Kapitel 6

Gemischte Integraldarstellungen

Das eigentliche Ziel dieses Textes war es, eine allgemeine Integraldarstellung mit Hilfe beider Diracoperatoren zu finden, um eine Lösung für eine Gleichung wie $\partial^{\mu}\bar{\partial}^{\nu}w = f$ mit beliebigen $\mu, \nu \in \mathbb{N}_0$, $0 < \mu < \nu$ zu finden. Das ist hier für die Fälle gerader m oder für $0 \leq 2k-1 < m$, $(m < 1)$ durchgeführt. Für die verbleibenden Fälle ist von der Darstellung (4.5) auszugehen und Stammfunktionen der anderen Kernfunktionen in (4.13) zu finden. Dazu benutzt man wiederholt den Satz von STOKES mit der iterierten Integraldarstellung in Δ (4.2). Man benötigt dazu eine allgemeine Stammfunktion eines modifizierten Cauchy Kernes. Die Mittel dazu findet man im vorangegangen Kapitel.

6.1 Darstellung einfacher Ordnung in ∂

Satz 6.1.1 *Sei $G \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und $f \in \mathrm{C}^{2k+1}(\overline{G},\mathcal{A})$, $1 \leq k$, dann gilt für gerade m oder für $0 \leq 2k-1 < m$ und $m > 1$*

$$
\begin{aligned}
f(x) \;=\; & \sum_{\mu=0}^{k} \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{\partial G} \frac{\overline{(y-x)}\,|y-x|^{2\mu-m-1}}{2^{\mu}\,\mu!\,\prod\limits_{j=1}^{\mu}(2j-m-1)}\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y \Delta^{\mu} f(y) \\
& - \sum_{\mu=1}^{k} \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{\partial G} \frac{|y-x|^{2\mu-m-1}}{2^{\mu-1}\,(\mu-1)!\,\prod\limits_{j=1}^{\mu}(2j-m-1)}\, \mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y \left\{\partial\, \Delta^{\mu-1} f(y)\right\} \\
& - \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{G} \frac{\overline{(y-x)}\,|y-x|^{2k-m-1}}{2^{k}\,k!\,\prod\limits_{j=1}^{k}(2j-m-1)} \left\{\partial \Delta^{k} f(y)\right\} \mathrm{d}V_y.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Beweis:

Hier noch einmal die Gleichung (4.2):

$$f(x) = \sum_{\mu=1}^{k} \left\{ \frac{1}{\omega_{m+1}} \int_{\partial G} \frac{(\overline{y-x})\,|y-x|^{2(\mu-1)-m-1}}{2^{\mu-1}\,(\mu-1)!\,\prod_{j=1}^{\mu-1}(2j-m-1)}\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y \Delta^{\mu-1} f(y) \right.$$
$$\left. -\frac{1}{\omega_{m+1}} \int_{\partial G} \frac{|y-x|^{2\mu-m-1}}{2^{\mu-1}\,(\mu-1)!\,\prod_{j=1}^{\mu}(2j-m-1)}\, \mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y \left\{ \partial\, \Delta^{\mu-1} f(y) \right\} \right\}$$
$$+\frac{1}{\omega_{m+1}} \int_{G} \frac{|y-x|^{2k-m-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,\prod_{j=1}^{k}(2j-m-1)}\, \Delta^k f(y)\, \mathrm{d}V_y.$$

Betrachtet man den letzten Teil, das Gebietsintegral mit $f \in \mathrm{C}^{2k+1}(G,\mathcal{A})$ und benutzt (2.1), so erhält man

$$\begin{aligned} I_k(x) &:= \frac{1}{\omega_{m+1}} \int_{G} \frac{|y-x|^{2k-m-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,\prod_{j=1}^{k}(2j-m-1)} \left\{ \Delta^k f(y) \right\} \mathrm{d}V_y \\ &= \frac{1}{\omega_{m+1}} \int_{\partial G} \frac{(\overline{y-x})\,|y-x|^{2k-m-1}}{2^k\,k!\,\prod_{j=1}^{k}(2j-m-1)}\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y \Delta^k f(y) \\ &\quad -\frac{1}{\omega_{m+1}} \int_{G} \frac{(\overline{y-x})\,|y-x|^{2k-m-1}}{2^k\,k!\,\prod_{j=1}^{k}(2j-m-1)} \left\{ \partial \Delta^k f(y) \right\} \mathrm{d}V_y, \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} \partial \left\{ \frac{\overline{x}\,|x|^{2k-m-1}}{2^k\,k!\,\prod_{j=1}^{k}(2j-m-1)} \right\} &= \frac{\partial \left(\frac{\overline{x}}{|x|^{m+1}} |x|^{2k} \right)}{2^k\,k!\,\prod_{j=1}^{k}(2j-m-1)} \\ &= \frac{2k|x|^{2(k-1)} \frac{x\overline{x}}{|x|^{m+1}}}{2^k\,k!\,\prod_{j=1}^{k}(2j-m-1)} \\ &= \frac{|x|^{2k-m-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,\prod_{j=1}^{k}(2j-m-1)} \end{aligned}$$

gilt.

Also gilt

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{\mu=1}^{k}\left\{\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\frac{(\overline{y-x})\,|y-x|^{2(\mu-1)-m-1}}{2^{\mu-1}\,(\mu-1)!\,\prod\limits_{j=1}^{\mu-1}(2j-m-1)}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\Delta^{\mu-1}f(y)\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\frac{|y-x|^{2\mu-m-1}}{2^{\mu-1}\,(\mu-1)!\,\prod\limits_{j=1}^{\mu}(2j-m-1)}\,\mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y\left\{\partial\,\Delta^{\mu-1}f(y)\right\}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\frac{(\overline{y-x})\,|y-x|^{2k-m-1}}{2^{k}\,k!\,\prod\limits_{j=1}^{k}(2j-m-1)}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\Delta^{k}f(y)\\
&\quad-\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{G}\frac{(\overline{y-x})\,|y-x|^{2k-m-1}}{2^{k}\,k!\,\prod\limits_{j=1}^{k}(2j-m-1)}\left\{\partial\Delta^{k}f(y)\right\}\mathrm{d}V_y\\
&= \sum_{\mu=0}^{k}\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\frac{(\overline{y-x})\,|y-x|^{2\mu-m-1}}{2^{\mu}\,\mu!\,\prod\limits_{j=1}^{\mu}(2j-m-1)}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\Delta^{\mu}f(y)\\
&\quad-\sum_{\mu=1}^{k}\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\frac{|y-x|^{2\mu-m-1}}{2^{\mu-1}\,(\mu-1)!\,\prod\limits_{j=1}^{\mu}(2j-m-1)}\,\mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y\left\{\partial\,\Delta^{\mu-1}f(y)\right\}\\
&\quad-\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{G}\frac{(\overline{y-x})\,|y-x|^{2k-m-1}}{2^{k}\,k!\,\prod\limits_{j=1}^{k}(2j-m-1)}\left\{\partial\Delta^{k}f(y)\right\}\mathrm{d}V_y.
\end{aligned}
$$

❏

6.2 Darstellungen höherer Ordnungen in ∂

Definition 6.2.1 *Seien für gerade m oder für $0 \leq 2\left(k + \left[\frac{1}{2}(l+1)\right]\right) - 1 < m$, $l \in \mathbb{N}$ und $\nu \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} E_l(x) &:= \frac{\overline{x}^{l+1}|x|^{2k-m-1}}{\omega_{m+1}2^{k+l}(k+l)!\prod\limits_{j=1}^{k}(2j-m-1)} \\ &+ \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}(l-1)\right]} \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{l-2n}\begin{pmatrix} l-n-\mu+1 \\ n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+\mu-1 \\ n \end{pmatrix}\overline{x}^{l-\mu-2n}x^{\mu-1}|x|^{2(k+n+1)-m-1}}{\omega_{m+1}2^{k+l}(k+l)!\prod\limits_{j=n+2}^{k}(2j-m-1)\prod\limits_{j=1}^{n+1}\{2(k+j)-m-1\}}, \end{aligned}$$

$$E_{-1,\nu-1}(x) := \frac{|x|^{2\nu-m-1}}{\omega_{m+1}2^{\nu-1}(\nu-1)!\prod\limits_{j=1}^{\nu}(2j-m-1)}$$

und

$$E_{0,\nu}(x) := \frac{\overline{x}|x|^{2\nu-m-1}}{\omega_{m+1}2^{\nu}\nu!\prod\limits_{j=1}^{\nu}(2j-m-1)}.$$

Bemerkung 6.2.1 Es gelten $E_{0,0}(x) = E(x)$, $E_0(x) = E_{0,k}(x)$, nach Satz (5.2.1), $\partial E_{l+1}(x) = E_l(x)$ und für $\nu \geq 0$

$$\begin{aligned} \partial E_{0,\nu}(x) &= \frac{\partial\left(\frac{\overline{x}}{|x|^{m+1}}|x|^{2\nu}\right)}{\omega_{m+1}2^{\nu}\nu!\prod\limits_{j=1}^{\nu}(2j-m-1)} \\ &= \frac{\frac{\overline{x}}{|x|^{m+1}}2\nu x|x|^{2(\nu-1)}}{\omega_{m+1}2^{\nu}\nu!\prod\limits_{j=1}^{\nu}(2j-m-1)} \\ &= \frac{|x|^{2\nu-m-1}}{\omega_{m+1}2^{\nu-1}(\nu-1)!\prod\limits_{j=1}^{\nu}(2j-m-1)} \\ &= E_{-1,\nu-1}(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \overline{\partial}E_{-1,\nu-1}(x) &= \frac{(2\nu-m-1)\overline{x}|x|^{2(\nu-1)-m-1}}{\omega_{m+1}2^{\nu-1}(\nu-1)!\prod\limits_{j=1}^{\nu}(2j-m-1)} \\ &= \frac{\overline{x}|^{2(\nu-1)-m-1}}{\omega_{m+1}2^{\nu-1}(\nu-1)!\prod\limits_{j=1}^{\nu-1}(2j-m-1)} \\ &= E_{0,\nu-1}(x). \end{aligned}$$

.

Satz 6.2.1 (gemischte Integraldarstellung) *Sei $G \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und $f \in \mathrm{C}^{2k+l+1}(\overline{G};\mathcal{A})$, $1 \leq k$, dann gilt für $l \in \mathbb{N}_0$, $m > 1$ und für gerade k oder für $0 \leq 2\left(k + \left[\frac{1}{2}(l+1)\right]\right) - 1 < m$*

$$
\begin{aligned}
f(x) \;=\; & \sum_{\nu=0}^{k} \int_{\partial G} \frac{\overline{(y-x)}|y-x|^{2\nu-m-1}}{\omega_{m+1} 2^{\nu} \nu! \prod_{j=1}^{\nu}(2j-m-1)} \mathrm{d}\vec{\sigma}_y \{\Delta^{\nu} f(y)\} \\
& + \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu} \int_{\partial G} \Bigg\{ \frac{\overline{(y-x)}^{\nu+1}|y-x|^{2k-m-1}}{\omega_{m+1} 2^{k+\nu}(k+\nu)! \prod_{j=1}^{k}(2j-m-1)} \\
& \qquad + \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}(\nu-1)\right]} \frac{\sum_{\mu=1}^{\nu-2n} \binom{\nu-n-\mu+1}{n+1}\binom{n+\mu-1}{n} \overline{(y-x)}^{\nu-\mu-2n}(y-x)^{\mu-1}}{\omega_{m+1} 2^{k+\nu}(k+\nu)! \prod_{j=n+2}^{k}(2j-m-1) \prod_{j=1}^{n+1}\{2(k+j)-m-1\}} \\
& \qquad \times |y-x|^{2(k+n+1)-m-1} \mathrm{d}\vec{\sigma}_y \left\{\partial^{\nu}\Delta^{k} f(y)\right\} \Bigg\} \\
& - \sum_{\nu=1}^{k} \int_{\partial G} \frac{|y-x|^{2\nu-m-1}}{\omega_{m+1} 2^{\nu-1}(\nu-1)! \prod_{j=1}^{\nu}(2j-m-1)} \mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y \{\Delta^{\nu-1}\partial f(y)\} \\
& + (-1)^{l-1} \int_{G} \Bigg\{ \frac{\overline{(y-x)}^{l+1}|y-x|^{2k-m-1}}{\omega_{m+1} 2^{k+l}(k+l)! \prod_{j=1}^{k}(2j-m-1)} \\
& \qquad + \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}(l-1)\right]} \frac{\sum_{\mu=1}^{l-2n} \binom{l-n-\mu+1}{n+1}\binom{n+\mu-1}{n} \overline{(y-x)}^{l-\mu-2n}(y-x)^{\mu-1}}{\omega_{m+1} 2^{k+l}(k+l)! \prod_{j=n+2}^{k}(2j-m-1) \prod_{j=1}^{n+1}\{2(k+j)-m-1\}} \\
& \qquad \times |y-x|^{2(k+n+1)-m-1} \Bigg\} \left\{\partial^{l+1}\Delta^{k} f(y)\right\} \mathrm{d}V_y.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Beweis:

Mit den Abkürzungen aus Definition 6.2.1 hat (6.2) folgende Form:

$$
\begin{aligned}
f(x) \;=\; & \sum_{\nu=0}^{k} \int_{\partial G} E_{0,\nu}(y-x) \mathrm{d}\vec{\sigma}_y \{\Delta^{\nu} f(y)\} + \sum_{\nu=1}^{l} (-1)^{\nu} \int_{\partial G} E_{\nu}(y-x) \mathrm{d}\vec{\sigma}_y \{\partial^{\nu}\Delta^{k} f(y)\} \\
& - \sum_{\nu=1}^{k} \int_{\partial G} E_{-1,\nu-1}(y-x) \mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y \{\partial\Delta^{\nu-1} f(y)\} + (-1)^{l+1} \int_{G} E_{l}(y-x) \{\partial^{l+1}\Delta^{k} f(y)\} \mathrm{d}V_y
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion über l.

1. *Der Induktionsanfang ($l = 0$) ist die Gleichung (6.1).*

2. *Induktionsannahme: Die Gleichung (6.3) gilt für $l \in \mathbb{N}_0$.*

3. *Induktionsschritt: Nach (2.3) gilt*

$$\partial^{l+1}\Delta^k f(y) = \int\limits_{\partial G} \mathrm{E}(z-y)\mathrm{d}\vec{\sigma}_z \partial^{l+1}\Delta^k f(z) - \int\limits_G \mathrm{E}(z-y)\left\{\partial^{l+2}\Delta^k f(z)\right\}\mathrm{d}V_z. \tag{6.4}$$

Seien

$$\Psi(x,z) := \int\limits_G \mathrm{E}_l(y-x)\mathrm{E}(y-z)\mathrm{d}V_y$$

und

$$\tilde{\Psi}(x,z) := \int\limits_{\partial G} \mathrm{E}_{l+1}(y-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y \mathrm{E}(y-z).$$

Es gilt

$$\tilde{\Psi}(x,z)\partial_z = 0.$$

Setzt man (6.4) in (6.3) ein, ergibt sich nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\nu=0}^{k}\int\limits_{\partial G} E_{0,\nu}(y-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\{\Delta^\nu f(y)\} + \sum_{\nu=1}^{l}(-1)^\nu \int\limits_{\partial G} E_\nu(y-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\{\partial^\nu\Delta^k f(y)\} \\ &\quad -\sum_{\nu=1}^{k}\int\limits_{\partial G} E_{-1,\nu-1}(y-x)\mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y\{\partial\Delta^{\nu-1}f(y)\} \\ &\quad +(-1)^{l+1}\int\limits_{\partial G}\Psi(x,z)\mathrm{d}\vec{\sigma}_z\left\{\partial^{l+1}\Delta^k f(z)\right\} - (-1)^{l+1}\int\limits_G \Psi(x,z)\left\{\partial^{l+2}\Delta^k f(z)\right\}\mathrm{d}V_z. \end{aligned}$$

Nach (2.5) gilt

$$\mathrm{E}_{l+1}(z-x) = \tilde{\Psi}(x,z) + \Psi(x,z),$$

also

$$\Psi(x,z) = \mathrm{E}_{l+1}(z-x) - \tilde{\Psi}(x,z),$$

also gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\nu=0}^{k}\int\limits_{\partial G} E_{0,\nu}(y-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\{\Delta^\nu f(y)\} + \sum_{\nu=1}^{l}(-1)^\nu \int\limits_{\partial G} E_\nu(y-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\{\partial^\nu\Delta^k f(y)\} \\ &\quad -\sum_{\nu=1}^{k}\int\limits_{\partial G} E_{-1,\nu-1}(y-x)\mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y\{\partial\Delta^{\nu-1}f(y)\} \\ &\quad +(-1)^{l+1}\int\limits_{\partial G}\mathrm{E}_{l+1}(z-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_z\left\{\partial^{l+1}\Delta^k f(z)\right\} \\ &\quad -(-1)^{l+1}\int\limits_G \mathrm{E}_{l+1}(z-x)\left\{\partial^{l+2}\Delta^k f(z)\right\}\mathrm{d}V_z \\ &\quad -(-1)^{l+1}\int\limits_{\partial G}\tilde{\Psi}(x,z)\mathrm{d}\vec{\sigma}_z\left\{\partial^{l+1}\Delta^k f(z)\right\} + (-1)^{l+1}\int\limits_G \tilde{\Psi}(x,z)\left\{\partial^{l+2}\Delta^k f(z)\right\}\mathrm{d}V_z. \end{aligned}$$

Für die letzte Zeile gilt nach (2.1)

$$\begin{aligned}
& -(-1)^{l+1}\int\limits_{\partial G}\tilde{\Psi}(x,z)\mathrm{d}\vec{\sigma}_z\left\{\partial^{l+1}\Delta^k f(z)\right\}+(-1)^{l+1}\int\limits_{G}\tilde{\Psi}(x,z)\left\{\partial^{l+2}\Delta^k f(z)\right\}\mathrm{d}V_z \\
= \;& (-1)^l\int\limits_G\Big\langle(\tilde{\Psi}(x,z)\partial_z)\{\partial^{l+1}\Delta^k f(z)\}+\tilde{\Psi}(x,z)\{\partial^{l+2}\Delta^k f(z)\}\Big\rangle\mathrm{d}V_z \\
& -(-1)^l\int\limits_G\tilde{\Psi}(x,z)\{\partial^{l+2}\Delta^k f(z)\}\mathrm{d}V_z \\
= \;& 0.
\end{aligned}$$

Also gilt (6.3). ❏

Satz 6.2.2 *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.2.1 sind die schwach- singulären Kernfunktionen $K_{l,k}(x) := (-1)^{l+1}E_l(x)$ Fundamentallösungen von $\partial^{l+1}\Delta^k$.*

Beweis:

Es gelten

$$\partial K_{l,k}(x) = -K_{l-1,k}(x),$$

$$\partial K_{0,k}(x) = -E_{-1,k-1}(x),$$

$$\Delta E_{-1,k-1}(x) = E_{-1,k-2}$$

und

$$E_{-1,0}(x) = \frac{|x|^{1-m}}{\omega_{m+1}(1-m)}.$$

❏

Satz 6.2.3 *Für $f \in L_1(G,\mathcal{A})$ und unter den Voraussetzungen von Satz 6.2.1 ist*

$$T_{l,k}f(x) := \int\limits_G K_{l,k}(y-x)f(y)\mathrm{d}V_y$$

eine spezielle Lösung von $\partial^{l+1}\Delta^k w = f$ in G, für die gilt $\partial^{l+1}\Delta^k w = 0$ in $\mathbb{R}^{m+1}\setminus\overline{G}$.

Beweis:

Mit

$$\partial^{l+1}\Delta^{k-1}T_{l,k}f(x) = \frac{(-1)^{l+1}}{\omega_{m+1}}\int\limits_G\frac{|y-x|^{1-m}}{1-m}f(y)\mathrm{d}V_y,$$

folgt

$$\partial^l\Delta^k T_{l,k}f(x) = (-1)^l\int\limits_G E(y-x)f(y)\mathrm{d}V_y$$

und mit Satz 3.1.3,

$$\partial^{l+1}\Delta^k T_{l,k} f = f$$

in G. $\square$