

Zusammenfassung

Phasenseparationsphänomene treten unter anderem bei zweikomponentigen Gemischen auf, die einer Abkühlung ausgesetzt werden. Solche Prozesse werden durch die Cahn-Hillard-Gleichung verschiedenen Typs beschrieben. In dieser Arbeit liegt unser Augenmerk auf den nichtlokalen Cahn-Hillard-Gleichungen, zu denen auch unsere nichtlokale viskose Cahn-Hillard-Gleichung gehört. Die nichtlokalen Cahn-Hillard Modelle beschreiben nicht nur die Vorgänge präziser (siehe [7]), sondern sie erfüllen auch auf natürliche Weise die physikalischen Forderungen, die bei lokalen Modellen zusätzlich aufgestellt werden müssen. Nichtlokale Modelle enthalten Gleichungen zweiter Ordnung auf deren Lösungen das Maximumprinzip anwendbar ist.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der mathematischen Untersuchung der nichtlokalen viskosen Cahn-Hillard-Gleichung. Wir beweisen in den beiden Kapiteln 3 und 4 die Existenz einer eindeutigen Lösung unserer Modellgleichung. Dabei gehen wir wie folgt vor: Nach geeigneten Regularisierungen (z.B. Regularisierung der Nichtlinearität) approximieren wir das nun regularisierte Problem durch ein semidiskretes Schema, welches wir durch Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes lösen. Mittels a-priori-Abschätzungen, die ihren Ausgangspunkt in den Energieabschätzungen nehmen, und Kompaktheitsaussagen erhalten wir dann eine Lösung des Originalproblems. Desweiteren gehen wir der Frage nach, ob die Konzentration u strikt zwischen Null und Eins bleibt ($0 < u(t, x) < 1$), falls diese Tatsache für die Anfangskonzentration gilt. Die Frage kann in Kapitel 5 lediglich für endliche Zeiten positiv beantwortet werden. Dabei verwenden wir geeignete Testfunktionen sowie die Moser-Iterationsverfahren in der Variante von Alikakos. Schließlich untersuchen wir in Kapitel 6 das Langzeitverhalten. Dabei spielt die Energieabschätzung wiederum eine wesentliche Rolle. Wir können beweisen, daß die Lösung entlang der Trajektorie gegen einen Gleichgewichtspunkt konvergiert. Aber diese Konvergenz kann nur für Teilfolgen gezeigt werden, da nicht zu erwarten ist, dass der Gleichgewichtspunkt eindeutig durch den Mittelwert des Anfangswertes bestimmt ist. Für die Zukunft interessant wäre die Untersuchung der Konvergenz nicht nur einer Teilfolge sondern entlang der gesamten Trajektorie. Dazu müßte man aber die strikte Beschränktheit der Konzentration nicht nur für endliche Zeiten sondern zeitlich global zeigen. Dies würde die Anwendung der Lojasiewicz-Simon-Ungleichung ermöglichen.