Zusammenfassung

Die Clifford Algebra stellt eine Erweiterung des Zahlbegriffs über den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und den Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen hinaus dar. In dieser Arbeit wird die spezielle Clifford Algebra $\mathcal{A}$ verwendet, bei der $e_0 = e_\emptyset = 1$, und für $1 \leq \mu, \nu \leq m$, $e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = -2\delta_{\mu,\nu}$ gilt.

In der Hauptsache werden Integraldarstellungen behandelt. Zuerst werden die nötigen Differenziationseigenschaften der Diracoperatoren ∂ und $\overline{\partial}$ gegeben. Analog zur komplexen Analysis gilt hier $\Delta = \partial\overline{\partial} = \overline{\partial}\partial$. Bei den ersten behandelten Integraldarstellungen handelt es sich um Iterationen einer verallgemeinerten Cauchy Formel, der Cauchy-Pompeiu Formel

$$\int_{\partial G} \mathrm{E}(y-x)\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y\, f(y) - \int_G \mathrm{E}(y-x)(\partial_y f(y))\mathrm{d}V_y \quad = \quad \begin{cases} f(x) & \text{, falls } x \in G \\ 0 & \text{, falls } x \notin \overline{G} \end{cases} ,$$

die den Operator ∂ und den Cauchy Kern E verwendet. Iterationen dieser Formel werden als Diracgleichungen bezeichnet:

$$\begin{aligned} f(x) \quad = \quad & \sum_{\mu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\mu}{\omega_{m+1}} \int_{\partial G} \frac{(\overline{y-x})(\overline{y-x}+y-x)^\mu}{2^\mu\, \mu!\, |y-x|^{m+1}}\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y\, \partial^\mu f(y) \\ & + \frac{(-1)^k}{\omega_{m+1}} \int_G \frac{(\overline{y-x})(\overline{y-x}+y-x)^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!\,|y-x|^{m+1}} \partial^k f(y)\, \partial V_y . \end{aligned}$$

Analoge Gleichungen für $\overline{\partial}$ erhält man mit Hilfe von Konjugation. Durch Kombination dieser Gleichungen werden im nächsten Schritt Iterationsgleichungen mit dem Laplaceoperator Δ gewonnen:

$$\begin{aligned} f(x) \quad = \quad & \sum_{\mu=1}^{\alpha-1} \left\{ \frac{(-1)^{\mu-1}}{\omega_{2\alpha}} \int_{\partial G} \frac{(\alpha-\mu)!\overline{(y-x)}|y-x|^{2(\mu-1-\alpha)}}{2^{2(\mu-1)}(\mu-1)!\,(\alpha-1)!}\, \mathrm{d}\vec{\sigma}_y\, \Delta^{\mu-1} f(y) \right. \\ & \left. + \frac{(-1)^{\mu-1}}{\omega_{2\alpha}} \int_{\partial G} \frac{(\alpha-\mu-1)!|y-x|^{2(\mu-\alpha)}}{2^{2\mu-1}(\mu-1)!\,(\alpha-1)!}\, \mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y\, \partial\Delta^{\mu-1} f(y) \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\omega_{2\alpha}}\int\limits_{\partial G}\frac{\overline{(y-x)}|y-x|^{-2}}{2^{2(\alpha-1)}(\alpha-1)!^2}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\,\Delta^{\alpha-1}f(y)\\
&-\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\omega_{2\alpha}}\int\limits_{\partial G}\frac{\log|y-x|^2}{2^{2\alpha-1}(\alpha-1)!^2}\,\mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y\,\partial\Delta^{\alpha-1}f(y)\\
&+\sum_{\mu=1}^{k}\Bigg\langle\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\omega_{2\alpha}}\int\limits_{\partial G}\frac{\overline{(y-x)}|y-x|^{2(\mu-1)}\Big\{\log|y-x|^2-\sum\limits_{\rho=1}^{\mu-1}\frac{1}{\rho}-\sum\limits_{\sigma=0}^{\mu-1}\frac{1}{\alpha+\sigma}\Big\}}{2^{2(\alpha+\mu-1)}(\mu-1)!\,(\alpha-1)!\,(\alpha+\mu-1)!}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\,\Delta^{\alpha+\mu-1}f(y)\\
&\qquad-\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\omega_{2\alpha}}\int\limits_{\partial G}\frac{|y-x|^{2\mu}\Big\{\log|y-x|^2-\sum\limits_{\rho=1}^{\mu}\frac{1}{\rho}-\sum\limits_{\sigma=0}^{\mu-1}\frac{1}{\alpha+\sigma}\Big\}}{2^{2(\alpha+\mu)-1}\mu!\,(\alpha-1)!\,(\alpha+\mu-1)!}\,\mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y\,\partial\Delta^{\alpha+\mu-1}f(y)\Bigg\rangle\\
&+\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\omega_{2\alpha}}\int\limits_{G}\frac{|y-x|^{2k}\Big\{\log|y-x|^2-\sum\limits_{\rho=1}^{k}\frac{1}{\rho}-\sum\limits_{\sigma=0}^{k-1}\frac{1}{\alpha+\sigma}\Big\}}{2^{2(\alpha+k)-1}k!\,(\alpha-1)!\,(\alpha+k-1)!}\,\Delta^{\alpha+k}f(y)\,\mathrm{d}V_y.
\end{aligned}
$$

Neu ist die Lösung einer allgemeineren Kombination der beiden Diracoperatoren: $\partial^{l+1}\Delta^k$ für $l\in\mathbb{N}_0$, $m>1$ und für gerade k oder für $0\le 2\left(k+\left[\frac{1}{2}(l+1)\right]\right)-1<m$:

$$
\begin{aligned}
f(x) \;=\; &\sum_{\nu=0}^{k}\int\limits_{\partial G}\frac{\overline{(y-x)}|y-x|^{2\nu-m-1}}{\omega_{m+1}2^{\nu}\nu!\prod\limits_{j=1}^{\nu}(2j-m-1)}\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\{\Delta^{\nu}f(y)\}\\
&+\sum_{\nu=1}^{l}(-1)^{\nu}\int\limits_{\partial G}\Bigg\{\frac{\overline{(y-x)}^{\nu+1}|y-x|^{2k-m-1}}{\omega_{m+1}2^{k+\nu}(k+\nu)!\prod\limits_{j=1}^{k}(2j-m-1)}\\
&\qquad+\sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}(\nu-1)\right]}\frac{\sum\limits_{\mu=1}^{\nu-2n}\begin{pmatrix}\nu-n-\mu+1\\ n+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n+\mu-1\\ n\end{pmatrix}\overline{(y-x)}^{\nu-\mu-2n}(y-x)^{\mu-1}}{\omega_{m+1}2^{k+\nu}(k+\nu)!\prod\limits_{j=n+2}^{k}(2j-m-1)\prod\limits_{j=1}^{n+1}\{2(k+j)-m-1\}}\\
&\qquad\times|y-x|^{2(k+n+1)-m-1}\mathrm{d}\vec{\sigma}_y\left\{\partial^{\nu}\Delta^{k}f(y)\right\}\Bigg\}\\
&-\sum_{\nu=1}^{k}\int\limits_{\partial G}\frac{|y-x|^{2\nu-m-1}}{\omega_{m+1}2^{\nu-1}(\nu-1)!\prod\limits_{j=1}^{\nu}(2j-m-1)}\mathrm{d}\overline{\vec{\sigma}}_y\{\Delta^{\nu-1}\partial f(y)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(-1)^{l-1}\int\limits_G \Bigg\{ \frac{\overline{(y-x)}^{\,l+1}|y-x|^{2k-m-1}}{\omega_{m+1}2^{k+l}(k+l)!\prod\limits_{j=1}^{k}(2j-m-1)} \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{2}(l-1)\right]} \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{l-2n}\begin{pmatrix} l-n-\mu+1 \\ n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+\mu-1 \\ n \end{pmatrix}\overline{(y-x)}^{\,l-\mu-2n}(y-x)^{\mu-1}}{\omega_{m+1}2^{k+l}(k+l)!\prod\limits_{j=n+2}^{k}(2j-m-1)\prod\limits_{j=1}^{n+1}\{2(k+j)-m-1\}} \\
&\qquad\qquad \times|y-x|^{2(k+n+1)-m-1}\Bigg\}\left\{\partial^{l+1}\Delta^k f(y)\right\}\mathrm{d}V_y.
\end{aligned}
$$

Diese Darstellung verhilft unter den erwähnten Einschränkungen zu einer speziellen Lösung von $\partial^{l+1}\Delta^k w = f$ in G, mit $\partial^{l+1}\Delta^k w = 0$ in $\mathbb{R}^{m+1}\setminus\overline{G}$.

Es handelt sich dabei um Operatoren, die schwieriger zu behandeln sind und deshalb erhebliche rechnerische Vorarbeit erfordern. Die allgemeine Lösung für beliebige l und k steht noch aus.