitlichen Verlauf spektraler Kennwerte getroffen werden sollen. Eine ähnliche Frage wurde bereits in Kapitel 3.1.1 in Bezug auf die erforderliche Mindestabtastrate beim Übergang von einem zeitkontinuierlichen zu einem zeitdiskreten Signal diskutiert. Im vorliegenden Fall darf der zeitliche Abstand  $\Delta\vartheta$  zwischen zwei aufeinander folgenden STFT-Fensterungen einen gewissen Höchstwert nicht überschreiten, wenn die Ergebnisse nicht durch Aliasing-Effekte verfälscht werden sollen. Dieser Höchstwert ist abhängig von der höchsten Frequenz, die im Fensterspektrum auftritt und wird somit sowohl vom verwendeten Fenstertyp als auch von der Fensterlänge  $T$  bestimmt. Streng genommen kann ein zeitbegrenzttes Fenster nicht gleichzeitig auch bandbegrenzt sein, also eine maximale Frequenz aufweisen. Es muss also nach geeigneten Kriterien eine effektive Bandbreite  $f_B$ , z. B. der Frequenzwert der ersten Nullstelle (Hoffmann, 1998, S. 184), definiert werden. Für ein Hann- und ein Hamming-Fenster ergibt sich damit der Wert  $f_B = 2/T$ , wie anhand von Abbildung 3.6 auf Seite 26 nachgeprüft werden kann. Für den maximalen Abstand  $\Delta\vartheta_{max}$  folgt für die genannten Fenster somit (Hoffmann, 1998, S. 185)

$$\Delta\vartheta_{max} = \frac{1}{2f_B} = \frac{T}{4} . \quad (3.10)$$

Für den Fall der unter Empirie I beschriebenen STFT-Auswertung mit einem Hann-Fenster der Länge  $T = 500$  ms ist somit mindestens alle 125 ms eine Spektralanalyse durchzuführen.

## 3.3 Wavelet-Transformation (WT)

Es existieren viele Anwendungsfälle, bei denen nicht primär der Gedanke der Frequenzanalyse im Vordergrund steht. In diesen Fällen ist häufig eine Signalzerlegung in andere als die bei der Fourier-Analyse verwendeten harmonischen Basisfunktionen von Vorteil, so beispielsweise bei der Mustererkennung oder der Signalkompression. Aber auch bei der zeitaufgelösten Frequenzanalyse nichtstationärer Signale stellt die STFT aufgrund der Verwendung von Zeitfenstern konstanter Länge unter Umständen nicht das optimale Analyseverfahren dar. Ein solcher Fall liegt z. B. vor, wenn kurzzeitige hochfrequente Signalkomponenten zusammen mit langsam veränderlichen niederfrequenten Signalanteilen auftreten, wie es auch beim EEG-Signal der Fall ist. Wünschenswert wäre hier ein Spektralanalyseverfahren, das automatisch die Fensterlänge an die betrachtete Frequenz anpasst und somit die hochfrequenten Signale mit kurzen und die niederfrequenten Signale mit langen Zeitfenstern analysiert. Dies ließe sich mit der STFT zwar im Prinzip auch erreichen, allerdings, wie erwähnt, nur unter hohem Aufwand durch wiederholte Analysen des kompletten Zeitsignals mit unterschiedlichen Fensterlängen.

Anfang der 1980er Jahre entwickelte der französische Geophysiker Jean Morlet ausgehend von der STFT ein Analyseverfahren, das eine direkte zeitaufgelöste Spektralanalyse unter Verwendung frequenzangepasster Basisfunktionen ermöglicht (Morlet et al., 1982). Sein Lösungsansatz bestand darin, eine harmonische Funktion mit einem Gauß-Fenster zu multiplizieren und das resultierende Signal als Analysefunktion zu verwenden. Dieses verschob er entlang der Zeitachse, wobei er es zur Analyse niederfrequenter Signalanteile zeitlich dehnte und zur Analyse hochfrequenter Anteile stauchte – eine Wavelet-Analyse mit dem nach ihm benannten Morlet-Wavelet. Morlet war allerdings nicht der „Erfinder“ des Wavelet-Konzepts. Der Grundgedanke der Wavelet-Theorie lässt sich bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts zurückverfolgen. Das erste in der Literatur erwähnte Wavelet war das Haar-Wavelet, vorgeschlagen von dem deutschen Mathematiker Alfred Haar (Haar, 1910). Allerdings erfolgte erst mit den Arbeiten von Morlet eine Zusammenfassung und Vereinheitlichung unterschiedlicher Konzepte aus verschiedenen Anwendungsbereichen zur Wavelet-Theorie. Einen Überblick über die Geschichte der Wavelets gibt z. B. Daubechies (1996), die selbst entscheidende Beiträge zur mathematischen Formalisierung der Wavelet-Theorie geliefert hat (Daubechies, 1990). Eine ausführliche Darstellung der Wavelet-Theorie gibt der Übersichtsartikel von Farge (1992), eine vergleichende Betrachtung von STFT und WT findet man bei Rioul und Vetterli (1991). Anwendungen der WT im biomedizinischen Bereich beschreiben Unser und Aldroubi (1996). Im Hinblick auf Fragen zur praktischen Anwendung der WT sei auf Torrence und Compo (1998) verwiesen. Eine empfehlenswerte Einführung in die Verwendung der kontinuierlichen und diskreten WT für die Analyse neuroelektrischer Signale bietet das Tutorial von Samar et al. (1999).

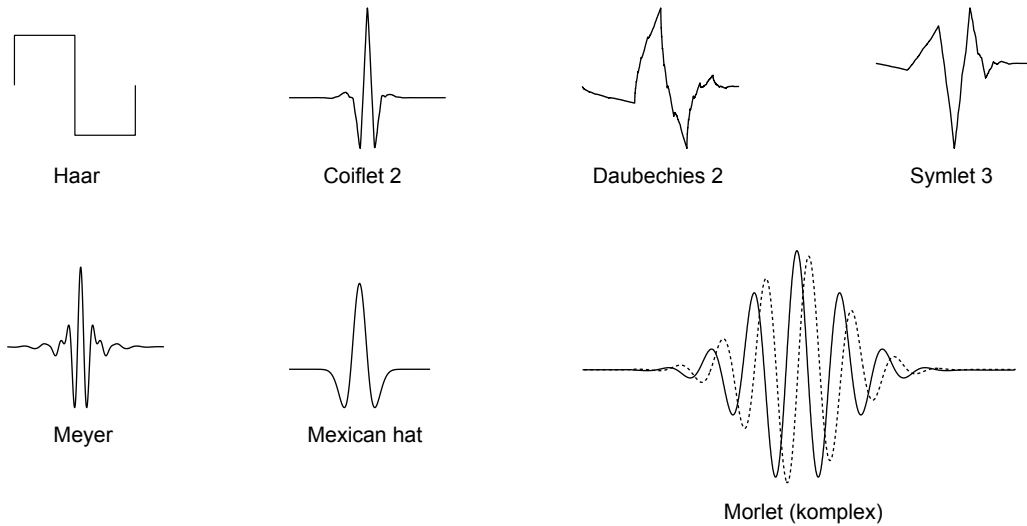
### 3.3.1 Was ist ein Wavelet?

Wavelets, auf Deutsch „Wellchen“, können sehr unterschiedliche Formen aufweisen, wie Abbildung 3.10 verdeutlicht. Alle Wavelets teilen jedoch eine Eigenschaft: Wie eine Welle oszillieren sie mindestens einmal um die Zeitachse.

Bei der Wavelet-Analyse werden, ausgehend von einem Mutter-Wavelet  $\psi(t)$ , d. h. einem Funktions-Prototypen vergleichbar einer Schablone, durch Dehnen und Stauchen sowie Verschieben entlang der Zeitachse weitere Wavelets konstruiert, die zusammen eine Familie von Basisfunktionen  $\psi_{\tau,s}(t)$  bilden:

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right), \quad s \neq 0. \quad (3.11)$$

Dabei bezeichnet  $s$  den dimensionslosen Skalierungsparameter (scale) und  $\tau$  den Analysezeitpunkt. Bei einer zeitlichen Ausdehnung  $T$  des Mutter-Wavelets beträgt die zeitliche Ausdehnung von  $\psi_{\tau,s}(t)$  gerade  $T/s$ , wobei  $|s| < 1$  eine Stauchung und  $|s| > 1$  eine Dehnung bedeutet. Der Normierungsfaktor  $1/\sqrt{|s|}$  stellt die Vergleichbarkeit der Signalstärken für unterschiedliche Werte von  $s$  sicher.



**Abbildung 3.10:** Beispiele für die Formenvielfalt von Wavelet-Funktionen. Besprochen wird das komplexe Morlet-Wavelet, welches durch Multiplikation einer komplexen harmonischen Schwingung mit einem Gauß-Fenster gebildet wird.

Als Mutter-Wavelet kann im Prinzip jede zeitlich hinreichend rasch abklingende Funktion verwendet werden, solange die Invertierbarkeit der Transformation (Signalrekonstruktion) nicht gefordert ist (für eine ausführliche Betrachtung siehe z. B. Farge, 1992). Anderenfalls muss das Mutter-Wavelet der so genannten *Zulässigkeitsbedingung* (admissibility condition) genügen, welche verlangt, dass die Fourier-Transformierte  $\Psi(f)$  des Mutter-Wavelets  $\psi(t)$  folgende (hinreichende) Bedingung erfüllt:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{|f|} df < \infty . \quad (3.12)$$

Diese Bedingung lässt sich nur dann erfüllen, wenn der Gleichanteil  $\Psi(0) = 0$  ist, d. h. im Zeitbereich gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 . \quad (3.13)$$

Abgesehen von der trivialen Lösung  $\psi \equiv 0$ , die für eine Signalanalyse nicht von Interesse ist, erfüllen nur solche Funktionen diese Bedingung, die mindestens eine Oszillation um die Zeitachse ausführen.

Die Wahl der jeweiligen Wavelet-Funktion richtet sich nach dem Ziel der Analyse. Für Spektralanalysen können, wie schon erwähnt, gefensterte harmonische Funktionen verwendet werden. Ebenso ist es möglich, ein Wavelet zu konstruieren, das einem EKP-Komplex entspricht, und dieses als Template zur Untersuchung von EKPs im Einzeltrial zu verwenden.



### 3.3.2 Transformationsgleichung und Darstellung

Bei der Wavelet-Analyse wird ein Signal  $x$  mittels der folgenden Transformationsgleichung in die Basisfunktionen  $\psi_{\tau,s}$  zerlegt:

$$WT(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left( \frac{t - \tau}{s} \right) dt . \quad (3.14)$$

Dabei steht  $\psi^*$  für die konjugiert komplexe Funktion von  $\psi$ . Die Koeffizienten  $WT(\tau, s)$  entsprechen den Koeffizienten  $STFT(\tau, f)$  der STFT, können aber je nach Wahl des Mutter-Wavelets reel oder komplex sein. Außerdem beschreiben sie das Signal  $x$  zunächst in der Zeit-Skalierungs-Ebene. Dabei gilt: Je größer  $s$ , umso ausgedehnter ist das Wavelet entlang der Zeitachse und umso langsamer veränderliche Signalanteile werden durch die entsprechenden Koeffizienten  $WT(\tau, s)$  repräsentiert. Die Darstellung des Betrags(-quadrats) von  $WT(\tau, s)$  in der Zeit-Skalierungs-Ebene wird, in Analogie zum Spektrogramm, als *Skalogramm* bezeichnet.

Für die Verwendung der WT zur Spektralanalyse ist es notwendig, die Zeit-Skalierungs-Darstellung in eine Zeit-Frequenz-Darstellung zu überführen. Dazu muss dem Mutter-Wavelet zunächst eine Frequenz  $f_0$  zugeordnet werden. Über die Beziehung

$$f_s = \frac{f_0}{s} \quad (3.15)$$

lässt sich dann für jeden Wert  $s$  ein entsprechender Frequenzwert  $f_s$  berechnen. Der kritische Punkt ist hierbei die Zuordnung der Frequenz  $f_0$ . Eine Möglichkeit besteht darin, die Frequenz derjenigen Sinusfunktion zu verwenden, die das Wavelet-Signal am besten annähert. In der Praxis bedeutet das, eine Fourier-Analyse des Mutter-Wavelets durchzuführen und  $f_0$  den Frequenzwert der maximalen Signalamplitude zuzuordnen. Je nach Form des Mutter-Wavelets ist eine solche Zuordnung eines Skalierungswertes zu einem Frequenzwert eventuell nur bedingt interpretierbar, so z. B. bei Wavelets mit einem asymmetrischen Spektralverlauf.

Soll die WT zur Spektralanalyse eingesetzt werden, beispielsweise in den Fällen, in denen die STFT mit konstanter Fensterlänge an ihre Grenzen stößt, wird man als Mutter-Wavelet eine geeignet gefensterter harmonische Funktion verwenden, so dass die Basisfunktionen im Prinzip denen der STFT (bei jeweils gleicher Fensterlänge) entsprechen.<sup>10</sup> Für die EEG-Spektralanalyse wird hierfür meist das im Folgenden kurz vorgestellte komplexe Morlet-Wavelet verwendet.

<sup>10</sup>Es gibt einen Unterschied in der Phasencharakteristik, s. Abschnitt 3.4.3.

### 3.3.3 Morlet-Wavelet

Das komplexe Morlet-Wavelet wird durch die Fensterung einer komplexen Exponentialfunktion mit einer Gauß-Funktion erzeugt (Tallon-Baudry et al., 1998):

$$\psi(t) = A e^{\frac{-t^2}{2\sigma_t^2}} e^{i2\pi f_0 t} , \quad (3.16)$$

wobei  $A = (\sigma_t \sqrt{\pi})^{-1/2}$  einen Normierungsfaktor darstellt. Die Standardabweichung  $\sigma_t$  im Zeitbereich ist mit der Standardabweichung  $\sigma_f$  im Frequenzbereich über die Beziehung

$$\sigma_t = \frac{1}{2\pi\sigma_f} \quad (3.17)$$

verknüpft. Die konkreten Eigenschaften der Transformation in Hinblick auf die Zeit-Frequenz-Auflösung werden durch das Verhältnis

$$f_0/\sigma_f , \quad (3.18)$$

also durch die Anzahl der Oszillationen innerhalb des Gauß-Fensters, bestimmt. Dieses Verhältnis bleibt beim Skalieren erhalten, ist also charakteristisch für eine Wavelet-Familie. In Hinblick auf die Zulässigkeitsbedingung sollte  $f_0/\sigma_f > 5$  gewählt werden (Farge, 1992; vgl. auch Tallon-Baudry et al., 1998). Für die Analyse langsamer EEG-Frequenzen sind hier kleinere Verhältniswerte erstrebenswert, weshalb dafür in der Regel die STFT zur Anwendung kommt.

### 3.3.4 Kontinuierliche und diskrete WT

Bei der Beschäftigung mit Wavelets stößt man früher oder später auf die Begriffe *kontinuierliche* Wavelet-Transformation (CWT) und *diskrete* Wavelet-Transformation (DWT). Die nahe liegende Vermutung, dass die CWT bei zeitkontinuierlichen Signalen und die DWT bei zeitdiskreten Signalen zur Anwendung kommt, trifft allerdings nicht zu. Sowohl CWT als auch DWT lassen sich auf diskrete Zeitsignale anwenden, die Verfahren unterscheiden sich allein in der Wahl der verwendeten Skalierungs- und Zeitparameter in Gleichung (3.14). Während diese Parameter bei der CWT im Rahmen der verfügbaren Messpunkte quasikontinuierlich variieren, sind sie bei der DWT in einem dyadischen Gitter in der Zeit-Skalierungs-Ebene angeordnet (Näheres in Torrence & Compo, 1998). Durch diese spezielle Wahl der Parameter projiziert die DWT das Signal auf eine orthogonale Basis, d. h., es existiert kein Überlapp an Information zwischen benachbarten Punkten in der Zeit-Skalierungs-Ebene, wobei eine vollständige Rekonstruierbarkeit des Signals sichergestellt ist. Mit dieser „sparsamen“ Art der Signaldarstellung bietet sich die DWT insbesondere für Aufgaben an, bei denen eine möglichst hohe Rechengeschwindigkeit sowie eine geringe resultierende Datenmenge angestrebt werden (z. B. bei Kompressionsalgorithmen). Für die visuelle Betrachtung und

Bewertung von Signalverläufen sowie die Anwendung im Bereich der Mustererkennung ist die DWT aufgrund fehlender Translationsinvarianz weniger geeignet. Treten gleiche Signalmuster zu unterschiedlichen Zeiten auf, so ergeben sich völlig unterschiedliche DWT-Koeffizienten, sofern die Verschiebung zu einer veränderten relativen Lage des Signals in Bezug auf das Zeitraster führt (s. Samar et al., 1999, S. 26). Dieser Effekt lässt sich mit dem schon besprochenen Leck-Effekt dahingehend vergleichen, dass auch dort der berechnete Spektralverlauf davon abhängt, ob eine Frequenzkomponente des Signals gerade mit einem Frequenzwert des DFT-Rasters übereinstimmt oder ob die Signalenergie auf benachbarte Frequenz-Stützstellen aufgeteilt werden muss.

### 3.4 S-Transformation (ST)

Im Jahre 1996 stellten Stockwell et al. mit der S-Transformation (ST) eine modifizierte Form der STFT vor, die eine sehr effiziente zeitaufgelöste Frequenzanalyse unter Verwendung eines Gauß-Fensters ermöglicht, dessen Länge invers zur Frequenz skaliert. Die Zeit-Frequenz-Auflösung wird dadurch automatisch an die jeweilige Frequenz angepasst. Eine ausführliche Darstellung der mathematischen Grundlagen wird in Stockwell (1999) gegeben, zusammen mit einer Beschreibung der Anwendung der ST bei der Untersuchung von Schwerewellen (gravity waves) in der Atmosphäre. McFadden et al. (1999) und, unabhängig davon, Pinnegar und Mansinha (2003) stellen verallgemeinerte Formen der ST vor, die über die Verwendung des Gauß-Fensters hinausgehend eine große Flexibilität in der Wahl der Fensterformen und -parametrisierungen erlauben.<sup>11</sup> In dieser verallgemeinerten Form stellt die ST einen Ansatz dar, der die Vorteile der STFT und der WT für die Spektralanalyse von EEG-Daten in einer Methode vereint. Eine 2-dimensionale Variante der ST zur Mustererkennung in Bildern beschreiben Mansinha, Stockwell und Lowe (1997). Weitere Anwendung fand die ST bereits bei Analysen zu Fluktuationen der Anzahl von Sonnenflecken (Mansinha, Stockwell, Lowe, Eramian & Schincariol, 1997), bei der Schwingungsanalyse mechanischer Systeme (McFadden et al., 1999), der Kontrolle der Qualität von Spannungsnetzteilen (Dash et al., 2003) sowie zur Auswertung seismischer Daten (Pinnegar & Mansinha, 2003).

#### 3.4.1 Prinzip

Die Gründe dafür, dass sich mit der STFT nur sehr umständlich frequenzangepasste Spektralanalysen durchführen lassen, wurden bereits im letzten Abschnitt von Kapitel 3.2.2 dargelegt. Entscheidend dabei war, dass mit der Multiplikation von Signal und Analysefenster im Zeitbereich eine Faltung der Spektren im Frequenzbereich erfolgt und bei Verwendung von FFT-Algorithmen keine Möglichkeit besteht, gezielt die Fenstereigenschaften in

<sup>11</sup>Das der ST zugrunde liegende mathematische Prinzip verwenden unabhängig von den hier genannten Arbeiten auch Schack et al. (2001) sowie Gruber (2004), allerdings mit Beschränkung auf das Gauß-Fenster.

Abhängigkeit von der jeweiligen Frequenz zu verändern. Eine FFT-basierte Analyse mit frequenzangepassten Fenstern ist allerdings unter Ausnutzung der Tatsache möglich, dass umgekehrt eine Faltung im Zeitbereich einer Multiplikation der Spektren im Frequenzbereich entspricht. Aus diesem Grund überführt die ST zunächst das gesamte Signal in den Frequenzbereich (Abb. 3.11 oben). In Abschnitt 3.1.3 wurde gezeigt, dass hierbei unter Berücksichtigung von Amplituden- und Phasenwerten keine Information verloren geht. Im Frequenzbereich erfolgt anschließend für jede gewünschte Frequenz eine Multiplikation von Signal und Fenster, wobei die Fenstereigenschaften gezielt an die jeweilige Frequenz angepasst werden können. Das multiplizierte und somit frequenzgefilterte Signal wird dann mittels inverser Fourier-Transformation in die Zeit-Frequenz-Ebene überführt.

Diese Skizzierung des Prinzips, genauer die Darstellung in Abbildung 3.11, unterscheidet sich in folgendem Punkt von der bei der ST realisierten Vorgehensweise: Die ST verschiebt nicht das Fenster zur gewünschten Frequenz, sondern das Signalspektrum so, dass eine Multiplikation mit dem bei 0 Hz zentrierten Fenster erfolgt. Genau genommen zeigt Abbildung 3.11 eine Bandpassfilterung des Signals mit speziell geformten digitalen Filtern in Form der Fensterspektren und stellt somit einen Bezug zu dem auf Seite 17 beschriebenen ERD-Verfahren her. Während dort die spektralen Kennwerte anschließend näherungsweise durch Quadrieren und gleitender Mittelung geschätzt werden, besteht der exakte Weg in einer Verschiebung des gefilterten Signals zu 0 Hz. Auf die Darstellung dieses Schrittes wurde verzichtet, weil er für ein Verständnis des Prinzips der ST nicht grundlegend ist. Würde dieser Schritt durchgeführt werden, ergebe sich dasselbe Resultat wie bei der tatsächlich realisierten Berechnungsvorschrift der ST – beide Vorgehensweisen sind also äquivalent.

### 3.4.2 Transformationsgleichung

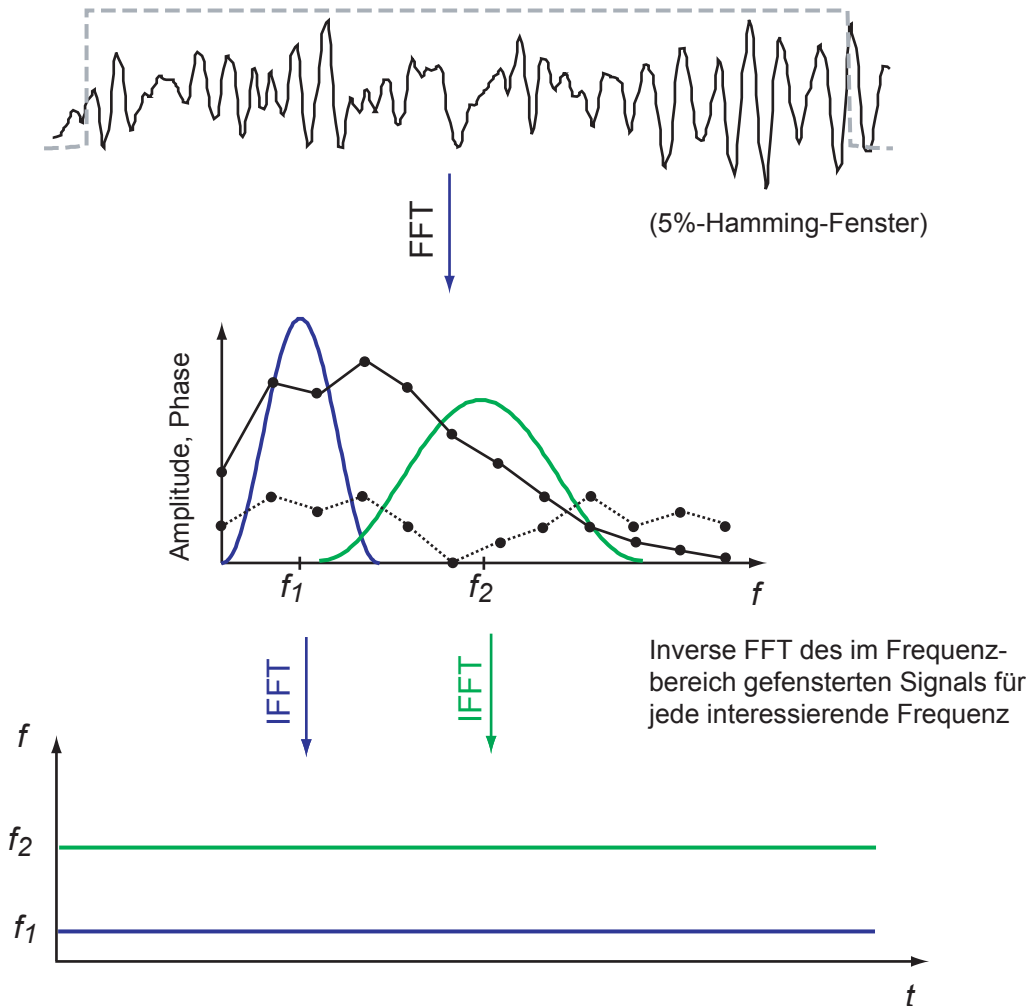
Die nachfolgend formulierten Zusammenhänge basieren auf den mathematischen Darstellungen der ST unter Verwendung des Gauß-Fensters (Stockwell et al., 1996; Stockwell, 1999) sowie der bereits erwähnten verallgemeinerten Ansätze für beliebige Fensterformen von McFadden et al. (1999) und Pinnegar und Mansinha (2003).

Die ST eines zeitkontinuierlichen Signals  $x(t)$  unter Verwendung eines frequenzabhängigen Fensters  $w(t, f)$  ist im Zeitbereich gegeben durch:

$$ST(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w^*(\tau - t, f) e^{-i2\pi ft} dt . \quad (3.19)$$

Dieser Ausdruck entspricht der bereits bekannten STFT-Gleichung (3.9), wobei das Fenster jetzt zusätzlich auch vom betrachteten Frequenzwert  $f$  abhängt. Auf der rechten Seite von (3.19) stehen drei Faktoren (Signal, Fenster, komplexe Exponentialfunktion), die im Rahmen der STFT als Fourier-Transformation  $\mathcal{F}$  des Produkts von  $x$  und  $w$  interpretiert werden:

$$ST(\tau, f) = \mathcal{F}\{x(t) \cdot w^*(\tau - t, f)\} . \quad (3.20)$$



**Abbildung 3.11:** Vereinfachtes Prinzip der S-Transformation (s. Text). Das gesamte Datensignal wird zunächst einer Fourier-Transformation unterzogen. (Das 5%-Hamming-Fenster verdeutlicht eine Möglichkeit, mit nur geringen Verlusten an zeitlicher Information mögliche Leck-Effekte zu reduzieren.) Die Fensterung erfolgt im Frequenzbereich, wobei das Fenster gezielt an die jeweilige Frequenz angepasst werden kann. Im dargestellten Fall werden höhere Frequenzen mit einem kürzeren Zeitfenster, also einem breiteren Frequenzfenster, analysiert. Die Amplitudenunterschiede der Fenster resultieren aus der Invertierbarkeitsbedingung (3.25). Für jeden interessierenden Frequenzwert erfolgt eine inverse Fourier-Transformation, wobei die Zeit-Frequenz-Ebene im Gegensatz zur STFT schrittweise pro betrachteter Frequenz „gefüllt“ wird.

Durch Zusammenfassen von Signal  $x$  und komplexer Exponentialfunktion zu einer neuen Funktion

$$p(t, f) = x(t)e^{-i2\pi ft} \quad (3.21)$$

lässt sich die ST statt wie in (3.20) alternativ auch als Faltung von  $p$  und  $w$  interpretieren:

$$ST(\tau, f) = p(\tau, f) * w^*(\tau, f) \quad (3.22)$$

Aufgrund der bereits besprochenen Eigenschaften der Fourier-Transformation entspricht diese Faltung im Zeitbereich einer Multiplikation der Fourier-Transformierten  $P(\nu, f)$  und  $W(\nu, f)$  im Frequenzbereich (Wechsel von  $\tau$  zu  $\nu$ ), so dass sich die ST letztlich wie folgt darstellen lässt:

$$ST(\tau, f) = \mathcal{F}^{-1}\{P(\nu, f)W^*(\nu, f)\} \quad (3.23)$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\{X(\nu + f)W^*(\nu, f)\} \quad (3.24)$$

wobei  $\mathcal{F}^{-1}$  die inverse Fourier-Transformation (von  $\nu$  zu  $\tau$ ) beschreibt. In (3.24) wurde  $P(\nu, f)$  explizit als  $X(\nu + f)$  formuliert, d. h., die Multiplikation von  $x(t)$  mit der komplexen Exponentialfunktion  $e^{-i2\pi ft}$  führt zu einer Frequenzverschiebung, wobei der Frequenzwert  $f$  an die Stelle 0 Hz verschoben wird. Dies wird auch als Demodulation bezeichnet. Somit beschreibt (3.24) die Demodulation des Signals  $X$  mit anschließender Tiefpassfilterung durch  $W$ , gefolgt von einer inversen Fourier-Transformation.

Für die Berechnung der Frequenzdarstellung  $W$  des Analysefensters  $w$  kann, wenn bekannt, der entsprechende analytische Ausdruck verwendet werden. Es besteht aber keine Beschränkung auf solche Spezialfälle. Es kann praktisch jedes beliebige Fenster, auch ohne bekannte Funktionsvorschrift, verwendet und der Frequenzverlauf über die DFT berechnet werden. Die Wahl der Fensterfunktion ist dabei praktisch beliebig. Um die Invertierbarkeit der Transformation zu gewährleisten, ist nur die folgende Bedingung durch geeignete Normierung zu erfüllen:

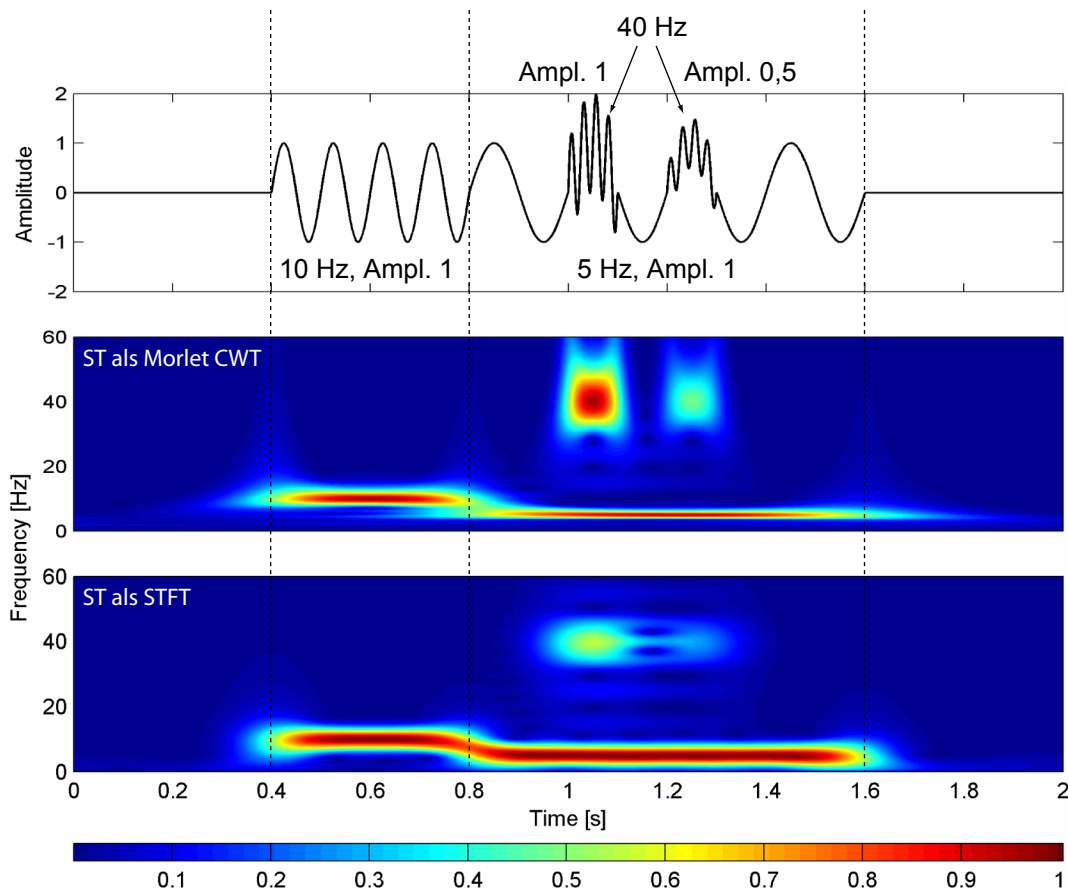
$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau - t, f) d\tau = 1 \quad (3.25)$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, liefert die Integration von  $ST(\tau, f)$  über alle Zeitpunkte  $\tau$  gerade das Fourier-Spektrum von  $x(t)$  und somit ist die ST invertierbar:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} ST(\tau, f) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau - t, f) d\tau \right\}_{=1} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt = X(f) \quad (3.26) \end{aligned}$$

### 3.4.3 ST im Vergleich mit WT und STFT

Durch den Wechsel vom Zeit- in den Frequenzbereich bietet die ST die Möglichkeit, die Analysefenster in ihren Eigenschaften gezielt an die jeweils betrachtete Frequenz anzupassen. Auf diese Weise ist es möglich, mit der ST sowohl das Verhalten einer Wavelet-Transformation als auch einer Kurzzeit-Fourier-Transformation nachzubilden (Abb. 3.12).



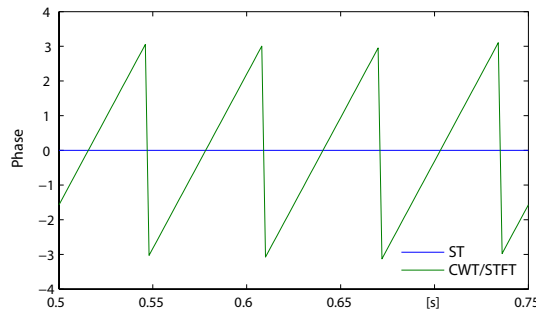
**Abbildung 3.12:** ST als CWT und als STFT am Beispiel eines synthetischen Signals aus vier Signal-komponenten (jeweils 4 Schwingungsperioden), welches den Wechsel von einem Alpha-Rhythmus zu einem Theta-Rhythmus mit überlagerten Gamma-Komponenten simuliert (oben). In der Bildmitte wird eine CWT mit einem Morlet-Wavelet ( $f_0/\sigma_f = 7$ ) nachgebildet. Beide 40 Hz-Komponenten werden mit dem korrekten Amplitudenwert wiedergegeben. Bei der Verwendung der ST als STFT mit einem konstanten Gauß-Fenster von 500 ms ist die zweite 40 Hz-Komponente, selbst ohne störendes Signalrauschen, kaum noch zu erkennen (unten).

Betrachten wir zunächst die Zusammenhänge zwischen ST und WT für den Fall einer kontinuierlichen Wavelet-Transformation (CWT) unter Verwendung des in Abschnitt 3.3.3 vorgestellten komplexen Morlet-Wavelets. Dieses wird durch die Multiplikation einer komplexen Exponentialfunktion mit einem Gauß-Fenster gebildet. Bei Verwendung der ST mit einem identisch parametrisierten Gauß-Fenster gilt der folgende Zusammenhang (Stockwell,

1999):

$$ST(\tau, f) = e^{i2\pi f\tau} WT(\tau, s) . \quad (3.27)$$

(Der Skalierungsfaktor  $s$  und die Frequenz  $f$  sind nach (3.15) invers miteinander verknüpft.) ST und CWT unterscheiden sich demnach nur durch einen Phasenfaktor voneinander. Dies bedeutet insbesondere, dass die Amplitudenspektren unter den genannten Voraussetzungen identisch sind.<sup>12</sup> Die Unterschiede, die sich durch den Phasenfaktor ergeben, werden im Folgenden kurz erörtert. Die ST referenziert alle Phasenwerte auf den Beginn des Da-

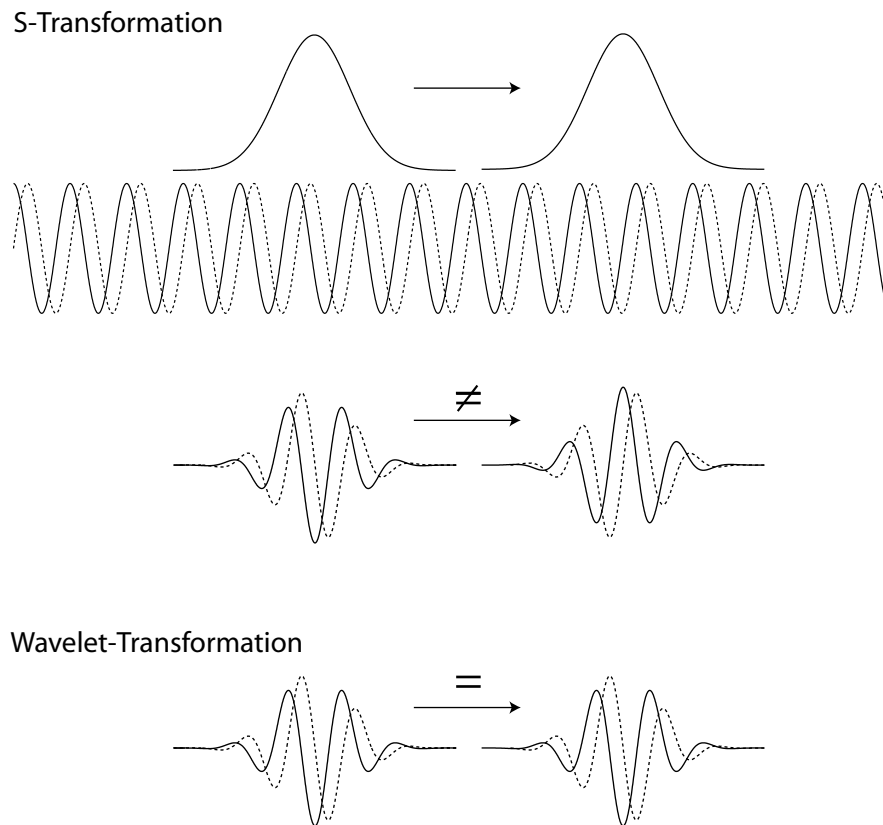


**Abbildung 3.13:** Phasenverhalten von ST, CWT und STFT. Dargestellt ist das zeitliche Verhalten der 8-Hz-Phasenkomponente bei der Analyse eines stationären 8-Hz-Kosinussignals. Die ST referenziert die Phasenlage auf den Beginn des Gesamtsegments (absolute Referenzierung, blau), während bei der CWT und der STFT die Referenzierung immer auf den Beginn der Wavelet-Funktion bzw. des Analysefensters erfolgt und sich somit der Bezugspunkt relativ zum Signal ständig ändert.

tensegments, was Stockwell (1999) als *absolut referenzierte Phaseninformation* bezeichnet. Im Gegensatz dazu referenziert die CWT die Phaseninformation immer lokal auf den Beginn des Wavelets. Die daraus resultierenden Unterschiede für die Analyse von Phaseninformationen verdeutlicht Abbildung 3.13: Für ein Signal mit konstanter Phase liefert nur die ST einen konstanten Phasenwert, während er sich bei der CWT über die Zeit hinweg kontinuierlich ändert. Dies liegt daran, dass bei der Wavelet-Transformation das Analysefenster und der oszillatorische Anteil in Form des Mutter-Wavelets fest miteinander verknüpft sind und bei der Analyse somit beide ihre Position relativ zum betrachteten Signal ständig ändern. Bei der S-Transformation wird hingegen nur das Analysefenster entlang der Zeitachse verschoben. Der oszillatorische Anteil bleibt unverändert und ändert somit auch nicht seine Lage relativ zum Signal. Letztlich bedeutet dies, dass die Analyse- bzw. Basisfunktionen in beiden Fällen als Produkt der gleichen Komponenten, einer zeitlichen Lokalisierungsfunktion und einer oszillatorischen Komponente zur Frequenzlokalisierung, gebildet werden. Im Unterschied zu den „echten“ Wavelets verändern die „ST-Wavelets“ aber bei der Translation entlang der Zeitachse ständig ihre Form (Abb. 3.14). Es bleibt somit festzuhalten: Bei vergleichbarer Parametrisierung liefern ST und WT identische Amplitudenspektren. Trotzdem handelt es sich bei der ST nicht um eine WT, weil die oszillatorische Komponente, im Gegensatz zum Wavelet-Konzept, nicht relativ zum Signal verschoben wird. Die ST unterliegt außerdem nicht den Einschränkungen der Zulässigkeitsbedingung (3.12).

<sup>12</sup>Für eine entsprechende Dokumentation anhand empirischer Daten wird auf Kapitel 6.4.2 verwiesen.



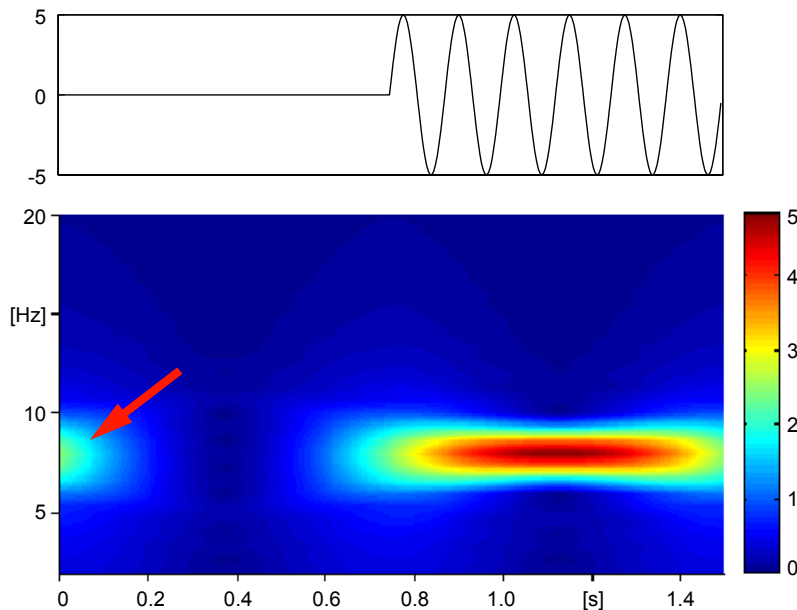


**Abbildung 3.14:** Bei der ST wird nur das Zeitfenster verschoben, der oszillatorische Anteil wird in seiner Lage relativ zum Signal fixiert. Dadurch ändert die Lokalisierungsfunktion als Produkt beider Anteile in Abhängigkeit vom betrachteten Zeitpunkt die Form. Bei der WT ist die Lage von oszillatorischem Anteil und Fensterfunktion zueinander fixiert, die Wavelets ändern ihre Form bei der Translation entlang der Zeitachse nicht.

Natürlich ist es bei der ST auch möglich, für alle Frequenzen dasselbe Analysefenster zu verwenden – in diesem Fall verhält sich die ST in Bezug auf die Amplituden im Prinzip wie die entsprechende STFT. Unterschiede bei der praktischen Anwendung können sich bei der Analyse sehr kurzer Datensätze ergeben. Diese sind zurückzuführen auf den Einfluss der zusätzlichen Fourier-Transformation des Gesamtsegments zu Beginn der ST. Bei den üblichen Segmentlängen mit einer Dauer von wenigstens 1 s sind diese Unterschiede aber vernachlässigbar. Der entscheidende Vorteil bei der Verwendung der ST als STFT besteht darin, dass nicht automatisch alle Frequenzen bis zur Nyquist-Frequenz berechnet werden, sondern gezielt einzelne Frequenzen bzw. Frequenzbänder in ihrem zeitlichen Verlauf analysiert werden können. In Bezug auf die Phaseninformationen gelten auch hier die bereits bei der WT getroffenen Aussagen. Allerdings ist das „Mitlaufen“ der Phase bei der STFT im Gegensatz zur WT nicht eine Eigenschaft des Verfahrens, sondern der üblichen Art der Implementierung unter Verwendung der FFT geschuldet.

### 3.4.4 Aliasing im Zeitbereich durch zirkuläre Faltung

Die Multiplikation von Signal und Fenster im Frequenzbereich ist mit einer zirkulären (auch zyklischen oder periodischen) Faltung der entsprechenden Zeitsignale verknüpft. In der Praxis erfolgt die Rücktransformation aus dem Frequenzbereich in den Zeitbereich nach Gleichung (3.24) mit Hilfe von DFT-Algorithmen, wobei im Zeitbereich Überlappungseffekte (Aliasing) an den Rändern aufgrund der implizit angenommenen Signalperiodizität zu berücksichtigen sind (Abb. 3.15). Anschaulich werden bei der Berechnung die Analy-



**Abbildung 3.15:** Durch zirkuläre Faltung treten bei der ST Überlappungseffekte an den Rändern auf. Hier demonstriert am Beispiel eines 8-Hz-Sinussignals, das mit einem Hann-Fenster von 1 000 ms Dauer analysiert wurde.

sefenster über den Beginn (Ende) des Signals  $x$  hinaus verschoben und erfassen aufgrund der periodischen Signalfortsetzung dann auch Signalanteile vom jeweils anderen Ende des Signals. Eine Möglichkeit, mit diesem Artefakt umzugehen, besteht darin, diese Daten am Segmentanfang und am Segmentende nicht zu berücksichtigen, also z. B. jeweils am Rand einen Bereich entsprechend der halben Fensterlänge auszublenden. Unter Berücksichtigung des Dämpfungsverhalten des verwendeten Fensters und des tolerierbaren Fehlers kann hier auch ein geringerer Wert verwendet werden. Da die Fensterlängen mit wachsender Frequenz abnehmen, ergibt sich in der grafischen Darstellung der Zeit-Frequenz-Daten ein konusförmiger Rand, der auch als *cone of influence* (COI) bezeichnet wird und gleichzeitig Information über die zeitliche Ausdehnung des Analysefensters bei der jeweiligen Frequenz liefert. Nähere Ausführungen zum Thema COI finden sich z. B. bei Torrence und Compo (1998).