Kapitel 2

Differenzialoperatoren und einfache Eigenschaften

In diesem Kapitel werden die Diffenzialoperatoren ∂ und $\overline{\partial}$ und der Cauchy Kern definiert. Es werden Differenziationsregeln und die Clifford-Versionen des Satzes von Stokes und der Cauchy-Pompeiu Formel gegeben. Das sind die Voraussetzungen für die folgenden Kapitel. Allgemeine Eigenschaften der Clifford Algebren findet man in [Bra82] und [Gür97]. Im Folgenden sei immer $m \geq 1$, Integraldarstellungen in der komplexen Analysis sind bekannt, siehe [Beg94].

2.1 Differenzialoperatoren

In diesem und allen folgenden Kapiteln sei immer, falls nicht anders erwähnt, $G \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ein Gebiet mit glattem Rand.

Definition 2.1.1 *Sei*

$$\partial := \sum_{k=0}^{m} e_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

und

$$\overline{\partial} := \frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_{k=1}^{m} e_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Bemerkung 2.1.1 Falls die partiellen Ableitungen einer Funktion stets vertauschbar sind, gilt

$$\begin{aligned}
\partial\overline{\partial} &= \sum_{k=0}^{m} e_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_{k=1}^{m} e_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial^{\,2}}{(\partial x_k)^2} + \left(-\frac{\partial}{\partial x_0}\, e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_0}\right) + \ldots \\
&\quad + \left(-e_k \frac{\partial}{\partial x_k}\, e_j \frac{\partial}{\partial x_j} - e_j \frac{\partial}{\partial x_j}\, e_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) + \ldots \\
&\quad + \left(-e_m \frac{\partial}{\partial x_m}\, e_{m-1} \frac{\partial}{\partial x_{m-1}} - e_{m-1} \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}\, e_m \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial^2}{(\partial x_k)^2} \\
&= \overline{\partial}\partial.
\end{aligned}$$

Definition 2.1.2 *Sei* $\triangle := \partial\overline{\partial}$.
Dieser Operator wird wie immer Laplaceoperator genannt.
Eine Funktion f*, für die auf* G $\Delta f = 0$ *gilt, heißt wie üblich harmonisch (auf* G*).*

Definition 2.1.3 f *heißt links-(rechts-)monogen im Gebiet* G*, wenn* $\partial f = 0$ $(f\partial = 0)$ *in* G *gilt.*

Bemerkung 2.1.2 Es gilt:

$$\partial f = \sum_{k=0}^{m} \sum_{A\subset\{1,\ldots,n\}} \frac{\partial}{\partial x_k} f_A\, e_k e_A.$$

Man kann auch schreiben:

$$\partial f = \sum_{k} \sum_{A} f_{Ax_k}\, e_k e_A$$

und

$$f\partial = \sum_{k} \sum_{A} f_{Ax_k}\, e_A e_k.$$

Bemerkung 2.1.3 Ist f links-monogen (in einem Gebiet), also $\partial f = 0$, dann gilt $\partial\overline{\partial} f = \overline{\partial}\partial f = \triangle f = 0$; also ist f harmonisch (im Gebiet).

Beispiele 2.1.1

1. Für $m = 1$ ist $\partial f = 0$ das Cauchy-Riemann Differenzialgleichungssystem
$$\begin{cases} u_x - v_y &= 0 \\ v_x + u_y &= 0 \end{cases} :$$

Da $m = 1$ gilt $A \subset \{1\}$, also $A \in \{\emptyset; \{1\}\}$,

$$\begin{aligned} 0 = \partial f &= \sum_{k=0}^{1} \sum_{A \in \{\emptyset;\{1\}\}} f_{Ax_k}\, e_k e_A \\ &= \sum_{A \in \{\emptyset;\{1\}\}} f_{Ax_0}\, e_0 e_A + f_{Ax_1}\, e_1 e_A \\ &= f_{0x_0}\, e_0 e_0 + f_{0x_1} e_1 e_0 + f_{1x_0}\, e_0 e_1 + f_{1x_1} e_1 e_1 \\ &= f_{0x_0} + (f_{0x_1} + f_{1x_0}) e_1 - f_{1x_1} \\ &= (f_{0x_0} - f_{1x_1}) + (f_{0x_1} + f_{1x_0}) e_1, \end{aligned}$$

d.h. $\begin{cases} f_{0x_0} - f_{1x_1} &= 0 \\ f_{1x_0} + f_{0x_1} &= 0. \end{cases}$

2. Ist f eine auf G definierte, $\mathbb{R}^{m+1}$-wertige Funktion ($f : G \to \mathbb{R}^{m+1}$), so gilt

$$\partial f = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} f_{jx_k}\, e_k e_j = f_{0x_0} - \sum_{j=1}^{m} f_{jx_j} + \sum_{0 \le k < j \le m} (f_{jx_k} - f_{kx_j})\, e_k e_j.$$

Bei dem Fall $m = 1$ handelt es sich um die komplexen Zahlen. Dieser Fall ist hinreichend bekannt, so dass im Folgenden immer, falls nicht anders erwähnt, $m \ge 2$ vorausgesetzt wird.

Folgerung 2.1.1 Ist $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ und $f : G \to \mathbb{R}^{m+1}$ und $x = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$, so gilt:
Ist $f_0(x) = 0$ und $\partial f(x) = 0$ (in G), so ist f (auf Ω) divergenz- und rotationsfrei,
d.h. div $f(\underline{x}) = 0$ und rot $f(\underline{x}) = 0$.

Beweis:

$$f_0(x) = 0;\ \partial f(x) = 0.$$

Also (mit Beispiel 2.1.1.2)

$$\sum_{j=1}^{m} f_{jx_j}(\underline{x}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \operatorname{div} f(\underline{x}) = 0$$

und für alle $0 \le k < j \le m$ gilt

$$f_{jx_k}(\underline{x}) - f_{kx_j}(\underline{x}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \operatorname{rot} f(\underline{x}) = 0.$$

❑

2.2 Differenziationsregeln

Satz 2.2.1 *Für $m \ge 1$ und $0 \ne x \in \mathbb{R}^{m+1}$ gelten:*

1. $(\partial x) = (x\partial) = (\overline{\partial}\overline{x}) = (\overline{x}\overline{\partial}) = (\overline{\partial x}) = \sum\limits_{k,l=0}^{m} e_k e_l \frac{\partial x_k}{\partial x_l} = 1 - m.$

2. $(\partial\overline{x}) = (\overline{x}\partial) = (\overline{\partial}x) = (x\overline{\partial}) = \sum\limits_{k,l=0}^{m} \overline{e}_k e_l \frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \sum\limits_{k,l=0}^{m} \overline{e}_k e_l \, \delta_{kl} = m + 1$

3. $$\begin{aligned} (\partial|x|^\alpha) &= (|x|^\alpha\partial) \\ &= \sum_{k=0}^{m} e_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\sum_{l=0}^{m} x_l^2\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{m} e_k \cdot \frac{\alpha}{2}\Big(\sum_{l=0}^{m} x_l^2\Big)^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot 2x_k \\ &= \alpha \cdot \sum_{k=0}^{m} e_k \, x_k \cdot |x|^{\alpha-2} \\ &= \alpha \cdot x \cdot |x|^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

4. $(\overline{\partial}|x|^\alpha) = (|x|^\alpha\overline{\partial}) = \alpha \cdot \overline{x} \cdot |x|^{\alpha-2}.$

5. $$\begin{aligned} x\overline{x} &= \sum_k x_k x_k \, e_k \overline{e}_k \\ &= x_0 x_0 \cdot 1 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \, e_k \overline{e}_k \\ &= x_0^2 - \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \, e_k^2 \\ &= \sum_{k=0}^{m} x_k^2 \\ &= |x|^2 \\ &= \overline{x}x. \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} \Delta|x|^\alpha &= \overline{\partial}\partial|x|^\alpha \\ &= \overline{\partial}\alpha x|x|^{\alpha-2} \\ &= \alpha\{(m+1)|x|^{\alpha-2} + x(\overline{x}|x|^{\alpha-4})\} \\ &= \alpha(m+1)|x|^{\alpha-2} + \alpha(\alpha-2)|x|^{\alpha-2} \\ &= \alpha(\alpha+m-1)|x|^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Satz 2.2.2 *Für $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ und $1 \leq k$ gelten:*

1. $$(\partial\overline{x}^k) = (\overline{x}^k\partial) = (m + 2k - 1)\overline{x}^{k-1} + (m-1)x \sum_{\nu=0}^{k-2} \overline{x}^{k-2-\nu} x^\nu.$$

2. $$(\partial x^k) = (x^k\partial) = (1-m) \sum_{\nu=0}^{k-1} \overline{x}^{k-1-\nu} x^\nu = (1-m) \sum_{\nu=1}^{k} \overline{x}^{k-\nu} x^{\nu-1}.$$

Beweis:

1. (a) *Induktionsanfang:*
$$\begin{aligned}(\partial\overline{x}^2) &= (\overline{x}^2\partial) = \{[\overline{x}(\overline{x}+x)]\partial\} - (|x|^2\partial)\\ &= (m+1)(\overline{x}+x) + \overline{x}(m+1+1-m) - 2x\\ &= (m+3)\overline{x} + (m-1)x\\ &= (m+2\cdot 2-1)\overline{x}^{2-1} + (m-1)x\sum_{\nu=0}^{2-2}\overline{x}^{2-2-\nu}x^\nu.\end{aligned}$$

   (b) *Induktionsschritt:*
$$\begin{aligned}(\overline{x}^{k+1}\partial) &= \{[\overline{x}^k(\overline{x}+x)]\partial\} - [(\overline{x}^{k-1}|x|^2)\partial]\\ &\overset{Ann.}{=} [(m+2k-1)\overline{x}^{k-1} + (m-1)x\sum_{\nu=0}^{k-2}\overline{x}^{k-2-\nu}x^\nu](\overline{x}+x) + 2\overline{x}^k\\ &\quad -[(m+2k-3)\overline{x}^{k-2} + (m-1)x\sum_{\nu=0}^{k-3}\overline{x}^{k-3-\nu}x^\nu]|x|^2 - 2\overline{x}^{k-1}x\\ &= (m+2k-1+2)\overline{x}^k + (m+2k-1)\overline{x}^{k-1}x\\ &\quad +(m-1)x(\sum_{\nu=0}^{k-2}\overline{x}^{k-2-\nu}x^\nu)(\overline{x}+x) + (-m-2k+3-2)\overline{x}^{k-1}x\\ &\quad -(m-1)x\sum_{\nu=0}^{k-3}\overline{x}^{k-3-\nu}x^\nu|x|^2\\ &= [m+2(k+1)-1]\overline{x}^k\\ &\quad +(m-1)x(\sum_{\nu=0}^{k-2}\overline{x}^{k-1-\nu}x^\nu + \sum_{\nu=0}^{k-2}\overline{x}^{k-2-\nu}x^{\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{k-3}\overline{x}^{k-2-\nu}x^{\nu+1})\\ &= [m+2(k+1)-1]\overline{x}^k + (m-1)x(\sum_{\nu=0}^{k-2}\overline{x}^{k-1-\nu}x^\nu + \overline{x}^{k-2-k+2}x^{k-2+1})\\ &= [m+2(k+1)-1]\overline{x}^k + (m-1)x(\sum_{\nu=0}^{k-1}\overline{x}^{k-1-\nu}x^\nu)\\ &= [m+2(k+1)-1]\overline{x}^k + (m-1)x\sum_{\nu=0}^{k+1-2}\overline{x}^{k+1-2-\nu}x^\nu.\end{aligned}$$

2. (a) *Induktionsanfang:*
$$\begin{aligned}(\partial x^2) &= (x^2\partial) = \{[x(\overline{x}+x)]\partial\} - [(|x|^2)\partial]\\ &= (1-m)(\overline{x}+x) + 2x - 2x\\ &= (1-m)(\overline{x}+x)\\ &= (1-m)\sum_{\nu=0}^{2-1}\overline{x}^{2-1-\nu}x^\nu.\end{aligned}$$

(b) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
(x^{k+1}\partial) &= \{[x^k(\overline{x}+x)]\partial\} - [(x^{k-1}|x|^2)\partial] \\
&= [(1-m)\sum_{\nu=0}^{k-1}\overline{x}^{k-1-\nu}x^\nu](\overline{x}+x) + 2x^k - [(1-m)\sum_{\nu=0}^{k-2}\overline{x}^{k-2-\nu}x^\nu]|x|^2 - 2x^k \\
&= (1-m)(\sum_{\nu=0}^{k-1}\overline{x}^{k-\nu}x^\nu + \sum_{\nu=0}^{k-1}\overline{x}^{k-\nu-1}x^{\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{k-2}\overline{x}^{k-1-\nu}x^{\nu+1}) \\
&= (1-m)(\sum_{\nu=0}^{k-1}\overline{x}^{k-\nu}x^\nu + \overline{x}^{k-1-k+1}x^{k-1+1}) \\
&= (1-m)(\sum_{\nu=0}^{k}\overline{x}^{k-\nu}x^\nu) \\
&= (1-m)(\sum_{\nu=0}^{k+1-1}\overline{x}^{k+1-\nu-1}x^\nu).
\end{aligned}$$

❑

Korollar 2.2.1 *Für $k \geq 1$ gilt $\partial(\overline{x}^k + x^k) = (\overline{x}^k + x^k)\partial = 2k\overline{x}^{k-1}$.*

Beweis:

1. $k = 1: \quad \partial(\overline{x}^k + x^k) = \partial\overline{x} + \partial x = m + 1 + 1 - m = 2 = 2 \cdot 1 \cdot \overline{x}^{1-1}.$

2. $k \geq 2:$

$$\begin{aligned}
\partial(\overline{x}^k + x^k) &= (m+2k-1)\overline{x}^{k-1} + (m-1)x\sum_{\nu=0}^{k-2}\overline{x}^{k-2-\nu}x^\nu + (1-m)\sum_{\nu=0}^{k-1}\overline{x}^{k-1-\nu}x^\nu \\
&= (m+2k-1)\overline{x}^{k-1} + (m-1)\sum_{\nu=1}^{k-1}\overline{x}^{k-1-\nu}x^\nu + (1-m)\sum_{\nu=0}^{k-1}\overline{x}^{k-1-\nu}x^\nu \\
&= (m+2k-1)\overline{x}^{k-1} + (1-m)\overline{x}^{k-1} \\
&= 2k\overline{x}^{k-1}.
\end{aligned}$$

❑

Bemerkung 2.2.1 Auf Grund der fehlenden Kommutativität kann man in $\mathcal{A}$ im Allgemeinen nicht die aus dem $\mathbb{R}^m$ bekannte Produktregel benutzen: Es gilt $\partial(x\overline{x}) = \partial|x|^2 = 2x$. Würde man jedoch die bekannte Produktregel benutzen, so ergäbe sich Folgendes:

$$\begin{aligned}(\partial x)\overline{x} + x(\partial\overline{x}) &= (1-m)\overline{x} + x(m+1)\\ &= \overline{x} + x + m(x-\overline{x})\\ &= 2x_0 + 2m\sum_{k=1}^{m} x_k e_k\\ &\overset{i.A.}{\neq} 2x.\end{aligned}$$

Man kann jedoch immer gemischte Potenzen von x und $\overline{x}$ durch Ausnutzung von $x\overline{x} = |x|^2$ verändern. Es gilt (für $x \in \mathbb{R}^{m+1}$): $|x|^2 = \sum\limits_{k=0}^{m} x_k^2$, und deshalb

$$\begin{aligned}\partial(x|x|^2) &= \sum_{k=0}^{m} e_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{l=0}^{m} x_l e_l \cdot \sum_{\mu=0}^{m} x_\mu^2\right)\\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} e_k e_l \frac{\partial x_l}{\partial x_k}\cdot |x|^2 + \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\sum_{\mu=0}^{m} e_k e_l x_l \frac{\partial x_\mu^2}{\partial x_k}\\ &= \sum_{k=0}^{m} e_k^2 \cdot 1 \cdot |x|^2 + \sum_{k=0}^{m} e_k \sum_{l=0}^{m} e_l x_l \cdot 2x_k\\ &= (1-m)|x|^2 + x\cdot 2x\\ &= (\partial x)|x|^2 + x(\partial|x|^2),\end{aligned}$$

bzw. ($\alpha, \beta \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}\partial(x^\alpha|x|^\beta) &= \sum_{k=0}^{m} e_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\left(\sum_{l=0}^{m} x_l e_l\right)^\alpha \left(\sum_{\mu=0}^{m} x_\mu^2\right)^{\frac{\beta}{2}}\right\}\\ &= |x|^\beta \cdot (\partial x^\alpha) + \beta x|x|^{\beta-2}\cdot x^\alpha\\ &= (\partial x^\alpha)|x|^\beta + x^\alpha \cdot (\partial|x|^\beta)\end{aligned}$$

(mit $\overline{x}$, bzw. Δ analog).

2.3 Einfache Eigenschaften

Definition 2.3.1 *Für $x \in \mathbb{R}^{m+1}$, $x \neq 0$ und*

$$\omega_{m+1} = |S_m| = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}(m+2)}}{\Gamma(\frac{1}{2}(m+1))},$$

die Oberfläche der $m+1$-dimensionalen Kugel, sei

$$\mathrm{E}(x) := \frac{1}{\omega_{m+1}}\frac{\overline{x}}{|x|^{m+1}}$$

*der **Cauchy Kern**.*

Satz 2.3.1 *Der **Cauchy Kern** ist links- und rechts-monogen.*

Beweis:
Da für $k > 0$, $e_k\overline{e_l} + e_l\overline{e_k} = e_k\overline{e_l} - \overline{e_k}e_l = e_k\overline{e_l} - e_k\overline{e_l} = 0$ *und für* $k = 0$, $e_k\overline{e_l} + e_l\overline{e_k} = \overline{e_l} + e_l = 0$ *gilt, folgt*

$$\begin{aligned}
\omega_{m+1}\partial \mathrm{E} &= \sum_{k,l} e_k\overline{e_l}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{x_l}{(\sum\limits_{j=0}^{m} x_j^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}} \\
&= \sum_{k,l} e_k\overline{e_l}\,[\frac{\delta_{k,l}}{|x|^{m+1}} - \frac{m+1}{2}\frac{x_l\cdot 2x_k}{(\sum\limits_j x_j^2)^{\frac{1}{2}(m+3)}}] \\
&= \sum_{k,l} e_k\overline{e_l}\,[\frac{\delta_{k,l}}{|x|^{m+1}} - (m+1)\frac{x_l x_k}{|x|^{m+3}}] \\
&= \sum_{k}[\frac{1}{|x|^{m+1}} - (m+1)\frac{x_k^2}{|x|^{m+3}}] - (m+1)\sum_{k<l}\frac{x_l x_k}{|x|^{m+3}}[e_k\overline{e_l} + e_l\overline{e_k}] \\
&= \frac{m+1}{|x|^{m+1}} - (m+1)\frac{|x|^2}{|x|^{m+3}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die Rechtsmonogenität ergibt sich analog.

❏

Satz 2.3.2 *[STOKES]*

Sind $f, g \in \mathrm{C}^1(G,\mathcal{A})$, *wobei* G *eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist,* $\boldsymbol{n} = (n_0, \ldots, n_m)$, $\vec{\boldsymbol{n}} = \sum\limits_{k=0}^{m} e_k\, n_k$ *die äußere Normale,* $\mathrm{d}\vec{\sigma} = \vec{\boldsymbol{n}}\cdot \mathrm{d}\sigma$, $\mathrm{d}\sigma = J\,\mathrm{d}t_0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}t_{m-1}$,
$\boldsymbol{n}_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{J}\cdot\dfrac{\partial(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m)}{\partial(t_0, \ldots, t_{m-1})}$, *wobei* $J > 0$ *durch* $\sum\limits_{k=0}^{m} n_k^2 = 1$ *festgelegt ist,*
$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_m$,

dann gilt

$$\int\limits_{\partial G} f\,\mathrm{d}\vec{\sigma}\,g \;=\; \int\limits_{G}[(f\partial)g + f(\partial g)]\mathrm{d}V. \tag{2.1}$$

Beweis:
Nach dem klassischen Satz von Stokes gilt für die Komponenten f_A *und* g_B *von*
$f = \sum\limits_A f_A\, e_A$ *und* $g = \sum\limits_B g_B\, e_B$:

$$\begin{array}{rlcl}
& \int\limits_G \partial_{x_k}(f_A g_B)\mathrm{d}V & = & \int\limits_{\partial G} f_A g_B \, \boldsymbol{n}_k \, \mathrm{d}\sigma \\
\Rightarrow & \int\limits_G \sum\limits_{k=0}^{m} e_k \frac{\partial}{\partial x_k}(f_A g_B)\mathrm{d}V & = & \int\limits_{\partial G} f_A g_B \sum\limits_{k=0}^{m} e_k \, \boldsymbol{n}_k \, \mathrm{d}\sigma \\
\Rightarrow & \int\limits_G \sum\limits_{k=0}^{m} (e_k f_{A_{x_k}} g_B + f_A g_{B_{x_k}} e_k)\mathrm{d}V & = & \int\limits_{\partial G} \sum\limits_{k=0}^{m} f_A \, \boldsymbol{n}_k \, e_k \, \mathrm{d}\sigma \, g_B \\
\Rightarrow & \int\limits_G [(f_A\partial)g_B + f_A(\partial g_B)]\mathrm{d}V & = & \int\limits_{\partial G} f_A \sum\limits_{k=0}^{m} e_k \, \boldsymbol{n}_k \, \mathrm{d}\sigma \, g_B \\
\Rightarrow & \int\limits_G [e_A(f_A\partial)g_B \, e_B + f_A \, e_A(\partial g_B)e_B]\mathrm{d}V & = & \int\limits_{\partial G} f_A \, e_A \, \mathrm{d}\vec{\sigma} \, g_B \, e_B \\
\overset{\sum\limits_{A,B}}{\Rightarrow} & \int\limits_G [(f\partial)g + f(\partial g)]\mathrm{d}V & = & \int\limits_{\partial G} f \, \mathrm{d}\vec{\sigma} \, g.
\end{array}$$

❏

Bemerkung 2.3.1 Eine duale Formel zu (2.1) ist

$$\int\limits_{\partial G} f \, \mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}} \, g \quad = \quad \int\limits_G [(f\overline{\partial})g + f(\overline{\partial}g)]\mathrm{d}V. \tag{2.2}$$

Folgerung 2.3.1

1. Ist f rechts-monogen und g links-monogen, so gilt $\int\limits_{\partial G} f \, \partial\vec{\sigma} \, g = 0$.
2. (CAUCHYscher Integralsatz)
   Ist $f \equiv 1$ und g links-monogen, so gilt $\int\limits_{\partial G} \mathrm{d}\vec{\sigma} \, g = 0$.

Satz 2.3.3 (CAUCHY-POMPEIU) *Sind G und G_0 Gebiete mit $\overline{G} \subset G_0$, $f \in \mathrm{C}^1(G_0,\mathcal{A})$ und $\mathrm{supp}(f) \subset G_0$, dann gilt:*

$$\int\limits_{\partial G} \mathrm{E}(y-x) \, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y \, f(y) - \int\limits_G \mathrm{E}(y-x)(\partial_y f(y))\mathrm{d}V_y \quad = \quad \begin{cases} f(x) & \text{, falls } x \in G \\ 0 & \text{, falls } x \notin \overline{G} \end{cases} . \tag{2.3}$$

Beweis:

1. *Ist $x \notin G$, $y \in G$, so gilt $x \neq y \quad \Rightarrow \quad (y-x) \neq 0$, also ist $\mathrm{E}(y-x)$ nach Satz 2.3.1 rechts-monogen. Also gilt nach Satz 2.3.2, da f außerhalb von G_0 identisch null ist:*

$$\int\limits_{\partial G} \mathrm{E}(y-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y f(y) = \int\limits_G [(\underbrace{\mathrm{E}(y-x)\partial_y}_{=0})f(y) + \mathrm{E}(y-x)(\partial_y f(y))]\mathrm{d}V_y = 0.$$

2. *Für $x \in G$ seien $\{|y-x| < \delta\} \subset G$ und $\tilde{G} := G \setminus \{|y-x| \leq \delta\}$ also gilt mit 1.:*

(a) $\int\limits_{\partial\tilde{G}} \mathrm{E}(y-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y f(y) = \int\limits_{\tilde{G}} \mathrm{E}(y-x)(\partial f(y))\mathrm{d}V_y.$

(b) Da ∂f stetig auf dem Rand von G ist und G beschränkt ist, gibt es ein $R \in \mathbb{R}$ und ein $M \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_G \mathrm{E}(y-x)(\partial f)(y)\mathrm{d}V_y\right|_0 &\leq \int\limits_G |\mathrm{E}(y-x)|_0|(\partial f)(y)|_0\mathrm{d}V_y \\
&\leq M\int\limits_G |\mathrm{E}(y-x)|_0\mathrm{d}V_y \\
&\leq M\int\limits_{|y-x|<R} |\mathrm{E}(y-x)|_0\mathrm{d}V_y \\
&\leq \frac{M}{\omega_{m+1}}\int\limits_{|y|<R} \frac{|y|}{|y|^{m+1}}\mathrm{d}V_y \\
&= M\int\limits_0^R \frac{t^m}{t^m}\mathrm{d}t \\
&= M\cdot R.
\end{aligned}$$

Also konvergiert $\int\limits_{\tilde{G}} \mathrm{E}(y-x)(\partial f)(y)\mathrm{d}V_y$ *für* $\delta \to 0$ *gegen* $\int\limits_G \mathrm{E}(y-x)(\partial f)(y)\mathrm{d}V_y.$

(c) Mit der Stetigkeit von f gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{|y-x|=\delta} \mathrm{E}(y-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y f(y) - f(x)\right|_0 &= \left|\int\limits_{|y|=\delta} \frac{\overline{y}}{|y|^{m+1}}\mathrm{d}\vec{\sigma}_y(f(y)-f(x))\right|_0 \\
&\leq \int\limits_{|y-x|=\delta} \left|\frac{\overline{y}}{|y|^{m+1}}\right|_0 |\mathrm{d}\vec{\sigma}_y|_0\,|f(y)-f(x)|_0 \\
&\overset{\delta=\delta(\varepsilon,x)}{\leq} \frac{const\cdot\varepsilon}{\delta^m}\cdot\delta^m \\
&\overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int\limits_{\partial\tilde{G}} \mathrm{E}(y-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y f(y) + \int\limits_{|y-x|=\delta} \mathrm{E}(y-x)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y f(y) - \int\limits_{\tilde{G}} \mathrm{E}(y-x)(\partial f(y))\mathrm{d}V_y \\
&\overset{\delta\to 0}{\to} \int\limits_{\partial G} \mathrm{E}(y-x)\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\,f(y) - \int\limits_G \mathrm{E}(y-x)(\partial_y f(y))\mathrm{d}V_y.
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen, da beide Seiten unabhängig von δ sind.

❏

Bemerkung 2.3.2 Analoge Formeln zu (2.3) sind (ohne Beweis)

1.

$$\int\limits_{\partial G} \overline{\mathrm{E}(y-x)}\mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y f(y) - \int\limits_G \overline{\mathrm{E}(y-x)}(\overline{\partial_y} f(y))\mathrm{d}V_y \quad = \quad \begin{cases} f(x) & \text{, falls } x \in G \\ 0 & \text{, falls } x \notin \overline{G} \end{cases} . \tag{2.4}$$

2.

$$\int\limits_{\partial G} f(y)\mathrm{d}\vec{\sigma}_y \mathrm{E}(y-x) - \int\limits_G (f(y)\partial)\mathrm{E}(y-x)\mathrm{d}V \quad = \quad \begin{cases} f(x) & \text{, falls } x \in G \\ 0 & \text{, falls } x \notin \overline{G} \end{cases} . \tag{2.5}$$

3.

$$\int\limits_{\partial G} f(y)\mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y\, \overline{\mathrm{E}(y-x)} - \int\limits_G (f(y)\overline{\partial})\overline{\mathrm{E}(y-x)}\mathrm{d}V \quad = \quad \begin{cases} f(x) & \text{, falls } x \in G \\ 0 & \text{, falls } x \notin \overline{G} \end{cases} . \tag{2.6}$$

Folgerung 2.3.2 [CAUCHY Formel] Sei G ein reguläres Gebiet, $\overline{G} \subset G_0$, f links-monogen in G_0 und $f \in \mathrm{C}^1(G_0;\mathcal{A})$.
Dann gilt für $x \in G$:

$$f(x) = \int\limits_{\partial G} \mathrm{E}(y-x)\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y\, f(y)$$

und für $x \notin \overline{G}$:

$$\int\limits_{\partial G} \mathrm{E}(y-x)\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y\, f(y) = 0.$$

Satz 2.3.4 (Mittelwertsatz) *Ist f links-monogen in G und $f \in \mathrm{C}^1(G;\mathcal{A})$, dann gibt es ein $a \in G$ mit*

$$f(a) = \int\limits_{|x-a|=R} \frac{m+1}{R^{m+1}\omega_{m+1}} f(x)\, \mathrm{d}V,$$

falls $\{|x-a| < R\} \subset G$.

Beweis:

Es gilt $\overline{x}\partial = \partial\overline{x} = \sum\limits_{k,l=0}^{m} \overline{e}_k e_l \frac{\partial x_k}{\partial x_l} = m+1.$

Also

$$
\begin{aligned}
f(a) &= \int\limits_{|x-a|=R} \mathrm{E}(x-a)\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_x\, f(x) \\
&= \frac{1}{\omega_{m+1}} \int\limits_{|x-a|=R} \frac{\overline{x-a}}{|x-a|^{m+1}}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_x\, f(x) \\
&= \frac{1}{\omega_{m+1}\cdot R^{m+1}} \int\limits_{|x-a|=R} \overline{(x-a)}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_x\, f(x) \\
&= \frac{1}{\omega_{m+1}\cdot R^{m+1}} \int\limits_{|x-a|<R} \{[\overline{(x-a)}\partial]f(x) + \overline{(x-a)}\underbrace{(\partial f(x))}_{=0}\}\mathrm{d}V \\
&= \frac{m+1}{\omega_{m+1}\cdot R^{m+1}} \int\limits_{|x-a|<R} f(x)\,\mathrm{d}V.
\end{aligned}
$$

❏