

Kapitel 1

Einleitung

Die Clifford Algebra stellt eine Erweiterung des Zahlbegriffs über den Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} und den Schiefkörper \mathbb{H} der Quaternionen hinaus dar. In dieser Arbeit wird die spezielle Clifford Algebra \mathcal{A} verwendet, bei der $e_0 = e_\emptyset = 1$, und für $1 \leq \mu, \nu \leq m$, $e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = -2\delta_{\mu,\nu}$ gilt. Es werden nur elementarste Kenntnisse über diese Algebra vorausgesetzt. Differenzierungsregeln werden gegeben.

Diese Arbeit behandelt hauptsächlich Integraldarstellungen. Diese sind nützlich, um Differenzialgleichungen für differenzierbare Funktionen zu lösen, aber auch um Eigenschaften der dargestellten Funktionen zu finden. In der komplexen Analysis sind die Cauchy Formel für analytische Funktionen und die Greensche Darstellung für harmonische Funktionen bekannt. Für die zugehörigen inhomogenen Gleichungen, die inhomogene Cauchy-Riemann Gleichung bzw. die Poisson Gleichung gibt es entsprechende Darstellungsformeln, die Cauchy-Pompeiu bzw. die allgemeine Greensche Formel.

Durch Iteration erhält man daraus Darstellungen höherer Ordnung. Man verwendet sie, um Differenzialgleichungen höherer Ordnung in singuläre Integralgleichungen umzuwandeln und so zu lösen. Dieses Prinzip lässt sich auch in der Quaternionen Analysis und allgemein der Clifford Analysis anwenden. Diese Theorie ist für die mathematische Physik von Bedeutung, da der grundlegende Differenzialoperator dort, der Diracoperator ∂ , eine Faktorisierung des Laplaceoperators Δ gibt, der in der mathematischen Physik von Interesse ist.

In der Clifford Analysis sind Integraldarstellungen für Differenzialoperatoren der Form ∂^k , bzw. $\Delta^k = \partial^k \bar{\partial}^k$, $\bar{\partial}$ ist der konjugierte Operator zu ∂ , bekannt. Bisher wurden Operatoren der Form $\partial^k \bar{\partial}^\ell$ für beliebige natürliche Zahlen k und ℓ noch nicht behandelt, was im Rahmen dieser Arbeit geschehen soll. Dabei werden nur die Fälle gerader m bzw. $0 \leq 2k - 1 < m$, ($m > 1$) behandelt.

Cauchy-Pompeiu Darstellungen in der allgemeinen Clifford Algebra findet man in [Du02], [Beg03a] und [Beg03b], Riemann Randwertprobleme in der speziellen Clifford Algebra in [Zha01].