Kapitel 3

Diracgleichungen und die dazugehörigen Integraldarstellungen

In diesem Kapitel geht es das erste Mal um Differenzialgleichungen, speziell um die Gleichung $\partial^k w = f$, zuerst im Falle $k = 1$, dann für allgemeine $k \in \mathbb{N}$. Dazu benötigt man den Begriff der verallgemeinerten Ableitung von Sobolev und führt den T- und den iterierten T-Operator der Clifford Analysis analog zum Komplexen ein. Man gelangt zu Integraldarstellungen mit Hilfe der Diracoperatoren. Solch eine Darstellung, man könnte sie auch CAUCHY-POMPEIU Formel höherer Ordnung in ∂, bzw. $\overline{\partial}$ nennen, lässt sich auch als Potenzreihe mit (links-)monogenen Koeffizienten darstellen.

3.1 Gleichungen 1. Ordnung

Lemma 3.1.1 *Ist f links-monogen in $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \overline{G}$ und aus $\mathrm{C}(\mathbb{R}^{m+1} \setminus \overline{G}, \mathcal{A})$ mit $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) =: f(\infty)$, dann gilt*

$$(Ff)(x) = (F_G f)(x) := \int\limits_{\partial G} \mathrm{E}(y-x)\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y\, f(y) = \begin{cases} -f(x) - f(\infty) & \text{, falls } x \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \overline{G} \\ -f(\infty) & \text{, falls } x \in G \end{cases} .$$

Beweis:

Seien $x, y \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\xi := \frac{x}{|x|}$ *und* $\eta := \frac{y}{|y|}$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}
|x-y|^2 &= (x-y)(\overline{x}-\overline{y}) = |x|^2 - (x\overline{y} + y\overline{x}) + |y|^2 \\
&= |y|^2 \left[1 - \left(\frac{x}{|x|}\frac{\overline{y}}{|y|} + \frac{y}{|y|}\frac{\overline{x}}{|x|}\right)\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{x}{y}\right|^2\right] \\
&= |y|^2 \left[1 - (\xi\overline{\eta} + \eta\overline{\xi})\left|\frac{x}{y}\right| + \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Dann gilt nach Taylor mit geeigneten Funktionen $C_k^{-\frac{m}{2}}(\xi, \eta)$,

$$\begin{aligned}
|y-x|^{-m} &= |y|^{-m} \left[1 - \left(\xi\overline{\eta} + \eta\overline{\xi}\right)\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{x}{y}\right|^2\right]^{-\frac{m}{2}} \\
&= |y|^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{-\frac{m}{2}}(\xi, \eta) \left|\frac{x}{y}\right|^k.
\end{aligned}$$

Sei $B_R = B_R(x)$ *eine Kugel um* x *mit Radius* R *mit* $B_R(x) \supset G$.

Nach (2.3) (CAUCHY-POMPEIU Formel) gilt:

$$\begin{aligned}
\left.\begin{array}{ll} f(x) & \text{, falls } x \in B_R(x) \setminus \overline{G} \\ 0 & \text{, falls } x \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \overline{(B_R(x) \setminus \overline{G})} \end{array}\right\} &= \int_{\partial(B_R \setminus \overline{G})} \mathrm{E}(y-x)\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y\, f(y) \\
&\quad - \int_{B_R \setminus \overline{G}} \mathrm{E}(y-x)(\partial_y f(y)) \mathrm{d}V_y \\
&= (F_{B_R \setminus G} f)(x) - \underbrace{\int_{B_R \setminus \overline{G}} \mathrm{E}(y-x)\, (\partial_y f(y))\, \mathrm{d}\, V_y}_{= 0, \text{ da } f \text{ lm. in } \mathbb{R}^{m+1} \setminus \overline{G}} \\
&= \int_{|y-x|=R} \mathrm{E}(y-x)\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y\, f(y) \\
&\quad - \int_{\partial G} \mathrm{E}(y-x)\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y\, f(y)
\end{aligned}$$

Da die äußere Normale in der Sphäre $S_R : |y-x| = R$ durch $-\frac{y-x}{|y-x|}$ gegeben ist, gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|y-x|=R} \mathrm{E}(y-x)\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\, f(y) &= -\frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{S_R} \frac{\overline{y}-\overline{x}}{|y-x|^{m+1}} \frac{y-x}{|y-x|} f(y)\,\mathrm{d}S_{R_y} \\
&= -\frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{S_R} \frac{1}{|x-y|^m} f(y)\,\mathrm{d}S_{R_y} \\
&= -\frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{S_R} (\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{-\frac{m}{2}}(\xi,\eta)\, |\frac{x}{y}|^k) \frac{f(y)}{|y|^m}\,\mathrm{d}S_{R_y} \\
&= -\frac{1}{\omega_{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{S_R} \frac{C_k^{-\frac{m}{2}}(\xi,\eta)}{R^k} \frac{f(y)}{R^m}\,\mathrm{d}S_{R_y}|x|^k \\
&= -\frac{1}{\omega_{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{S} \frac{C_k^{-\frac{m}{2}}(\xi,\eta)}{R^k} f(R\cdot y)\,\mathrm{d}S_y|x|^k \\
&\overset{R\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{C_0^{-\frac{m}{2}}(\xi,\eta)}{\omega_{m+1}} \int\limits_{S} f(\infty)\,\mathrm{d}S_y \\
&\overset{C_0^{-\frac{m}{2}}(\xi,\eta)=1}{=} -f(\infty).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$(F_G f)(x) = \int\limits_{\partial G} \mathrm{E}(y-x)\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\, f(y) = \begin{cases} -f(\infty) & \text{, falls} \quad x \in G \\ -[f(\infty)+f(x)] & \text{, falls} \quad x \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \overline{G}. \end{cases}$$

❏

Definition 3.1.1 *$g \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(G,\mathcal{A})$ heißt die **schwache-** oder die **Sobolev-Ableitung** von $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(G,\mathcal{A})$ $(\partial_G f = g)$, falls für alle $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_C(G,\mathcal{A})$*

$$\int\limits_G \varphi(x) g(x)\,\mathrm{d}V_x + \int\limits_G [\varphi(x)\partial_x] f(x)\,\mathrm{d}V_x = 0$$

gilt. ($\mathrm{C}^\infty_C(G)$ sind die unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von G identisch null sind.)

Bemerkung 3.1.1 Existiert ∂f auch im üblichen Sinne, so stimmt die übliche Ableitung mit der schwachen überein.

Beweis:

Existiert die übliche Ableitung $\partial_x f(x)(\in \mathrm{C})$ von f, so gilt:

$$\int_G [(\varphi(x)\partial_x)f(x) + \varphi(x)(\partial_x f(x))]\mathrm{d}V_x \overset{(2.1)}{=} \int_{\partial G} \varphi(x)\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_x\, f(x) = 0.$$

❏

Definition 3.1.2 (des T-Operators) *Ist $f \in \mathrm{L}^1(\overline{G},\mathcal{A})$, so sei*

$$(Tf)(x) = (T_G f)(x) := -\int_G \mathrm{E}(y-x)\, f(y)\, \mathrm{d}V_y.$$

Satz 3.1.1 *Gelten $f \in \mathrm{L}^1(G,\mathcal{A})$, $G \subset \mathbb{R}^{m+1}$ und $G \not\subset \mathbb{R}^m$, so gilt $T_G f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{m+1},\mathcal{A})$.*

Beweis:

Sei G_0 ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^{m+1}$, und χ_{G_0} die zu G_0 gehörende charakteristische Funktion. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_G \left[\int_{\mathbb{R}^{m+1}} |\chi_{G_0}(x)\frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}}|\mathrm{d}V_x\right]|f(y)|\mathrm{d}V_y &= \int_G \left[\int_{G_0} \frac{1}{|y-x|^m}\mathrm{d}V_x\right]|f(y)|\mathrm{d}V_y \\ &\leq \int_G M(m,G_0)|f(y)|\mathrm{d}V_y \\ &= M(m,G_0)\cdot \|f\|_{\mathrm{L}^1_G}.\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}\int_G \left[\int_{\mathbb{R}^{m+1}} \chi_{G_0}(x)\frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}}\mathrm{d}V_x\right] f(y)\mathrm{d}V_y &= \int_{\mathbb{R}^{m+1}} \chi_{G_0}(x)\left[\int_G \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}} f(y)\mathrm{d}V_y\right]\mathrm{d}V_x \\ &= -\int_{G_0} \omega_{m+1}(T_G f)(x)\mathrm{d}V_x.\end{aligned}$$

Also $\int_{G_0} |(Tf)(x)|\mathrm{d}V_x \leq M(m,G_0)\cdot\|f\|_{\mathrm{L}^1_G}$, also $T_G f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(G,\mathcal{A})$.

❏

Satz 3.1.2 *Ist $f \in \mathrm{L}^1_C(G,\mathcal{A})$, so ist Ff für $\partial f = 0$ (in G) eine Lösung.*

Beweis:

Sei $\varphi \in \mathrm{C}_C^\infty(G,\mathcal{A})$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\int\limits_G [\varphi(x)\partial](Ff)(x)\,\mathrm{d}V &= \int\limits_G (\varphi(x)\partial) \int\limits_{\partial G} \mathrm{E}(y-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\, f(y)\mathrm{d}V_x \\
&\overset{Lemma 3.1.1}{=} -\int\limits_G (\varphi(x)\partial) \underbrace{f(\infty)}_{=0,\text{, da } f\in \mathrm{L}_C^1} \mathrm{d}V_x \\
&= 0 \\
&= \int\limits_G \varphi(x)(\partial 0)\mathrm{d}V_x.
\end{aligned}$$

❑

Satz 3.1.3 *Für* $f \in \mathrm{L}^1(G,\mathcal{A})$ *ist für* $\partial w = f$ *(in G)* Tf *eine Lösung.*

Beweis:

Sei $\varphi \in \mathrm{C}_C^\infty(G,\mathcal{A})$. *Nach der Formel von CAUCHY-POMPEIU, Lemma 3.1.1 und dem Satz von FUBINI gilt:*

$$\begin{aligned}
\int\limits_G \varphi(x)f(x)\,\mathrm{d}V_x &= \int\limits_G \left[\int\limits_{\partial G} \varphi(y)\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_y \mathrm{E}(y-x) - \int\limits_G (\varphi(y)\partial_y)\mathrm{E}(y-x)\,\mathrm{d}V_y\right] f(x)\,\mathrm{d}V_x \\
&= \int\limits_G \left[\underbrace{-\varphi(\infty)}_{=0,\text{ da } \varphi\in \mathrm{C}_C{}^\infty} - \int\limits_G (\varphi(y)\partial_y)\mathrm{E}(y-x)\,\mathrm{d}V_y\right] f(x)\,\mathrm{d}V_x \\
&= \int\limits_G (\varphi(y)\partial_y)\left[-\int\limits_G \mathrm{E}(y-x)f(x)\,\mathrm{d}V_x\right]\mathrm{d}V_y \\
&= -\int\limits_G (\varphi(y)\partial_y)(Tf)(y)\mathrm{d}V_y.
\end{aligned}$$

Die Vertauschung der Integration ist erlaubt, da gilt:

$$\int\limits_G \int\limits_G |(\varphi(y)\partial)|\frac{1}{|y-x|^m}\mathrm{d}V_y|f(x)|\mathrm{d}V_x = \int\limits_G |f(x)| \int\limits_{\text{supp } \varphi} \frac{|\varphi(y)\partial|}{|y-x|^m}\,\mathrm{d}V_y\,\mathrm{d}V_x \le M(m,\varphi)\cdot \|f\|_{\mathrm{L}_G^1}.$$

❑

3.2 Gleichungen höherer Ordnung

Als Nächstes sind Lösungen für die inhomogene Gleichung

$$\partial^k w = f \tag{3.1}$$

in G zu finden, wobei G wieder ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ist und $k \in \mathbb{N}$ sein soll.

Lemma 3.2.1 *Für $x, y \in G$, $x \neq y$ und $k \in \mathbb{N}_0$, sei*

$$\Phi_k(x,y) := \int_{\partial G} \mathrm{E}(z-x)\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_z \frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^k}{2^k\, k! |z-y|^{m+1}} = (F \frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^k}{2^k\, k! |z-y|^{m+1}})(x). \tag{3.2}$$

Dann gelten (für $k \in \mathbb{N}$): $\Phi_0(x,y) = 0$, $\quad \partial_x \Phi_k(x,y) = 0$, $\quad \Phi_k(x,y)\partial_y = -\Phi_{k-1}(x,y)$ und $\Phi_k(x,y)\partial_y^k = (-1)^k \Phi_0(x,y) = 0$.

Beweis:

1. *Sei $G_\varepsilon := G \setminus \{z \in \mathbb{R}^{m+1} : |z-x| \leq \varepsilon, |z-y| \leq \varepsilon\}$, ($\varepsilon$ klein genug).*
   Dann gilt mit (2.1) und (2.3):

$$\begin{aligned}
\Phi_0(x,y) &= \int_{\partial G_\varepsilon} \mathrm{E}(z-x)\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_z \frac{\overline{z-y}}{|z-y|^{m+1}} + \int_{|z-x|=\varepsilon} \mathrm{E}(z-x)\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_z \frac{\overline{z-y}}{|z-y|^{m+1}} \\
&\quad + \int_{|z-y|=\varepsilon} \frac{\overline{z-x}}{|z-x|^{m+1}}\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_z\, E(z-y) \\
&= \int_{G_\varepsilon} \left[(\mathrm{E}(z-x)\partial_z) \frac{\overline{z-y}}{|z-y|^{m+1}} + \mathrm{E}(z-x)(\partial_z \frac{\overline{z-y}}{|z-y|^{m+1}}) \right] \mathrm{d}V_z \\
&\quad + \left. \frac{\overline{z-y}}{|z-y|^{m+1}} \right|_{z=x} + \left. \frac{\overline{z-x}}{|z-x|^{m+1}} \right|_{z=y} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

2. *Es gilt $\partial_x \Phi_k(x,y) = 0$, da* E *links-monogen und $\dfrac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^k}{2^k\, k!\, |z-y|^{m+1}}$ unabhängig von x ist.*

3. *Es gilt $\Phi_k(x,y)\partial_y = -\Phi_{k-1}(x,y)$:*
   Nach dem vorhergehenden Kapitel gelten $\partial\overline{x} = m+1$ und $\partial|x|^\alpha = \alpha \cdot x \cdot |x|^{\alpha-2}$ $\quad (\alpha \in \mathbb{N})$.
   Da

$$x + \overline{x} = \sum_{k=0}^{m} x_k e_k + \sum_{k=0}^{m} x_k \overline{e}_k = \sum_{k=0}^{m} x_k(e_k + \overline{e}_k) = x_0(1+\overline{1}) + \sum_{k=1}^{m} x_k(e_k - e_k) = 2x_0,$$

gilt

$$\partial(x+\overline{x})^k = \partial(2x_0)^k = \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial(2x_0)^k}{\partial x_k} e_k = k(2x_0)^{k-1}2 = 2^k k x_0^{k-1} = 2k(x+\overline{x})^{k-1}.$$

Also

$$\begin{aligned}\partial\frac{\overline{x}(x+\overline{x})^k}{|x|^{m+1}} &= \partial(x+\overline{x})^k\frac{\overline{x}}{|x|^{m+1}}\\ &= 2k\frac{\overline{x}(x+\overline{x})^{k-1}}{|x|^{m+1}}\\ &= \frac{\overline{x}(x+\overline{x})^k}{|x|^{m+1}}\partial,\end{aligned}$$

da $\partial\frac{\overline{x}}{|x|^{m+1}}=0$, *also*

$$\partial^k\frac{\overline{x}(x+\overline{x})^k}{|x|^{m+1}} = \frac{\overline{x}(x+\overline{x})^k}{|x|^{m+1}}\partial^k = 2^k\ k!\frac{\overline{x}}{|x|^{m+1}} \tag{3.3}$$

und

$$\partial^{k+1}\frac{\overline{x}(x+\overline{x})^k}{|x|^{m+1}} = \frac{\overline{x}(x+\overline{x})^k}{|x|^{m+1}}\partial^{k+1} = 0.$$

Seien ε *hinreichend klein,* $G_\varepsilon := G\setminus\{z\in\mathbb{R}^{m+1}:\ |z-x|\le\varepsilon, |z-y|\le\varepsilon\}$, $0\le 2\varepsilon\le|x-y|$ *und*

$$\Phi_{k_\varepsilon}(x,y) := \int\limits_{\partial G_\varepsilon}\mathrm{E}(z-x)\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_z\frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^k}{2^k\ k!|z-y|^{m+1}}.$$

Nach der CAUCHY-POMPEIU Formel (2.3) gilt

$$\begin{aligned}\frac{(\overline{x-y})(\overline{x-y}+x-y)^k}{2^k\ k!\ |x-y|^{m+1}} &\overset{x\neq y}{=} \Phi_{k_\varepsilon}(x,y) - \int\limits_{G_\varepsilon}\mathrm{E}(z-x)\left(\partial_z\frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^k}{2^k\ k!\ |z-y|^{m+1}}\right)\mathrm{d}V_z\\ &= \Phi_{k_\varepsilon}(x,y) - \int\limits_{G_\varepsilon}\mathrm{E}(z-x)\frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^{k-1}}{2^{k-1}\ (k-1)!\ |z-y|^{m+1}}\,\mathrm{d}V_z.\end{aligned}$$

Für $k=0$ *gilt*

$$\int\limits_G\mathrm{E}(z-x)\left(\partial_z\frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^k}{2^k\ k!\ |z-y|^{m+1}}\right)\mathrm{d}V_z = 0.$$

Für $k\neq 0$ *gilt mit*

$$\begin{aligned}&\int\limits_G\mathrm{E}(z-x)\frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^{k-1}}{2^{k-1}\ (k-1)!\ |z-y|^{m+1}}\,\mathrm{d}V_z\\ =\ &\int\limits_{G_\varepsilon}\mathrm{E}(z-x)\frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^{k-1}}{2^{k-1}\ (k-1)!\ |z-y|^{m+1}}\,\mathrm{d}V_z + \int\limits_{|z-x|\le\varepsilon}\mathrm{E}(z-x)\frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^{k-1}}{2^{k-1}\ (k-1)!\ |z-y|^{m+1}}\,\mathrm{d}V_z\\ &+\int\limits_{|z-y|\le\varepsilon}\mathrm{E}(z-x)\frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^{k-1}}{2^{k-1}\ (k-1)!\ |z-y|^{m+1}}\,\mathrm{d}V_z\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \int\limits_{|z-x|\le\varepsilon} |\mathrm{E}(z-x)|_0 \left| \frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|z-y|^{m+1}} \right|_0 \mathrm{d}V_z \\
& + \int\limits_{|z-y|\le\varepsilon} |\mathrm{E}(z-x)|_0 \left| \frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|z-y|^{m+1}} \right|_0 \mathrm{d}V_z \\
\overset{|x-y|>2\varepsilon}{\le} \; & \mathrm{const}(y)\cdot\varepsilon + \mathrm{const}(x)\cdot\varepsilon^k \\
\overset{\varepsilon\to 0}{\to} \; & 0,
\end{aligned}$$

$$\int\limits_{G_\varepsilon} \mathrm{E}(z-x)\frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|z-y|^{m+1}}\,\mathrm{d}V_z \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \int\limits_G \mathrm{E}(z-x)\frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|z-y|^{m+1}}\,\mathrm{d}V_z.$$

Sei

$$\tilde{\Phi}_k(x,y) \;:=\; \int\limits_{|z-x|=\varepsilon} E(z-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_z \frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^k}{2^k k!|z-y|^{m+1}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_k(x,y) &= \int\limits_{|z|=\varepsilon} E(z)\mathrm{d}\vec{\sigma}_z \frac{(\overline{x+z-y})(\overline{x+z-y}+x+z-y)^k}{2^k k!|x+z-y|^{m+1}} \\
&= \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{|z|\le\varepsilon} \frac{\overline{z}}{|z|^{m+1}} \left(\partial_z \frac{(\overline{x+z-y})(\overline{x+z-y}+x+z-y)^k}{2^k k!|x+z-y|^{m+1}}\right) \mathrm{d}V_z \\
&= \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{|z|\le\varepsilon} \frac{\overline{z}}{|z|^{m+1}} \frac{(\overline{x+z-y})(\overline{x+z-y}+x+z-y)^{k-1}}{2^{k-1}(k-1)!|x+z-y|^{m+1}} \mathrm{d}V_z.
\end{aligned}$$

Dann gilt für $\varepsilon < |y-x|$

$$\begin{aligned}
|\tilde{\Phi}_k(x,z)|_0 &\le \frac{\mathrm{const}(x,y)}{\omega_{m+1}\varepsilon^m} \int\limits_{|z|\le\varepsilon} \mathrm{d}V_z \\
&= \frac{\varepsilon^{m+1}}{\varepsilon^m}\cdot\mathrm{const}(x,y) \\
&\overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\frac{(\overline{x-y})(\overline{x-y}+x-y)^k}{2^k\,k!\,|x-y|^{m+1}} &\overset{x\neq y}{=} \Phi_k(x,y) - \int\limits_G \mathrm{E}(z-x)\left(\partial_z \frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^k}{2^k\,k!\,|z-y|^{m+1}}\right) \mathrm{d}V_z \\
&= \Phi_k(x,y) - \int\limits_G \mathrm{E}(z-x)\frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|z-y|^{m+1}}\,\mathrm{d}V_z.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\left[\frac{(\overline{x-y})(\overline{x-y}+x-y)^k}{2^k\, k!\, |x-y|^{m+1}}\partial_y\right] &= \frac{\overline{x-y}}{|x-y|^{m+1}}\left(\frac{(\overline{x-y}+x-y)^k}{2^k k!}\partial_y\right)\\ &= -\frac{(\overline{x-y})(\overline{x-y}+x-y)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|x-y|^{m+1}}\\ &= \partial_y\frac{(\overline{x-y})(\overline{x-y}+x-y)^k}{2^k\, k!\, |x-y|^{m+1}},\end{aligned}$$

da $\frac{\overline{x-y}}{|x-y|^{m+1}}\partial_y = 0$.

Also gilt mit der CAUCHY-POMPEIU Formel (2.3)

$$\begin{aligned}\Phi_k(x,y)\partial_y &= \left[\frac{(\overline{x-y})(\overline{x-y}+x-y)^k}{2^k\,(k-1)!\,|x-y|^{m+1}}\partial_y\right]\\ &\quad+\left[\int_G \mathrm{E}(z-x)\frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|z-y|^{m+1}}\,\mathrm{d}V_z\,\partial_y\right]\\ &= -\frac{(\overline{x-y})(\overline{x-y}+x-y)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|x-y|^{m+1}}\\ &\quad-\int_G \mathrm{E}(z-x)\frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^{k-2}}{2^{k-2}\,(k-2)!\,|z-y|^{m+1}}\,\mathrm{d}V_z\\ &= -\Phi_{k-1}(x,y).\end{aligned}$$

4. Es gilt $\Phi_k(x,y)\partial_y^k = (-1)^k\,\Phi_0(x,y) = (-1)^k\cdot 0 = 0.$

❏

Definition 3.2.1 (des iterierten T-Operators) *Sei $G\subset\mathbb{R}^{m+1}$ ein beschränktes Gebiet, $f\in \mathrm{L}_1(\overline{G},\mathcal{A})$ und $k\in\mathbb{N}$. Dann sei*

$$(T_kf)(x) := \frac{(-1)^k}{\omega_{m+1}}\int_G \frac{(\overline{y-x})(\overline{y-x}+y-x)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|y-x|^{m+1}}\,f(y)\,\mathrm{d}V_y.$$

Bemerkung 3.2.1 Für $k=1$ sind die Operatoren T_k und T identisch ($T_1=T$). Also gilt $\partial T_1 f = f$ (Satz 3.1.3). Mit $T_0 f := f$ gilt also $\partial T_k f = T_{k-1}f$. Also ist $T_k f$ eine Lösung für $\partial^k w = f$.

Beweis:

Nach den Beweis von Lemma 3.2.1 gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{(x-y)}(\overline{x-y}+x-y)^k}{2^k\,k!\,|x-y|^{m+1}} &= \frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\frac{\overline{z-x}}{|z-x|^{m+1}}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_z\frac{\overline{(z-y)}(\overline{z-y}+z-y)^k}{2^k\,k!\,|z-y|^{m+1}} \\
&\quad -\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{G}\frac{\overline{z-x}}{|z-x|^{m+1}}\frac{\overline{(z-y)}(\overline{z-y}+z-y)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|z-y|^m}\mathrm{d}V_z \\
&= \Phi_k(x,y)-\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{G}\frac{\overline{z-x}}{|z-x|^{m+1}}\frac{\overline{(z-y)}(\overline{z-y}+z-y)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|z-y|^m}\mathrm{d}V_z.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

1. Behauptung: Es gilt $T_1T_{k-1}=T_k+\varphi_0$, mit $\partial\varphi_0=0$.
   Beweis:

$$
\begin{aligned}
T_1T_{k-1}f(x) &= -\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_G\frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}}\frac{(-1)^{k-1}}{\omega_{m+1}}\int\limits_G\frac{\overline{(z-y)}(\overline{z-y}+z-y)^{k-2}}{2^{k-2}\,(k-2)!\,|z-y|^{m+1}}\,f(z)\,\mathrm{d}V_z\,\mathrm{d}V_y \\
&= \frac{(-1)^k}{\omega_{m+1}}\int\limits_G\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_G\frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}}\frac{\overline{(z-y)}(\overline{z-y}+z-y)^{k-2}}{2^{k-2}\,(k-2)!\,|z-y|^{m+1}}\,\mathrm{d}V_y\,f(z)\,\mathrm{d}V_z \\
&\overset{(3.4)}{=} \frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_G\left[\frac{\overline{(x-z)}(\overline{x-z}+x-z)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|x-z|^{m+1}}-\Phi_{k-1}(x,z)\right]f(z)\,\mathrm{d}V_z \\
&= \frac{(-1)^k}{\omega_{m+1}}\int\limits_G\frac{\overline{(z-x)}(\overline{z-x}+z-x)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|z-x|^{m+1}}f(z)\,\mathrm{d}V_z \\
&\quad -\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_G\Phi_{k-1}(x,z)f(z)\mathrm{d}V_z \\
&= T_kf(x)+\varphi_0,
\end{aligned}
$$

   da das φ_0 links-monogen in x ist, da $\partial_x\Phi_k(x,z)=0$ und f unabhängig von x ist.
   Die Vertauschung der Integration ist nach dem Satz von Fubini erlaubt, da T_{k-1} für $k>1$ beschränkt ist, da die Singularität schwach ist ($\varphi_0\in\mathrm{C}_C^\infty\Rightarrow\partial\varphi_0\in\mathrm{C}^\infty$, E schwach singulär).

2. Behauptung: Es gilt $\partial T_1T_{k-1}f=T_{k-1}f$.
   Beweis:
   Sei $\varphi\in\mathrm{C}_C^\infty(G,\mathcal{A})$, $k\geq 2$

(für $k = 1$ gilt $T_{k-1}f = T_0 f = f$, also $\partial T_1 T_{k-1} f = \partial T f = f = T_0 f$).

$$\begin{aligned}
&\int\limits_G \varphi(x)(T_{k-1}f)(x)\mathrm{d}V_x \\
= &\int\limits_G \varphi(x)\frac{(-1)^{k-1}}{\omega_{m+1}}\int\limits_G \frac{(\overline{y-x})(\overline{y-x}+y-x)^{k-2}}{2^{k-2}\,(k-2)!\,|y-x|^{m+1}}f(y)\mathrm{d}V_y\mathrm{d}V_x \\
\overset{(2.5)}{=} &\int\limits_G \Bigg\{\underbrace{\int\limits_{\partial G}\varphi(z)\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_z\,\mathrm{E}(z-x)}_{=0,\text{ da }\varphi\in \mathrm{C}_C^\infty} - \int\limits_G [\varphi(z)\partial]\mathrm{E}(z-x)\,\mathrm{d}V_z\Bigg\} \\
&\qquad\times\frac{(-1)^{k-1}}{\omega_{m+1}}\int\limits_G \frac{(\overline{y-x})(\overline{y-x}+y-x)^{k-2}}{2^{k-2}\,(k-2)!\,|y-x|^{m+1}}\,f(y)\mathrm{d}V_y\mathrm{d}V_x \\
= &\frac{(-1)^k}{\omega_{m+1}}\int\limits_G[\varphi(z)\partial]\int\limits_G\mathrm{E}(z-x)\int\limits_G\frac{(\overline{y-x})(\overline{y-x}+y-x)^{k-2}}{2^{k-2}\,(k-2)!\,|y-x|^{m+1}}\,f(y)\mathrm{d}V_y\mathrm{d}V_x\mathrm{d}V_z \\
= &-\int\limits_G[\varphi(z)\partial]\Bigg\{-\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_G\frac{\overline{x-z}}{|x-z|^{m+1}}(T_{k-1}f)(x)\,\mathrm{d}V_x\Bigg\}\,\mathrm{d}V_z \\
= &-\int\limits_G[\varphi(z)\partial](T_1T_{k-1}f)(z)\,\mathrm{d}V_z
\end{aligned}$$

Also gilt $\quad \partial T_k f = \partial[T_1T_{k-1}f - \varphi_0] = \partial T_1 T_{k-1} f + 0 = T_{k-1} f \quad$ (da φ_0 links-monogen).

❏

Satz 3.2.1 (iterierte Integraldarstellung für ∂) *Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $f \in \mathrm{C}^k(\overline{G},\mathcal{A})$, für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $x \in G$:*

$$\begin{aligned}
f(x) \;=\; &\sum_{\mu=0}^{k-1}\frac{(-1)^\mu}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\frac{(\overline{y-x})(\overline{y-x}+y-x)^\mu}{2^\mu\,\mu!\,|y-x|^{m+1}}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\,\partial^\mu f(y) \\
&+\frac{(-1)^k}{\omega_{m+1}}\int\limits_G\frac{(\overline{y-x})(\overline{y-x}+y-x)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|y-x|^{m+1}}\partial^k f(y)\,\partial V_y.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

Beweis:

Die obige Formel kann man schreiben als

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{k-1}\varphi_\mu + T_k\partial^k f,$$

mit $\quad\partial^\mu\varphi_\mu\quad$ *links-monogen für alle μ.*
Nun zum eigentlichen Beweis (induktiv).

1. *Induktionsanfang*

k=1:

$$f(x) = \frac{(-1)^0}{\omega_{m+1}} \int\limits_{\partial G} \frac{(\overline{y-x})(\overline{y-x}+y-x)^0}{2^0\, 0!\, |y-x|^{m+1}}\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y\, \partial^0 f(y) + \{T_1[\partial^1 f]\}(x)$$

Das ist die CAUCHY-POMPEIU Formel (2.3).

Zum besseren Verständnis wird noch $k=2$ bewiesen.

k=2: (2.3) auf ∂f angewendet ergibt

$$\partial f(x) = \int\limits_{\partial G} \mathrm{E}(y-x)\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y[\partial f(y)] - \int\limits_{G} \mathrm{E}(y-x)[\partial^2 f(y)]\, \mathrm{d}V_y.$$

Dies wieder in (2.3) eingesetzt ergibt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int\limits_{\partial G} \mathrm{E}(y-x)\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y\, f(y) \\
&\quad - \int\limits_{G} \mathrm{E}(y-x) \left\{ \int\limits_{\partial G} \mathrm{E}(z-y)\mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial f(z)] - \int\limits_{G} \mathrm{E}(z-y)[\partial^2 f(z)]\mathrm{d}V_z \right\} \mathrm{d}V_y \\
&= \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{\partial G} \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}} \mathrm{d}\vec{\sigma}_y f(y) \\
&\quad - \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{G} \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}} \left\{ \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{\partial G} \frac{\overline{z-y}}{|z-y|^{m+1}} \mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial f(z)] \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{G} \frac{\overline{z-y}}{|z-y|^{m+1}} [\partial^2 f(z)]\mathrm{d}V_z \right\} \mathrm{d}V_y \\
&= \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{\partial G} \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}} \mathrm{d}\vec{\sigma}_y f(y) \\
&\quad - \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{\partial G} \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{G} \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}} \frac{\overline{z-y}}{|z-y|^{m+1}} \mathrm{d}V_y \mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial f(z)] \\
&\quad + \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{G} \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{G} \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}} \frac{\overline{z-y}}{|z-y|^{m+1}} \mathrm{d}V_y [\partial^2 f(z)]\mathrm{d}V_z.
\end{aligned}$$

Setzt man

$$\tilde{\Phi}_1(x,z) := \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{G} \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}} \frac{\overline{z-y}}{|z-y|^{m+1}}\, \mathrm{d}V_y,$$

so folgt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int\limits_{\partial G} \mathrm{E}(y-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y f(y) - \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{\partial G} \tilde{\Phi}_1(x,z)\mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial f(z)] \\
&\quad + \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{G} \tilde{\Phi}_1(x,z)[\partial^2 f(z)]\mathrm{d}V_z.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Nach (2.3) und (3.3) gilt

$$\begin{aligned}\frac{(\overline{x-z})(\overline{x-z}+x-z)}{2|x-z|^{m+1}} &= \frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}}\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\frac{(\overline{y-z})(\overline{y-z}+y-z)}{2|y-z|^{m+1}}\\ &\quad-\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{G}\frac{\overline{y-x}}{y-x^{m+1}}\left[\partial_y\frac{(\overline{y-z})(\overline{y-z}+y-z)}{2|y-z|^{m+1}}\right]\mathrm{d}V_y\\ &= \Phi_1(x,z)-\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{G}\frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}}\frac{\overline{y-z}}{|y-z|^{m+1}}\mathrm{d}V_y.\end{aligned}$$

Also

$$\frac{(\overline{x-z})(\overline{x-z}+x-z)}{2|x-z|^{m+1}} = \Phi_1(x,z)+\tilde{\Phi}_1(x,z). \tag{3.7}$$

Außerdem gilt nach (2.1) (STOKES), da f in $\overline{G}$ k-mal stetig differenzierbar und Φ_1 von rechts nach z abgeleitet null ergibt,

$$\int\limits_{\partial G}\Phi_1(x,z)\mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial f(z)] = \int\limits_{G}\left\{[\Phi_1(x,z)\partial_z][\partial f(z)]+\Phi_1(x,z)[\partial^2 f(z)]\right\}\mathrm{d}V_z,$$

also

$$\int\limits_{\partial G}\Phi_1(x,z)\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_z\,[\partial f(z)] = \int\limits_{G}\Phi_1(x,z)[\partial^2 f(z)]\,\mathrm{d}V_z. \tag{3.8}$$

Setzt man (4.12) in (4.11) ein, erhält man

$$\begin{aligned}f(x) &= \int\limits_{\partial G}\mathrm{E}(y-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y f(y)\\ &\quad-\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\left[\frac{(\overline{x-z})(\overline{x-z}+x-z)}{2|x-z|^{m+1}}-\Phi_1(x,z)\right]\mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial f(z)]\\ &\quad+\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{G}\left[\frac{(\overline{x-z})(\overline{x-z}+x-z)}{2|x-z|^{m+1}}-\Phi_1(x,z)\right][\partial^2 f(z)]\mathrm{d}V_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \int\limits_{\partial G}\mathrm{E}(y-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y f(y)-\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\frac{(\overline{x-z})(\overline{x-z}+x-z)}{2|x-z|^{m+1}}\mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial f(z)]\\ &\quad+\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{G}\frac{(\overline{x-z})(\overline{x-z}+x-z)}{2|x-z|^{m+1}}[\partial^2 f(z)]\mathrm{d}V_z+\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\Phi_1(x,z)\mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial f(z)]\\ &\quad-\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{G}\Phi_1(x,z)[\partial^2 f(z)]\mathrm{d}V_z\\ &\overset{(3.8)}{=} \frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}}\mathrm{d}\vec{\sigma}_y f(y)-\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\frac{(\overline{x-z})(\overline{x-z}+x-z)}{2|x-z|^{m+1}}\mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial f(z)]\\ &\quad+\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{G}\frac{(\overline{x-z})(\overline{x-z}+x-z)}{2|x-z|^{m+1}}[\partial^2 f(z)]\mathrm{d}V_z.\end{aligned}$$

2. *Induktionsannahme: Es gilt*

$$f = \sum_{\mu=0}^{k-2} \varphi_\mu + T_{k-1}(\partial^{k-1} f)$$

mit

$$\varphi_\mu(x) := \frac{(-1)^\mu}{\omega_{m+1}} \int_{\partial G} \frac{(\overline{y-x})(\overline{y-x}+y-x)^\mu}{2^\mu\ \mu!\ |y-x|^{m+1}} \mathrm{d}\vec{\sigma}_y[\partial^\mu f(y)] \qquad (0 \le \mu \le k-2).$$

3. *Induktionsschritt: Die Induktionsannahme, für ∂f angewendet, ergibt*

$$\partial f = \sum_{\mu=0}^{k-2} \tilde{\varphi}_\mu + T_{k-1}(\partial^k f)$$

mit

$$\tilde{\varphi}_\mu := \frac{(-1)^\mu}{\omega_{m+1}} \int_{\partial G} \frac{(\overline{y-x})(\overline{y-x}-y-x)^\mu}{2^\mu\ \mu!\ |y-x|^{m+1}} \mathrm{d}\vec{\sigma}_y[\partial^{\mu+1} f(y)] \qquad (0 \le \mu \le k-2).$$

Setzt man das in die CAUCHY-POMPEIU Formel $f = \varphi_0 + T_1(\partial f)$ mit

$$\varphi_0(x) := \frac{1}{\omega_{m+1}} \int_{\partial G} \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}} \mathrm{d}\vec{\sigma}_y f(y)$$

ein, erhält man

$$\begin{aligned}
f(x) &= \varphi_0(x) + T_1\left[\sum_{\mu=0}^{k-2} \tilde{\varphi}_\mu(x) + T_{k-1}(\partial^k f)\right](x) \\
&= \varphi_0(x) - \int_G \mathrm{E}(y-x)\left\{\sum_{\mu=0}^{k-2} \tilde{\varphi}_\mu(x) + T_{k-1}[\partial^k f(y)]\right\}\mathrm{d}V_y \\
&= \varphi_0(x) - \sum_{\mu=0}^{k-2} \int_G \mathrm{E}(y-x)\tilde{\varphi}_\mu(y)\mathrm{d}V_y - \int_G \mathrm{E}(y-x) T_{k-1}(\partial^k f)(y)\mathrm{d}V_y \\
&= \varphi_0(x) + \sum_{\mu=0}^{k-2} (T_1\tilde{\varphi}_\mu)(x) + \{T_1[T_{k-1}(\partial^k f)]\}(x).
\end{aligned}$$

(a) *Berechnung von $\sum\limits_{\mu=0}^{k-2} T_1\tilde{\varphi}_\mu(x)$:*

$$\begin{aligned}
(T_1\tilde{\varphi}_\mu)(x) &= \frac{(-1)^{\mu+1}}{\omega_{m+1}} \int_{\partial G} \frac{1}{\omega_{m+1}} \int_G \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}} \frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^\mu}{2^\mu\ \mu!\ |y-x|^{m+1}} \mathrm{d}V_y \mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial^{\mu+1} f(z)] \\
&\overset{(3.4)}{=} \frac{1}{\omega_{m+1}} \int_{\partial G} \left[\Phi_{\mu+1}(x,z) - \frac{(\overline{x-z})(\overline{x-z}+x-z)^{\mu+1}}{2^{\mu+1}\ (\mu+1)!\ |x-z|^{m+1}}\right] \mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial^{\mu+1} f(z)] \\
&= -\frac{1}{\omega_{m+1}} \int_{\partial G} \left[\frac{(\overline{x-z})(\overline{x-z}+x-z)^{\mu+1}}{2^{\mu+1}\ (\mu+1)!\ |x-z|^{m+1}} - \Phi_{\mu+1}(x,z)\right] \mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial^{\mu+1} f(z)],
\end{aligned}$$

wobei mit (2.1), $f \in \mathrm{C}^k$, $\mu \leq k-2$ und Lemma (3.2.1) gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial G} \Phi_{\mu+1}(x,z)\mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial^{\mu+1} f(z)] &= \int\limits_G \Big\{[\Phi_{\mu+1}(x,z)\partial_z][\partial^{\mu+1} f(z)] + \Phi_{\mu+1}(x,z)[\partial^{\mu+2} f(z)]\Big\}\mathrm{d}V_z \\ &= \int\limits_G \Big\{\Phi_{\mu+1}(x,z)[\partial^{\mu+2} f(z)] - \Phi_{\mu}(x,z)[\partial^{\mu+1} f(z)]\Big\}\mathrm{d}V_z.\end{aligned}$$

Also gilt mit Lemma 3.2.1 und

$$\varphi_\mu(x) := -\int\limits_{\partial G} \frac{(\overline{x-z})(\overline{x-z}+x-z)^\mu}{2^\mu\,\mu!\,|x-z|^{\mu+1}}\mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial^\mu f(z)],$$

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=0}^{k-2} T_1\tilde{\varphi}_\mu(x) &= \sum_{\mu=0}^{k-2}\Bigg\{\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\Phi_{\mu+1}(x,z)\mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial^{\mu+1} f(z)] \\ &\qquad -\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_{\partial G}\frac{(\overline{x-z})(\overline{x-z}+x-z)^{\mu+1}}{2^{\mu+1}\,(\mu+1)!\,|x-z|^{\mu+1}}\mathrm{d}\vec{\sigma}_z[\partial^{\mu+1} f(z)]\Bigg\} \\ &= \sum_{\mu=0}^{k-2}\Bigg\{\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_G\Big[\Phi_{\mu+1}(x,z)[\partial^{\mu+2} f(z)] \\ &\qquad -\Phi_\mu(x,z)[\partial^{\mu+1} f(z)]\Big]\mathrm{d}V_z + \varphi_{\mu+1}(x)\Bigg\} \\ &= \sum_{\mu=1}^{k-1}\varphi_\mu + \frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_G \Phi_{k-1}(x,z)[\partial^k f(z)]\mathrm{d}V_z \\ &\quad -\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_G \underbrace{\Phi_0(x,z)}_{=0}[\partial f(z)]\mathrm{d}V_z \\ &= \sum_{\mu=1}^{k-1}\varphi_\mu + \frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_G \Phi_{k-1}(x,z)[\partial^k f(z)]\mathrm{d}V_z.\end{aligned}$$

(b) Berechnung von $T_1T_{k-1}(\partial^k f)(x)$:

$$\begin{aligned}T_1T_{k-1}(\partial^k f)(x) &= \frac{(-1)^k}{\omega_{m+1}}\int\limits_G\frac{1}{\omega_{m+1}}\int\limits_G\frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}}\frac{(\overline{z-y})(\overline{z-y}+z-y)^{k-2}}{2^{k-2}\,(k-2)!\,|z-y|^{m+1}}\mathrm{d}V_y[\partial^k f(z)]\mathrm{d}V_z \\ &\overset{(3.4)}{=} \frac{(-1)^{k+k-1}}{\omega_{m+1}}\int\limits_G\left[\Phi_{k-1}(x,z) - \frac{(\overline{x-z})(\overline{x-z}+x-z)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|x-z|^{m+1}}\right][\partial^k f(z)]\mathrm{d}V_z.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \varphi_0(x) + \sum_{\mu=1}^{k-1} \varphi_\mu(x) + \frac{1}{\omega_{m+1}} \int_G \Phi_{k-1}(x,z)[\partial^k f(z)]\mathrm{d}V_z \\
&\quad - \frac{1}{\omega_{m+1}} \int_G \Phi_{k-1}(x,z)[\partial^k f(z)]\mathrm{d}V_z \\
&\quad + \frac{1}{\omega_{m+1}} \int_G \frac{(\overline{x-z})(\overline{x-z}+x-z)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|z-x|^{m+1}}[\partial^k f(z)]\mathrm{d}V_z \\
&= \sum_{\mu=0}^{k-1} \varphi_\mu(x) + \frac{(-1)^k}{\omega_{m+1}} \int_G \frac{(\overline{z-x})(\overline{z-x}+z-x)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|z-x|^{m+1}}[\partial^k f(z)]\mathrm{d}V_z \\
&= \sum_{\mu=0}^{k-1} \varphi_\mu(x) + [T_k(\partial^k f)](x).
\end{aligned}$$

4. *Die φ_μ sind für alle $(0 \le \mu \le k)$ links-monogen der Ordnung $\mu+1$, d.h. $\partial^\mu \varphi_\mu$ ist links-monogen:*

$$\begin{aligned}
\partial^\mu \varphi_\mu(x) &= \frac{(-1)^\mu}{\omega_{m+1}} \int_{\partial G} \left[\partial_x^\mu \frac{(\overline{y-x})(\overline{y-x}+y-x)^\mu}{2^\mu\,\mu!\,|y-x|^{m+1}}\right] \mathrm{d}\vec{\sigma}_y[\partial^\mu f(y)] \\
&= \frac{(-1)^\mu}{\omega_{m+1}} \int_{\partial G} \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}} \mathrm{d}\vec{\sigma}_y[\partial^\mu f(y)].
\end{aligned}$$

Also, da E *links-monogen ist,* $\partial^{\mu+1}\varphi_\mu(x) = 0$ *für* $(0 \le \mu \le k)$.

❑

Bemerkung 3.2.2

1. Eine analoge Formel zu (3.5) (für $\overline{\partial}$) ist

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{\mu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\mu}{\omega_{m+1}} \int_{\partial G} \frac{(y-x)(y-x+\overline{y-x})^\mu}{2^\mu\,\mu!\,|y-x|^{m+1}} \mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y[\overline{\partial}^\mu f(y)] \\
&\quad + \frac{(-1)^\mu}{\omega_{m+1}} \int_G \frac{(y-x)(y-x+\overline{y-x})^{k-1}}{2^\mu\,\mu!\,|y-x|^{m+1}}[\overline{\partial}^\mu f(y)]\mathrm{d}V_y,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

bzw.

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{k-1} \overline{\varphi_\mu(x)} + \overline{T}_k[\overline{\partial}^k f(x)].$$

2. Will man die φ_μ als Potenzreihe mit links-monogenen Koeffizienten darstellen, so betrachte

man

$$
\begin{aligned}
(\overline{y-x}+y-x)^{\mu} &= [\overline{y}+y-(\overline{x}+x)]^{\mu} = [2(y_0-x_0)]^{\mu} \\
&= 2^{\mu}\sum_{k=0}^{\mu}(-1)^k\binom{\mu}{k}y_0^{\mu-k}x_0^k \\
&= \sum_{k=0}^{\mu}(-1)^k\binom{\mu}{k}(\overline{y}+y)^{\mu-k}(\overline{x}+x)^k.
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mu}(x) &= \sum_{k=0}^{\mu}\frac{(-1)^{\mu-k}}{\omega_{m+1}}\binom{\mu}{k}\int_{\partial G}\frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{m+1}}(\overline{y}+y)^{\mu-k}\mathrm{d}\vec{\sigma}_y[\partial^{\mu}f(y)](\overline{x}+x)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\mu}\alpha_{k,\mu}(x)(\overline{x}+x)^k,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

wobei die $\alpha_{k,\mu}$ wegen der Linksmonogenität von E links-monogen sind.
Mit (3.3) erhält man

$$
f(x) = \sum_{j=0}^{k-1}\underbrace{\sum_{l=0}^{j}\alpha_{l,j}(x)(\overline{x}+x)^l}_{\text{links}-\text{monogen der Ordnung } j} + T_k[\partial^k f(x)]. \tag{3.11}
$$