

Freie Universität  Berlin

Modulräume dekoriierter Prinzipalbündel auf einer projektiven Kurve

Dissertation zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
am Fachbereich Mathematik und Informatik
der Freien Universität Berlin

von

Nikolai Beck

Berlin
2014

Ich versichere, diese Dissertation selbständig verfasst und alle verwendeten Hilfsmittel sowie Hilfen angegeben zu haben. Ferner habe ich diese Arbeit nicht in einem früheren Promotionsverfahren eingereicht.

Nikolai Beck

Berlin

Die vorliegende Dissertation wurde von Prof. Dr. Alexander H.W. Schmitt betreut.

1. Gutachter: Prof. Dr. Alexander H.W. Schmitt
2. Gutachter: Prof. Dr. Bernd Martin
3. Gutachter: Prof. Dr. Manfred Lehn

Die Disputation fand am 16.07.2014 statt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Algebraische Gruppen	7
1.1. Gruppen und Gruppenwirkungen	7
1.2. Affine Gruppen	9
1.3. Reduktive Gruppen	11
1.4. Homogene Darstellungen	14
2. Modulräume	17
2.1. Das Modulproblem	17
2.2. Die Graßmann-Varietät	19
2.3. Die Fahrenvarietät	22
2.4. Das Quot-Schema	24
3. Geometrische Invariantentheorie	31
3.1. Gute Quotienten als Modulräume	31
3.2. Affine Quotienten	32
3.3. Projektive Quotienten	35
3.4. Das Hilbert–Mumford-Kriterium	38
3.5. Gewichtete Fahnen	42
4. Vektorbündel	49
4.1. Beschränktheit	49
4.2. Stabilität	53
4.3. Schnittstabilität	55
4.4. Vergleich der Stabilitätsbegriffe	57
4.5. Der Gieseker-Morphismus	59
4.6. S-Äquivalenz	62
5. Prinzipalbündel	67
5.1. Faserbündel, gefaserte Systeme und Prinzipalbündel	67
5.2. Assoziierte Faserbündel	71
5.3. Erweiterung und Reduktion der Strukturgruppe	72
5.4. Exakte Sequenzen	74
5.5. Spezielle Gruppen	76
6. Dekorierte Tumps	79
6.1. Gespaltene Vektorbündel	79
6.2. Das Modulproblem dekoriierter Tumps	83

6.3. Konstruktion des Parameterraums	87
6.4. Vergleich der Stabilitätsbegriffe	93
6.5. Beweis von Theorem 6.24	101
6.6. Anwendungen	106
7. Asymptotische Stabilität	113
7.1. Die Instabilitäts-Fahne	113
7.2. Asymptotische Stabilität	119
7.3. Parabolische Higgs-Bündel	126
8. Dekorierte Prinzipalbündel	131
8.1. Das Modulproblem der dekorierten Prinzipalbündel	131
8.2. Dekorierte Prinzipalbündel und Tumps	134
8.3. Konstruktion des Modulraums	138
8.4. Anwendungen	143
Anhang A. Abstiegstheorie	153
A.1. Topologien auf Kategorien	153
A.2. Garben auf einem Situs	157
A.3. Gefaserte Kategorien	161
A.4. Äquivariante gefaserte Kategorien	165
A.5. Stacks	169
A.6. Abstieg quasi-kohärenter Garben	171
A.7. Äquivariante Stacks	176
Literaturverzeichnis	179
Danksagung	183
Zusammenfassung	185

Einleitung

Das Klassifikationsproblem und Modulräume

Ein grundlegendes Bestreben in der Mathematik und insbesondere in der Geometrie ist es, die Objekte einer gegebenen Menge zu klassifizieren. Falls diese Menge abzählbar oder gar endlich ist, kann man diese Aufgabe durch eine Auflistung der Objekte lösen. Zum Beispiel zeigte Apollonius von Perge, dass es zu drei gegebenen Kreisen in der Ebene im allgemeinen acht Kreise gibt, die diese berühren.

Wenn die Menge der zu klassifizierenden Objekte überabzählbar ist, sucht man die Lösung selbst in Form eines geometrischen Raums mit gewissen Eigenschaften: Zum einen soll die Menge der Punkte des Raums in Bijektion mit der Menge der Objekte stehen. Da der Raum dadurch noch nicht eindeutig bestimmt ist, benötigt man zusätzlich den Begriff einer parametrisierten Familie von Objekten. Der gesuchte Raum muss dann eine gewisse universelle Eigenschaft bezüglich dieser parametrisierten Familien erfüllen. Ein solcher Raum heißt *Modulraum* für das gestellte Klassifikationsproblem. Einfache Beispiele sind der projektive Raum $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$, der die Hyperebenen von \mathbb{C}^n klassifiziert, und die Graßmannvarietät $\text{Gr}(\mathbb{C}^n, n - r)$, die die Unterräume der Dimension r beschreibt.

Dekorierte Vektorbündel

Ein interessantes Klassifikationsproblem liefert die Menge der Isomorphieklassen der Vektorbündel von Rang r und Grad d auf einer glatten, projektiven algebraischen Kurve X über \mathbb{C} . Im allgemeinen existiert kein Modulraum dieser Objekte. Mumford führte daher den Begriff der *Stabilität* ein: Die Steigung eines Vektorbündels ist der Quotient aus Grad und Rang, und ein Vektorbündel heißt stabil, falls jedes echte Unterbündel kleinere Steigung besitzt. Mithilfe von Mumfords Geometrischer Invariantentheorie [34] gelang es Newstead, Seshadri und anderen, den Modulraum der stabilen Vektorbündel zu konstruieren (siehe [31, 36, 28]).

Die universelle Überlagerung \tilde{X} von X ist ein Prinzipalbündel über X mit Strukturgruppe $\pi_1(X)$. Zu einer Darstellung $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \text{GL}(V)$ der Fundamentalgruppe kann man ein assoziiertes Vektorbündel $\tilde{X} \times^{\rho} V$ mit typischer Faser V konstruieren. Im Jahr 1965 konnten Narasimhan und Seshadri [35] zeigen, dass ein Vektorbündel E genau dann stabil vom Grad Null ist, wenn es einen flachen unitären irreduziblen Zusammenhang zulässt, d.h. wenn E von einer irreduziblen unitären Darstellung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ kommt. Dies liefert eine weitere Bedeutung des Modulraums der stabilen Vektorbündel.

Die unitären Darstellungen der Fundamentalgruppe einer offenen Untervarietät $X_0 \subset X$ lassen sich mithilfe von Vektorbündeln mit einer Zusatzstruktur beschreiben: Ein *parabolisches Vektorbündel* ist ein Vektorbündel E zusammen mit einer gewichteten Fahne

über jedem Punkt in $X \setminus X_0$. Mehta und Seshadri [30] haben eine Stabilitätsbedingung für diese Objekte eingeführt, gezeigt, dass die irreduziblen unitären Darstellungen von $\pi_1(X_0)$ den stabilen parabolischen Vektorbündeln auf X vom Grad Null entsprechen und ihren Modulraum konstruiert.

Eine Verallgemeinerung des Theorems von Narasimhan–Seshadri erreicht man mithilfe der Higgs-Bündel: Ein *Higgs-Bündel* ist ein Vektorbündel E über X zusammen mit einem Homomorphismus $\varphi : E \rightarrow E \otimes \omega_X$, wobei ω_X das kanonische Bündel auf X bezeichnet. Hitchin [22] und Donaldson [7] gelang es, eine Stabilitätsbedingung zu definieren und zu zeigen, dass die irreduziblen Darstellungen von $\pi_1(X)$ den stabilen Higgs-Bündeln vom Grad Null entsprechen. Die Konstruktion des Modulraums hat Nitsure [38] durchgeführt.

Um die Darstellungen der Fundamentalgruppe einer nicht-kompakten algebraischen Kurve X_0 zu beschreiben, müssen die oben beschriebenen Verallgemeinerungen kombiniert werden. Simpson [51] zeigte die Korrespondenz zwischen stabilen parabolischen Higgs-Bündeln und irreduziblen Darstellungen von $\pi_1(X_0)$. Der Modulraum wurde von Yokogawa [53] und Konno [26] konstruiert.

In [45] hat Schmitt eine allgemeine Konstruktion für Vektorbündel mit globaler Dekoration beschrieben: Es sei ρ eine homogene Darstellung von $\mathrm{GL}(r)$. Ein ρ -*Swamp* ist ein Vektorbündel E zusammen mit einem Schnitt $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}(E_\rho)$, wobei E_ρ das via ρ zu E assoziierte Vektorbündel bezeichnet. Schmitt definiert einen Stabilitätsbegriff für diese Objekte und konstruiert ihren Modulraum. Als Spezialfall erhält man unter anderem die bekannte Stabilitätsbedingung für Higgs-Bündel.

In dieser Arbeit verallgemeinern wir den Begriff eines parabolischen Higgs-Bündels ähnlich wie in [45]. Aus technischen Gründen formulieren wir das Ergebnis für dekorierte Tupel von Vektorbündeln. Es sei $x_0 \in X$ ein Punkt, T eine endliche Menge und ρ, σ zwei homogene Darstellungen von $\mathrm{GL}(r)$. Ein σ -dekoriertes ρ -Tupel ist ein T -Tupel von Vektorbündeln E zusammen mit einem Schnitt $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}(E_\rho)$ und einem Punkt $s \in \mathbb{P}(E_{\sigma|_{\{x_0\}}})$. In Abschnitt 6.2.1 definieren wir eine von zwei rationalen Parametern δ_1 und δ_2 und einem Tupel $\chi \in \mathbb{Q}_{>0}^T$ abhängige Stabilitätsbedingung für diese Objekte. Als erstes wichtiges Resultat konstruieren wir den (projektiven) groben Modulraum der $(\delta_1, \delta_2, \chi)$ -(semi)stabilen σ -dekorierten ρ -Tupel (siehe Theorem 6.24). Im Fall $T = \{1\}$ bezeichnen wir einen dekorierten Tump als σ -dekoriertes ρ -Swamp. Als Spezialfälle erhält man sowohl die ρ -Swamps als auch die parabolischen Vektorbündel. Die parabolischen Higgs-Bündel findet man in Form von asymptotisch stabilen dekorierten Swamps.

Eine weitere Anwendung sind die Vektorbündel mit einer Trivialisierung der Faser über x_0 : Ein *Vektorbündel mit Niveaustuktur* ist ein Vektorbündel E zusammen mit einem vollständigen Homomorphismus $E|_{\{x_0\}} \Rightarrow \mathbb{C}^r$. Ngô Dac [37] hat die Geometrische Invariantentheorie auf diese Objekte angewandt, um den Raum der Shtukas zu kompaktifizieren. Unsere allgemeine Stabilitätsbedingung spezialisiert sich im Fall der Vektorbündel mit Niveaustuktur auf die von Ngô Dac verwendete.

Dekorierte Prinzipalbündel

Das Datum eines Vektorbündels E ist äquivalent zum Datum eines $\mathrm{GL}(r)$ -Prinzipalbündels. Insofern stellen die Prinzipalbündel mit reduktiver Strukturgruppe G eine natürliche Verallgemeinerung der Vektorbündel dar.

Ramanathan [41] hat ein Stabilitätskriterium für G -Prinzipalbündel eingeführt und konnte zeigen, dass ein Prinzipalbündel P mit halbeinfacher Strukturgruppe G genau dann stabil ist, wenn es von einer irreduziblen Darstellung $\pi_1(X) \rightarrow K$ kommt, wobei K eine maximale kompakte Untergruppe von G ist. Außerdem zeigte er, dass die Menge der Isomorphieklassen der stabilen G -Prinzipalbündel die Struktur eines analytischen Raums trägt. Später konstruierte er den Modulraum dieser Objekte mit algebraischen Methoden [42, 43].

Um Darstellungen $\pi_1(X_0) \rightarrow K$ der Fundamentalgruppe einer offenen Untervarietät $X_0 \subset X$ zu beschreiben, verallgemeinerten Bhosle und Ramanathan [3] den Begriff einer parabolischen Struktur für Prinzipalbündel: Ein *parabolisches G -Prinzipalbündel* ist ein G -Prinzipalbündel P mit einer Einparameteruntergruppe λ_x von $\text{Aut}(P_x)$ für jeden Punkt $x \in X \setminus X_0$. Sie konnten zeigen, dass ein parabolisches G -Bündel genau dann stabil ist, wenn es von einer irreduziblen Darstellung $\pi_1(X_0) \rightarrow K$ kommt. Die Konstruktion des Modulraums wurde auch in [20] durchgeführt.

Wir verallgemeinern in dieser Arbeit den Begriff eines parabolischen Prinzipalbündels auf folgende Weise: Es sei $x_0 \in X$ ein Punkt und $\sigma : G \rightarrow \text{GL}(r)$ eine homogene Darstellung. Ein *σ -dekoriertes Prinzipalbündel* ist ein Prinzipalbündel P zusammen mit einem Punkt s im assoziierten Bündel $\mathbb{P}(P \times^\sigma \mathbb{C}^r)$ über x_0 . In Abschnitt 8.1.2 definieren wir eine Stabilitätsbedingung für diese Objekte, die von einem positiven rationalen Parameter δ und einem Charakter χ abhängt. Als zentrales Ergebnis dieser Arbeit zeigen wir: Der (projektive) grobe Modulraum der (δ, χ) -(semi)stabilen σ -dekorierten G -Prinzipalbündel existiert (siehe Theorem 8.9). Als Spezialfall erhält man die bekannte Stabilitätsbedingung für parabolische Prinzipalbündel und ihren Modulraum.

Als weitere wichtige Anwendung betrachten wir die *Prinzipalbündel mit Niveaustuktur*: Ein solches Objekt besteht aus einem G -Prinzipalbündel P mit halbeinfacher Lie-Gruppe G und einem Punkt s in $\mathbb{P} \times^G \overline{G}$ über x_0 , wobei \overline{G} die von De Concini und Procesi [5] konstruierte *wundervolle Kompaktifizierung* von G bezeichnet. Analog zu den Vektorbündeln mit Niveaustuktur sollten sich diese Objekte zur Kompaktifizierung des Raums der G -Shtukas verwenden lassen. Eine dazu angekündigte Arbeit von Ngô Dac ist bisher nicht erschienen. Wir berechnen in dieser Arbeit explizite Stabilitätsbedingungen für die orthogonale und die symplektische Gruppe, die sich mithilfe der assoziierten Vektorbündel und isotroper Unterbündel ausdrücken lassen.

Aufbau und Inhalt

Der Aufbau der vorliegenden Arbeit ist wie folgt: Im ersten Kapitel werden die Grundlagen zu algebraischen Gruppen zusammengefasst, wobei wir uns besonders auf reduktive Gruppen konzentrieren.

Kapitel zwei widmet sich den Modulräumen. Im Anschluss an die Definition betrachten wir als Beispiele die Graßmannvarietät, die Fahnenvarietät und insbesondere das Quot-Schema von Grothendieck, das Grundlage für die Konstruktion des Modulraums der dekorierten Prinzipalbündel ist.

Das dritte Kapitel behandelt Mumfords Geometrische Invariantentheorie. Ein Schwerpunkt ist hierbei das Kriterium von Hilbert–Mumford. Dazu werden einige Beispiele vorgestellt, die für die späteren Konstruktionen notwendig sind.

Einleitung

In Kapitel vier wird die Konstruktion des Modulraums der semistabilen Vektorbündel wiederholt. Insbesondere vergleichen wir die Konstruktionen von Simpson und Gieseker, und untersuchen die S-Äquivalenz eingehend.

Im fünften Kapitel führen wir die algebraischen Prinzipalbündel ein. Die Definitionen und Aussagen gehen zurück auf Serre [49], allerdings stellen wir sie in der Sprache der Stacks dar.

Kapitel sechs enthält die wichtigsten Konstruktionen dieser Arbeit. Wir führen zunächst die Kategorien der Tumps, der dekorierten Tumps und der dekorierten Quotiententumps ein und definieren die Begriffe der $(\delta_1, \delta_2, \chi)$ -Stabilität und der S-Äquivalenz. Ausgehend von Grothendiecks Quot-Schema konstruieren wir den feinen Modulraum QTmp der stabilen dekorierten Quotiententumps. Anschließend konstruieren wir eine äquivariante Inklusion in einen projektiven Raum Gies . Der aufwendigste Teil dieser Arbeit ist der Beweis, dass die definierte Stabilitätsbedingung mit der GIT-Stabilität in Gies übereinstimmt, und dass die Einschränkung des Morphismus auf die semistabilen Punkte eigentlich ist. Beim Vergleich der Stabilitätsbedingungen muss insbesondere auf die S-Äquivalenz geachtet werden. Der gute Quotient von QTmp ist dann der gesuchte Modulraum der (semi)stabilen dekorierten Tumps. Das Kapitel endet mit ersten Anwendungen dieser Konstruktion, nämlich den parabolischen Vektorbündeln und den Vektorbündeln mit Niveaustruktur.

Im siebten Kapitel untersuchen wir, wie sich die Stabilitätsbedingung für große Werte von δ_1 verhält. Dies führt zum Begriff der *asymptotischen Stabilität*. Als Vorbereitung fassen wir einige Ergebnisse von Kempf [25] und Ramanan–Ramanathan [40] an unsere Konventionen an. Im Anschluss beweisen wir eine Aussage zur Stabilität im Produktraum aus [46]. Mithilfe dieser Grundlagen zeigen wir, dass ein $\Delta > 0$ existiert, so dass ein dekorierte Tump genau dann asymptotisch (δ_2, χ) -stabil ist, wenn er für alle $\delta_1 > \Delta$ auch $(\delta_1, \delta_2, \chi)$ -stabil ist (siehe Proposition 7.27). Im Fall der parabolischen Higgs-Bündel reduziert sich diese asymptotische Stabilitätsbedingung auf die bekannte Stabilitätsbedingung. Wir konstruieren ihren Modulraum als abgeschlossenes Unterschema des Modulraum dekorierte Tumps.

Kapitel acht enthält das zentrale Resultat dieser Arbeit. Wir führen zunächst die Kategorie der dekorierten G -Prinzipalbündel ein und definieren ein Stabilitätskriterium sowie den Begriff der S-Äquivalenz. Der Strategie aus [47] folgend führen wir die Kategorie der G -Pseudo-Prinzipalbündel ein, mit deren Hilfe wir die stabilen G -Prinzipalbündel auf asymptotisch stabile dekorierte Tumps zurückführen. Schließlich konstruieren wir den feinen Modulraum QPPB der dekorierten Quotienten-Pseudo-Prinzipalbündel. Mithilfe des Modulraums der dekorierten Tumps zeigt man die Existenz des GIT-Quotienten dieses Raums. Dieser Quotient ist der gesuchte Modulraum der (δ, χ) -(semi)stabilen σ -dekorierten Prinzipalbündel.

Im Anhang sind einige Aussagen zur Abstiegstheorie zusammengefasst, die für die Definition algebraischer Prinzipalbündel notwendig sind. Bis auf den Abschnitt über äquivariante Stacks haben wir die Darstellung von Vistoli [52] übernommen.

Notation und Konventionen

Wir folgen in dieser Arbeit weitgehend den Konventionen aus Hartshornes Buch [18]. Ein Schema ist ein Schema von endlichem Typ über einem Körper. Eine Varietät ist ein reduziertes aber nicht notwendigerweise irreduzibles Schema. Für ein kartesisches Produkt $X \times Y$ bezeichne $\text{pr}_X = \text{pr}_1$ die Projektion auf den ersten Faktor und $\text{pr}_Y = \text{pr}_2$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Wenn X ein projektives Schema und \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X ist, dann schreiben wir $h^i(\mathcal{F}) := h^i(X, \mathcal{F})$ für die Dimension des endlichdimensionalen Vektorraums $H^i(X, \mathcal{F})$. Wir werden keinen Unterschied zwischen geometrischen Vektorbündeln und lokal freien Garben machen. Wenn E eine lokal freie Garbe auf X ist, dann bezeichnet $\mathbb{P}(E)$ das Hyperebenenbündel $\mathcal{P}\text{roj}(\text{Sym}(E))$ über X . Für eine reelle Zahl x setzen wir $[x]_+ := \max\{x, 0\}$.

1. Algebraische Gruppen

Algebraische Gruppen spielen in dieser Arbeit aus zwei Gründen eine wichtige Rolle: Zum einen sind sie notwendig für die Beschreibung von Prinzipalbündeln – die Objekte, die in dieser Arbeit untersucht werden. Zum anderen sind sie für die Konstruktion ihres Modulraums essentiell.

In diesem Kapitel werden einige für unsere Zwecke wichtige Begriffe und Eigenschaften algebraischer Gruppen zusammengestellt. Eine Standardquelle für allgemeine algebraische Gruppen ist z.B. das Buch von Borel [4]. Für reductive Gruppen verweisen wir auf Santos–Rittatore [44, Chapter 9]. Der Abschnitt über homogene Darstellungen ist dem Buch von Schmitt [47, Section 1.1] entnommen.

1.1. Gruppen und Gruppenwirkungen

Im Folgenden sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir betrachten die Kategorie $\underline{\text{Sch}}/k$ der Schemata über k sowie die volle Unterkategorie $\underline{\text{Var}}/k$ der Varietäten.

Definition 1.1. Ein *Gruppenschema* ist ein Gruppenobjekt in $\underline{\text{Sch}}/k$ (siehe Definition A.59).

Bemerkung 1.2. Aus Bemerkung A.54 und dem Yoneda-Lemma ergibt sich folgende Beschreibung: Ein Gruppenschema ist ein Schema G zusammen mit Morphismen $\mu: G \times G \rightarrow G$, $e: \text{Spec}(k) \rightarrow G$ und $\text{inv}: G \rightarrow G$, so dass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G \times G & \xrightarrow{\text{id}_G \times \mu} & G \times G \\
 \downarrow \mu \times \text{id}_G & & \downarrow \mu \\
 G \times G & \xrightarrow{\mu} & G
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{Spec}(k) \times G & \xrightarrow{e \times \text{id}_G} & G \times G \\
 \downarrow \text{pr}_2 & & \downarrow \mu \\
 G & \xlongequal{\quad} & G
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \xrightarrow{\Delta} & G \times G & \xrightarrow{\text{inv} \times \text{id}_G} & G \times G \\
 \downarrow & & & & \downarrow \mu \\
 \text{Spec}(k) & \xrightarrow{e} & G & & G
 \end{array}$$

Ein Morphismus von Gruppenschemata ist ein Morphismus $\varphi: G \rightarrow H$ mit $\varphi \circ \mu_G = \mu_H \circ (\varphi \times \varphi)$.

Definition 1.3. Eine *algebraische Gruppe* über k ist ein Gruppenobjekt in $\underline{\text{Var}}/k$.

Beispiel 1.4. (i) Die *additive Gruppe* $\mathbb{G}_a = \text{Spec}(k[x])$ und die *multiplikative Gruppe* $\mathbb{G}_m = k^* = \text{Spec}(k[x, x^{-1}])$ sind algebraische Gruppen.

1. Algebraische Gruppen

(ii) Die Gruppe $\mathrm{GL}(n, k)$ der invertierbaren Matrizen sowie deren abgeschlossene Untergruppen $\mathrm{SL}(n, k)$, $\mathrm{Sp}(2n, k)$, $\mathrm{O}(n, k)$ und $\mathrm{SO}(n, k)$ sind algebraische Gruppen.

(iii) Die Gruppe $B_n \subset \mathrm{GL}(n, k)$ der oberen Dreiecksmatrizen, die Gruppe $U_n \subset B_n$ der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen und die Gruppe T_n der Diagonalmatrizen sind algebraische Gruppen.

(iv) Eine elliptische Kurve, d.h. eine glatte projektive Kurve vom Geschlecht eins mit einem ausgezeichneten rationalen Punkt, ist eine algebraische Gruppe.

Beispiel 1.5. Der Morphismus $\det: \mathrm{GL}(n, k) \rightarrow k^*$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Proposition 1.6 ([4, §1.2]). *Jede algebraische Gruppe G ist glatt.*

Beweis. Es gibt einen glatten Punkt $g \in G$. Da die Gruppenmultiplikation einen Isomorphismus zwischen g und jedem anderen Punkt $g' \in G$ herstellt, ist jeder Punkt glatt. \square

Definition 1.7. Eine *Einparameteruntergruppe* einer algebraischen Gruppe G ist ein Homomorphismus $\lambda: k^* \rightarrow G$. Wir bezeichnen die Menge der Einparameteruntergruppen von G mit $X_*(G)$.

Ein *Charakter* von G ist ein Homomorphismus $\chi: G \rightarrow k^*$. Die Menge der Charaktere von G wird mit $X^*(G)$ bezeichnet.

Bemerkung 1.8. (i) Die Menge der Charaktere $X^*(G)$ einer Gruppe G ist eine abelsche Gruppe. Ist G abelsch, so hat auch die Menge der Einparameteruntergruppen $X_*(G)$ die Struktur einer abelschen Gruppe.

(ii) Jeder Homomorphismus $\varphi: k^* \rightarrow k^*$ ist von der Form $z \mapsto z^\gamma$ für ein eindeutiges $\gamma \in \mathbb{Z}$. Für einen Charakter $\chi \in X^*(G)$ und eine Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(G)$ ist die Verknüpfung $\chi \circ \lambda: k^* \rightarrow k^*$ also durch eine Zahl $\langle \chi, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ bestimmt. Dies definiert die Paarung

$$\langle -, - \rangle: X^*(G) \otimes_{\mathbb{Z}} X_*(G) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Definition 1.9. Eine zu T_n isomorphe Gruppe heißt *n -dimensionaler Torus*.

Bemerkung 1.10. Die Gruppe der Einparameteruntergruppen von T_n ist isomorph zu \mathbb{Z}^n . Dieser Isomorphismus und die Standardpaarung induzieren die perfekte Paarung

$$\langle -, - \rangle: X_*(T_n) \otimes_{\mathbb{Z}} X_*(T_n) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Definition 1.11. Eine *Links- bzw. Rechtswirkung* einer algebraischen Gruppe G auf einem Schema X ist eine Links- bzw. Rechtswirkung von h_G auf X im Sinne von Definition A.53.

Bemerkung 1.12. Eine Linkswirkung von G auf einem Schema X ist ein Morphismus $\rho: G \times X \rightarrow X$ mit der Eigenschaft, dass die folgenden Diagramme kommutativ sind:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(k) \times X & \xrightarrow{e \times \mathrm{id}_X} & G \times X \\ \downarrow \mathrm{pr}_2 & & \downarrow \rho \\ X & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{\mu \times \mathrm{id}_X} & G \times X \\ \downarrow \mathrm{id}_G \times \rho & & \downarrow \rho \\ G \times X & \xrightarrow{\rho} & X. \end{array}$$

Analoges gilt für den Begriff der Rechtswirkung.

Beispiel 1.13. Die Multiplikation $\mu: G \times G \rightarrow G$ einer algebraischen Gruppe G definiert sowohl eine Links- als auch eine Rechtswirkung von G auf sich selbst.

Definition 1.14. Es sei X ein Schema mit einer Linkswirkung $\rho: G \times X \rightarrow X$, x ein Punkt in $X(k)$ und $\rho_x: G \rightarrow X$ der induzierte Morphismus. Der *Orbit* eines Punktes $x \in X$ ist das Bild

$$G \cdot x := \text{im}(\rho_x) = \{\rho(g, x) \mid g \in G(k)\},$$

der *Stabilisator* ist die Menge

$$G_x := \rho_x^{-1}(x) = \{g \in G(k) \mid \rho(g, x) = x\}.$$

Lemma 1.15 ([4, §1.9]). *Es sei $\rho: G \times X \rightarrow X$ eine Wirkung und $x \in X$. Dann ist der Orbit $G \cdot x$ offen in seinem Abschluss $\overline{G \cdot x}$.*

Beweis. Der Orbit $G \cdot x$ ist als Bild des Morphismus $\rho_x: G \rightarrow X$ konstruierbar. Er enthält deshalb eine offene Teilmenge U mit $\overline{U} = \overline{G \cdot x}$. Da G transitiv auf $G \cdot x$ wirkt, ist auch $G \cdot x$ offen. \square

Korollar 1.16. *Der Abschluss eines Orbits enthält einen abgeschlossenen Orbit.*

Beweis. Wir argumentieren per Induktion über die Dimension d von $\overline{G \cdot x}$. Falls $d = 0$ gilt, ist der Orbit selbst abgeschlossen. Wenn d positiv ist und $G \cdot x$ nicht abgeschlossen ist, dann ist $\overline{G \cdot x} \setminus G \cdot x$ nach dem Lemma abgeschlossen und von kleinerer Dimension. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es nun einen abgeschlossenen Orbit. \square

1.2. Affine Gruppen

Aufgrund der Antiäquivalenz der Kategorie der affinen Varietäten über $\text{Spec}(k)$ mit der Kategorie der reduzierten k -Algebren entspricht eine affine algebraische Gruppe $G = \text{Spec}(A)$ einer reduzierten k -Algebra A mit bestimmten Zusatzstrukturen.

Definition 1.17. Eine *Hopf-Algebra* ist eine k -Algebra A zusammen mit Vektorraumhomomorphismen $\mu^\#: A \rightarrow A \otimes_k A$, $e^\#: A \rightarrow k$ und $\text{inv}^\#: A \rightarrow A$, so dass die dualen Versionen der Diagramme aus Bemerkung 1.2 kommutieren, d.h. es gilt $(\mu^\# \otimes \text{id}_A) \circ \mu^\# = (\text{id}_A \otimes \mu^\#) \circ \mu^\#$, $(e^\# \otimes \text{id}_A) \circ \mu^\# = \text{id}_A$ und $\Delta^\# \circ (\text{inv}^\# \otimes \text{id}_A) \circ \mu^\# = e^\#$.

Ebenso kann man eine duale Version einer Links- bzw. Rechtswirkung definieren.

Definition 1.18. Eine *linke Kowirkung* einer Hopf-Algebra A auf einem Vektorraum V ist ein Homomorphismus

$$\rho^\#: V \rightarrow A \otimes_k V$$

mit der Eigenschaft $(e^\# \otimes \text{id}_V) \circ \rho^\# = \text{id}_V$ und $(\mu^\# \otimes \text{id}_V) \circ \rho^\# = (\text{id}_A \otimes \rho^\#) \circ \rho^\#$.

Analog definiert man eine *rechte Kowirkung*.

Beispiel 1.19. Es sei $G = \text{Spec}(A)$ eine affine algebraische Gruppe, $X = \text{Spec}(R)$ ein affines Schema und $\rho: G \times X \rightarrow X$ eine Linkswirkung. Dann ist $\rho^\#: R \rightarrow A \otimes_k R$ eine linke Kowirkung. In diesem Fall ist $\rho^\#$ auch ein Homomorphismus von Algebren.

1. Algebraische Gruppen

Definition 1.20. Eine *Darstellung* einer Gruppe G ist ein k -Vektorraum V zusammen mit einem Homomorphismus $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ oder, äquivalent dazu, eine mengentheoretische Wirkung $\rho': G \times V \rightarrow V$, so dass für jedes Element $g \in G$ die Abbildung $\rho'(g): v \mapsto \rho'(g, v)$ linear ist.

Bemerkung 1.21. Wenn $\rho^\#: V \rightarrow V \otimes_k A$ eine rechte Kowirkung ist, so erhält man eine Darstellung

$$\begin{aligned} r_{\rho^\#}: G(k) \times V &\rightarrow V \\ (g, v) &\mapsto r_{\rho^\#}(g, v) := (\mathrm{id}_V \otimes g^\#)(\rho^\#v). \end{aligned}$$

Da k algebraisch abgeschlossen ist, bestimmt diese Darstellung die Kowirkung. Falls $\rho^\#$ von einer Wirkung $\rho: X \times G \rightarrow X$ mit $X = \mathrm{Spec}(V)$ stammt und X reduziert ist, dann wird die Wirkung durch $r_{\rho^\#}(g, v)(x) = v(\rho(x, g))$ beschrieben.

Analog ergibt eine linke Kowirkung $\sigma^\#: V \rightarrow A \otimes_k V$ eine Darstellung

$$\begin{aligned} l_{\sigma^\#}: G(k) \times V &\rightarrow V \\ (g, v) &\mapsto l_{\sigma^\#}(g, v) := ((g^\# \circ \mathrm{inv}^\#) \otimes \mathrm{id}_V)(\sigma^\#v). \end{aligned}$$

Dies entspricht der Vorschrift $l_{\sigma^\#}(g, v)(x) = v(\sigma(g^{-1}, x))$.

Definition 1.22. Es sei $\rho: G(k) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung. Die Menge der *invarianten Vektoren* ist

$$V^G := \{v \in V \mid \forall g \in G(k) : \rho(g, v) = v\}.$$

Ein Unterraum $U \subset V$ heißt *invariant*, falls $\rho(g, u) \in U$ für alle $g \in G(k)$ und $u \in U$ gilt.

Definition 1.23. Ein *rationaler G -Modul* ist ein k -Vektorraum V mit linearer $G(k)$ -Wirkung mit der Eigenschaft, dass jeder Vektor $v \in V$ in einem endlichdimensionalen invarianten Unterraum U enthalten ist, so dass die Wirkung von G auf U algebraisch ist.

Proposition 1.24 ([4, §1.9]). *Wenn $\rho^\#$ eine linke bzw. rechte Kowirkung auf V ist, dann macht $r_{\rho^\#}$ (bzw. $l_{\rho^\#}$) V zu einem rationalen G -Modul.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung für eine rechte Kowirkung $\rho^\#$. Es sei $v \in V$ ein Vektor. Dann gibt es Elemente $v_i \in V$, $a_i \in A$, $i = 1, \dots, n$, mit $\rho^\#v = \sum_{i=1}^n v_i \otimes a_i$. Der von den Elementen $r_{\rho^\#}(g, v)$, $g \in G(k)$, aufgespannte Unterraum U ist G -invariant und in dem von den Elementen v_i , $i = 1, \dots, n$, aufgespannten Unterraum enthalten. Insbesondere ist U endlichdimensional.

Es sei nun u_1, \dots, u_m eine Basis von U . Es gibt dann Elemente $\psi_{ij} \in A$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $\rho^\#u_j = \sum_{i=1}^m u_i \otimes \psi_{ij}$, $i = 1, \dots, m$. Die Abbildung $G \rightarrow \mathrm{GL}(U)$ ist also durch die Matrix mit Einträgen $\psi_{ij} \in A$ gegeben und somit algebraisch. \square

Proposition 1.25 ([4, §1.10]). *Eine algebraische Gruppe G ist genau dann linear, wenn sie affin ist.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Dies ist offensichtlich.

„ \Leftarrow “: Sei $G = \text{Spec}(A)$ affin und f_1, \dots, f_l Erzeuger von A . Wir betrachten die Rechtswirkung von G auf sich selbst und die entsprechende Kowirkung auf A . Nach Proposition 1.24 gibt es einen endlichdimensionalen Unterraum $V \subset A$ mit $\mu^\#(V) \subset V \otimes_k A$, der die Erzeuger $f_i, i = 1, \dots, l$ enthält. Sei nun v_1, \dots, v_n eine Basis von V . Die Wirkung von G auf V ist wie oben durch einen Morphismus $\psi: G \rightarrow \text{GL}(n)$ bestimmt. Der entsprechende Ringhomomorphismus $\psi^\#: k[x_{11}, \dots, x_{nn}, \det^{-1}] \rightarrow A$ mit $x_{ij} \mapsto \psi_{ij}$ ist surjektiv: Wegen $\text{id}_A = (e^\# \otimes \text{id}_A) \circ \mu^\#$ gilt $v_j = \sum_{i=1}^n e^\#(v_i) \cdot \psi_{ij} \in \text{im}(\psi^\#)$. Der Morphismus ψ ist also eine abgeschlossene Einbettung. \square

Proposition 1.26. *Es sei G eine affine algebraische Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe. Dann trägt G/H die Struktur einer glatten quasi-projektiven Varietät, so dass die Projektion $\pi: G \rightarrow G/H$ ein Morphismus ist. Wenn H eine normale Untergruppe ist, dann ist G/H eine affine Gruppe und π ist ein Gruppenhomomorphismus.*

Beweis. Dies ist [4, 6.8 Theorem]. Die allgemeinere Konstruktion des Quotienten eines Schemas bezüglich einer Gruppenwirkung wird in Kapitel 3 behandelt. \square

1.3. Reduktive Gruppen

Eine *Normalreihe* einer algebraischen Gruppe G ist eine Folge

$$\{e\} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_n = G$$

abgeschlossener Untergruppen, so dass H_{i-1} ein Normalteiler von H_i für $i = 1, \dots, n$ ist. Eine Gruppe G heißt *auflösbar*, falls es eine Normalreihe gibt, so dass die Faktoren $H_i/H_{i-1}, i = 1, \dots, n$, abelsch sind. G heißt *nilpotent*, falls es eine Normalreihe gibt, so dass für $i = 1, \dots, n$ H_{i-1} ein Normalteiler von G ist, und H_i/H_{i-1} zentral in G/H_{i-1} ist.

Es sei g ein Element einer affinen algebraischen Gruppe $G = \text{Spec}(A)$ und $r_g := r_{\mu^\#}(g): A \rightarrow A$ die Rechtstranslation. Das Element g heißt *unipotent*, falls der Operator $r_g - 1$ für jeden invarianten endlichdimensionalen Unterraum $V \subset A$ nilpotent ist. Eine Gruppe heißt *unipotent*, falls jedes ihrer Elemente unipotent ist. Eine Gruppe ist genau dann unipotent, wenn sie isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von U_n ist. Insbesondere ist jede unipotente Gruppe nilpotent (siehe [4, §4.8]).

Definition 1.27. Das *Radikal* $\mathcal{R}(G)$ einer algebraischen Gruppe G ist die Zusammenhangskomponente des Einheitslements der maximalen auflösbaren normalen Untergruppe von G . Die Menge der unipotenten Elemente des Radikals bildet das *unipotente Radikal* $\mathcal{R}_u(G)$ von G

Definition 1.28. Eine affine algebraische Gruppe $G = \text{Spec}(A)$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k heißt

- (i) *halbeinfach*, falls ihr Radikal $\mathcal{R}(G)$ trivial ist,
- (ii) *reduktiv*, falls ihr unipotentes Radikal $\mathcal{R}_u(G)$ trivial ist,

1. Algebraische Gruppen

- (iii) *linear reduktiv*, falls zu jeder rationalen Darstellung $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ und jedem G -invarianten Vektor $v \neq 0$ eine lineare G -invariante Funktion f auf V mit $f(v) \neq 0$ existiert,
- (iv) *geometrisch reduktiv*, falls zu jeder rationalen Darstellung $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ und jedem G -invarianten Vektor $v \neq 0$ eine nicht-konstante G -invariante Funktion f auf V mit $f(v) \neq 0$ existiert.

Bemerkung 1.29. (i) Jede halbeinfache Gruppe ist reduktiv.

(ii) Jede linear reduktive Gruppe ist auch geometrisch reduktiv.

(iii) Im Fall $\mathrm{char}(k) = 0$ sind Reduktivität, lineare Reduktivität und geometrische Reduktivität äquivalent (siehe [44, Chapter 9, Theorems 4.3, 5.4]). Dies werden wir für alle späteren Anwendungen voraussetzen. In positiver Charakteristik sind Reduktivität und geometrische Reduktivität äquivalent (siehe [17]); eine reduktive Gruppe ist dann aber im allgemeinen nicht linear reduktiv.

Indem man die abgeleitete Reihe des Radikals $\mathcal{R}(G)$ bzw. die untere Zentralreihe des unipotenten Radikals $\mathcal{R}_u(G)$ betrachtet, findet man:

Lemma 1.30 ([4, §11.21]). *Eine affine algebraische Gruppe G ist genau dann halbeinfach bzw. reduktiv, wenn es keine zusammenhängende abelsche bzw. unipotente abelsche normale nicht-triviale Untergruppe gibt.*

Beispiel 1.31. (i) Die Gruppen $\mathrm{SL}(n, k)$, $\mathrm{Sp}(2n, k)$ und $\mathrm{SO}(n, k)$ sind halbeinfach.

(ii) Die Gruppen $\mathrm{GL}(n, k)$ und T_n sind reduktiv.

Definition 1.32. Eine Darstellung $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ einer algebraischen Gruppe G heißt *irreduzibel*, falls es keinen nicht-trivialen echten G -invarianten Unterraum $U \subset V$ gibt, und *vollständig reduzibel*, falls V isomorph zu einer direkten Summe irreduzibler Darstellungen ist.

Proposition 1.33 ([44, Ch. 9, 2.24]). *Eine algebraische Gruppe G ist genau dann linear reduktiv, wenn jeder rationale G -Modul vollständig reduzibel ist.*

Beweis. „ \Rightarrow “: (i) Es sei zunächst V ein endlichdimensionaler rationaler G -Modul und $L \subset V$ ein eindimensionaler invarianter Unterraum. Dann existiert ein Charakter $\chi: G \rightarrow k^*$ mit $\rho(g, l) = \chi(g) \cdot l$ für $l \in L$. Wir betrachten nun die Wirkung $\chi^{-1} \cdot \rho$ auf V . Die induzierte Wirkung auf L ist trivial und jedes Element $l \in L \setminus \{0\}$ ist invariant. Nach Voraussetzung existiert eine G -invariante Funktion $f: V \rightarrow k$ mit $f(l) \neq 0$. $U := \ker(f)$ ist dann ein invariantes Komplement zu L .

(ii) Es sei $U \subset V$ ein Untermodul der Kodimension eins. Dann ist $U^\perp \subset V^\vee$ ein eindimensionaler Untermodul, zu dem nach Teil (i) ein invariantes Komplement W existiert. Der Annihilator $W^\perp \subset V$ ist dann ein invariantes Komplement zu U .

(iii) Es sei nun U ein beliebiger Untermodul und $i: U \rightarrow V$ die Inklusion. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\varphi: \mathrm{Hom}_k(V, U) \rightarrow \mathrm{Hom}_k(U, U)$$

rationaler G -Moduln. Es sei $L := \mathrm{span}(\mathrm{id}_U) \subset \mathrm{Hom}_k(U, U)$ und $M := \varphi^{-1}(L)$. Wir betrachten nun den induzierten Homomorphismus $\tilde{\varphi}: M \rightarrow L$. Dann ist $\ker(\tilde{\varphi})$ ein

invarianter Unterraum von Kodimension eins. Nach Teil (ii) gibt es ein invariantes Komplement $T = \text{span}(f)$. Dabei können wir f so wählen, dass $f \circ i = \text{id}_U$ gilt. Also ist f invariant, und $\ker(f)$ ist ein invariantes Komplement von U .

(iv) Schließlich sei V ein unendlich-dimensionaler rationaler G -Modul. Wir betrachten die Menge aller Untermoduln, die vollständig reduzibel sind. Nach Teil (iii) ist diese Menge nicht leer. Zorns Lemma besagt, dass es ein maximales Element $U \subset V$ gibt. Falls $v \in V \setminus U$ existiert, gibt es einen endlichdimensionalen invarianten Unterraum W , der v enthält. Nach Teil (iii) gibt es zum invarianten Unterraum $U \cap W \subset W$ ein Komplement W' . Dann ist auch $U \oplus W'$ vollständig reduzibel im Widerspruch zur Maximalität von U .

„ \Leftarrow “: Es sei $v \neq 0$ ein G -invarianter Vektor. Da ρ vollständig reduzibel ist, gibt es ein G -invariantes Komplement W zu $L := \text{span}(v)$. Wir identifizieren k mit L durch $z \mapsto z \cdot v$ für $z \in k$. Die Projektion $\pi: V = W \oplus L \rightarrow L \cong k$ ist dann eine lineare G -invariante Funktion auf V mit $\pi(v) = 1$. \square

Für eine Gruppe G bezeichne $\underline{\text{Mod}}(G)$ die Kategorie der rationalen G -Moduln. Wir betrachten den Funktor $(-)^G: \underline{\text{Mod}}(G) \rightarrow \underline{\text{Mod}}(G)$, der einen G -Modul V auf den Untermodul der invarianten Elemente V^G abbildet.

Definition 1.34. Ein *Reynolds-Operator* für eine algebraische Gruppe G ist eine natürliche Transformation $r: \text{id}_{\underline{\text{Mod}}(G)} \rightarrow (-)^G$, so dass $r(V^G) = \text{id}_{V^G}$ für jede rationale Darstellung V gilt.

Bemerkung 1.35. (i) Wenn G endlich ist, wird durch

$$r(v) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g, v)$$

ein Reynolds-Operator bestimmt.

(ii) Wenn G eine kompakte Gruppe über \mathbb{R} ist, gibt es ein Haarsches Maß μ auf G . Dann definiert

$$r(v) = \frac{\int_G \rho(g, v) \, d\mu}{\int_G d\mu}$$

einen Reynolds-Operator.

Lemma 1.36. *Es sei G linear reaktiv, V ein rationaler G -Modul, W ein rationaler G -Modul mit der trivialen Wirkung und $\varphi: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus von G -Moduln mit $V^G \subset \ker(\varphi)$. Dann gilt $\varphi = 0$.*

Beweis. Für jede irreduzible Darstellung $U \subset V$ gilt entweder $\varphi(U) = 0$ oder $\varphi(U) \cong U$. Da W nur triviale Darstellungen enthält, folgt die Behauptung. \square

Proposition 1.37 ([44, Ch. 9, 2.24]). *Für eine algebraische Gruppe G sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) G ist linear reaktiv.
- (ii) Es existiert ein eindeutiger Reynolds-Operator.
- (iii) Der Funktor $(-)^G: V \mapsto V^G$ ist exakt.

1. Algebraische Gruppen

Beweis. „(i) \Rightarrow (ii)“: Es sei V ein rationaler G -Modul. Da die Wirkung von G auf V nach Proposition 1.33 vollständig reduzibel ist und V^G ein invarianter Unterraum ist, gibt es ein eindeutiges Komplement T . Wir definieren $r(V): V \rightarrow V^G$ als Projektion von $V = V^G \oplus T$ auf V^G . Offensichtlich gilt $r(V^G) = \text{id}_{V^G}$.

Sei $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus von G -Moduln. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\varphi := r(W) \circ f - f|_{V^G} \circ r(V): V \rightarrow W^G.$$

Offensichtlich gilt $V^G \subset \ker(\varphi)$. Aus Lemma 1.36 folgt $\varphi = 0$. Dies zeigt die Natürlichkeit der Transformation.

Es sei nun r' ein weiterer Reynolds-Operator und V eine rationale Darstellung. Wir betrachten $\varphi := r(V) - r'(V): V \rightarrow V^G$. Wiederum zeigt Lemma 1.36 dann $\varphi = 0$, also $r = r'$.

„(ii) \Rightarrow (iii)“: Der Funktor $(-)^G$ ist immer links-exakt. Dass er auch rechts-exakt ist, folgt aus der Natürlichkeit des Reynolds-Operators.

„(iii) \Rightarrow (i)“: Es sei V eine rationale Darstellung und $v \in V^G$ ein invariantes Element. Dann definiert v einen G -äquivarianten surjektiven Homomorphismus $V^\vee \rightarrow k$, $f \mapsto f(v)$. Da $(-)^G$ exakt ist, gibt es ein Element $f \in (V^\vee)^G$ mit $f(v) = 1$. \square

Korollar 1.38. *Es sei G eine linear reduktive Gruppe und R eine k -Algebra mit einer G -Wirkung. Dann ist $r(R)$ ein Homomorphismus von R^G -Moduln.*

Beweis. Es sei $f = r(R)(f) \in R^G$. Dann ist der Homomorphismus $R \rightarrow R$, $h \mapsto f \cdot h$ äquivariant. Aufgrund der Natürlichkeit des Reynolds-Operators gilt dann $r(R)(f \cdot h) = f \cdot r(R)(h)$ für alle $h \in R$. \square

Lemma 1.39 ([36, Lemma 3.3]). *Es sei G eine geometrisch reduktive Gruppe, $X = \text{Spec}(R)$ ein affines Schema und $\rho: G \times X \rightarrow X$ eine Linkswirkung. Zu zwei disjunkten abgeschlossenen G -invarianten Teilmengen Z_1, Z_2 von X existiert $f \in R^G$ mit $f|_{Z_1} = 1$ und $f|_{Z_2} = 0$.*

Beweis. Zunächst gibt es $h \in R$ mit $h|_{Z_1} = 1$ und $h|_{Z_2} = 0$. Nach Proposition 1.24 ist der von den Elementen $l_\rho(g, h)$, $g \in G$, aufgespannte Unterraum endlichdimensional. Es sei v_1, \dots, v_n eine Basis. Es gibt dann $\psi_{ij} \in A$, $i, j = 1, \dots, n$, mit $\rho^\# v_i = \sum_{j=1}^n \psi_{ij} \otimes v_j$. Die Elemente ψ_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, definieren einen Homomorphismus $\psi: G \rightarrow \text{GL}(n)$, so dass der Morphismus $F := (v_1, \dots, v_n): X \rightarrow k^n$ G -äquivariant ist. Man beachte, dass $Z_2 \subset F^{-1}(0)$ gilt und $Z_1 \subset F^{-1}(v)$ für einen festen G -invarianten Vektor $v \in k^n$. Da G geometrisch reduktiv ist, gibt es $f' \in k[x_1, \dots, x_n]^G$ mit $f'(0) = 0$ und $f'(v) = 1$. Dann ist $f := f' \circ F$ das gesuchte Element. \square

1.4. Homogene Darstellungen

Im Folgenden arbeiten wir über einem Körper k der Charakteristik Null.

Definition 1.40. Ein Darstellung $\rho: \text{GL}(V) \rightarrow \text{GL}(W)$ ist *homogen vom Grad* $\deg(\rho) = \gamma$, falls $\rho(z \cdot \text{id}_V) = z^\gamma \cdot \text{id}_W$ für alle $z \in k^*$ gilt.

Proposition 1.41 ([47, Cor. 1.1.5.4]). *Es sei $\rho: \mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ eine endlichdimensionale algebraische Darstellung. Dann gibt es Zahlen $b \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, b$, und $c \in \mathbb{N}$, so dass ρ ein direkter Summand der Darstellung $\mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathrm{GL}(V_{\underline{a},b,c})$ mit*

$$V_{\underline{a},b,c} := \bigoplus_{i=1}^b V^{\otimes a_i} \otimes \left(\bigwedge^{\dim V} V \right)^{\otimes -c}$$

ist. Falls ρ homogen vom Grad γ ist, kann man $a_i = \gamma + c \dim(V)$ für $i = 1, \dots, b$ wählen.

Beweis. Zunächst gibt es $c \in \mathbb{N}$, so dass sich $\sigma := \rho \otimes \det^{\otimes c}$ fortsetzen lässt zu einem Morphismus

$$\bar{\sigma}: \mathrm{End}(V) \rightarrow \mathrm{End}(W),$$

der $\bar{\sigma}(h_1 \circ h_2) = \bar{\sigma}(h_1) \circ \bar{\sigma}(h_2)$ für $h_1, h_2 \in \mathrm{End}(V)$ erfüllt.

Es sei w_1, \dots, w_m eine Basis von W und w^i der zu w_i duale Basisvektor in W^\vee . Dann definiert

$$\begin{aligned} \varphi: W &\rightarrow k[\mathrm{End}(V)]^{\oplus m} \\ w &\mapsto \left((g_1, \dots, g_m) \mapsto (w^1(\rho(g_1)w), \dots, w^m(\rho(g_m)w)) \right) \end{aligned}$$

einen injektiven Homomorphismus, der bezüglich der Rechtstranslation auf $k[\mathrm{End}(V)]$ äquivariant ist. Weiterhin gibt es eine äquivariante Einbettung

$$k[\mathrm{End}(V)] = \bigoplus_{d \geq 0} \mathrm{Sym}^d(\mathrm{End}(V)^\vee) \rightarrow \bigoplus_{d \geq 0} (\mathrm{End}(V)^\vee)^{\otimes d}.$$

Nun ist $\mathrm{End}(V)^\vee$ mit der durch die Rechtstranslation bestimmten G -Modulstruktur isomorph zu $V^{\oplus n}$ mit $n := \dim(V)$. Wir erhalten also eine äquivariante Inklusion

$$W \rightarrow \bigoplus_{d \geq 0} (V^{\oplus n})^{\otimes d} \cong \bigoplus_{d \geq 0} (V^{\otimes d})^{\oplus n^d}.$$

Weil W endlichdimensional ist, gibt es also Zahlen b und a_i , $i = 1, \dots, b$ und eine bezüglich σ äquivariante Injektion

$$W \rightarrow \bigoplus_{i=1}^b V^{\otimes a_i}.$$

Schließlich erhält man eine Einbettung

$$W \rightarrow \bigoplus_{i=1}^b V^{\otimes a_i} \otimes \left(\bigwedge^{\dim V} V \right)^{\otimes -c},$$

die äquivariant bezüglich der ursprünglichen Darstellung ρ ist. Da $\mathrm{GL}(V)$ reduktiv ist, gibt es ein invariantes Komplement, so dass W ein direkter Summand der Darstellung ist.

Falls ρ homogen vom Grad γ ist, so ist σ homogen vom Grad $\gamma' = \gamma + c \dim(V)$. Man darf dann $a_i = \gamma'$ für alle $i = 1, \dots, b$ annehmen. \square

1. Algebraische Gruppen

Proposition 1.42 ([47, Thm 1.1.6.1]). *Es sei $G = \text{Spec}(A)$ eine reduktive affine algebraische Gruppe mit Einbettung $i: G \rightarrow \text{GL}(V)$ und $\rho: G \rightarrow \text{GL}(W)$ eine endlichdimensionale algebraische Darstellung. Dann gibt es eine algebraische Darstellung $\bar{\rho}: \text{GL}(V) \rightarrow \text{GL}(W \oplus W')$, so dass ρ ein direkter Summand der Darstellung $\bar{\rho} \circ i$ ist.*

Beweis. Es sei w_1, \dots, w_n eine Basis von W und w^1, \dots, w^n die duale Basis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: W &\rightarrow A^{\oplus n} \\ w &\mapsto ((g_1, \dots, g_n) \mapsto (w^1 \rho(g_1) w), \dots, w^n(\rho(g_n) w)) \end{aligned}$$

ist dann eine injektive lineare Abbildung, die bezüglich der durch die Rechtsmultiplikation induzierten Wirkung von G auf A äquivariant ist. Weiter haben wir eine G -äquivariante Surjektion

$$i^\#: k[\text{GL}(V)] \rightarrow A.$$

Nach Proposition 1.24 gibt es dann einen endlichdimensionalen $\text{GL}(V)$ -invarianten Unterraum $U \subset k[\text{GL}(V)]^{\oplus n}$ mit $\varphi(W) \subset (i^\#)^{\oplus n}(U)$, so dass die Wirkung von $\text{GL}(V)$ auf U algebraisch ist. Es sei ψ die Einschränkung von $(i^\#)^{\oplus n}$ auf U . Nach Proposition 1.33 gilt dann $U = \ker(\psi) \oplus \text{im}(\psi)$ und es existiert ein Komplement T von $\varphi(W)$ in $\text{im}(\psi)$, so dass $U \cong W \oplus (\ker(\psi) \oplus T)$ folgt. \square

2. Modulräume

In diesem Kapitel wird der Begriff des Modulraums eingeführt. Die anschließenden Beispiele dienen sowohl zum besseren Verständnis der Definitionen als auch als technische Grundlage für die späteren Konstruktionen. Eine Einführung in die Theorie der Modulräume findet man in Newsteads Buch [36]. Für die Beispiele verweisen wir auf die Texte von Huybrechts–Lehn, Le Potier und Nitsure [24, 28, 39].

2.1. Das Modulproblem

Es sei eine Kategorie \mathcal{A} gegeben. Das Modulraumproblem besteht darin, einen Raum zu finden, der die Isomorphieklassen von Objekten in \mathcal{A} parametrisiert. Wir benötigen dazu den Begriff einer parametrisierten Familie von Objekten: Es sei T ein Schema – in den meisten Fällen wird dies $\text{Spec}(k)$ für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k sein – und \mathcal{F} eine über $\underline{\text{Sch}}/T$ gefaserte Kategorie mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{F}(\text{id}_T) \cong \mathcal{A}$ gilt. Für ein Schema S nennen wir ein Objekt in $\mathcal{F}(S)$ eine durch S parametrisierte Familie von Objekten. Weiter sei „ \sim “ eine Äquivalenzrelation auf den Fasern von \mathcal{F} , die mit Rückzügen verträglich ist und eingeschränkt auf die Faser über id_T die Isomorphie in \mathcal{A} ergibt. Wir erhalten so den Modulfunktor

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{F}}: \underline{\text{Sch}}/T &\rightarrow \underline{\text{Sets}} \\ S &\mapsto \text{Ob } \mathcal{F}(S) / \sim . \end{aligned}$$

Definition 2.1. Ein Schema M über T heißt *feiner Modulraum*, wenn M den Funktor $\Phi_{\mathcal{F}}$ darstellt (siehe Definition A.16, (i)).

Definition 2.2. Eine durch ein Schema M parametrisierte Familie \tilde{E} heißt *universell*, falls es zu jedem Schema S und jeder durch S parametrisierten Familie E in $\mathcal{F}(S)$ genau einen Morphismus $h: S \rightarrow M$ mit $h^*\tilde{E} \sim E$ gibt.

Das Yoneda-Lemma impliziert folgende Charakterisierung eines feinen Modulraums:

Lemma 2.3. *Ein Schema M ist genau dann ein feiner Modulraum, wenn es eine universelle Familie \tilde{E} in $\mathcal{F}(M)$ gibt*

Für viele Modulprobleme existiert kein feiner Modulraum. Man kann dann versuchen, ein Schema mit einer schwächeren universellen Eigenschaft zu finden. Wir benötigen dazu eine zusätzliche Äquivalenzrelation „ \sim_S “ auf $\text{Ob}(\mathcal{A})$, die die Isomorphie erweitert.

Definition 2.4. Ein Schema M über T ist ein *grober Modulraum*, wenn es eine natürliche Transformation $\Psi: \Phi_{\mathcal{F}} \rightarrow h_M$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- (i) M ist eine Kodarstellung von $\Phi_{\mathcal{F}}$ (siehe Definition A.16, (ii)).

2. Modulräume

(ii) Ψ induziert einen Isomorphismus $h_M(\text{id}_T) \cong \text{Ob}(\mathcal{A}) / \sim_S$.

Bemerkung 2.5. (i) Aus der universellen Eigenschaft folgt die Eindeutigkeit des feinen und des groben Modulraums. Wenn der feine Modulraum existiert, stimmt er mit dem groben Modulraum überein.

(ii) M ist genau dann eine Kodarstellung, wenn es zu jeder natürlichen Transformation $\Psi': F \rightarrow h_N$ einen eindeutigen Morphismus $f: M \rightarrow N$ mit $h_f \circ \Psi = \Psi'$ gibt (siehe auch [24, Def. 2.2.1]).

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\Psi'} & h_N \\ \Psi \downarrow & \nearrow h_f & \\ h_M & & \end{array} .$$

Definition 2.6. Es sei $\rho: G \times X \rightarrow X$ eine Linkswirkung einer algebraischen Gruppe G auf einem Schema X . Ein (*universeller*) *kategorieller Quotient* von X ist ein Morphismus $\pi: X \rightarrow Y$, so dass Y den Funktor h_X/h_G (universell) kodarstellt (siehe Definition A.16, (ii) und (iii)).

Bemerkung 2.7. Ein kategorieller Quotient von X ist nach Bemerkung A.17 ein G -invarianter Morphismus $\pi: X \rightarrow Y$ mit der Eigenschaft, dass es für jeden G -invarianten Morphismus $f: X \rightarrow T$ genau einen Morphismus $\bar{f}: Y \rightarrow T$ mit $f \circ \pi = \bar{f}$ gibt.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & T \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ Y & & \end{array}$$

Definition 2.8. Ein kategorieller Quotient $\pi: X \rightarrow Y$ heißt *Orbitraum*, falls π surjektiv ist und für jeden Punkt $y \in Y$ das Urbild $\pi^{-1}(y)$ genau ein Orbit ist.

Es sei von nun an $T = \text{Spec}(k)$. Unter gewissen Voraussetzungen ist dann die Existenz eines groben Modulraums äquivalent zur Existenz eines bestimmten Orbitraums.

Definition 2.9. Eine durch ein Schema S parametrisierte Familie $\tilde{E} \in \mathcal{F}(S)$ hat die *lokal universelle Eigenschaft*, falls es zu jeder anderen Familie $E \in \mathcal{F}(S')$ und jedem Punkt $s \in S'$ eine Umgebung V von s und einen Morphismus $h: V \rightarrow S$ mit $h^*(\tilde{E}) \sim E|_V$ gibt.

Eine Linkswirkung $\rho: G \times S \rightarrow S$ ist *verträglich* mit der lokal universellen Familie, falls für zwei Morphismen $f_1, f_2: T \rightarrow S$ genau dann $f_1^* \tilde{E} \sim f_2^* \tilde{E}$ gilt, wenn es einen Morphismus $g: T \rightarrow G$ mit $\rho(g, f_1) = f_2$ gibt.

Lemma 2.10 (vgl. [36, Prop. 2.9]). *Es sei \tilde{E} eine lokal universelle Familie auf einem Schema S und $\rho: G \times S \rightarrow S$ eine verträgliche Linkswirkung. Dann gibt es für jedes Schema Z eine Bijektion zwischen der Menge der G -invarianten Morphismen $S \rightarrow Z$ und der Menge der natürlichen Transformationen $\Phi_{\mathcal{F}} \rightarrow h_Z$.*

Beweis. Es sei zunächst $\Psi: \Phi_{\mathcal{F}} \rightarrow h_Z$ eine natürliche Transformation. Die lokal universelle Familie \tilde{E} definiert einen Morphismus $f := \Psi(S)(\tilde{E}): S \rightarrow Z$. Aufgrund der Eigenschaften von \tilde{E} ist f auch G -invariant.

Es sei nun $f: S \rightarrow Z$ ein G -invarianter Morphismus und E eine durch das Schema S' parametrisierte Familie. Aufgrund der lokal universellen Eigenschaft gibt es eine Überdeckung durch offene Mengen $V_i \subset S'$, $i \in I$, und Morphismen $h_i: V_i \rightarrow S$ mit $h_i^*(\tilde{E}) \sim E|_{V_i}$. Auf dem Schnitt $V_i \cap V_j$ gilt daher $h_i^*|_{V_j}(\tilde{E}) \sim h_j^*|_{V_i}(\tilde{E})$. Aufgrund der Voraussetzung an die Gruppenwirkung auf S und der G -Invarianz von f verkleben sich die Kompositionen $f \circ h_i$, $i \in I$, zu einem Morphismus $\Psi(S')(E): S' \rightarrow Z$. Dies definiert die gesuchte natürliche Transformation.

Man prüft, dass diese Konstruktionen invers zueinander sind. □

Proposition 2.11 (vgl. [36, Prop. 2.13]). *Es sei S ein Schema mit einer lokal universellen Familie \tilde{E} und einer verträglichen Linkswirkung $\rho: G \times S \rightarrow S$.*

- *Ein Schema M erfüllt Eigenschaft (i) der Definition eines groben Modulraums genau dann, wenn M der kategorielle Quotient von S ist*
- *Wenn M Eigenschaft (i) erfüllt und „ \sim_S “=„ \cong “ gilt, dann ist Eigenschaft (ii) der Definition äquivalent dazu, dass M ein Orbitraum ist.*

Beweis. Es sei M ein Schema, das Eigenschaft (i) aus Definition 2.4 erfüllt, und $\pi: S \rightarrow M$ der durch die Familie \tilde{E} bestimmte Morphismus. Weiter sei $f: S \rightarrow Z$ ein G -invarianter Morphismus. Nach dem vorangegangenen Lemma definiert dies eine natürliche Transformation $\Psi': \Phi_{\mathcal{F}} \rightarrow h_Z$. Nach Voraussetzung gibt es einen eindeutigen Morphismus $\bar{f}: M \rightarrow Z$ mit $h_{\bar{f}} \circ \Psi = \Psi'$. Durch Einsetzen der Familie \tilde{E} findet man insbesondere $\bar{f} \circ \pi = f$. Somit ist M ein kategorieller Quotient.

Es sei nun $\pi: S \rightarrow M$ ein kategorieller Quotient von S . Nach Lemma 2.10 erhalten wir eine natürliche Transformation $\Psi: \Phi_{\mathcal{F}} \rightarrow h_M$. Ist $\Psi': \Phi_{\mathcal{F}} \rightarrow M'$ eine weitere natürliche Transformation, so ist $f := \Psi'(\tilde{E}): S \rightarrow M'$ ein G -invarianter Morphismus. Es gibt daher einen eindeutigen Morphismus $\bar{f}: M \rightarrow M'$ mit $\bar{f} \circ \pi = f$. Es folgt $h_{\bar{f}} \circ \Psi = \Psi'$.

(ii) Die Surjektivität von $\Psi(\text{Spec}(k))$ folgt aus der Surjektivität von π . Die Injektivität ist äquivalent zur Aussage, dass M ein Orbitraum ist. □

2.2. Die Graßmann-Varietät

Ein elementares Beispiel für einen Modulraum ist die Graßmann-Varietät: Es sei V Vektorraum, $r < d := \dim(V)$ und \mathcal{A} die Kategorie der $(d-r)$ -dimensionalen Unterräume von V . Äquivalent dazu können wir r -dimensionale Quotienten $q: V \rightarrow Q$ betrachten. Ein Morphismus $f: q \rightarrow q'$ ist dabei ein Morphismus $f: Q \rightarrow Q'$ mit $f \circ q = q'$. Offensichtlich ist jeder Morphismus ein Isomorphismus. Eine durch ein Schema S parametrisierte Familie von r -dimensionalen Quotienten ist ein Quotient $q_S: \mathcal{O}_S \otimes V \rightarrow Q$, wobei Q ein Vektorbündel von Rang r auf S ist. Dies definiert eine gefaserte Kategorie \mathcal{F} . Als Äquivalenzrelation wählen wir Isomorphie in \mathcal{F} . Diese Daten bestimmen das Modulraumproblem

$$\text{Grass}(V, r): \underline{\text{Sch}}/k \rightarrow \underline{\text{Sets}}.$$

Proposition 2.12 ([39, §1, (2)]). *Der feine Modulraum $\text{Gr}(V, r)$ zu $\text{Grass}(V, r)$ existiert als projektive Varietät.*

2. Modulräume

Wir konstruieren den Modulraum: Es sei v_1, \dots, v_d eine Basis von V , \mathcal{I} die Menge der r -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, d\}$ und $I \in \mathcal{I}$. Auf der affinen Varietät $A_I = \text{Spec } R_I$ mit

$$R_I = k[x_{ij}^I | i \in \{1, \dots, r\}, j \in \{1, \dots, d\} \setminus I]$$

betrachten wir den Quotienten

$$\kappa^I: \mathcal{O}_{A_I} \otimes V \rightarrow \mathcal{O}_{A_I}^{\oplus r}$$

gegeben durch die Matrix κ^I mit Einträgen

$$\kappa_{ij}^I = \begin{cases} x_{ij}^I & j \notin I \\ \delta_{i\nu(I,j)} & j \in I \end{cases}, \quad i \in \{1, \dots, r\}, j \in \{1, \dots, d\}$$

mit $\nu(I, j) := |\{l \in I \mid l \leq j\}|$.

Es sei $J \in \mathcal{I}$ eine weitere Teilmenge, $V_J := \text{span}(v_j, j \in J) \subset V$ und κ_J^I die Einschränkung von κ^I auf $\mathcal{O}_{A_I} \otimes V_J$. Auf der offenen Teilmenge $A_{I,J} := \{\det \kappa_J^I \neq 0\} \subset A_I$ betrachten wir den Morphismus $\psi_{JI}: A_{I,J} \rightarrow A_J$ gegeben durch den Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \psi_{JI}^\# : (R_J) &\rightarrow (R_I)_{\det \kappa_J^I} \\ x_{ij}^J &\mapsto (\kappa_J^{I^{-1}} \cdot \kappa^I)_{ij}. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass ψ_{JI} über $A_{J,I}$ faktorisiert und die ψ_{JI} , $I, J \in \mathcal{I}$, die Kozykelbedingung erfüllen. Die affinen Stücke A_I verkleben somit zu einem $d \cdot (d - r)$ -dimensionalen Präschema $\text{Gr} := \text{Gr}(V, r)$.

Wir verkleben außerdem die Garben $\mathcal{O}_{A_I}^{\oplus r}$ mithilfe des Kozykels $\kappa_J^{I^{-1}}$ zu einem Vektorbündel W_{Gr} und erhalten so den Quotienten

$$0 \rightarrow U_{\text{Gr}} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Gr}} \otimes V \xrightarrow{\kappa_{\text{Gr}}} W_{\text{Gr}} \rightarrow 0.$$

Proposition 2.13 (Plücker-Einbettung). *Die r -te äußere Potenz*

$$\wedge^r \kappa: \mathcal{O}_{\text{Gr}(V,r)} \otimes \bigwedge^r V \rightarrow \bigwedge^r W_{\text{Gr}} =: L$$

definiert eine abgeschlossene Einbettung

$$f: \text{Gr}(V, r) \rightarrow \mathbb{P} \left(\bigwedge^r V \right).$$

Beweis. Für ein r -Tupel $\underline{i} \in \{1, \dots, d\}^r$ setzen wir $v_{\underline{i}} := v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r}$. Für eine r -elementige Teilmenge $I \in \mathcal{I}$ setzen wir $v_I := v_{\underline{i}}$, wobei \underline{i} das Tupel der aufsteigend angeordneten Elemente von I ist. Die Vektoren v_I , $I \in \mathcal{I}$ bilden dann eine Basis von $\bigwedge^r V$.

Wir betrachten nun im homogenen Koordinatenring $k[v_I \mid I \in \mathcal{I}]$ das homogene Ideal I_{Gr} erzeugt von den Ausdrücken

$$\sum_{\lambda=1}^{r+1} (-1)^\lambda v_{(i_1, \dots, i_{r-1}, j_\lambda)} \cdot v_{(j_1, \dots, j_{\lambda-1}, j_{\lambda+1}, \dots, j_{r+1})}$$

für alle Tupel $1 \leq i_1 < \dots < i_{r-1} \leq r$, $1 \leq j_1 < \dots < j_{r+1} \leq r$. Dann induziert f einen Isomorphismus zwischen $\text{Gr}(V, r)$ und dem abgeschlossene Unterschema $V(I_{\text{Gr}})$:

Dass f über $V(I_{\text{Gr}})$ faktorisiert findet man durch geschicktes Entwickeln der Determinanten nach einer Zeile bzw. Spalte.

Es sei $[\kappa] \in \text{Gr}(V, r)$ ein Punkt mit $f([\kappa]) = [\sum_{I \in \mathcal{I}} x_I v^I]$, wobei v^I den zu v_I dualen Basisvektor bezeichnet. Es gibt ein $J \in \mathcal{I}$, so dass $\kappa_J := \kappa|_{V_J}$ ein Isomorphismus ist. Dann ist der Quotient $q_J(x_I, I \in \mathcal{I}): V \rightarrow \mathbb{C}^r$ definiert durch

$$v_i \mapsto \begin{cases} e_{\nu(J,i)}, & i \in J \\ \sum_{j \in J} (-1)^{\nu(J,i) - \nu(J,j)} x_{I \cup \{i\} \setminus \{j\}} \cdot e_{\nu(J,j)}, & i \notin J, \quad i = 1, \dots, d \end{cases}$$

isomorph zu κ . Dies zeigt die Injektivität.

Es sei schließlich $p = [\sum_{I \in \mathcal{I}} x_I v^I]$ ein Punkt in $V(I_{\text{Gr}})$ und $J \in \mathcal{I}$ eine Teilmenge mit $x_J \neq 0$. Wir betrachten den Quotienten $q := q_J(x_I, I \in \mathcal{I})$. Man zeigt dann $\wedge^r q(v_I) = x_I/x_J$ für alle $i \in \mathcal{I}$ per Induktion über die Anzahl der Indizes in $i \in I$ mit $i \notin J$. Details zu dieser Rechnung findet man in [23, Chapter VII]. \square

Insbesondere ist $\text{Gr}(V, r)$ separiert und

$$\mathcal{O}_{\text{Gr}(V, r)}(1) := \bigwedge^r W_{\text{Gr}} = f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\wedge^r V)}(1))$$

ist ein sehr amples Geradenbündel. Anhand der Konstruktion erkennt man die folgende Eigenschaft:

Lemma 2.14. *Es sei S ein Schema und $\kappa_S: \mathcal{O}_S \otimes V \rightarrow W_S$ eine durch S parametrisierte Familie von r -dimensionalen Quotienten von V . Dann gibt es genau einen Morphismus $f: S \rightarrow \text{Gr}(V, r)$ mit der Eigenschaft, dass $f^* \kappa$ isomorph zu κ_S ist.*

Nach Lemma 2.3 ist also $\text{Gr}(V, r)$ ein feiner Modulraum für das Modulproblem der r -dimensionalen Quotienten von V .

Auf $\text{GL}(V)$ gibt es den tautologischen Isomorphismus $\varphi: \mathcal{O}_{\text{GL}(V)} \otimes V \rightarrow \mathcal{O}_{\text{GL}(V)} \otimes V$. Wir betrachten nun auf $\text{GL}(V) \times \text{Gr}(V, r)$ die Familie von r -dimensionalen Quotienten

$$\text{pr}_2^* \kappa \circ \text{pr}_1^*(\text{inv}^* \varphi): \mathcal{O}_{\text{GL}(V) \times \text{Gr}(V, r)} \otimes V \rightarrow \text{pr}_2^* W_{\text{Gr}}.$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft definiert dies einen Morphismus

$$\rho: \text{GL}(V) \times \text{Gr}(V, r) \rightarrow \text{Gr}(V, r).$$

Man überzeugt sich, dass ρ eine Linkswirkung von $\text{GL}(V)$ auf $\text{Gr}(V, r)$ definiert, die für Punkte $g \in \text{GL}(V)$ und $[\kappa] \in \text{Gr}(V, r)$ durch $(g, [\kappa]) \mapsto [\kappa \circ g^{-1}]$ gegeben ist. Die Gruppe $\text{GL}(V)$ wirkt auf natürliche Weise auf $\mathbb{P}(\wedge^r V)$ und die Plücker-Einbettung ist äquivariant bezüglich dieser Wirkungen. Da das Zentrum \mathbb{C}^* trivial wirkt, erhält man eine induzierte Wirkung von $\text{PGL}(V)$.

Der Morphismus

$$\begin{aligned} \bar{\rho}: \text{GL}(V) \times_k \text{Gr}(V, r) \times_k V &\rightarrow \text{Gr}(V, r) \times_k V \\ (g, t, v) &\mapsto (\rho(g, t), g \cdot v) \end{aligned}$$

2. Modulräume

bestimmt eine äquivariante Wirkung von ρ auf $\mathcal{O}_{\text{Gr}(V,r)} \otimes V$. Da $\bar{\rho}$ den Kern $U_{\text{Gr}(V,r)}$ von $\kappa_{\text{Gr}(V,r)}$ erhält, definiert $\bar{\rho}$ auch eine Linearisierung von $W_{\text{Gr}(V,r)}$.

Wir betrachten nun ein erweitertes Modulproblem: Es sei X ein projektives Schema und E ein Vektorbündel von Rang d über X . Wir betrachten die Vektorbündelquotienten $\kappa: E \rightarrow F$ von Rang r . Ein Morphismus zwischen zwei Quotienten κ, κ' ist ein Morphismus $\varphi: F \rightarrow F'$ mit $\varphi \circ \kappa = \kappa'$. Eine durch ein Schema $f: S \rightarrow X$ parametrisierte Familie von Vektorbündelquotienten ist ein Vektorbündelquotient $\kappa_S: f^*E \rightarrow F_S$ von Rang r . Dies erklärt das Modulproblem

$$\text{Grass}(E, r): \underline{\text{Sch}}/X \rightarrow \underline{\text{Sets}}.$$

Proposition 2.15 ([24, Example 2.2.3]). *Der feine Modulraum $\text{Gr}(E, r)$ zu $\text{Grass}(E, r)$ existiert als projektives Schema.*

Beweis. Es gibt offene Mengen $U_i \subset X$, $i = 1, \dots, n$, die X überdecken, und Trivialisierungen $\psi_i: E|_{U_i} \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_{U_i}$. Man erkennt leicht, dass $\text{Gr}(V \otimes \mathcal{O}_{U_i}, r) := \text{Gr}(V, r) \times U_i$ der feine Modulraum für Quotienten von $V \otimes \mathcal{O}_{U_i}$ ist. Aufgrund der Eindeutigkeit des feinen Modulraums verkleben diese Schemata zu einem Schema $\text{Gr}(E, r)$ über X . Mithilfe der lokalen Trivialisierungen überprüft man, dass dies der feine Modulraum ist. Da X projektiv ist, ist $\text{Gr}(E, r)$ als Zariski-lokal triviales Faserbündel über X mit typischer Faser $\text{Gr}(V, r)$ selbst projektiv. \square

2.3. Die Fahnenvarietät

Definition 2.16. Es sei V ein r dimensionaler Vektorraum und $\underline{r} \in \mathbb{N}_{>0}^p$ ein Tupel mit $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_p < r_{p+1} := r$. Eine *Fahne von V vom Typ \underline{r}* ist ein Folge von Unterräumen

$$\{0\} \subset V_1 \subset \dots \subset V_p \subset V_{p+1} := V$$

mit $\dim V_i = r_i$, $i = 1, \dots, p$.

Das Datum einer Fahne entspricht einer Folge von Quotienten

$$V \rightarrow W_1 := V/V_1 \rightarrow \dots \rightarrow W_p := V/V_p \rightarrow 0$$

mit $\dim W_i = r - r_i$, $i = 1, \dots, p$. Zwei Folgen von Quotienten entsprechen derselben Fahne, wenn es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} V & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W_p & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \downarrow & & & & \downarrow & & \parallel \\ V & \longrightarrow & W'_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & W'_p & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

gibt.

Eine durch ein Schema S parametrisierte Familie von Fahnen von V vom Typ \underline{r} ist eine Folge von Quotienten

$$\mathcal{O}_S \otimes V \rightarrow W_{S,1} \rightarrow \dots \rightarrow W_{S,p} \rightarrow 0,$$

wobei $W_{S,i}$ Vektorbündel von Rang $k_i := r - r_i$ über S sind. Diese Daten definieren das Modulproblem der Fahnen von V vom Typ \underline{r} :

$$\mathcal{F}l(V, \underline{r}): \underline{\text{Sch}}/k \rightarrow \underline{\text{Sets}}.$$

Proposition 2.17. *Der feine Modulraum $\text{Fl}(V, \underline{r})$ zum Modulraumproblem der Fahnen von V vom Typ \underline{r} existiert als projektives Schema.*

Beweis. Wir konstruieren die Fahnenvarietät rekursiv. Zunächst setzen wir

$$\text{Fl}_1 := \text{Gr}(V, r - r_1), \quad W_{1,1} := W_{\text{Gr}(V, r - r_1)}.$$

Nach Proposition 2.12 hat Fl_1 mit $\kappa_{\text{Gr}(V, r - r_1)}: V \otimes \mathcal{O}_{\text{Fl}_1} \rightarrow W_{1,1}$ die universelle Eigenschaft für Fahnen vom Typ (r_1) .

Ist nun Fl_k mit einer universellen Fahne $V \otimes \mathcal{O}_{\text{Fl}_k} \rightarrow Q_{k,1} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_{k,k} \rightarrow 0$ vom Typ (r_1, \dots, r_k) konstruiert, so setzen wir

$$\text{Fl}_{k+1} := \text{Gr}(W_{k,k}, r - r_{k+1}).$$

Mit der kanonischen Projektion $\text{pr}_{\text{Fl}_k}: \text{Fl}_{k+1} \rightarrow \text{Fl}_k$ definieren wir

$$W_{k+1,i} := \text{pr}_{\text{Fl}_k}^* W_{k,i}, \quad i = 1, \dots, k, \quad W_{k+1,k+1} := W_{\text{Gr}(Q_{k,k}, r - r_{k+1})}.$$

Es ist klar, dass die Fahne $\mathcal{O}_{\text{Fl}_{k+1}} \otimes V \rightarrow W_{k+1,1} \rightarrow \cdots \rightarrow W_{k+1,k+1} \rightarrow 0$ die universelle Eigenschaft für Fahnen vom Typ (r_1, \dots, r_{k+1}) hat. Nach p Schritten erhalten wir daher das Schema $\text{Fl}(V, \underline{r}) := \text{Fl}_p$ mit der universellen Fahne

$$W_{\text{Fl}(E, \underline{r}), \bullet}: \mathcal{O}_{\text{Fl}(V, \underline{r})} \otimes V \rightarrow W_{\text{Fl}(E, \underline{r}), 1} \rightarrow \cdots \rightarrow W_{\text{Fl}(E, \underline{r}), p} \rightarrow 0.$$

Da in in jedem Konstruktionsschritt Fl_{k+1} ein projektives Bündel über Fl_k ist, ist das schließlich konstruierte Schema $\text{Fl}(V, \underline{r})$ ebenfalls projektiv. \square

Bemerkung 2.18. Wie im Falle der Graßmann-Varietät gibt es eine natürlich $\text{GL}(V)$ -Wirkung auf $\text{Fl}(V, \underline{r})$, so dass die natürlich Einbettung

$$\text{Fl}(V, \underline{r}) \rightarrow \text{Gr}(V, r - r_1) \times \cdots \times \text{Gr}(V, r - r_p)$$

äquivariant ist. Für ein Tupel $\underline{\alpha} \in \mathbb{Z}^p$ definieren wir

$$\mathcal{O}_{\text{Fl}(V, \underline{r})}(\underline{\alpha}) := \mathcal{O}_{\text{Gr}(V, r - r_1)}(\alpha_1) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{O}_{\text{Gr}(V, r - r_p)}(\alpha_p).$$

Definition 2.19. Es sei X ein projektives Schema und E ein Vektorbündel von Rang r auf X . Eine *Fahne von E vom Typ \underline{r}* ist eine Folge von Vektorbündelquotienten

$$Q_\bullet: E \rightarrow W_1 \rightarrow \cdots \rightarrow W_p$$

mit $\text{rk}(W_i) = r - r_i$, $i = 1, \dots, p$. Ein Morphismus ist ein kommutatives Diagramm solcher Sequenzen.

Eine durch ein Schema $f: S \rightarrow X$ über X *parametrisierte Familie von Fahnen von E vom Typ \underline{r}* ist eine Folge von Vektorbündelquotienten

$$f^*E \rightarrow W_{S,1} \rightarrow \cdots \rightarrow W_{S,p} \rightarrow 0$$

mit $\text{rk}(W_{S,i}) = r - r_i$, $i = 1, \dots, p$. Ein Morphismus über f ist ein kommutatives Diagramm solcher Sequenzen.

2. Modulräume

Diese Daten definieren den Modulfunktor

$$\mathcal{F}l(E, r): \underline{\text{Sch}}/X \rightarrow \underline{\text{Sets}}.$$

Proposition 2.20. *Der feine Modulraum $\mathcal{F}l(E, r)$ zu $\mathcal{F}l(E, r)$ existiert als projektives Schema.*

Beweis. Die Konstruktion erfolgt analog zu Konstruktion der relativen Graßmann-Varietät. \square

2.4. Das Quot-Schema

Es seien X eine glatte projektive Kurve vom Geschlecht g und $\mathcal{O}_X(1)$ ein amples Geradenbündel auf X . Weiter sei \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X und $r \in \mathbb{N}_{>0}$, $d \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen. Wir betrachten die Menge aller Quotienten $q: \mathcal{F} \rightarrow Q$ von \mathcal{F} mit $\text{rk } Q = r$ und $\text{deg } Q = d$. Ein Morphismus $q \rightarrow q'$ ist ein Homomorphismus $f: Q \rightarrow Q'$ mit $f \circ q = q'$. Eine durch ein Schema S parametrisierte Familie von Quotienten von \mathcal{F} ist ein Quotient $q: \text{pr}_X^* \mathcal{F} \rightarrow Q$ auf $S \times X$, wobei Q flach über S ist, und für jeden Punkt $s \in S$ die Einschränkung von Q auf $\{s\} \times X$ von Rang r und Grad d ist. Dies definiert einen Modulfunktor

$$\text{Quot}_{\mathcal{F}, X}^{d, r}: \underline{\text{Sch}}/k \rightarrow \underline{\text{Sets}}.$$

Proposition 2.21 (Grothendieck [12]). *Es gibt ein projektives Schema $\text{Quot}_{\mathcal{F}, X}^{d, r}$, das den Funktor $\text{Quot}_{\mathcal{F}, X}^{d, r}$ darstellt.*

Wir erinnern hier an die für die Konstruktion wichtigsten Aussagen über kohärente Garben:

Proposition 2.22 (Serre-Dualität [18, III, Theorem 7.1]). *Für eine lokal freie Garbe E von endlichem Rang auf X gilt*

$$H^1(X, E) = H^0(X, \omega_X \otimes E^\vee)^\vee,$$

wobei ω_X die kanonische Garbe auf X bezeichnet. Insbesondere gilt

$$h^1(F) = h^0(\omega_X \otimes F^\vee).$$

Proposition 2.23 (Riemann–Roch [28, Theorem 2.6.9]). *Eine kohärente Garbe \mathcal{F} auf X erfüllt*

$$\chi(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{F}) - h^1(\mathcal{F}) = \text{deg}(\mathcal{F}) + \text{rk}(\mathcal{F})(1 - g).$$

Lemma 2.24 ([28, Lemma 4.4.4]). *Es sei \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X , $r \in \mathbb{N}_{>0}$ und $d \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es n_0 , so dass für jeden Quotienten $q: \mathcal{F} \rightarrow Q$ mit $\text{rk}(Q) = r$, $\text{deg}(Q) = d$ und alle $n \geq n_0$ gilt:*

- (i) $h^1(Q(n)) = 0$,
- (ii) $h^1(\ker(q)(n)) = 0$,

(iii) $\ker(q)(n)$ ist global erzeugt.

Beweis. (i) Nach Serres Verschwindungssatz ([18, III, Theorem 5.2]) gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $h^1(\mathcal{F}(n)) = 0$ für $n \geq k_0$ und somit wegen $h^2(\ker(q)(n)) = 0$ auch $h^1(Q(n)) = 0$.

(ii) Aus (i) folgt mit dem Satz von Riemann–Roch

$$h^1(\ker(q)(k_0)) \leq h^0(Q(k_0)) = d + r(1 - g) + k_0 r =: k_1.$$

Wir betrachten nun für ein $x_0 \in X$ und beliebiges $k \geq k_0$ die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \ker(q)(k) \rightarrow \ker(q)(k+1) \rightarrow \ker(q)(k+1)|_{x_0} \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

Wegen $h^1(\ker(q)(k+1)|_{x_0}) = 0$ ergibt sich aus der entsprechenden langen exakten Sequenz

$$h^1(\ker(q)(k)) \geq h^1(\ker(q)(k+1))$$

für alle $k \geq k_0$.

Es gilt also entweder $h^1(\ker(q)(k)) = 0$ für $k \geq k_0 + k_1$, oder es gibt $k_0 \leq l_0 < k_0 + k_1$ mit $H^1(\ker(q)(l_0)) \cong H^1(\ker(q)(l_0 + 1))$. Dann ist $H^0(\ker(q)(l_0 + 1)) \rightarrow H^0(\ker(q)(l_0 + 1)|_{x_0})$ surjektiv. Es gibt weiter eine Zahl l_1 , so dass $\mathcal{O}_X(l)$ für $l \geq l_1$ global erzeugt wird. Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{O}_X(l)) \otimes H^0(\ker(q)(l_0 + 1)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(l)|_{x_0} \otimes \ker(q)(l_0 + 1)|_{x_0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(\ker(q)(l_0 + 1 + l)) & \longrightarrow & \ker(q)(l_0 + 1 + l)|_{x_0} \end{array}$$

zeigt dann, dass auch $H^0(\ker(q)(l_0 + 1 + l)) \rightarrow H^0(\ker(q)(l_0 + 1 + l)|_{x_0})$ surjektiv ist. Daher ist $H^1(\ker(q)(l_0 + l)) \rightarrow H^1(\ker(q)(l_0 + l + 1))$ ein Isomorphismus für $l \geq l_1$. Andererseits gibt es ein k mit $h^1(\ker(q)(k')) = 0$ für $k' \geq k$. Daher gilt $h^1(\ker(q)(k)) = 0$ für $k \geq l_0 + l_1$.

In beiden Fällen gilt $h^1(\ker(q)(n)) = 0$ für $n \geq k_2 := k_0 + k_1 + l_1$.

(iii): Die lange exakte Sequenz zu (2.1) zeigt, dass $\ker(q)(n)$ für $n \geq n_0 := k_2 + 1$ global erzeugt wird. \square

Wenn S ein Schema ist und \mathcal{G} eine Garbe auf $S \times X$ ist, schreiben wir $\mathcal{G}(n)$ für $G \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(n)$. Aus dem Basiswechsel- und Kohomologiesatz [18, III, Theorem 12.11] folgt:

Korollar 2.25. *Es sei S eine Schema und $q_S: \text{pr}_X^* \mathcal{F} \rightarrow Q_S$ ein flacher Quotient von Grad d und Rang r über $S \times X$. Für $n \geq n_0$ gilt:*

(i) $\text{pr}_{S^*}(Q_S(n))$ ist lokal frei vom Rang $p(n) := d + r(1 - g + n)$.

(ii) $\kappa_S^n := \text{pr}_{S^*} q_S(n): \mathcal{O}_S \otimes H^0(\mathcal{F}(n)) \rightarrow \text{pr}_{S^*}(Q_S(n))$ ist surjektiv.

(iii) Der Auswertungshomomorphismus

$$\text{ev}: \text{pr}_S^* \text{pr}_{S^*}(\ker(q_S)(n)) \rightarrow \ker(q_S)(n)$$

ist surjektiv.

2. Modulräume

Im Folgenden sei $n \geq n_0$. Wir erinnern daran, dass wir auf $\text{Gr} := \text{Gr}(H^0(\mathcal{F}(n)), p(n))$ eine universelle Sequenz

$$0 \rightarrow U_{\text{Gr}} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Gr}} \otimes H^0(\mathcal{F}(n)) \rightarrow W_{\text{Gr}} \rightarrow 0$$

haben. Wir definieren nun auf $\text{Gr} \times X$ die Garbe Q_{Gr} durch die Sequenz

$$\text{pr}_{\text{Gr}}^* U_{\text{Gr}} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow \text{pr}_X^* \mathcal{F} \xrightarrow{q_{\text{Gr}}} Q_{\text{Gr}} \rightarrow 0.$$

und $\mathcal{H} := \ker(q_{\text{Gr}})$.

Lemma 2.26. *Es gibt eine injektive natürliche Transformation*

$$\Psi: \text{Quot}_{\mathcal{F}, X}^{d, r} \rightarrow \mathcal{G}\text{rass}(H^0(\mathcal{F}(n)), p(n)) = h_{\text{Gr}}.$$

Beweis. Es sei $q_S: \text{pr}_X^* \mathcal{F} \rightarrow Q_S$ eine durch S parametrisierte Familie von Quotienten. Aufgrund von Korollar 2.25, (i) und (ii), ist $\kappa_S^n := \text{pr}_{S^*} q_S(n)$ ein Familie von Vektorraumquotienten der Dimension $p(n)$. Nach Proposition 2.12 definiert κ_S^n einen Morphismus $f: S \rightarrow \text{Gr}$ mit $f^* \kappa_{\text{Gr}} \cong \kappa_S$. Wegen Korollar 2.25, (iii), gilt $(f \times \text{id}_X)^* \mathcal{H}(n) = \ker(q_S)(n)$. Also ist $(f \times \text{id}_X)^* Q_{\text{Gr}}$ als Quotient isomorph zu Q_S . \square

Wir suchen nun das größte Unterschema S von Gr , so dass die Einschränkung von Q_{Gr} auf $S \times X$ flach über S ist, und für jeden Punkt $s \in S$ die Garbe $Q_{\text{Gr}|_{\{s\} \times X}}$ Grad d und Rang r hat. Wir benötigen zunächst einige Fakten zu Basiswechsel und Flachheit.

Lemma 2.27. *Es sei \mathcal{G} eine kohärente Garbe auf $S \times X$ und $f: T \rightarrow S$ ein Morphismus. Dann gibt es eine Zahl $m_0 = m_0(f)$, so dass für $m \geq m_0$ und $i \geq 0$ der Homomorphismus*

$$f^* R^i \text{pr}_{S^*} \mathcal{G}(m) \rightarrow R^i \text{pr}_{T^*}(f \times \text{id}_X)^* \mathcal{G}(m)$$

ein Isomorphismus ist.

Beweis. Siehe [32, Lecture 7, 3°, (i)] oder [39, Lemma 3.1]. \square

Lemma 2.28. *Es sei \mathcal{G} eine kohärente Garbe auf $S \times X$. Dann gibt es endlich viele lokal abgeschlossene Unterschemata $S_i \subset S$, $i \in I$, so dass $\coprod_{i \in I} S_i \rightarrow S$ bijektiv ist und $\mathcal{G}|_{S_i \times X}$ flach über S_i ist.*

Beweis. Es sei Y eine irreduzible Komponente von S versehen mit der reduzierten Struktur. Nach [14, Théorème 6.9.1] gibt es ein offenes Unterschema $S_1 \subset Y$, so dass $\mathcal{G}|_{S_1 \times X}$ flach über S_1 ist. Durch Anwenden dieses Vorgangs auf $S \setminus S_1$ erhält man nach endlich vielen Schritten die gewünschte Zerlegung. \square

Wir wenden dieses Lemma auf die Garbe Q_{Gr} über $\text{Gr} \times X$ an.

Korollar 2.29. *Es gibt eine Zahl $n_1 \geq n_0$, so dass für alle $s \in \text{Gr}$ und alle $n \geq n_1$ gilt*

(i) $h^1(\text{pr}_{\text{Gr}}^{-1}(s), Q_{\text{Gr}}(n)) = 0$

(ii) *Für alle $s \in \text{Gr}$ ist $\text{pr}_{\text{Gr}^*} Q_{\text{Gr}}(n)|_s \rightarrow H^0(\text{pr}_{\text{Gr}}^{-1}(s), Q_{\text{Gr}}(n))$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Serres Verschwindungssatz besagt, dass ein $m_0 \geq n_0$ mit

$$h^1(\mathrm{pr}_{\mathrm{Gr}}^{-1}(s), Q_{\mathrm{Gr}}(m)) = 0$$

für $m \geq m_0$ existiert.

Wir bezeichnen mit $f_i: S_i \rightarrow \mathrm{Gr}$ die Inklusionen der reduzierten Unterschemata aus Lemma 2.28. Nach Lemma 2.27 gibt es für jedes $i \in I$ ein $m_i \geq m_0$, so dass für $m \geq m_i$ der Homomorphismus

$$f_i^* \mathrm{pr}_{\mathrm{Gr}*} Q_{\mathrm{Gr}}(m) \rightarrow \mathrm{pr}_{S_i*}(f_i \times \mathrm{id}_X)^* Q_{\mathrm{Gr}}(m)$$

ein Isomorphismus ist. Nach Teil (i) und dem Basiswechsel- und Kohomologiesatz für flache Garben ist für alle $m \geq m_0$, $i \in I$ und $s \in S_i$ der Homomorphismus

$$\mathrm{pr}_{S_i*}(f_i \times \mathrm{id}_X)^* Q_{\mathrm{Gr}}(m)|_s \rightarrow H^0(\mathrm{pr}_{\mathrm{Gr}}^{-1}(s), Q_{\mathrm{Gr}}(m))$$

ein Isomorphismus. Für $m \geq \max\{m_i \mid i \in I\}$ folgt also die Behauptung. \square

Diese Ergebnis zeigt zusammen mit dem Satz von Riemann–Roch, dass man das Hilbert-Polynom von $Q_{\mathrm{Gr}|\{s\} \times X}$ an den Dimensionen von $(\mathrm{pr}_{\mathrm{Gr}*} Q_{\mathrm{Gr}}(k))|_s$ für $k \geq m$ erkennt.

Lemma 2.30 ([39, Lemma 3.2]). *Ein Garbe \mathcal{G} auf $S \times X$ ist genau dann S -flach, wenn es ein m_0 gibt, so dass für alle $m \geq m_0$ $\mathrm{pr}_{S*}(\mathcal{G}(m))$ lokal frei ist.*

Beweis. Wenn \mathcal{G} flach über S ist, dann folgt aus Serres Verschwindungssatz und dem Basiswechsel- und Kohomologiesatz [18, III, Thm. 12.11], dass $\mathrm{pr}_{S*}(\mathcal{G}(m))$ für genügend großes m lokal frei ist. Es sei nun vorausgesetzt, dass es ein m_0 gibt, so dass $\mathrm{pr}_{S*}(\mathcal{G}(m))$ für $m \geq m_0$ lokal frei ist. Wir betrachten den graduierten $\mathcal{O}_S \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ -Modul $M := \bigoplus_{m \geq m_0} \mathrm{pr}_{S*} \mathcal{G}(m)$. M ist flach als \mathcal{O}_S -Modul. Daher ist auch die Lokalisierung M_x für $x \in \mathcal{O}_X(1)$ flach. Ebenso ist der Untermodul $(M_x)_0$ der Elemente vom Grad Null als direkter Summand flach. Da $H^0(S \times X_x, \mathcal{G}) = (M_x)_0$ gilt und die offenen Mengen $S \times X_x$, $x \in \mathcal{O}(1)$, $S \times X$ überdecken, ist \mathcal{G} flach über S . \square

Lemma 2.31. *Es sei \mathcal{G} eine kohärente Garbe auf einem Schema Z . Dann gibt es für $k \in \mathbb{N}$ ein lokal abgeschlossenes Unterschema $Y \subset Z$ mit den Eigenschaften:*

- (i) *Ein Morphismus $f: T \rightarrow Z$ faktorisiert genau dann durch Y , wenn $f^* \mathcal{G}$ lokal frei vom Rang k ist.*
- (ii) $\mathrm{Supp}(Y) = \{x \in Z \mid \dim(\mathcal{G}|_x) = k\}$.

Beweis. Es sei $x \in Z$ ein Punkt mit $\dim(\mathcal{G}|_x) = r$. Mithilfe von Nakayamas Lemma finden wir eine offene Umgebung U von x und eine Darstellung

$$\mathcal{O}_U^{\oplus s} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_U^{\oplus r} \rightarrow \mathcal{G}|_U \rightarrow 0.$$

Es sei I das Ideal erzeugt von den Komponenten ψ_{ij} , $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$. Dann hat $Y_U := V(I) \subset U$ die gesuchten Eigenschaften für $\mathcal{G}|_U$. Aufgrund der universellen Eigenschaft verkleben die lokal konstruierten Unterschemata zu einem Schema $Y \subset Z$. \square

2. Modulräume

Proposition 2.32 (vgl. [39, Theorem 4.3]). *Es gibt ein lokal abgeschlossenes Unterschema $\text{Quot} \subset \text{Gr}$, so dass ein Morphismus $f: T \rightarrow \text{Gr}$ genau dann durch Quot faktorisiert, wenn $Q_T := (f \times \text{id}_X)^* Q_{\text{Gr}}$ flach über T ist und für jeden Punkt $t \in T$ die Garbe $Q_{T|\{t\} \times X}$ Rang r und Grad d hat.*

Beweis. Wir definieren für $k \geq 0$ die Garbe $W_k := \text{pr}_{\text{Gr}*}(Q_{\text{Gr}}(m+k))$. Es sei Y_k das lokal abgeschlossene Unterschema mit der Eigenschaft, dass ein Morphismus $f: T \rightarrow \text{Gr}$ genau dann durch Y_k faktorisiert, wenn f^*W_k lokal frei von Rang $p(m+k)$ ist (siehe Lemma 2.31, (i)). Wir betrachten für $k \geq 0$ die lokal abgeschlossenen Unterschemata

$$\text{Gr}^{(l)} := \bigcap_{k=0}^l Y_k.$$

Zunächst gilt wegen Korollar 2.29, dass ein Punkt $s \in \text{Gr}$ genau dann in $\text{Gr}^{(2)}$ liegt, wenn $Q_{\text{Gr}|\{s\} \times X}$ Rang r und Grad d hat. Nach Lemma 2.31, (ii), ist für $l \geq 2$ das Schema $\text{Gr}^{(l)}$ ein abgeschlossenes Unterschema von $\text{Gr}^{(2)}$. Da $\text{Gr}^{(2)}$ ein noetherscher Raum ist, gibt es ein l_0 mit

$$\text{Quot} := \text{Gr}^{(l_0)} = \text{Gr}^{(l)}$$

für alle $l \geq l_0$. Also ist Quot ein lokal abgeschlossenes Unterschema mit der Eigenschaft, dass $\text{pr}_{\text{Quot}*} Q_{\text{Gr}}(n)$ für alle $n \geq m$ lokal frei ist. Nach Lemma 2.30 ist $Q_{\text{Quot}} := Q_{\text{Gr}|\text{Quot} \times X}$ flach über Quot .

Wenn $f: T \rightarrow \text{Quot}$ ein Morphismus ist, ist $Q_T := (f \times \text{id}_X)^* Q_{\text{Gr}}$ also flach über T und für jeden Punkt $t \in T$ hat $Q_{T|\{t\} \times X}$ Rang r und Grad d . Wenn umgekehrt $f: T \rightarrow \text{Gr}$ ein Morphismus ist, so dass Q_T flach ist und für jeden Punkt $t \in T$ hat $Q_{T|\{t\} \times X}$ Rang r und Grad d hat, dann dann faktorisiert f nach Korollar 2.25, (i), durch Y_k für alle $k \geq 0$ und somit durch Quot . \square

Dies zeigt, dass $\text{Quot}_{\mathcal{F},x}^{d,r} := \text{Quot}$ den Funktor $\text{Quot}_{\mathcal{F},X}^{d,r}$ darstellt. Um den Beweis von Proposition 2.21 anzuschließen, zeigen wir die Projektivität von Quot .

Proposition 2.33 (siehe [39, Proof of Theorem 5.2]). *Quot ist abgeschlossen in Gr .*

Beweis. Wir wenden das Bewertungskriterium an. Es sei R ein diskreter Bewertungsring, K sein Quotientenkörper und $i: \text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(R)$ der kanonische Morphismus. Weiter sei $q_K: \text{pr}_X^* \mathcal{F} \rightarrow Q_K$ eine Familie von Quotienten von Grad d und Rang r auf $\text{Spec}(K) \times X$. Wir bezeichnen mit Q_R das Bild des Homomorphismus

$$\text{pr}_X^* \mathcal{F} \rightarrow (i \times \text{id}_X)_* \text{pr}_X^* \mathcal{F} \rightarrow (i \times \text{id}_X)_* Q_K$$

auf $\text{Spec}(R) \times X$. Nach [14, Proposition 2.8.1] ist Q_R flach über $\text{Spec}(R)$, es gilt $(i \times \text{id}_X)^* Q_R = Q_K$ und Q_R ist der einzige Quotient von $\text{pr}_X^* \mathcal{F}$ mit diesen Eigenschaften. Somit ist der Morphismus $\text{Quot} \rightarrow \text{Gr}$ eigentlich. \square

Bemerkung 2.34. (i) Aus der Konstruktion geht hervor, dass

$$\mathcal{O}_{\text{Quot}}(1) := \bigwedge_{p(n)} \text{pr}_{\text{Quot}*}(Q \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(n))$$

ein sehr amples Geradenbündel auf Quot ist.

(ii) Man sieht leicht, dass das Unterschema $\text{Quot} \subset \text{Gr}(H^0(\mathcal{F}(n)), p(n))$ invariant unter der $\text{GL}(H^0(\mathcal{F}(n)))$ -Wirkung ist. Die Wirkung steigt zu einer Wirkung von $\text{PGL}(H^0(\mathcal{F}(n)))$ ab.

3. Geometrische Invariantentheorie

Das Ziel der Geometrischen Invariantentheorie (GIT) ist es, den Quotienten eines Schemas bezüglich einer Gruppenwirkung zu bestimmen. Es stellt sich heraus, dass man für die Existenz des Quotienten Bedingungen an die Gruppe stellen muss, und dass die Menge der Bahnen im allgemeinen kein Schema bildet. Die Standardreferenz für GIT ist Mumfords Buch [34], weitere Quellen sind die Bücher von Newstead [36] und Schmitt [47, Chapter 1].

3.1. Gute Quotienten als Modulräume

Es sei X ein Schema über einem Körper k mit einer Linkswirkung ρ einer algebraischen Gruppe G .

Definition 3.1. Ein *guter Quotient* ist ein affiner G -invarianter Morphismus $\pi: X \rightarrow Y$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für jede offene Teilmenge $U \subset Y$ ist $\pi^\#: \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G$ ein Isomorphismus.
- (ii) Ist $Z \subset X$ abgeschlossen und G -invariant, so ist $\pi(Z)$ abgeschlossen.
- (iii) Sind Z_1 und Z_2 disjunkte abgeschlossene G -invariante Teilmengen von X , so gilt $\pi(Z_1) \cap \pi(Z_2) = \emptyset$.

Ein *universeller guter Quotient* ist ein Morphismus $\pi: X \rightarrow Y$, so dass für jeden Morphismus $T \rightarrow Y$ der induzierte Morphismus $\pi_T: X \times_Y T \rightarrow T$ ein guter Quotient ist.

Lemma 3.2 ([34, Ch. 0, §3, (6)]). *Ein (universeller) guter Quotient $\pi: X \rightarrow Y$ ist ein surjektiver (universeller) kategorieller Quotient.*

Beweis. Zunächst ist der Morphismus π nach Eigenschaft (i) dominant und wegen (ii) dann surjektiv.

Es sei $f: X \rightarrow T$ ein G -invarianter Morphismus. Weiter sei $y \in Y$ ein Punkt und $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(y)$ mit Bildern t_1, t_2 in T . Da f G -invariant ist, sind $Z_1 = f^{-1}(t_1)$ und $Z_2 = f^{-1}(t_2)$ G -invariante abgeschlossene Mengen. Wegen $y \in \pi(Z_1) \cap \pi(Z_2)$ folgt aus Eigenschaft (iii), dass $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$ und somit $t_1 = t_2$ gilt. Daher kann man eine Abbildung $\bar{f}: Y \rightarrow Z$ mit $\bar{f} \circ \pi = f$ definieren. Aus der Surjektivität von π folgt, dass \bar{f} dadurch eindeutig bestimmt ist.

Die Abbildung \bar{f} ist stetig: Ist $U \subset T$ eine offene Teilmenge, so ist $Z := X \setminus f^{-1}(U)$ eine abgeschlossene G -invariante Teilmenge von X . Nach Eigenschaft (ii) ist auch $\pi(Z)$ abgeschlossen und somit $Y \setminus \pi(Z) = \bar{f}^{-1}(U)$ offen.

3. Geometrische Invariantentheorie

Es seien $U_i \subset T$, $i = 1, \dots, n$, offene affine Mengen, die T überdecken. Wir setzen $U'_i := f^{-1}(U_i)$. Aufgrund der G -Invarianz von f faktorisiert $f^\#(U_i): \mathcal{O}_T(U_i) \rightarrow \mathcal{O}_X(U_i)$ über $\mathcal{O}_X(U'_i)^G$. Nach Eigenschaft (i) ist

$$\pi^\#(U'_i): \mathcal{O}_Y(\bar{f}^{-1}(U_i)) \rightarrow \mathcal{O}_X(U'_i)^G$$

ein Isomorphismus. Die Komposition $\mathcal{O}_T(U_i) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\pi(U'_i))$ definiert einen Morphismus $\bar{f}_i: \bar{f}^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ mit $f_i \circ \pi|_{U'_i} = f|_{U'_i}$. Die Morphismen \bar{f}_i , $i = 1 \dots, n$, stimmen auf den Schnitten $U_i \cap U_j$ überein und verkleben somit zu einem Morphismus \bar{f} mit $\bar{f} \circ \pi = f$. \square

Definition 3.3. Ein guter Quotient heißt *geometrischer Quotient*, falls er auch ein Orbitraum ist.

Lemma 3.4. *Es sei $\pi: X \rightarrow Y$ ein guter Quotient. Dann enthält der Abschluss des Orbits eines Punkts $x \in X$ genau einen abgeschlossenen Orbit.*

Beweis. Nach Korollar 1.16 existiert ein abgeschlossener Orbit in $\overline{G \cdot x}$. Es seien nun $G \cdot x_1$ und $G \cdot x_2$ zwei abgeschlossene Orbits in $\overline{G \cdot x}$. Da $\pi^{-1}(\pi(x))$ abgeschlossen ist und $G \cdot x$ enthält, gilt auch $\pi(x_1) = \pi(x) = \pi(x_2)$. Aus Definition 3.1, (ii), folgt dann $G \cdot x_1 \cap G \cdot x_2 \neq \emptyset$ und somit $G \cdot x_1 = G \cdot x_2$. \square

Wir kehren nun zurück zum Modulproblem aus Abschnitt 2.1.

Definition 3.5. Es sei S ein Schema mit lokal universeller Familie \tilde{E} und verträglicher Gruppenwirkung $\rho: G \times S \rightarrow S$. Wir nennen zwei Objekte E, E' in $\mathcal{A} = \mathcal{F}(\text{Spec}(k))$ S -äquivalent, falls es Punkte $s, s' \in S$ mit $\tilde{E}_s \cong E$, $\tilde{E}_{s'} \cong E'$ und $\overline{G \cdot s'} \cap \overline{G \cdot s} \neq \emptyset$ gibt. In diesem Fall schreiben wir $E \sim_S E'$.

Bemerkung 3.6. Wenn der geometrische Quotient von S existiert, ist jeder Orbit abgeschlossen. Die S -Äquivalenz stimmt dann mit der Isomorphie überein.

Proposition 3.7. *Unter den Voraussetzungen von Definition 3.5 gilt: Wenn $\pi: S \rightarrow M$ ein guter Quotient ist, dann ist M der grobe Modulraum zu $\Phi_{\mathcal{F}}$.*

Beweis. Nach Lemma 3.2 und Proposition 2.11 erfüllt M Eigenschaft (i) der Definition eines groben Modulraums. Aus der Surjektivität von π folgt auch die Surjektivität von $\Phi_{\mathcal{F}}(\text{Spec}(k)) \rightarrow M(\text{Spec}(k))$. Es seien nun E und E' zwei Objekte, die denselben Punkt in M definieren. Wenn $s, s' \in S$ Punkte mit $\tilde{E}_s \cong E$ und $\tilde{E}_{s'} \cong E'$ sind, folgt aus Eigenschaft (ii) von Definition 3.1 $\overline{G \cdot s} \cap \overline{G \cdot s'} \neq \emptyset$, so dass E und E' S -äquivalent sind. \square

3.2. Affine Quotienten

Falls $X = \text{Spec}(R)$ affin ist und ein affiner kategorieller Quotient $Y = \text{Spec}(R')$ existiert, so folgt aus der universellen Eigenschaft mit $T := \mathbb{A}^1$ sofort $R' = R^G$. Insbesondere muss R^G eine endlich erzeugte Algebra sein.

Proposition 3.8 (Hilbert [21]). *Es sei G eine reductive algebraische Gruppe und $X = \text{Spec}(R)$ eine affine Varietät mit einer Linkswirkung. Dann ist R^G endlich erzeugt.*

Die Aussage gilt in jeder Charakteristik. Wir beweisen sie hier für den Fall $\text{char}(k) = 0$, so dass G nach Bemerkung 1.29 auch linear reduktiv ist.

Beweis. i) Wir wählen endlich viele Erzeuger von R . Da G linear reduktiv ist, gibt es einen endlichdimensionalen invarianten Unterraum $V \subset R$, der diese Erzeuger enthält. Es sei x_1, \dots, x_n eine Basis von V . Dann ist

$$k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow R$$

eine äquivariante Surjektion. Aufgrund der Exaktheit von $(-)^G$ (siehe Proposition 1.37) erhalten wir die Surjektion

$$k[x_1, \dots, x_n]^G \rightarrow R^G.$$

Es genügt also zu zeigen, dass $k[x_1, \dots, x_n]^G$ endlich erzeugt ist.

ii) Wir nehmen nun $R = k[x_1, \dots, x_n]$ an. Es sei $I \subset R^G$ das von den nicht-konstanten homogenen Elementen erzeugte Ideal. Da R Noethersch ist, gibt es endlich viele homogene Erzeuger $f_1, \dots, f_r \in I$ des Ideals IR . Hierbei darf man $f_i \in R^G$ für $i = 1, \dots, r$ annehmen. Wir beweisen per Induktion über den Grad d

$$k[f_1, \dots, f_r] = R^G.$$

Für $d = 0$ ist nichts zu zeigen. Es sei nun $f \in R^G$ ein Element von Grad $d > 0$. Dann gibt es Elemente $h_i \in R$ mit $\deg(h_i) < d$, $i = 1, \dots, r$, und

$$f = \sum_{i=1}^r h_i f_i.$$

Da der Reynolds-Operator nach Korollar 1.38 ein Homomorphismus von R^G -Moduln ist, erhalten wir

$$f = r(R)(f) = \sum_{i=1}^r r(R)(h_i) f_i.$$

Wegen der Natürlichkeit des Reynolds-Operators und der Annahme $\deg(h_i) < d$ gilt auch $\deg(r(R)(h_i)) < d$. Nach Induktionsvoraussetzung liegt also $r(R)(h_i)$ in $k[f_1, \dots, f_r]$ für $i = 1, \dots, r$. \square

Für eine reductive Gruppe G ist $Y := \text{Spec}(R^G)$ also ein affines Schema. Man stellt fest, dass Y nicht nur ein kategorieller Quotient ist, sondern zusätzliche Eigenschaften besitzt.

Die Eigenschaft, ein guter Quotient zu sein, ist lokal auf dem Quotienten:

Proposition 3.9 ([36, Prop. 3.10]). *Es sei $Y = \cup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Ein G -invarianter Morphismus $\pi: X \rightarrow Y$ ist genau dann ein guter Quotient, wenn für alle $i \in I$ der Morphismus $\pi|_{\pi^{-1}(U_i)}: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ ein guter Quotient ist.*

Beweis. Eigenschaften (i) und (ii) sind nach Definition lokal auf Y . Zu untersuchen ist also Eigenschaft (iii).

„ \Leftarrow “: Sind Z_1 und Z_2 disjunkt, abgeschlossen und G -invariant, so haben auch $Z_i \cap \pi^{-1}(U)$, $i = 1, 2$ diese Eigenschaften. Sind ihre Bilder $\pi(Z_i) \cap U$ disjunkt für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$, so gilt auch $\pi(Z_1) \cap \pi(Z_2) = \emptyset$.

3. Geometrische Invariantentheorie

„ \Rightarrow “: Seien nun $U \subset Y$ eine offene Teilmenge und V_1, V_2 zwei disjunkte abgeschlossene G -invariante Teilmengen von $\pi^{-1}(U)$. Wir nehmen an, es gibt einen Punkt $y \in \pi(V_1) \cap \pi(V_2)$. Dann ist $Z_i := V_i \cap \pi^{-1}(y)$ auch abgeschlossen in X , $i = 1, 2$. Es folgt $y \in \pi(Z_1) \cap \pi(Z_2)$, im Widerspruch zu Eigenschaft (iii). \square

Lemma 3.10 ([34, Ch 0, §3, (7) und Thm 1.1, proof, (1)]). *Es sei $\rho^\# : A \rightarrow A \otimes R$ eine Kowirkung und S eine R^G -Algebra. Wenn S flach ist oder $G = \text{Spec}(A)$ linear reduktiv ist, dann gilt*

$$(R \otimes_{R^G} S)^G = S.$$

Beweis. Der Ring der Invarianten ist definiert durch die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow R^G \rightarrow R \xrightarrow{\psi} A \otimes R$$

mit $\psi := \rho^\# - \text{pr}_2^\#$. Wenn S flach ist, erhalten wir durch Tensorieren die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow S \rightarrow S \otimes_{R^G} R \rightarrow A \otimes R \otimes_{R^G} S.$$

Es sei nun G linear reduktiv. Nach Proposition 1.37 existiert ein Reynolds-Operator r . Also ist $R' := \ker(r(R))$ ein Komplement zu R^G in R , und nach Korollar 1.38 ist R als R^G -Modul isomorph zu $R^G \oplus R'$. Folglich gilt $S \otimes_{R^G} R = S \oplus (S \otimes_{R^G} R')$. Wenn nun $x = \sum_{i=1}^n s_i \otimes r_i \in S \otimes_{R^G} R$ ein G -invariantes Element ist, dann berechnet man mithilfe der Natürlichkeit des Reynolds-Operators

$$\begin{aligned} x &= r(S \otimes_{R^G} R)(x) = r(S \otimes_{R^G} R) \sum_{i=1}^n (s_i \otimes r_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (s_i \otimes r(R)(r_i)) \in (S \otimes_{R^G} R^G) \cong S. \end{aligned}$$

Somit gilt $S = (S \otimes_{R^G} R)^G$. \square

Proposition 3.11 ([34, Theorem 1.1]). *Es sei $X = \text{Spec}(R)$ ein affines Schema und $\rho : G \times X \rightarrow X$ eine Linkswirkung einer reductiven Gruppe G . Dann ist $\pi : X \rightarrow X//G := \text{Spec}(R^G)$ ein guter Quotient. Falls G linear reduktiv ist, ist π ein universeller guter Quotient.*

Beweis. Nach Proposition 3.8 ist $X//G$ ein affines Schema. Der durch $R^G \hookrightarrow R$ definierte Morphismus $\pi : X \rightarrow X//G$ ist offensichtlich affin und G -invariant.

Zu Eigenschaft (i): Es genügt, diese für offene Mengen der Form $X//G_f$ mit $f \in R^G$ nachzuweisen. Weil R_f^G eine flache R^G -Algebra ist, zeigt Lemma 3.10 $(R \otimes_{R^G} R_f^G)^G = R_f^G$.

Wir zeigen zunächst (iii): Es seien Z_1 und Z_2 disjunkte, abgeschlossene G -invariante Teilmengen. Nach Lemma 1.39 gibt es $f \in R^G$ mit $f|_{Z_1} = 0$ und $f|_{Z_2} = 1$. Dies zeigt $\overline{\pi(Z_1)} \cap \overline{\pi(Z_2)} = \emptyset$.

Nun zu (ii): Es sei Z abgeschlossen und G -invariant. Wir nehmen an, dass $y \in \overline{\pi(Z)} \setminus \pi(Z)$ existiert. Dann sind $\pi^{-1}(y)$ und Z disjunkt, abgeschlossen und G -invariant. Nach dem eben Gezeigten gilt also $y \in \overline{\pi(\pi^{-1}(y))} \cap \overline{\pi(Z)} = \emptyset$.

Es sei nun G linear reduktiv, S eine k -Algebra und $\varphi : R^G \rightarrow S$ ein Homomorphismus. Lemma 3.10 zeigt $S = (S \otimes_{R^G} R)^G$. Zusammen mit Proposition 3.9 folgt daraus die Universalität des guten Quotienten. \square

3.3. Projektive Quotienten

Wir betrachten nun den Fall, dass X projektiv ist. Im allgemeinen liefert der Versuch, alle Quotienten von G -invarianten affinen Teilmengen zu verkleben, kein separiertes Schema. Man braucht daher ein technisches Hilfsmittel, um geeignete affine G -invarianten Mengen zu bestimmen.

Definition 3.12. Eine *Linearisierung* von ρ in einem Geradenbündel L auf X ist ein Isomorphismus $\varphi: \text{pr}_2^* L \rightarrow \rho^* L$ über $G \times X$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{pr}_3^* L & \xrightarrow{\cong} & (\text{pr}_2 \circ (\mu \times \text{id}_X))^* L \\ \text{pr}_{23}^* \varphi \downarrow & & \downarrow (\mu \times \text{id}_X)^* \varphi \\ (\rho \circ \text{pr}_{23})^* L & \xrightarrow{(\text{id}_G \times \rho_X)^* \varphi} & (\rho \circ (\text{id}_G \times \rho))^* L \end{array}$$

von Geradenbündeln auf $G \times G \times X$ kommutiert.

Aus Proposition A.62 ergibt sich, dass wir eine Linearisierung von ρ in L auch beschreiben können durch eine Linkswirkung $\bar{\rho}: G \times L \rightarrow L$ mit $p \circ \bar{\rho} = \rho \circ (\text{id}_G \times p)$, so dass für alle $g \in G$ die Abbildung $L_x \rightarrow L_{\rho(g,x)}$ linear ist.

Bemerkung 3.13. (i) Aus zwei Linearisierungen $\bar{\rho}_i$ in L_i , $i = 1, 2$, erhält man eine Linearisierung $\bar{\rho}_1 \otimes \bar{\rho}_2$ in $L_1 \otimes L_2$.

(ii) Es sei $\chi: G \rightarrow k^*$ ein Charakter und $\bar{\rho}$ eine Linearisierung. Der Morphismus

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_\chi: G \times L &\rightarrow L \\ (g, z) &\mapsto \chi(g) \cdot \bar{\rho}(g, z) \end{aligned}$$

definiert die mit χ *getwistete* Linearisierung.

(iii) Es seien X und Y Varietäten mit Linkswirkungen ρ_X und ρ_Y . Auf Y gebe es ein Geradenbündel L mit einer Linearisierung $\bar{\rho}_Y$. Ist $f: X \rightarrow Y$ ein G -äquivarianter Morphismus, so ist der Rückzug $f^* \bar{\rho}_Y: G \times f^* L \rightarrow f^* L$ eine Linearisierung von ρ_X in $f^* L$.

(iv) Es sei V ein Vektorraum und $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine Darstellung von G . Dann gibt es eine natürliche Linearisierung der induzierten Wirkung auf $\mathbb{P}(V)$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$, so dass der Isomorphismus $V \cong H^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$ G -äquivariant ist.

(v) Nun sei X eine projektive Varietät mit einer Linkswirkung $\rho: G \times X \rightarrow X$ und einer Linearisierung in einem amplen Geradenbündel L . Dann gibt es $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und eine G -äquivariante Einbettung $X \rightarrow \mathbb{P}(V)$ mit $V := H^0(X, L^{\otimes n})$. Die Linearisierung $\bar{\rho}^{\otimes n}$ stimmt mit dem Rückzug der natürlichen Linearisierung in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ überein (vgl. [34, Prop. 1.7]).

Definition 3.14. Es sei X eine Varietät mit einer Linkswirkung $\rho: G \times X \rightarrow X$, einem Geradenbündel L und einer Linearisierung $\bar{\rho}$ von ρ in L . Ein Punkt $x \in X$ heißt

- *semistabil*, wenn es ein $r \in \mathbb{N}_{>0}$ und einen G -invarianten Schnitt s in $L^{\otimes r}$ mit $s(x) \neq 0$ gibt, so dass $X_s = X \setminus V(s)$ affin ist.
- *polystabil*, falls x semistabil ist und der Orbit von x abgeschlossen in X_s ist.

3. Geometrische Invariantentheorie

- *stabil*, wenn es $r \in \mathbb{N}_{>0}$ und ein G -invariantes $s \in H^0(X, L^{\otimes r})$ gibt, so dass X_s affin ist, $x \in X_s$, $\dim(G \cdot x) = \dim(G)$ und jeder Orbit in X_s abgeschlossen ist.

Wir bezeichnen mit X^{ss} und X^{s} die Menge der semistabilen bzw. stabilen Punkt von X .

Lemma 3.15 ([36, Lemma 3.13]). *Die Mengen X^{ss} und X^{s} sind offen in X .*

Beweis. Für X^{ss} ist das offensichtlich. Für X^{s} bemerken wir, dass $\dim(G \cdot x)$ eine unterhalbstetige Funktion ist, d.h. die Menge $\{x \in X \mid \dim(G \cdot x) \geq n\}$ ist offen für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies folgt aus der Tatsache, dass $\dim(G \cdot x) = \dim(G) - \dim(G_x)$ gilt und $\dim(G_x)$ eine oberhalbstetige Funktion ist. \square

Proposition 3.16 ([34, Thm 1.10]). *Es sei G eine reductive algebraische Gruppe, X eine Varietät mit einer Linkswirkung ρ , einem Geradenbündel L und einer Linearisierung $\bar{\rho}$ in L .*

- Es gibt einen guten Quotienten $\pi: X^{\text{ss}} \rightarrow X//G$ und $X//G$ ist quasi-projektiv.*
- Falls X projektiv und L ampel ist, so ist auch $X//G$ projektiv.*
- Es gibt eine offene Teilmenge $U^{\text{s}} \subset X//G$ mit $\pi^{-1}(U^{\text{s}}) = X^{\text{s}}$, so dass $\pi|_{X^{\text{s}}}: X^{\text{s}} \rightarrow U^{\text{s}}$ ein geometrischer Quotient ist.*
- Falls G linear reduktiv ist, ist π ein universeller guter Quotient.*

Beweis. (i) Es seien s_i G -invariante globale Schnitte von $L^{\otimes r_i}$, $1 \leq i \leq n$, so dass $U_i = X_{s_i}$ affin ist und $\cup_i U_i = X^{\text{ss}}$ gilt. Indem man geeignete Potenzen der Schnitte betrachtet, darf man $r_i = r$, $1 \leq i \leq n$, annehmen. Nach Proposition 3.11 existiert der affine gute Quotient $\pi_i: U_i \rightarrow Y_i$. Die Schnitte s_i definieren Trivialisierungen von $L^{\otimes r}$ über U_i mit Übergangsfunktionen $f_{ij} = s_j/s_i$. Diese Funktionen sind G -invariant und definieren daher Funktionen auf Y_i . Wegen Proposition 3.9 sind $(Y_i)_{f_{ij}}$ und $(Y_j)_{f_{ji}}$ gute Quotienten von $U_i \cap U_j$. Es gibt dann eindeutige Isomorphismen $\varphi_{ij}: (Y_j)_{f_{ji}} \rightarrow (Y_i)_{f_{ij}}$, die mit den Morphismen π_i verträglich sind und die Kozykelbedingung erfüllen. Man erhält daher ein Präschema Y und einen Morphismus $\pi: X \rightarrow Y$.

Weiter erfüllen die f_{ij} die Kozykelbedingung und definieren ein Geradenbündel M auf Y mit $\pi^*(M) \cong L^{\otimes r}$. Für festes j liefern die Funktionen f_{ij} auf Y_i , $i = 1, \dots, n$ einen globalen Schnitt g_j in M . Da $Y_{g_j} = Y_j$ affin ist und die Y_j ganz Y überdecken, ist M nach Grauert's Kriterium (siehe [36, Lemma 3.20]) ein amples Geradenbündel und liefert eine Einbettung in einen projektiven Raum. Insbesondere ist Y separiert. Aus Proposition 3.9 folgt wiederum, dass $X^{\text{ss}}//G := Y$ der gute Quotient ist.

(ii) Ist X projektiv und L ampel, so erhält man nach Bemerkung 3.13 eine Darstellung $\sigma: G \rightarrow \text{GL}(V)$ und eine G -äquivariante abgeschlossene Einbettung $X \rightarrow \mathbb{P}(V)$. Es sei R der Koordinatenring von X in $\mathbb{P}(V)$. Die Wirkung von G auf R erhält die Graduierung. Man erhält daher eine Inklusion graduierter Ringe $R^G \rightarrow R$, die einen rationalen Morphismus $\pi: X \dashrightarrow \text{Proj}(R^G) =: Y$ definiert. Man überzeugt sich, dass der Morphismus genau auf X^{ss} definiert ist. Für ein G -invariantes homogenes Polynom f stimmt die Einschränkung $\pi|_{X_f}: X_f \rightarrow Y_f$ gerade mit der Konstruktion der affinen Quotienten aus (i) überein. Man sieht daher, dass $X//G = Y$ projektiv ist.

(iii) Es seien s_i , $1 \leq i \leq n$ G -invariante Schnitte von $L^{\otimes r}$, so dass $U_i = X_{s_i}$ affin ist, die Wirkung von G abgeschlossen in U_i ist und die U_i X^s überdecken. Es sei Y' die Vereinigung der entsprechenden Y_i in Y aus (i). Dann ist $\pi: \pi^{-1}(Y') \rightarrow Y'$ ein geometrischer Quotient und X^s ist enthalten in $\pi^{-1}(Y')$. Mit $Y^s := \pi(X^s)$ hat man daher $X^s = \pi^{-1}(Y^s)$ und $Y' \setminus Y^s = \pi(\pi^{-1}(Y') \setminus X^s)$ ist abgeschlossen. Y^s ist somit offen in Y und die Einschränkung $\pi: X^s \rightarrow Y^s$ ist ein geometrischer Quotient.

(iv) Dies folgt direkt aus Proposition 3.11. \square

Proposition 3.17 ([43, 5.1. Lemma],[9, Lemma 4.6]). *Es seien G eine reduktive Gruppe, X, X' Varietäten mit einer G -Wirkung, $f: X \rightarrow X'$ ein G -äquivarianter Morphismus und $\pi': X' \rightarrow Y'$ der gute Quotient.*

- (i) *Wenn f affin ist, dann existiert auch der gute Quotient $\pi: X \rightarrow X//G$.*
- (ii) *Wenn f zusätzlich injektiv und π' ein geometrischer Quotient ist, dann ist auch π ein geometrischer Quotient.*
- (iii) *Wenn f eigentlich ist und π' ein universeller guter Quotient ist, dann ist auch der induzierte Morphismus $X//G \rightarrow X'//G$ eigentlich.*

Beweis. (i) Es sei $\cup_{i \in I} Y'_i = X'//G$ eine affine offene Überdeckung von $X'//G$. Nach Voraussetzung ist $U_i := f^{-1}(\pi'^{-1}(Y'_i))$ affin, so dass der gute Quotient $\pi_i: U_i \rightarrow Y_i = U_i//G$ existiert. Aufgrund der universellen Eigenschaft gibt es Morphismen $\bar{f}_i: Y_i \rightarrow X'//G$ mit $\bar{f}_i \circ \pi_i = \pi' \circ f|_{U_i}$. Dann sind $Y_{ij} := \bar{f}_i^{-1}(Y'_i \cap Y'_j)$ und $Y_{ji} := \bar{f}_j^{-1}(Y'_i \cap Y'_j)$ wegen der Lokalität (Proposition 3.9) gute Quotienten von $f^{-1}(\pi'^{-1}(Y'_i \cap Y'_j)) = U_i \cap U_j$. Aufgrund von Lemma 3.2 und der Eindeutigkeit kategorieller Quotienten gibt es eindeutige Isomorphismen $\varphi_{ij}: Y_{ji} \rightarrow Y_{ij}$, die mit den Morphismen π_i verträglich sind und die Kozykelbedingung erfüllen. Die Morphismen $\pi_i: U_i \rightarrow Y_i$ verkleben somit zu einem Morphismus $\pi: X \rightarrow Y$. Wiederum aufgrund der Lokalität ist $\pi: X \rightarrow Y$ ein guter Quotient.

Da $\bar{f}: Y \rightarrow Y'$ als affiner Morphismus separiert ist und Y' separiert ist, ist auch Y separiert.

$$\begin{array}{ccccc}
 U_i & \longrightarrow & \pi'^{-1}(Y'_i) & & \\
 \pi_i \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & X & \xrightarrow{f} & X' \\
 & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\
 Y_i & \longrightarrow & Y'_i & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \bar{f}_i & \searrow & \\
 & & Y & \xrightarrow{\bar{f}} & X'//G
 \end{array}$$

(ii) Es seien $x_1, x_2 \in X$ abgeschlossene Punkte mit $\pi(x_1) = \pi(x_2) =: y$. Da $\pi': X' \rightarrow X'//G$ ein geometrischer Quotient ist, liegen $f(x_1), f(x_2) \in \pi'^{-1}(\bar{f}(y))$ im selben Orbit. Es gibt also $g \in G$ mit $\rho'(g, f(x_1)) = f(x_2)$. Da f G -invariant und injektiv ist, folgt $\rho(g, x_1) = x_2$.

(iii) Es sei $T \rightarrow Y'$ ein Morphismus und $Z \subset Y \times_{Y'} T$ eine abgeschlossenes Unterschema. Da $\pi_T: X \times_{Y'} T \rightarrow Y \times_{Y'} T$ G -invariant ist, ist $\pi_T^{-1}(Z)$ G -invariant und abgeschlossen.

3. Geometrische Invariantentheorie

Da f eigentlich und G -äquivariant ist, ist auch das Bild $f_T(\pi_T^{-1}(Z))$ G -invariant und abgeschlossen in $X' \times_{Y'} T$. Schließlich ist $\pi'_T: X' \times_{Y'} T \rightarrow T$ ein guter Quotient, so dass nach Definition 3.1, (ii), auch $(\pi'_T \circ f_T)(\pi_T^{-1}(Z)) = \bar{f}_T(Z)$ abgeschlossen in T ist. \square

3.4. Das Hilbert–Mumford-Kriterium

Wir arbeiten ab hier über dem Körper der komplexen Zahlen $k = \mathbb{C}$. Es sei X eine projektive Varietät, G eine affine reductive algebraische Gruppe, ρ eine Linkswirkung von G auf X und $\bar{\rho}$ eine Linearisierung von ρ in einem amplen Geradenbündel L .

Lemma 3.18 ([34, Amplification 1.11]). *Wenn $x \in X$ polystabil ist, dann gibt es ein n und einen invarianten Schnitt $f \in H^0(X, L^{\otimes n})$ mit $f(x) \neq 0$, so dass X_f affin ist und $\dim(G \cdot y) \geq \dim(G \cdot x)$ für alle $y \in X_f$.*

Beweis. Nach Definition 3.14 gibt es einen G -invarianten Schnitt $s \in H^0(X, L^{\otimes r})$ mit $x \in X_s$, X_s affin und $G \cdot X$ abgeschlossen in X_s . Da die Menge

$$Z := \{y \in X_s \mid \dim(G \cdot y) < \dim(G \cdot x)\} \subset X_s.$$

ebenfalls abgeschlossen ist und $G \cdot x$ und Z disjunkte invariante Mengen sind, gibt es nach Lemma 1.39 eine invariante Funktion h mit $h(x) = 1$ und $h|_Z = 0$. Für großes n lässt sich $h \cdot s^n$ zu einem Schnitt in $f \in H^0(X, L^{\otimes nr})$ fortsetzen, der die geforderten Eigenschaften erfüllt. \square

Aus dem vorangegangenen Lemma und $\dim(G \cdot x) = \dim(G) - \dim(G_x)$ folgt:

Korollar 3.19. *Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann stabil, wenn er polystabil ist, und der Stabilisator G_x endlich ist.*

Korollar 3.20. *Es sei n ein Zahl, so dass $L^{\otimes n}$ sehr ampel ist, und $i: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$ mit $V := H^0(X, L^{\otimes n})$ die dadurch definierte äquivariante abgeschlossene Einbettung. Dann ist ein Punkt $x \in X$ genau dann (semi)stabil, wenn $i(x)$ (semi)stabil in $\mathbb{P}(V)$ bezüglich der natürlichen Linearisierung in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ ist.*

Lemma 3.21 ([34, Prop. 2.2]). *Es sei W ein Vektorraum, $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ eine Darstellung einer algebraischen Gruppe und $x \in \mathbb{P}(W)$ ein Punkt dargestellt durch $\varphi \in W^\vee \setminus \{0\}$.*

(i) *x ist genau dann semistabil, wenn $0 \notin \overline{G \cdot \varphi}$ gilt.*

(ii) *x ist genau dann polystabil, wenn $G \cdot \varphi$ abgeschlossen in W^\vee ist.*

Beweis. (i) „ \Rightarrow “: Wenn x semistabil ist, gibt es ein invariantes nicht-konstantes homogenes Polynom $s \in H^0(\mathbb{P}(W), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(r)) = \mathrm{Sym}^r(W)$ mit $c := s(\varphi) \neq 0$. Dann ist $V(s - s(\varphi))$ eine abgeschlossene Menge, die φ enthält aber nicht den Ursprung.

„ \Leftarrow “: Wenn $0 \notin \overline{G \cdot \varphi}$ gilt, sind $\{0\}$ und $\overline{G \cdot \varphi}$ disjunkte abgeschlossene invariante Mengen. Es gibt daher ein G -invariante Funktion f mit $f(0) = 0$ und $f|_{\overline{G \cdot \varphi}} = 1$. Ein nicht-trivialer homogener Teil $s := f_r$ dieser Funktion, liefert den gesuchten Schnitt in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(r)$.

(ii) „ \Rightarrow “: Nach Lemma 3.18 gibt es ein homogenes invariantes Polynom $f \in \text{Sym}^r(W)$ mit $f(\varphi) \neq 0$, $\mathbb{P}(W)_f$ affin und $\dim(G \cdot y) \geq \dim(G \cdot x)$ für $y \in \mathbb{P}(W)_f$. Wir betrachten die abgeschlossene invariante Menge $Z := V(f - f(\varphi)) \subset W^\vee$. Die Projektion $\pi: W^\vee \rightarrow \mathbb{P}(W)$ induziert einen endlichen Morphismus $\pi': Z \rightarrow \mathbb{P}(W)_f$. Falls es einen Punkt $\psi \in \overline{G \cdot \varphi} \setminus G \cdot \varphi$ gibt, so ist $\dim(G \cdot \psi) < \dim(G \cdot \varphi)$. Da π' endlich ist, erhalten wir $\dim(G \cdot y) < \dim(G \cdot x)$ für $y := [\psi] \in \mathbb{P}(W)_f$ im Widerspruch zur Polystabilität von x .

„ \Leftarrow “: Wenn $G \cdot \varphi$ abgeschlossen ist, gilt insbesondere $0 \notin \overline{G \cdot \varphi}$, so dass x nach Teil (i) semistabil ist. Es sei s ein homogenes invariantes Polynom mit $s(\varphi) \neq 0$ und $Z := V(s - s(\varphi))$. Da $\pi': Z \rightarrow \mathbb{P}(W)_s$ endlich und insbesondere eigentlich ist, ist $G \cdot x = \pi'(G \cdot \varphi)$ abgeschlossen in $\mathbb{P}(W)_s$. \square

Lemma 3.22 ([47, Proof of Theorem 1.5.1.4]). *Es sei V ein Vektorraum und $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine Darstellung einer reduktiven affinen algebraischen Gruppe. Ist $\varphi \in V^\vee$ ein Punkt, dessen Orbit nicht abgeschlossen ist, dann gibt es einen Punkt $\psi \in \overline{G \cdot \varphi} \setminus G \cdot \varphi$ im abgeschlossenen Orbit W und eine Einparameteruntergruppe λ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t)) \cdot \varphi = \psi$.*

Beweis. (i) Es gibt einen Torus $T \subset G$, so dass $\overline{T \cdot \varphi}$ nicht-leeren Schnitt mit W hat: Wir nehmen an, dies wäre nicht der Fall. Es sei $T \subset G$ ein maximaler Torus. Für jeden Punkt $\psi \in G \cdot \varphi$ sind $\overline{T \cdot \psi}$ und W T -invariante disjunkte abgeschlossene Mengen. Es gibt daher eine T -invariante Funktion f_ψ mit $f_\psi|_W = 0$ und $f_\psi|_{T \cdot \psi} = 1$. Es sei $U_\psi := V_{f_\psi}^\vee$.

Wir wechseln nun in die Kategorie der komplexen Mannigfaltigkeiten mit der starken Topologie. Es gibt eine kompakte Lie-Untergruppe $H \subset G$ mit $G = H \cdot T \cdot H$. Da der Orbit $H \cdot \varphi$ ebenfalls kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $\psi_1, \dots, \psi_k \in V^\vee$ mit $H \cdot \varphi \subset \cup_{i=1}^k U_{\psi_i}$. Die Funktion $f: V^\vee \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\psi) = \sum_{i=1}^k |f_{\psi_i}|$ ist stetig und besitzt ein positives Minimum auf $H \cdot \varphi$. Da f T -invariant ist, gilt dies auch für $T \cdot H \cdot \varphi$. Somit sind W und $\overline{T \cdot H \cdot \varphi}^s$ disjunkt. Da W G -invariant ist, sind auch W und $H \cdot \overline{T \cdot H \cdot \varphi}^s$ disjunkt. Da H kompakt ist, ist $H \cdot \overline{T \cdot H \cdot \varphi}^s$ abgeschlossen. Es folgt $H \cdot \overline{T \cdot H \cdot \varphi}^s = \overline{G \cdot \varphi}^s$. Da $G \cdot \varphi$ als Bild eines Morphismus konstruierbar ist, gilt $\overline{G \cdot \varphi}^s = \overline{G \cdot \varphi}$. Dies ist ein Widerspruch, da W in $\overline{G \cdot \varphi}$ enthalten ist.

(ii) Nach Teil (i) dürfen wir annehmen, dass G ein Torus $(\mathbb{C}^*)^n$ ist. Wir fixieren eine Basis v_1, \dots, v_r von V , so dass die Darstellung ρ durch die Menge D der Diagonalmatrizen faktorisiert. Die Darstellung ρ hat also die Form

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto \text{diag}(t_1^{a_1}, \dots, t_n^{a_r})$$

mit einer $r \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$. Die Menge der Einparameteruntergruppen $X_*(G)$ ist isomorph zu \mathbb{Z}^n durch

$$\lambda_{\underline{l}}(t) := (t^{l_1}, \dots, t^{l_n}), \quad \underline{l} \in \mathbb{Z}^n$$

Die Menge der Charaktere $X(D)$ ist isomorph zu \mathbb{Z}^r durch

$$\chi_{\underline{x}}(\text{diag}(d_1, \dots, d_r)) := \underline{d}^{\underline{x}} = d_1^{x_1} \cdots d_r^{x_r}, \quad \underline{x} \in \mathbb{Z}^r.$$

Assoziieren wir zu einem Tupel $\underline{x} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}^r$ die Funktion

$$f_{\underline{x}}: V^\vee \rightarrow \mathbb{C} \\ (\psi_1, \dots, \psi_r) \mapsto \psi_1^{-x_1} \cdots \psi_r^{-x_r}$$

3. Geometrische Invariantentheorie

so findet man $f_{\underline{x}}(d \cdot \psi) = \chi_{\underline{x}}(d)f_{\underline{x}}(\psi)$ für eine Diagonalmatrix $d \in D$.

Es sei $I := \{i \in \{1, \dots, r\} \mid \varphi_i \neq 0\}$. Die Untergruppe der Charaktere, die auf G trivial werden, entspricht der Menge

$$X' := \{\underline{x} \in \mathbb{Z}^r \mid \underline{x} \cdot A = 0\}.$$

Für ein Tupel $\underline{x} \in X'' := X' \cap \mathbb{Z}_{\leq 0}^r$ mit $x_i = 0$ für $i \notin I$ ist $f_{\underline{x}}$ daher eine G -invariante Funktion auf V^\vee , die auf φ nicht verschwindet. Es sei

$$J := \{j \in \{1, \dots, r\} \mid \exists \underline{x} \in X'' : x_j < 0 \wedge \forall i \notin I x_i = 0\} \subset I.$$

Für jeden Punkt $\psi \in \overline{G \cdot \varphi}$ und jedes $k \in J$ gilt dann $\psi_k \neq 0$. Insbesondere kann man $J = I$ ausschließen, da sonst $G \cdot \varphi$ abgeschlossen wäre.

Wir betrachten den Vektorraum \mathbb{Q}^n , den Unterraum $U := \text{span}(A^t e_i, i \in J)$ und den Quotienten \mathbb{Q}^n/U . Die konvexe Hülle der Punkte $\pi(A^t e_i) \in \mathbb{Q}^n/U$, $i \in I \setminus J$, enthält nicht den Ursprung: Es sei $\sum_{i \in I \setminus J} c_i A^t e_i \in U$ eine Linearkombination mit $c_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $i \in I \setminus J$. Dann gibt es $c_i \in \mathbb{Q}$, $i \in J$, mit $\sum_{i \in I} c_i A^t e_i = 0$. Nach Konstruktion von J gibt es $c'_i \in \mathbb{Z}_{< 0}$, $i \in J$, mit $\sum_{i \in J} c'_i A^t e_i = 0$. Durch Subtraktion eines Vielfachen dieser Gleichung können wir erreichen, dass alle Koeffizienten nicht-negativ sind. Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner erhalten wir schließlich eine Linearkombination $\sum_{i \in I} n_i A^t e_i = 0$ mit $n_i \in \mathbb{Z}_{> 0}$. Aus der Definition von J folgt daher $n_i = 0$ (und somit $c_i = 0$) für $i \in I \setminus J$.

Es gibt daher einen Vektor $y \in \mathbb{Q}^n$ mit $(A^t e_i, y) > 0$ für $i \in I \setminus J$ und $(A^t e_i, y) = 0$ für $i \in J$. Es gibt eine Zahl $m \in \mathbb{Z}_{> 0}$ mit $\underline{l} := m \cdot y \in \mathbb{Z}^n$. Es sei $\lambda = \lambda(\underline{l})$ die durch \underline{l} definierte Einparameteruntergruppe von G . Dann existiert $\varphi' := \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t)) \cdot \varphi$, und es gilt $\varphi'_i = 0$ für $i \notin J$ und $\varphi'_i = \varphi_i$ für $i \in J$.

Es bleibt zu zeigen, dass der Orbit von φ' abgeschlossen ist. Dazu wenden wir die obige Konstruktion auf φ' an. Man findet dann $I' = J$ und $J' = J$. Dies zeigt, dass $G \cdot \varphi'$ abgeschlossen ist. \square

Zu einer Einparameteruntergruppe $\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow G$ und einem Punkt $x \in X$ betrachten wir den Fixpunkt $x_\infty = \lim_{z \rightarrow \infty} \rho(\lambda(z), x)$. Die Linearisierung definiert eine Wirkung $\mathbb{C}^* \times L_{x_\infty} \rightarrow L_{x_\infty}$, $(z, l) \mapsto z^\gamma \cdot l$ mit $\gamma \in \mathbb{Z}$. Wir setzen

$$\mu_\rho(\lambda, x) := -\gamma.$$

Beispiel 3.23. Es sei V ein Vektorraum $G = \text{GL}(V)$ und $\lambda \in X_*(G)$ eine Einparameteruntergruppe. Dann findet man Zahlen $\gamma_1 < \dots < \gamma_s$ und eine Zerlegung

$$V = \bigoplus_{i=1}^s V^i$$

mit $V^i = \{v \in V \mid \lambda(t) \cdot v = t^{\gamma_i} v\}$. Es sei ρ die natürliche Linearisierung der Gruppenwirkung in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$. Für einen Punkt $x \in \mathbb{P}(V)$ repräsentiert durch $\varphi \in V^\vee$ berechnet man

$$\mu_\rho(\lambda, x) = -\min\{\gamma_i \mid i = 1, \dots, s, \varphi|_{V^i} \neq 0\}.$$

Insbesondere gilt $\mu_\rho(\lambda, x) \leq 0$ genau dann, wenn der Limes $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \cdot \varphi$ existiert; ebenso gilt $\mu_\rho(\lambda, x) < 0$ genau dann, wenn $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \cdot \varphi = 0$.

Die Funktion μ erfüllt folgende Eigenschaften.

Lemma 3.24. *Es sei $x \in X$ und $\lambda \in X_*(G)$. Dann gilt*

- (i) $\mu_\rho(\lambda, x_\infty) = \mu_\rho(\lambda, x)$,
- (ii) $\forall g \in G : \mu_\rho(g \cdot \lambda \cdot g^{-1}, \rho(g, x)) = \mu_\rho(\lambda, x)$.
- (iii) *Für eine weitere Linearisierung σ und $\chi \in X^*(G)$ gilt*

$$\mu_{(\rho \otimes \sigma)_\chi}(\lambda, x) = \mu_\rho(\lambda, x) + \mu_\sigma(\lambda, x) - \langle \chi, \lambda \rangle.$$

Ihre Bedeutung erhält die Abbildung μ durch den folgenden Satz.

Proposition 3.25 (Hilbert–Mumford-Kriterium [34, Thm 2.1]). *Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann (semi)stabil bezüglich ρ , wenn für jede nicht-triviale Einparameteruntergruppe $\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow G$*

$$\mu_\rho(\lambda, x) \geq 0$$

erfüllt ist.

Beweis. Nach Korollar 3.20 darf man annehmen, dass $X = \mathbb{P}(V)$ für einen Vektorraum V ist, und die Wirkung durch eine Darstellung $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ gegeben ist. Es sei $x \in X$ und $\varphi \in V^\vee$ ein Punkt über x .

„ \Rightarrow “: Falls $\mu(\lambda, x) < 0$ gilt, folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t)) \cdot \varphi = 0$. Nach Lemma 3.21 kann x nicht semistabil sein.

Falls $\mu(\lambda, x) = 0$ gilt, so existiert $\psi := \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t)) \cdot \varphi$. Wenn es $g \in G$ mit $\rho(g) \cdot \varphi = \psi$ gibt, ist $g^{-1} \cdot \lambda \cdot g$ eine nicht-triviale Einparameteruntergruppe des Stabilisators von x . Andernfalls ist $G \cdot \varphi$ nicht abgeschlossen in V^\vee . In jedem Fall ist x nicht stabil.

„ \Leftarrow “: Falls x nicht semistabil ist, liegt der Ursprung im Abschluss des Orbits von φ , und es gibt nach Lemma 3.22 eine Einparameteruntergruppe λ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t)) \cdot \varphi = 0$. Daher folgt $\mu(\lambda, x) < 0$.

Falls x nicht stabil ist, ist wegen Lemma 3.21 und Korollar 3.19 entweder G_x nicht endlich, oder der Orbit $G \cdot \varphi$ ist nicht abgeschlossen in V^\vee . Falls der Orbit nicht abgeschlossen ist, gibt es nach Lemma 3.22 eine Einparameteruntergruppe λ , so dass $\psi := \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t)) \cdot \varphi$ existiert. Da ψ ein Fixpunkt der Wirkung von λ ist, haben wir $\mu(\lambda, x) = \mu(\lambda, [\psi]) = 0$.

Falls der Orbit abgeschlossen ist, ist G_x nicht endlich. Nach [29, §I.2.] ist G_x reduktiv. Es gibt somit eine nicht-triviale Einparameteruntergruppe λ von $\mathcal{R}(G_x)$. Es gilt dann $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t), x) = x$ und somit $\mu(\lambda, x) \leq 0$ oder $\mu(\lambda^{-1}, x) \leq 0$. \square

Proposition 3.26. *Es sei $x \in X$ ein semistabiler Punkt.*

- (i) *Für jede Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(G)$ mit $\mu(\lambda, x) = 0$ ist der Limespunkt $x_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t), x)$ semistabil.*
- (ii) *Es gibt eine Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(G)$ mit $\mu(\lambda, x) = 0$, so dass der Limespunkt $x_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t), x)$ polystabil ist.*

3. Geometrische Invariantentheorie

Beweis. (i) Wieder dürfen wir $X = \mathbb{P}(V)$ annehmen. Es sei $\varphi \in V^\vee \setminus \{0\}$ ein Repräsentant von x . Nach Voraussetzung existiert $\varphi_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t)) \cdot \varphi \in \overline{G \cdot \varphi}$ und es gilt $x_\infty = [\varphi_\infty]$. Da $\overline{G \cdot \varphi_\infty} \subset \overline{G \cdot \varphi}$ nicht den Ursprung enthält, ist x_∞ nach Lemma 3.21, (i), semistabil.

(ii) Nach Lemma 3.22 gibt es eine Einparameteruntergruppe λ , so dass $\varphi_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t), \varphi) \in V^\vee \setminus \{0\}$ existiert und der Orbit $G \cdot \varphi_\infty$ abgeschlossen in V^\vee ist. Aus der Existenz des Limes in $V^\vee \setminus \{0\}$ folgt $\mu(\lambda, x) = 0$. Nach Lemma 3.21, (ii), ist $[\varphi_\infty] = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t), x)$ polystabil. \square

Bemerkung 3.27. Wir betrachten nun die Situation, dass $\Phi_{\mathcal{F}}$ ein Modulfunktor und U eine lokal universelle Familie auf X^{ss} ist, die mit der Gruppenwirkung verträglich ist. Die vorangegangene Proposition zeigt, dass zwei Objekte E, E' genau dann S-äquivalent sind, wenn es Punkte $x, x' \in X^{\text{ss}}$ mit $U_x \sim E$ und $U_{x'} \sim E'$, sowie eine Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(G)$ mit $\mu(\lambda, x) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t), x) = x'$ gibt.

Wir fixieren einen maximalen Torus $T \subset G$. Da G durch Konjugation transitiv auf der Menge der maximalen Tori wirkt, sieht man mit Eigenschaft (ii) aus Lemma 3.24, dass ein Punkt $x \in X$ genau dann (semi)stabil ist, wenn für jede nicht-triviale Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(T)$ und jedes Element $g \in G$ die Bedingung $\mu_\rho(\lambda, \rho(g, x))(\geq) 0$ erfüllt ist.

3.5. Gewichtete Fahnen

Definition 3.28. Es sei G eine affine algebraische Gruppe. Eine maximale zusammenhängende auflösbare Untergruppe $B \subset G$ heißt *Borel-Untergruppe*. Eine Untergruppe P mit der Eigenschaft, dass G/P eine vollständige Varietät ist, heißt *parabolische Untergruppe*.

Beispiel 3.29. In $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$ ist die Untergruppe B_n der oberen Dreiecksmatrizen eine Borel-Untergruppe.

Es sei G eine Gruppe und $\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow G$ eine Einparameteruntergruppe. Dann definieren wir die Untergruppe

$$Q_G(\lambda) := \left\{ g \in G \mid \lim_{z \rightarrow \infty} \lambda(z) \cdot g \cdot \lambda^{-1}(z) \text{ existiert in } G \right\},$$

sowie ihre Untergruppen

$$L_G(\lambda) := \left\{ g \in G \mid \forall z \in \mathbb{C}^* : \lambda(z) \cdot g \cdot \lambda(z)^{-1} = g \right\},$$

$$\mathcal{R}_G^u(\lambda) := \left\{ g \in G \mid \lim_{z \rightarrow \infty} \lambda(z) \cdot g \cdot \lambda(z)^{-1} = e \right\}.$$

Beispiel 3.30. Wir betrachten den Fall $G = \text{GL}(r)$. Es sei $\underline{i} \in \mathbb{N}^n$ ein Indextupel mit $0 := i_0 < i_1 < \dots < i_n < i_{n+1} := r$ und $\underline{\gamma} \in \mathbb{Z}^r$ ein Tupel von Gewichten mit $\gamma_i = \gamma_j$ für $i_k < i, j \leq i_{k+1}$, $k = 0, \dots, n$, und $\gamma_{i_k} < \gamma_{i_{k+1}}$, $k = 1, \dots, r-1$. Wir definieren die Einparameteruntergruppe λ durch $\lambda(z) = \text{diag}(z_1^{\gamma_1}, \dots, z^{\gamma_r})$. Durch Konjugation kann jede Einparameteruntergruppe in diese Form gebracht werden. Man sieht leicht, dass $Q_G(\lambda)$ die Menge der oberen Block-Dreiecksmatrizen mit Blöcken

der Größe $r_k := i_k - i_{k-1}$, $k = 1, \dots, n+1$ ist. Entsprechend ist $L_G(\lambda)$ die Menge der Block-Diagonalmatrizen und $\mathcal{R}_G^u(\lambda)$ die Menge der oberen Block-Dreiecksmatrizen mit Einheitsmatrizen auf der Diagonalen. Die Untergruppen sind also von der Form

$$Q_G(\lambda) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \boxed{m_1} & & & \\ & \boxed{m_2} & & * \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \boxed{m_{n+1}} \end{array} \right) \in \mathrm{GL}(r) \mid \begin{array}{l} m_k \in \mathrm{GL}(r_k), \\ k = 1, \dots, n+1 \end{array} \right\},$$

$$L_G(\lambda) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \boxed{m_1} & & & 0 \\ & \boxed{m_2} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \boxed{m_{n+1}} \end{array} \right) \in \mathrm{GL}(r) \mid \begin{array}{l} m_k \in \mathrm{GL}(r_k), \\ k = 1, \dots, n+1 \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{R}_G^u(\lambda) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \boxed{\mathbb{1}_{r_1}} & & & * \\ & \boxed{\mathbb{1}_{r_2}} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \boxed{\mathbb{1}_{r_{n+1}}} \end{array} \right) \in \mathrm{GL}(r) \right\}.$$

Bemerkung 3.31. Wenn $\varphi: G \rightarrow H$ ein Morphismus algebraischer Gruppen und λ eine Einparameteruntergruppe von G ist, so gilt $\varphi_* Q_G(\lambda) \subset Q_H(\varphi_* \lambda)$ und $\varphi_* L_G(\lambda) \subset L_H(\varphi_* \lambda)$. Ist φ eine abgeschlossene Einbettung, dann gilt sogar $Q_G(\lambda) = Q_H(\varphi_* \lambda) \cap G$ und $L_G(\lambda) = L_H(\varphi_* \lambda) \cap G$.

Lemma 3.32 ([34, Prop. 2.6]). *Es seien G eine affine algebraische Gruppe und $\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow G$ eine Einparameteruntergruppe.*

- (i) *Die Gruppe $Q_G(\lambda)$ ist eine parabolische Untergruppe.*
- (ii) *Für $g \in Q_G(\lambda)$ liegt $\lim_{z \rightarrow \infty} \lambda(z) \cdot g \cdot \lambda(z)^{-1}$ in $L_G(\lambda)$.*

Beweis. (i) Es ist zu zeigen, dass $G/Q_G(\lambda)$ projektiv ist. Wir behandeln zunächst den Fall $G = \mathrm{GL}(r)$. Aus Beispiel 3.30 geht hervor, dass $Q_G(\lambda)$ der Stabilisator einer Fahne in \mathbb{C}^r ist. Es sei \underline{r} der Typ dieser Fahne. Die Gruppe $\mathrm{GL}(r)$ wirkt transitiv auf der Menge aller Fahnen vom Typ \underline{r} . Der Quotient $G/Q_G(\lambda)$ ist daher isomorph zu einer Fahnenvarietät, die projektiv ist (siehe Abschnitt 2.3).

Sei nun G eine beliebige affine algebraische Gruppe. Nach Proposition 1.25 gibt es eine abgeschlossene Einbettung $i: G \rightarrow \mathrm{GL}(r)$. Wegen Bemerkung 3.31 induziert diese Einbettung auch eine abgeschlossene Einbettung $\tilde{i}: G/Q_G(\lambda) \rightarrow \mathrm{GL}(r)/Q_{\mathrm{GL}(r)}(i \circ \lambda)$. Nach dem vorangegangenen Absatz ist dies also eine abgeschlossene Einbettung in einen projektiven Raum.

(ii) Im Fall $G = \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ prüft man die Aussage leicht anhand von Beispiel 3.30. Der allgemeine Fall folgt dann aus Bemerkung 3.31. \square

Lemma 3.33 ([34, Prop. 2.7]). *Für eine Einparameteruntergruppe λ von G und $g \in Q_G(\lambda)$ gilt*

$$\mu(\lambda, \rho(g, x)) = \mu(\lambda, x).$$

3. Geometrische Invariantentheorie

Beweis. Wir betrachten $g' := \lim_{z \rightarrow \infty} \lambda(z) \cdot g \cdot \lambda(z)^{-1}$ und $y := \lim_{z \rightarrow \infty} \rho(\lambda(z) \cdot g, x)$. Dann haben wir $y = \lim_{z \rightarrow \infty} \rho(\lambda(z) \cdot g \cdot \lambda(z)^{-1} \cdot \lambda(z), x) = \rho(g', x)$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, \rho(g, x)) &= \mu(\lambda, y) \\ &= \mu(g'^{-1} \cdot \lambda \cdot g', x_\infty). \end{aligned}$$

Da g' nach Lemma 3.32, (ii), mit λ kommutiert, folgt die Behauptung. \square

Definition 3.34. Es sei V ein Vektorraum. Eine *gewichtete Fahne* $(V_\bullet, \underline{\alpha})$ von V der Länge $l = l(V_\bullet)$ ist eine Fahne

$$V_\bullet : \{0\} =: V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_l \subset V_{l+1} := V$$

von V zusammen mit einem l -Tupel $\underline{\alpha} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^l$.

Es sei V ein r -dimensionaler Vektorraum und $\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathrm{SL}(V)$ eine Einparameteruntergruppe. Dann gibt es wie in Beispiel 3.23 Eigenräume V^i , $i = 1, \dots, k+1$ mit Gewichten $\gamma_1 < \dots < \gamma_{k+1}$. Die Zerlegung definiert eine Fahne

$$V_\bullet : \{0\} =: V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k \subset V_{k+1} = V$$

durch $V_j := \bigoplus_{i=1}^j V^i$ und den Gewichtsvektor $\underline{\alpha}(\underline{\gamma}) \in \mathbb{Q}_{>0}^k$ durch

$$\alpha_j(\underline{\gamma}) := \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{r}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Wir nennen $(V_\bullet, \underline{\alpha})$ die zu λ *assoziierte gewichtete Fahne*.

Ist umgekehrt eine gewichtete Fahne $(V_\bullet, \underline{\alpha})$ der Länge $k = l(V_\bullet)$ gegeben, so setzen wir $r_j := \dim(V_j)$, $j = 1, \dots, k$, wählen Unterräume $V^i \subset V$ mit $V_j = \bigoplus_{i=1}^j V^i$, $j = 1, \dots, k+1$ und definieren den Gewichtsvektor $\underline{\gamma}(V_\bullet, \underline{\alpha}) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ durch

$$\gamma_i(V_\bullet, \underline{\alpha}) := \sum_{j=1}^{l(V_\bullet)} \alpha_j r_j - \sum_{j=i}^{l(V_\bullet)} \alpha_j r = \sum_{j=1}^{l(V_\bullet)} \alpha_j (\gamma_r^{(r_j)})_{r_i} \quad i = 1, \dots, k+1,$$

mit

$$(\gamma_r^{(k)})_i := \begin{cases} k - r & 1 \leq i \leq k \\ k & k < i \leq r \end{cases}.$$

Man beachte, dass man so den ursprünglichen Gewichtsvektor zurückgewinnt, falls $(V_\bullet, \underline{\alpha})$ die zu einer Einparameteruntergruppe λ assoziierte gewichtete Fahne ist.

Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $m\underline{\alpha} \in (\mathbb{Z}/r)^k$ gilt. Dann liegt $\underline{\gamma} := \underline{\gamma}(V_\bullet, m\underline{\alpha})$ in \mathbb{Z}^{k+1} . Wir definieren nun eine Wirkung von \mathbb{C}^* auf V durch $\lambda(z) \cdot v := z^{\underline{\gamma}^i} v$ für $v \in V^i$. Dies bestimmt eine Einparameteruntergruppe λ von $\mathrm{SL}(V)$. Sind W^i andere Unterräume mit $\bigoplus_{i=1}^j W^i = V_j$ und ist λ' die dadurch bestimmte Einparameteruntergruppe, so gilt $\lambda' = g\lambda g^{-1}$ für ein Element $g \in \mathrm{GL}(V)$, das die Fahne V_\bullet fixiert. Es gilt also $g \in Q_{\mathrm{SL}(V)}(\lambda)$. Nach Lemma 3.33 ist der Ausdruck

$$\mu_\rho(V_\bullet, \underline{\alpha}, x) := \frac{1}{m} \mu_\rho(\lambda, x)$$

daher wohldefiniert.

Beispiel 3.35 (Stabilität in der Graßmann-Varietät, vgl. [28, Prop. 6.6.1]). Es seien V und W Vektorräume der Dimensionen r bzw. s . Wir betrachten die Wirkung von $\mathrm{GL}(V)$ auf der Graßmann-Varietät $\mathrm{Gr}(V \otimes W, t)$ mit $t < r \cdot s$ (siehe Abschnitt 2.2). Für einen Quotienten $\kappa: V \otimes W \rightarrow \mathbb{C}^t$ und eine Einparameteruntergruppe λ berechnet man

$$\mu(\lambda, [\kappa]) = - \sum_{i=1}^{l(V_\bullet)+1} \gamma_i (\dim(\kappa(V_i \otimes W)) - \dim(\kappa(V_{i-1} \otimes W)))$$

Falls λ durch $\mathrm{SL}(V)$ faktorisiert, gilt für $\underline{\alpha} := \underline{\alpha}(\gamma)$

$$\mu(\lambda, [\kappa]) = \sum_{j=1}^{l(V_\bullet)} \alpha_j (r \dim(\kappa(V_j \otimes W)) - \dim(V_j) \cdot t).$$

Ein Quotient κ ist also genau dann (semi)stabil, wenn für jeden echten Unterraum $V' \subset V$

$$\frac{\dim(\kappa(V \otimes W))}{\dim(V)} (\leq) \frac{\dim(\kappa(V' \otimes W))}{\dim(V')}$$

gilt.

Beispiel 3.36 (Stabilität in der Fahnenvariety). Es seien V ein Vektorraum der Dimension r , $\underline{r} \in \mathbb{N}^l$ mit $1 \leq r_1 < \dots < r_l < r$ und $\underline{\beta} \in \mathbb{N}^l$. Wir betrachten die Wirkung von $\mathrm{SL}(r)$ auf der Fahnenvariety $\mathrm{Fl}(V, \underline{r})$ (siehe Abschnitt 2.3) mit Linearisierung in $\mathcal{O}_{\mathrm{Fl}(V, \underline{r})}(\beta_1, \dots, \beta_l)$. Für einen Punkt $t \in \mathrm{Fl}(V, \underline{r})$ gegeben durch eine Fahne U_\bullet mit Quotienten $\kappa_i: V \rightarrow V/U_i$ und eine Einparameteruntergruppe λ mit gewichteter Fahne $(V_\bullet, \underline{\alpha})$ berechnet man

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, t) &= \sum_{i=1}^l \beta_i \sum_{j=1}^{l(V_\bullet)} \alpha_j (r \dim(\kappa_i(V_j)) - \dim(V_j)(r - r_i)) \\ &= \sum_{j=1}^{l(V_\bullet)} \alpha_j \sum_{i=1}^l \beta_i (\dim(V_j) r_i - \dim(U_i \cap V_j) r). \end{aligned}$$

Man erkennt, dass kein Punkt $t \in \mathrm{Fl}(V, \underline{r})$ semistabil ist.

Beispiel 3.37 (Stabilität in $V_{a,b,c}$). Wir betrachten die Wirkung von $\mathrm{SL}(V)$ auf $\mathbb{P}(V_{a,b,c})$ mit

$$V_{a,b,c} := (V^{\otimes a})^{\oplus b} \otimes \left(\bigwedge^{\dim(V)} V \right)^{\otimes -c}.$$

Da die Wirkung von $\mathrm{SL}(V)$ auf $\det(V)$ trivial ist, sind $V_{a,b,c}$ und $V_{a,b} := V_{a,b,0}$ als $\mathrm{SL}(V)$ -Moduln isomorph. Es sei λ eine Einparameteruntergruppe von $\mathrm{SL}(V)$ und V_j , $j = 1, \dots, l+1$, die Eigenräume von V mit Eigenwerten $\gamma_1 < \dots < \gamma_{l+1}$. Die Eigenräume von $V_{a,b}$ sind dann von der Form $V^{\otimes \underline{i}} := (\bigotimes_{i=1}^a V^{i_i})^{\oplus b}$ mit $\underline{i} \in \{1, \dots, l+1\}^a$. Für einen Punkt $x \in \mathbb{P}(V_{a,b})$ repräsentiert durch $f \in V_{a,b}^\vee$ gilt

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, [f]) &= - \min \{ \gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_a} \mid f|_{V^{\otimes \underline{i}}} \neq 0 \} \\ &= - \min \left\{ \sum_{j=1}^l \alpha_j (a \dim(V_j) - r \nu_j(\underline{i})) \mid f|_{V^{\otimes \underline{i}}} \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

3. Geometrische Invariantentheorie

mit $\nu_j(\underline{i}) := \#\{i \in \underline{i} \mid i \leq j\}$. Wegen $0 \leq \nu_j(\underline{i}) \leq a$ finden wir die Abschätzungen

$$-\sum_{j=1}^l \alpha_j a \dim(V_j) \leq \mu(\lambda, x) \leq \sum_{j=1}^l \alpha_j a (r - \dim(V_j)).$$

Insbesondere ergibt sich mit $1 \leq \dim(V_j) \leq r - 1$

$$|\mu(\lambda, x)| \leq a(r - 1) \sum_{j=1}^l \alpha_j.$$

Lemma 3.38 ([47, Lemma 1.5.1.41, ii]). *Für die Wirkung von $\mathrm{SL}(V)$ auf $V_{a,b,c}$ gilt*

$$\mu(V_\bullet, \underline{\alpha} + \underline{\beta}, x) \geq \mu(V_\bullet, \underline{\alpha}, x) - a \sum_{j=1}^{l(V_\bullet)} \beta_j \dim(V_j).$$

Beweis. Es sei \underline{i} ein Tupel mit $\mu(V_\bullet, \underline{\alpha}, x) = -\sum_{j=1}^{l(V_\bullet)} \alpha_j (a \dim(V_j) - r \nu_j(\underline{i}))$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu(V_\bullet, \underline{\alpha} + \underline{\beta}, x) &\geq -\sum_{j=1}^{l(V_\bullet)} (\alpha_j + \beta_j) (a \dim(V_j) - r \nu_j(\underline{i})) \\ &= \mu(V_\bullet, \underline{\alpha}, x) - \sum_{j=1}^{l(V_\bullet)} \beta_j (a \dim(V_j) - r \nu_j(\underline{i})) \\ &\geq \mu(V_\bullet, \underline{\alpha}, x) - \sum_{j=1}^{l(V_\bullet)} \beta_j a \dim(V_j). \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.39. Es sei V ein r -dimensionaler Vektorraum und $f: V \rightarrow \mathbb{C}^r$ ein Homomorphismus. Weiter sei $1 \leq i \leq \mathrm{rk}(f)$ eine Zahl und λ eine Einparameteruntergruppe von $\mathrm{SL}(V)$ mit assoziierter gewichteter Fahne $(V_\bullet, \underline{\alpha})$. Für den Punkt $[\wedge^i f] \in \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\wedge^i V, \wedge^i \mathbb{C}^r)^\vee)$ berechnet man

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, [\wedge^i f]) &= -\sum_{j=1}^{l(V_\bullet)+1} \gamma_j (\min\{\dim(f(V_j)), i\} - \min\{\dim(f(V_{j-1})), i\}) \\ &= \sum_{k=1}^{l(V_\bullet)} \alpha_k (r \min\{\dim(f(V_k)), i\} - \dim(V_k) i). \end{aligned}$$

Es sei $i: G \rightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ eine Einbettung und $T \subset G$ ein maximaler Torus. Zu einer gegebenen Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(T)$ existiert ein eindeutiger Charakter $\chi_\lambda \in X^*(T)$ mit

$$\forall \lambda' \in X_*(T) : \langle \chi_\lambda, \lambda' \rangle = (\lambda, \lambda').$$

Hierbei sind $\langle -, - \rangle$ und $(-, -)$ die Paarungen aus Bemerkung 1.8, (ii), und Bemerkung 1.10.

Lemma 3.40. *Der Charakter $\chi_\lambda \in X^*(T)$ ist definiert auf $Q_G(\lambda)$ und verschwindet auf $\mathcal{R}_G^u(\lambda)$. Er definiert somit einen Charakter auf $H_G(\lambda) := Q_G(\lambda)/\mathcal{R}_G^u(\lambda)$.*

Beweis. (i) Es sei zunächst $G = \mathrm{GL}(r)$, T der maximale Torus der Diagonalmatrizen und $\lambda \in X_*(T)$ eine Einparameteruntergruppe. Durch Operation mit der Weylgruppe können wir erreichen, dass λ die Form

$$\lambda(z) = \begin{pmatrix} \boxed{z^{\gamma_1} \mathbb{1}} & & & 0 \\ & \boxed{z^{\gamma_2} \mathbb{1}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{z^{\gamma_s} \mathbb{1}} \end{pmatrix}$$

mit Zahlen $\gamma_1 < \dots < \gamma_s$ annimmt. Man überzeugt sich, dass der Charakter

$$\chi: Q_G(\lambda) \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{m_1} & & & * \\ & \boxed{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{m_s} \end{pmatrix} \mapsto \prod_{i=1}^s \det(m_i)^{\gamma_i}.$$

der gesuchte Charakter ist. Da $\mathcal{R}_G^u(\lambda)$ unipotent ist, ist die Einschränkung von χ auf $\mathcal{R}_G^u(\lambda)$ trivial.

(ii) Der allgemeine Fall folgt nun wieder aus der Tatsache, dass es eine Einbettung $i: G \rightarrow \mathrm{GL}(r)$ gibt und $Q_G(\lambda) = G \cap Q_{\mathrm{GL}(r)}(i \circ \lambda)$ gilt. \square

Beispiel 3.41. Es sei $\lambda \in X_*(\mathrm{GL}(V))$ eine Einparameteruntergruppe mit gewichteter Fahne $(V_\bullet, \underline{\alpha})$ und λ' eine Einparameteruntergruppe in $Q_{\mathrm{GL}(V)}(\lambda)$ mit gewichteter Fahne $(U_\bullet, \underline{\beta})$. Dann berechnet man

$$\langle \chi_\lambda, \lambda' \rangle = \dim(V) \sum_{i=1}^{l(V_\bullet)} \sum_{j=1}^{l(U_\bullet)} \alpha_i \beta_j (\dim(V) \dim(V_i \cap U_j) - \dim(V_i) \dim(U_j)).$$

4. Vektorbündel

In diesem Kapitel wiederholen wir die Konstruktion des groben Modulraums stabiler Vektorbündel. Die dabei eingesetzten Verfahren dienen uns als Grundlage für spätere Konstruktionen. Wir folgen hier im wesentlichen dem Buch von Le Potier [28], eine kompakte Darstellung findet man auch bei Huybrechts–Lehn [24].

4.1. Beschränktheit

Es sei X eine glatte projektive Kurve über \mathbb{C} und \mathcal{A} eine Familie von Isomorphieklassen von Vektorbündeln auf X . Eine durch ein Schema S parametrisierte Familie von Vektorbündeln ist eine S -flache kohärente Garbe E_S auf $S \times X$, so dass für jeden Punkt $s \in S$ die Einschränkung $E_{S|\{s\} \times X}$ ein Vektorbündel in \mathcal{A} ist. Zwei parametrisierte Familien E_S und E'_S sind äquivalent, wenn es ein Geradenbündel L auf S gibt, so dass $E_S \cong E'_S \otimes \text{pr}_S^* L$ gilt.

Lemma 4.1 ([24, Lemma 2.1.7]). *Es sei E eine S -flache kohärente Garbe auf $S \times X$ und $(s, x) \in S \times X$ ein Punkt. Der Halm $E_{(s,x)}$ ist genau dann frei, wenn der Halm $E_{s,x}$ der Einschränkung $E_s := E_{|\{s\} \times X}$ frei ist.*

Beweis. Da E kohärent ist, gibt es eine Darstellung

$$0 \rightarrow K \rightarrow \mathcal{O}_{S \times X, (s,x)}^{\oplus r} \rightarrow E_{(s,x)} \rightarrow 0$$

mit $r = \dim(E_{(s,x)}/\mathfrak{m}_{(s,x)}E_{(s,x)})$. Aufgrund der Flachheit erhält man durch Tensorieren mit $\mathcal{O}_{S,s} = \mathcal{O}_{S \times X, (s,x)}/\mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{S \times X, (s,x)}$ die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow K/\mathfrak{m}_s K \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus r} \rightarrow E_{s,x} \rightarrow 0.$$

Aus Nakayams Lemma folgt nun, dass $K = 0$ genau dann gilt, wenn $K/\mathfrak{m}_s K = 0$ gilt. Daraus folgt die Behauptung. \square

Korollar 4.2 ([24, 2.1.8]). (i) *Es gibt eine offene Menge $U \subset S$, so dass ein Punkt s genau dann in U liegt, wenn $E_{S,s}$ lokal frei ist.*

(ii) *Eine parametrisierte Familie von Vektorbündeln E_S ist ein Vektorbündel über $S \times X$.*

Beweis. (i) Es gibt eine offene Teilmenge $W \subset S \times X$, so dass ein Morphismus $f: T \rightarrow S \times X$ genau dann durch W faktorisiert, wenn $f^* E_S$ lokal frei ist. Da X projektiv ist, ist $Z := \text{pr}_S(S \times X \setminus W)$ abgeschlossen. Aus dem Lemma folgt nun, dass $S \setminus Z$ die gesuchte Menge ist.

(ii) Dies ist offensichtlich. \square

4. Vektorbündel

Definition 4.3. Eine Familie \mathcal{A} von Isomorphieklassen kohärenter Garben auf X heißt *beschränkt*, falls ein Schema S von endlichem Typ und eine über S flache kohärente Garbe \mathcal{E}_S auf $S \times X$ existieren, so dass es zu jeder Isomorphieklasse $[\mathcal{E}] \in \mathcal{A}$ einen Punkt $s \in S$ mit $\mathcal{E}_{S|\{s\} \times X} \cong E$ gibt.

Bemerkung 4.4. Wenn E_S eine über S flache kohärente Garbe auf $S \times X$ ist, so sind nach [18, III, Theorem 9.9] Rang und Grad konstant auf den Zusammenhangskomponenten von S . Wir können uns also auf Vektorbündel mit gegebenem Grad d und Rang r beschränken.

Definition 4.5. Die *Steigung* einer kohärenten Garbe \mathcal{F} auf X mit $\text{rk}(\mathcal{F}) \neq 0$ ist die Zahl

$$\mu(\mathcal{F}) := \frac{\text{deg}(\mathcal{F})}{\text{rk}(\mathcal{F})}.$$

Aus der Additivität von Rang und Grad auf kurzen exakten Sequenzen folgert man leicht die folgende Aussage.

Lemma 4.6. *Für eine kurze exakte Sequenz kohärenter Garben*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$$

mit $\text{rk}(\mathcal{F}) \neq 0 \neq \text{rk}(\mathcal{Q})$ und eine Konstante C gilt

$$\mu(\mathcal{F})(\leq)\mu(\mathcal{E}) + C \iff \mu(\mathcal{Q})(\geq)\mu(\mathcal{E}) - C \frac{\text{rk}(\mathcal{F})}{\text{rk}(\mathcal{Q})}.$$

Proposition 4.7 (vgl. [28, Thm 5.6.1]). *Für eine Familie \mathcal{A} von Isomorphieklassen kohärenter Garben von Rang r und Grad d auf X sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) \mathcal{A} ist beschränkt.
- (ii) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle Garben \mathcal{E} mit $[\mathcal{E}] \in \mathcal{A}$ gilt:
 - a) $h^1(\mathcal{E}(n)) = 0$,
 - b) die Auswertungsabbildung $H^0(\mathcal{E}(n)) \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow \mathcal{E}$ ist surjektiv.
- (iii) Es gibt eine Konstante C , so dass für alle Garben \mathcal{E} mit $[\mathcal{E}] \in \mathcal{A}$ und alle Untergarben $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ gilt:

$$\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E}) + C.$$

- (iv) Es gibt eine Konstante C' , so dass für alle Garben \mathcal{E} mit $[\mathcal{E}] \in \mathcal{A}$ und alle Quotienten $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Q}$ gilt:

$$\mu(\mathcal{Q}) \geq \mu(\mathcal{E}) - C'.$$

Beweis. „(i) \Rightarrow (ii)“: Dies folgt aus Serres Verschwindungssatz und dem Halbstetigkeitsatz [18, III, Theorem 12.8].

„(i) \Leftarrow (ii)“: Aus $h^1(\mathcal{E}(n)) = 0$ folgt mit dem Satz von Riemann–Roch

$$h^0(\mathcal{E}(n)) = d + r(n + 1 - g) =: p(n).$$

Wegen Eigenschaft (ii) lässt sich jedes Vektorbündel $[\mathcal{E}] \in \mathcal{A}$ als Quotient $q: Y \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow \mathcal{E}$ schreiben mit $Y := \mathbb{C}^{p(n)}$. Der universelle Quotient $q: Y \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow \mathcal{Q}$ auf $\text{Quot}_n \times X$ mit $\text{Quot}_n := \text{Quot}_{Y \otimes \text{pr}^* \mathcal{O}_X(-n), X}^{d,r}$ ist dann die gesuchte flache kohärente Garbe.

„(ii) \Rightarrow (iv)“: Wir setzen $C' := d/r + n_0 + 1 - g$. Angenommen es gibt eine Garbe \mathcal{E} mit $[\mathcal{E}] \in \mathcal{A}$ und einen Quotienten $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Q}$ mit $\mu(\mathcal{Q}) < -n_0 - 1 + g$. Mit Serres Dualitätssatz und dem Satz von Riemann–Roch berechnen wir

$$\begin{aligned} h^1(\mathcal{E}(n_0)) &= h^0(\mathcal{E}^\vee(-n_0) \otimes \omega_X) \geq h^0(\mathcal{Q}^\vee(-n_0) \otimes \omega_X) \\ &\geq \deg(\mathcal{Q}^\vee(-n_0) \otimes \omega_X) + \text{rk}(\mathcal{Q})(1 - g) \\ &= \text{rk}(\mathcal{Q})(-n_0 - 1 + g - \mu(\mathcal{Q})) > 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $h^1(\mathcal{E}(n)) = 0$.

„(ii) \Leftarrow (iv)“: Wir wählen $n_0 \geq 2g - \mu(\mathcal{E}) + C'$. Angenommen es gibt $n \geq n_0 - 1$ mit $h^1(\mathcal{E}(n)) = h^0(\mathcal{E}^\vee(-n) \otimes \omega_X) \neq 0$. Dann existiert ein nicht-trivialer Morphismus $\varphi: \mathcal{E}(n) \rightarrow \omega_X$. Es sei \mathcal{Q} das Bild von $\varphi(-n): \mathcal{E} \rightarrow \omega(-n)$. Da $\omega_X(-n)/\mathcal{Q}$ als Torsionsgarbe nicht-negativen Grad hat, finden wir

$$\deg(\mathcal{Q}) \leq \deg(\omega_X(-n)) = 2g - 2 - n.$$

Aus $\text{rk}(\mathcal{Q}) = 1$ und der Voraussetzung an $\mu(\mathcal{Q})$ folgt

$$n \leq 2g - 2 - \deg(\mathcal{Q}) \leq 2g - 2 - \mu(\mathcal{E}) + C' = n_0 - 2;$$

ein Widerspruch zur Annahme. Es folgt also $h^1(\mathcal{E}(n)) = 0$ und $h^1(\mathcal{E}(n)(-x)) = 0$ für jedes $n \geq n_0$ und jeden Punkt $x \in X$. Aus der kurzen exakten Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{E}(n)(-x) \rightarrow \mathcal{E}(n) \rightarrow \mathcal{E}|_x \rightarrow 0$ erhalten wir dann die exakte Kohomologie-Sequenz

$$H^0(\mathcal{E}(n)(-x)) \rightarrow H^0(\mathcal{E}(n)) \rightarrow \mathcal{E}|_x \rightarrow 0.$$

Da x beliebig gewählt werden kann, ist $\mathcal{E}(n)$ global erzeugt.

„(iii) \Leftrightarrow (iv)“: Dies folgt sofort aus Lemma 4.6. □

Bemerkung 4.8. Die Familie der Isomorphieklassen der Vektorbündel

$$E_k := \mathcal{O}_X(d+k) \oplus \mathcal{O}_X(-k) \oplus \mathcal{O}_X^{\oplus(r-2)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ist nach dem Lemma nicht beschränkt. Es ist daher unmöglich, eine parametrisierte Familie zu konstruieren, die alle Vektorbündel mit Grad d und Rang r enthält.

Lemma 4.9. *Es gibt ein offenes $\text{PGL}(Y)$ -invariantes Unterschema $\text{Quot}_n^0 \subset \text{Quot}_n$, so dass ein Punkt t genau dann in Quot_n^0 liegt, wenn $Q_t := Q|_{\{t\} \times X}$ ein Vektorbündel ist und $H^0(q_t(n))$ ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Zunächst definiert die Menge der Punkt $t \in \text{Quot}_n^0$, so dass $H^0(q_t(n))$ ein Isomorphismus ist, ein offenes Unterschema $U_1 \subset \text{Quot}_n^0$. Nach Korollar 4.2 ist die Menge U_2 der Punkte $t \in \text{Quot}_n$, so dass Q_t lokal frei ist, ebenfalls offen. Also ist $\text{Quot}_n^0 = U_1 \cap U_2$ offen. □

4. Vektorbündel

Lemma 4.10. *Es sei \mathcal{A} eine beschränkte Familie von Isomorphieklassen von Vektorbündeln von Rang r und Grad d . Dann ist für $n \geq n_0$ die auf Quot_n^0 eingeschränkte Familie Q lokal universell.*

Beweis. Es sei S ein Schema und E_S eine parametrisierte Familie von Vektorbündeln von Grad D und Rang r auf $S \times X$, so dass für jeden Punkt $s \in S$ das Bündel $E_{S|\{s\} \times X}$ zu \mathcal{A} gehört. Wegen Proposition 4.7, (ii), gilt dann $h^1(E_{S|\{s\} \times X}(n)) = 0$ für jeden Punkt $s \in S$. Aufgrund der Flachheit von E_S ist $\text{pr}_{S^*}(E_S(n))$ ein Vektorbündel von Rang $p(n)$ auf S . Zu einem Punkt $s \in S$ gibt es dann eine offene Umgebung U und eine Trivialisierung $\varphi: Y \otimes \mathcal{O}_U \rightarrow \text{pr}_{S^*} E_S(n)$. Die Verknüpfung mit der nach (ii) surjektiven Auswertungsabbildung

$$Y \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow \text{pr}_S^* \text{pr}_{S^*}(E_S(n))|_{U \times X} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}(-n) \rightarrow E_{S|U \times X} \rightarrow 0$$

stellt $E_{S|U \times X}$ als Quotienten von $Y \otimes \mathcal{O}_{U \times X}(-n)$ dar. Es gibt dann nach Proposition 2.21 einen eindeutigen Morphismus $f: U \rightarrow \text{Quot}(Y \otimes \text{pr}_X^*(\mathcal{O}_X(-n)), d, r)$ mit $(f \times \text{id}_X)^* Q \cong E_{S|U \times X}$. Der Morphismus f faktorisiert offensichtlich durch Quot_n^0 . \square

Lemma 4.11. *Es sei S ein Schema, $f_1, f_2: S \rightarrow \text{Quot}_n^0$ zwei Morphismen und $E_i := (f_i \times \text{id}_X)^* Q$, $i = 1, 2$. Es gilt genau dann $E_1 \sim E_2$, wenn es einen Morphismus $g: S \rightarrow \text{PGL}(Y)$ gibt, so dass $\rho(g, f_1) = f_2$ gilt.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Es sei L ein Geradenbündel auf S und $\varphi: E_1 \rightarrow E_2 \otimes \text{pr}_S^* L$ ein Isomorphismus. Dann erhalten wir einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} Y \otimes \mathcal{O}_S & \dashrightarrow & Y \otimes L \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \text{pr}_{S^*}(E_1 \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(n)) & \xrightarrow{\text{pr}_{S^*}(\varphi(n))} & \text{pr}_{S^*}(E_2 \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(n)) \otimes L, \end{array}$$

der den gesuchten Morphismus $g: S \rightarrow \text{PGL}(Y)$ induziert.

„ \Leftarrow “: Es sei $g: S \rightarrow \text{PGL}(Y)$ ein Morphismus mit $\rho(g, f_1) = f_2$. Es sei $i: \text{PGL}(Y) \rightarrow \mathbb{P}(\text{End}(Y)^\vee)$ die kanonische Einbettung. Wir setzen $L := g^* i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\text{End}(Y)^\vee)}(1)$. Der Morphismus g entspricht einem Isomorphismus $g': Y \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow Y \otimes L$, so dass

$$\begin{array}{ccccc} Y \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) & \xrightarrow{f_1^* g} & E_1 & \longrightarrow & 0 \\ g' \downarrow & & \downarrow & & \\ Y \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \otimes \text{pr}_S^* L & \xrightarrow{f_2^* g \otimes \text{id}_{\text{pr}_S^* L}} & E_2 \otimes \text{pr}_S^* L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutiert. Also induziert g' einen Isomorphismus $E_1 \cong E_2 \otimes \text{pr}_S^* L$. \square

Wenn man die Menge der betrachteten Vektorbündel einschränkt auf die Vektorbündel, die für großes n im stabilen Ort $\text{Quot}_n^{0,s}$ liegen, erhält man nach Proposition 2.11 den groben Modulraum als Quotienten $\text{Quot}_n^{0,s} / \text{PGL}(Y)$.

4.2. Stabilität

Proposition 4.7 motiviert folgende Definition:

Definition 4.12. Ein Vektorbündel E heißt *(semi)stabil*, falls für jede echte Untergarbe \mathcal{F} mit $\text{rk}(\mathcal{F}) \neq 0$ gilt

$$\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(E).$$

Bemerkung 4.13. (i) Aus dem Beweis zu Proposition 4.7 folgt insbesondere, dass für jedes $n \geq n_0 := 2g - d/r$ zu jedem semistabilen Vektorbündel E ein Punkt $t \in \text{Quot}_n^0$ mit $Q_t \cong E$ existiert.

(ii) Es sei E ein Vektorbündel, \mathcal{F} eine echte nicht-triviale Untergarbe und $T(Q)$ die Torsionsuntergarbe des Quotienten $Q := E/\mathcal{F}$. Dann gilt für das von \mathcal{F} generisch erzeugte Unterbündel $F := \ker(E \rightarrow Q/T(Q))$ die Ungleichung $\deg(\mathcal{F}) \leq \deg(F)$. Insbesondere ist E genau dann (semi)stabil, wenn für jedes echte nicht-triviale Unterbündel F von E gilt

$$\mu(F) \leq \mu(E).$$

(iii) Wenn r und d teilerfremde Zahlen sind, ist jedes semistabile Vektorbündel mit $\text{rk}(E) = r$ und $\deg(E) = d$ auch stabil.

(iv) Nach Lemma 4.6 ist ein Vektorbündel E genau dann (semi)stabil, wenn für jeden nicht-trivialen Quotienten $q: E \rightarrow Q$ die Ungleichung $\mu(E) \leq \mu(Q)$ erfüllt ist.

Lemma 4.14 ([28, Prop. 5.3.3]). *Es seien E, F semistabile Vektorbündel mit $\mu(E) = \mu(F)$ und $f: E \rightarrow F$ ein nicht-trivialer Homomorphismus*

(i) *Falls E stabil ist, ist f injektiv.*

(ii) *Falls F stabil ist, ist f surjektiv.*

(iii) *Falls E und F stabil sind und $f': E \rightarrow F$ ein weiterer Homomorphismus ist, gilt $f' = \lambda \cdot f$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Beweis. (i) Falls $\ker(f)$ nicht-trivial ist, gilt $\mu(\ker(f)) < \mu(E)$ wegen der Stabilität von E . Aus Lemma 4.6 folgt, dass $\mu(\text{im}(f)) > \mu(E) = \mu(F)$ gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Semistabilität von F .

(ii) Angenommen $\text{im}(f)$ ist eine echte Untergarbe von F . Dann gilt $\mu(\text{im}(f)) < \mu(F)$ aufgrund der Stabilität von F , woraus wiederum $\ker(f) > \mu(F) = \mu(E)$ folgt. Dies widerspricht der Semistabilität von E .

(iii) Nach (i) und (ii) ist f ein Isomorphismus. Es sei $x \in X$ ein Punkt und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der Einschränkung $(f^{-1} \circ f')|_{\{x\}}$. Dann ist $f' - \lambda \cdot f$ nicht surjektiv und somit trivial. \square

Definition 4.15. Es sei E ein Vektorbündel über X . Eine Filtrierung

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$$

heißt *Harder-Narasimhan-Filtrierung* von E , falls für $i = 1, \dots, n$ E_i/E_{i-1} semistabil ist und $\mu(E_i/E_{i-1}) > \mu(E_{i+1}/E_i)$ gilt für $i = 1, \dots, n-1$

4. Vektorbündel

Proposition 4.16 ([28, Prop. 5.4.2]). *Jedes Vektorbündel E besitzt eine eindeutige Harder–Narasimhan-Filtrierung.*

Beweis. Wir beweisen die Existenz per Induktion über $r = \text{rk}(E)$. Für $r \leq 1$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $r > 1$. Wir setzen $S = \{0 \neq F \subset E \mid \mu(F) \text{ maximal}\}$ und wählen E_1 aus S mit maximalem Rang. Offensichtlich ist E_1 semistabil. Falls $E = E_1$ gilt, sind wir fertig. Andernfalls gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Harder–Narasimhan-Filtrierung

$$\{0\} = F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n = E/E_1$$

von E/E_1 . Wir setzen $E_i := \ker(E \rightarrow F_n/F_i)$ für $i = 2, \dots, n-1$. Dann sind $E_i/E_{i-1} \cong F_i/F_{i-1}$ semistabil und es gilt $\mu(E_i/E_{i-1}) > \mu(E_{i+1}/E_i)$. Wir betrachten nun die Sequenzen

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2/E_1 \rightarrow 0.$$

Wegen $\text{rk}(E_2) > \text{rk}(E_1)$ gilt nach Wahl von E_1 auch $\mu(E_2) < \mu(E_1)$ und daher $\mu(E_2) > \mu(E_1/E_2)$. Es folgt also $\mu(E_1) > \mu(E_1/E_2)$.

Nun zur Eindeutigkeit: Für $r \leq 1$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $r > 1$ und

$$\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = E$$

eine weitere Harder–Narasimhan-Filtrierung. Es sei $0 < t < m$ der Index mit $E_1 \not\subset F_{t-1}$, $E_1 \subset F_t$. Die Abbildung $\varphi: E_1 \rightarrow F_t/F_{t-1}$ ist daher nicht trivial. Aufgrund der Semistabilität gilt

$$\mu(E_1) \leq \mu(\text{im}(\varphi)) \leq \mu(F_t/F_{t-1}) \leq \mu(F_1).$$

Da nach Wahl von E_1 auch $\mu(F_1) \leq \mu(E_1)$ gilt, folgt die Gleichheit und daraus $t = 1$. Wiederum nach Wahl von E_1 folgt dann aus $E_1 \subset F_1$ auch $E_1 = F_1$. Für die Filtrierungen

$$\{0\} \subset E_2/E_1 \subset \cdots \subset E_n/E_1 \quad \text{und} \quad F_2/E_1 \subset \cdots \subset F_n/E_1$$

gilt die Behauptung nach Induktionsvoraussetzung. \square

Definition 4.17. Es sei E ein Vektorbündel und $\{0\} \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$ seine Harder–Narasimhan-Filtrierung. Dann ist $\mu_{\max}(E) := \mu(E_1)$ die *maximale Steigung* und $\mu_{\min}(E) := \mu(E/E_{n-1})$ die *minimale Steigung* von E .

Lemma 4.18. *Es sei E ein Vektorbündel. Dann gilt:*

- (i) *Jedes nicht-triviale Unterbündel $F \subset E$ erfüllt $\mu(F) \leq \mu_{\max}(E)$.*
- (ii) *Jeder nicht-triviale Quotient $q: E \rightarrow Q$ erfüllt $\mu(Q) \geq \mu_{\min}(E)$.*

Beweis. Teil (i) folgt direkt aus der Konstruktion der Filtrierung. Sei also Q ein Quotient mit minimaler Steigung und unter denen mit minimaler Steigung von maximalem Rang. Wir setzen $F_{n-1} := \ker(E \rightarrow Q)$. Dann ist $E/F_{n-1} = Q$ semistabil. Weiter sei $F_1 \subset \cdots \subset F_{n-1}$ die Harder–Narasimhan-Filtrierung von F_{n-1} . Wegen $\text{rk}(E/F_{n-2}) > \text{rk}(E/F_{n-1})$ gilt $\mu(E/F_{n-2}) > \mu(E/F_{n-1})$. Aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow F_{n-1}/F_{n-2} \rightarrow E/F_{n-2} \rightarrow E/F_{n-1} \rightarrow 0$$

folgt mit Lemma 4.6 $\mu(F_{n-1}/F_{n-2}) > \mu(E/F_{n-2}) > \mu(E/F_{n-1})$. Daher ist $F_1 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset E$ die Harder–Narasimhan-Filtrierung von E und es gilt $\mu(Q) = \mu(E/F_{n-1}) = \mu_{\min}(E)$. \square

4.3. Schnittstabilität

Definition 4.19. Eine kohärente Garbe \mathcal{E} auf X heißt *schnitt(semi)stabil*, falls für jede echte Untergarbe $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ gilt:

$$h^0(\mathcal{F}) \operatorname{rk}(\mathcal{E}) \leq h^0(\mathcal{E}) \operatorname{rk}(\mathcal{F}).$$

Bemerkung 4.20. (i) Jede schnittsemistabile kohärente Garbe ist lokal frei.

(ii) Ist E ein Vektorbündel, \mathcal{F} ein Untergarbe und F das von \mathcal{F} erzeugte Unterbündel, so gilt $h^0(\mathcal{F}) \leq h^0(F)$. Daher ist ein Vektorbündel E genau dann schnitt(semi)stabil, wenn für jedes echte nicht-triviale Unterbündel F gilt:

$$\frac{h^0(F)}{\operatorname{rk}(F)} \leq \frac{h^0(E)}{\operatorname{rk}(E)}.$$

(iii) Wenn \mathcal{E} eine schnitt(semi)stabile kohärente Garbe ist, gilt für jeden Quotienten Q

$$\frac{h^0(\mathcal{E})}{\operatorname{rk}(\mathcal{E})} \leq \frac{h^0(Q)}{\operatorname{rk}(Q)}.$$

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen jedoch nicht.

Wir setzen $n_0 := 2g - d/r$ wie in Bemerkung 4.13, (i).

Lemma 4.21. *Es sei $n \geq n_0$ und E ein Vektorbündel von Grad d und Rang r , so dass $E(n)$ schnittsemistabil ist. Dann gilt $h^1(E(n)) = 0$.*

Beweis. Angenommen $h^1(E(n)) = h^0(E^\vee(-n) \otimes \omega_X) \neq 0$ und $\varphi: E(n) \rightarrow \omega_X$ ist ein nicht-trivialer Morphismus. Wir setzen $Q := \operatorname{im}(\varphi)$. Mit dem Satz von Riemann–Roch und der Schnittsemistabilität berechnen wir

$$\mu(E) + n + 1 - g \leq \frac{h^0(E(n))}{\operatorname{rk}(E)} \leq h^0(Q) \leq h^0(\omega_X) = g,$$

im Widerspruch zu $n \geq n_0 \geq 2g - d/r$. □

Proposition 4.22. *Es sei $n \geq n_0$, E ein Vektorbündel von Grad d und Rang r , so dass $E(n)$ schnittsemistabil ist und \mathcal{F} eine nicht-triviale Untergarbe. Dann gilt:*

$$\frac{h^0(\mathcal{F}(n))}{\operatorname{rk}(\mathcal{F})} \leq \frac{h^0(E(n))}{\operatorname{rk}(E)} \implies \mu(\mathcal{F}) \leq \mu(E).$$

Beweis. Dies folgt aus dem vorangegangenen Lemma und dem Satz von Riemann–Roch. □

Lemma 4.23 ([28, Lemma 7.1.2]). (i) *Ein semistabiles Vektorbündel E erfüllt*

$$h^0(E) \leq \operatorname{rk}(E)[\mu(E) + 1]_+.$$

(ii) *Für ein beliebiges Vektorbündel E gilt*

$$h^0(E) \leq (\operatorname{rk}(E) - 1)[\mu_{\max}(E) + 1]_+ + [\mu_{\min}(E) + 1]_+.$$

4. Vektorbündel

Beweis. (i) Wir beweisen die Behauptung per Induktion über den Grad $d := \deg(E)$. Für $d < 0$ gibt es keine nicht-trivialen globalen Schnitte, da ein solcher Schnitt eine Untergarbe F mit $\deg(F) = 0$ bestimmt. Es sei nun $d \geq 0$. Wir nehmen an, dass die Behauptung für kleinere Grade bewiesen ist, und betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow E(-1) \rightarrow E \rightarrow E|_{x_0} \rightarrow 0$$

Es folgt $h^0(E) \leq h^0(E(-1)) + \text{rk}(E)$. Nach Voraussetzung gilt

$$h^0(E(-1)) \leq \deg(E(-1)) + \text{rk}(E) = d.$$

(ii) Es sei nun E ein beliebiges Vektorbündel von Rang r und $\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n = E$ die Harder–Narasimhan-Filtrierung. Dann gilt

$$\begin{aligned} h^0(E) &= \sum_{i=1}^n h^0(E_i/E_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (\text{rk}(E_i) - \text{rk}(E_{i-1})) [\mu(E_i/E_{i-1}) + 1]_+ \\ &\leq (r-1) [\mu_{\max}(E) + 1]_+ + [\mu_{\min}(E) + 1]_+. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.24. *Es gibt ein $n_1 \geq n_0$, so dass für jedes $n \geq n_1$, jedes semistabile Vektorbündel E von Grad d und Rang r und jede nicht-triviale Untergarbe $\mathcal{F} \subset E$ gilt:*

$$h^1(\mathcal{F}(n)) \neq 0 \implies \frac{h^0(\mathcal{F}(n))}{\text{rk}(\mathcal{F})} < \frac{h^0(E(n))}{\text{rk}(E)}.$$

Beweis. Wir teilen die Menge der Isomorphieklassen von Garben \mathcal{F} , zu denen ein semistabiles Vektorbündel E mit $\mathcal{F} \subset E$ existiert, in zwei Klassen:

$$\begin{aligned} A &:= \{\mathcal{F} \mid \mu_{\min}(\mathcal{F}) < \mu(E) - g \text{rk}(\mathcal{F})\}, \\ B &:= \{\mathcal{F} \mid \mu_{\min}(\mathcal{F}) \geq \mu(E) - g \text{rk}(\mathcal{F})\}. \end{aligned}$$

Es sei \mathcal{F} eine Untergarbe aus A . Nach Lemma 4.23 gilt

$$\frac{h^0(\mathcal{F}(n))}{\text{rk}(\mathcal{F})} \leq \left(\frac{\text{rk}(\mathcal{F}) - 1}{\text{rk}(\mathcal{F})} \right) [\mu_{\max}(\mathcal{F}) + n + 1]_+ + \frac{1}{\text{rk}(\mathcal{F})} [\mu_{\min}(\mathcal{F}) + n + 1]_+$$

Durch Einsetzen von $\mu_{\max}(\mathcal{F}) \leq \mu(E)$ und der Definition von A erhält man mit $h^1(E(n)) = 0$

$$\frac{h^0(\mathcal{F}(n))}{\text{rk}(\mathcal{F})} < \mu(E) + n + 1 - g = \frac{h^0(E(n))}{\text{rk}(E)}.$$

Für eine Garbe \mathcal{F} aus B gilt wegen der Semistabilität von E

$$\mu(E) - g \text{rk}(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{F}) \leq \mu(E).$$

Es sind daher nur endlich viele Kombinationen von Grad und Rang möglich. Nach Proposition 4.7 gibt es ein $n_1 \geq n_0$ mit $h^1(\mathcal{F}(n)) = 0$ für alle $n \geq n_1$ und $\mathcal{F} \in B$. □

Lemma 4.25. *Es sei $n \geq n_1$, E ein semistabiles Vektorbündel von Rang r und Grad d und \mathcal{F} eine nicht-triviale Untergarbe. Dann gilt:*

$$\frac{h^0(\mathcal{F}(n))}{\text{rk}(\mathcal{F})} (\leq) \frac{h^0(E(n))}{\text{rk}(E)} \iff \mu(\mathcal{F})(\leq) \mu(E).$$

Beweis. Falls $h^1(\mathcal{F}(n)) = 0$ gilt, findet man mit dem Satz von Riemann–Roch

$$\frac{h^0(\mathcal{F}(n))}{\text{rk}(\mathcal{F})} = \mu(\mathcal{F}) + n + 1 - g(\leq) \mu(E) + n + 1 - g = \frac{h^0(E(n))}{\text{rk}(E)}.$$

Andernfalls folgt die Behauptung aus dem vorangegangenen Lemma. \square

Korollar 4.26 ([28, Prop. 7.1.1 und 7.1.3]). *Es sei \mathcal{E} eine kohärente Garbe von Rang r und Grad d und $n \geq n_1$. Dann ist $\mathcal{E}(n)$ genau dann schnitt(semi)stabil ist, wenn \mathcal{E} ein (semi)stabiles Vektorbündel ist. In diesem Fall gilt für jede nicht-triviale Untergarbe \mathcal{F}*

$$\frac{h^0(\mathcal{F}(n))}{\text{rk}(\mathcal{F})} (\leq) \frac{h^0(\mathcal{E}(n))}{\text{rk}(\mathcal{E})} \iff \mu(\mathcal{F})(\leq) \mu(\mathcal{E}).$$

4.4. Vergleich der Stabilitätsbegriffe

Das Quot-Schema $\text{Quot}_n = \text{Quot}(Y \otimes \mathcal{O}_X(-n), d, r)$ wurde in Abschnitt 2.4 als Unterschema einer Graßmann-Varietät $\text{Gr}_m := \text{Gr}(\mathbb{C}^{p(n)} \otimes H^0(\mathcal{O}_X(m-n)), p(m))$ mit $m \geq m_0$ konstruiert. Die Gruppenwirkung und die Linearisierung in einem amplen Geradenbündel erhält man durch Einschränkung. Wir untersuchen nun, wie die Stabilität von der Wahl von m abhängt. Beispiel 3.35 zeigt, dass ein Punkt $t \in \text{Quot}_n$ genau dann GIT-(semi)stabil bezüglich der Einbettung in Gr_m ist, wenn für jeden Unterraum $U \subset Y$ gilt

$$\frac{\dim(H^0(Q_t(m)))}{\dim(Y)} (\leq) \frac{\dim(H^0(q_t(m))(U \otimes H^0(\mathcal{O}_X(m-n))))}{\dim(U)}.$$

Definition 4.27. Ein Punkt $t \in \text{Quot}_n$ heißt *asymptotisch GIT-(semi)stabil*, falls es zu jedem Unterraum $U \subset Y$ eine Konstante c gibt, so dass für alle $m \geq c$ gilt

$$\frac{\dim(H^0(Q_t(m)))}{\dim(Y)} (\leq) \frac{\dim(H^0(q_t(m))(U \otimes H^0(\mathcal{O}_X(m-n))))}{\dim(U)}.$$

Bemerkung 4.28. Aus Serres Verschwindungssatz und dem Satz von Riemann–Roch ergibt sich, dass ein Punkt $t \in \text{Quot}_n$ genau dann asymptotisch GIT-(semi)stabil ist, falls für jeden Unterraum $U \subset Y$ und die von U erzeugte Garbe \mathcal{F} gilt:

- a) $\text{rk}(Q_t) \dim(U) \leq \text{rk}(\mathcal{F}) \dim(Y)$ und
- b) $\text{rk}(Q_t) \dim(U) = \text{rk}(\mathcal{F}) \dim(Y) \implies \mu(Q_t)(\leq) \mu(\mathcal{F})$.

Lemma 4.29. *Es gibt ein $n_2 \geq n_1$, so dass für alle $n \geq n_2$ gilt: Wenn $t \in \text{Quot}_n$ ein Punkt ist, so dass für jeden Unterraum $U \subset Y$ und die von U erzeugte Untergarbe \mathcal{F}*

$$\text{rk}(Q_t) \dim(U) \leq \text{rk}(\mathcal{F}) \dim(Y)$$

gilt, dann ist $H^0(q_t(n)): Y \rightarrow H^0(Q_t(n))$ ein Isomorphismus und $Q_t(n)$ ist schnittsemi-stabil.

4. Vektorbündel

Beweis. Es sei $U := \ker H^0(Q_t(n))$. Dann ist die von U erzeugte Untergarbe \mathcal{F} trivial. Aus der Voraussetzung folgt

$$\dim(U) \operatorname{rk}(E) \leq p(n) \operatorname{rk}(\mathcal{F}) = 0,$$

so dass $H^0(Q_t(n))$ injektiv ist.

Angenommen es gilt $h^1(Q_t(n)) = h^0(Q_t^\vee(-n) \otimes \omega_X) \neq 0$ und $\varphi: Q_t(n) \rightarrow \omega_X$ ist ein nicht-trivialer Homomorphismus. Es sei $L := \operatorname{im}(\varphi)$, $U := \ker(Y \rightarrow H^0(L))$ und \mathcal{F} die von U erzeugte Untergarbe von Q_t . Aus den Ungleichungen

$$\begin{aligned} p(n) - h^0(L) &\leq \dim(U) \\ \operatorname{rk}(\mathcal{F}) &\leq \operatorname{rk}(Q_t) - 1 \end{aligned}$$

und der Voraussetzung ergibt sich

$$d/r + n + 1 - g = \frac{p(n)}{\operatorname{rk}(E)} \leq h^0(Q) \leq h^0(\omega_X) = g.$$

Für $n \geq 2g - d/r$ gilt also $h^1(Q_t(n)) = 0$. Insbesondere ist $H^0(Q_t(n))$ wegen $h^0(Q_t(n)) = p(n)$ ein Isomorphismus.

Es sei \mathcal{F} eine echte nicht-triviale Untergarbe. Falls $h^0(\mathcal{F}(n)) = 0$ gilt, ist nichts zu tun. Andernfalls sei \mathcal{G} die von $H^0(Q_t(n))^{-1}(H^0(\mathcal{F}(n)))$ erzeugte Untergarbe. Dann gilt $\operatorname{rk}(\mathcal{G}) \leq \operatorname{rk}(\mathcal{F})$ und $h^0(\mathcal{G}(n)) = h^0(\mathcal{F}(n))$. Nach Voraussetzung gilt $\operatorname{rk}(Q_t)h^0(\mathcal{F}(n)) \leq \operatorname{rk}(\mathcal{G}) \dim(Y) \leq \operatorname{rk}(\mathcal{F}) \dim(Y)$. Dies zeigt die Schnittsemistabilität. \square

Proposition 4.30 ([28, Lemma 7.2.4]). *Für $n \geq n_2$ gilt: Ein Punkt $t \in \operatorname{Quot}_n$ ist genau dann asymptotisch GIT-(semi)stabil, wenn $H^0(Q_t(n)): Y \rightarrow H^0(Q_t(n))$ ein Isomorphismus ist und $Q_t(n)$ schnitt(semi)stabil ist.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Das vorangegangene Lemma sagt, dass $H^0(Q_t(n))$ ein Isomorphismus ist und $Q_t(n)$ schnittsemistabil ist. Wir nehmen nun an, dass t GIT-stabil ist und eine echte Untergarbe \mathcal{F} mit $\operatorname{rk}(Q_t)h^0(\mathcal{F}(n)) = \operatorname{rk}(\mathcal{F}) \dim(Y)$ existiert. Aus Lemma 4.25 ergibt sich $\mu(\mathcal{F}) = \mu(Q_t)$, während Bemerkung 4.28, b) $\mu(Q_t) < \mu(\mathcal{F})$ impliziert. Also muss Q_t schnittstabil sein.

„ \Leftarrow “: Es sei $t \in \operatorname{Quot}_n$ ein Punkt, so dass $Q_t(n)$ schnitt(semi)stabil ist, $U \subset Y$ ein echter nicht-trivialer Unterraum und $\mathcal{F} \subset Q_t$ die von U erzeugte Garbe. Wir dürfen $U = H^0(\mathcal{F}(n))$ annehmen. Die Schnitt(semi)stabilität besagt

$$\frac{\dim(U)}{\operatorname{rk}(\mathcal{F})} (\leq) \frac{\dim(Y)}{\operatorname{rk}(Q_t)}.$$

Wenn die Ungleichung stark ist, sind die Bedingungen für asymptotische GIT-Stabilität aus Bemerkung 4.28 erfüllt. Wenn Gleichheit gilt, haben wir wegen Lemma 4.25 auch $\mu(Q_t) = \mu(\mathcal{F})$, so dass die Bedingungen für asymptotische GIT-Semistabilität erfüllt sind. \square

Lemma 4.31 ([28, Lemma 7.2.3]). *Die Menge der Isomorphieklassen der Garben der Form $\mathcal{F} = q_t(U \otimes \mathcal{O}_X(-n)) \subset Q_t$ und $\mathcal{K} = \ker(U \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow Q_t)$ für einen Punkt $t \in \operatorname{Quot}_n$ und einen Unterraum $U \subset Y$ ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $\text{Gr}(Y, i)$ die Graßmann-Varietät der i -dimensionalen Quotienten von Y , $\kappa_i: Y \otimes \mathcal{O}_{\text{Gr}(Y, i)} \rightarrow W_{\text{Gr}(Y, i)}$ der universelle Quotient und $U_{\text{Gr}(Y, i)}$ der Kern. Wir betrachten auf $\text{Gr}(Y, i) \times \text{Quot}_n \times X$ den Homomorphismus

$$\varphi_i: \text{pr}_{\text{Gr}(Y, i)}^* U_{\text{Gr}(Y, i)} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow Y \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow \text{pr}_{\text{Quot}_n}^* Q.$$

Nach Lemma 2.28 lässt sich $S := \text{Gr}(i, Y) \times \text{Quot}_n$ in endlich viele Unterschemata S_l zerlegen, so dass $\text{im}(\varphi_i)$ flach über $S_{l, i}$ ist. Das gleiche ist für $\ker(\varphi_i)$ möglich. \square

Lemma 4.32 ([28, Lemma 7.2.2]). *Es gibt ein $m_1 \geq m_0$, so dass für jedes $m \geq m_1$ gilt: Ein Punkt $t \in \text{Quot}_n$ ist genau dann GIT-(semi)stabil bezüglich der Einbettung in Gr_m , wenn er asymptotisch GIT-(semi)stabil ist.*

Beweis. Da die Menge der Isomorphieklassen kohärenter Garben der Form $\mathcal{F} = q_t(U \otimes \mathcal{O}_X(-n))$ und $\mathcal{K} := \ker(U \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow Q_t)$ für einen Unterraum $U \subset Y$ beschränkt ist, gibt es nach Proposition 4.7 zunächst ein $m'_1 \geq m_0$, so dass für alle $m \geq m_1$ und $U \subset Y$ gilt: $h^1(\mathcal{F}(m)) = 0$ und $h^1(\mathcal{K})(m) = 0$. Insbesondere ist $U \otimes H^0(\mathcal{O}_x(m-n)) \rightarrow H^0(\mathcal{F}(m))$ surjektiv. Daher gilt

$$\dim(H^0(q_t(m))(U \otimes H^0(\mathcal{O}_X(m-n)))) = h^0(\mathcal{F}(m)) = \deg(\mathcal{F}) + \text{rk}(\mathcal{F})(m+1-g),$$

Aufgrund der Beschränktheit gibt es außerdem Zahlen d_{\min} und d_{\max} , so dass $d_{\min} \leq \deg(\mathcal{F}) \leq d_{\max}$ für alle von einem Unterraum U erzeugten Untergarben \mathcal{F} gilt. Für $m > m_1 := \max\{m'_1, (d_{\max} - d_{\min})p(n) + |d| + g - 1\}$ folgt dann die Behauptung. \square

Zusammen mit Korollar 4.26 und Proposition 4.30 ergibt sich:

Korollar 4.33. *Für $n \geq n_2$ und $m \geq m_1(n)$ ist ein Punkt $t \in \text{Quot}_n$ genau dann GIT-(semi)stabil bezüglich der Einbettung in Gr_m , wenn Q_t ein (semi)stabiles Vektorbündel und $H^0(q_t(n))$ ein Isomorphismus ist.*

Proposition 4.34 ([28, 7.2.1]). *Der grobe Modulraum der stabilen Vektorbündel vom Grad d Rang r existiert.*

Beweis. Nach Lemma 4.10 und Korollar 4.33 existiert eine lokal universelle Familie stabiler Vektorbündel auf Quot_n . Nach Lemma 4.11 ist die Wirkung von $\text{SL}(Y)$ verträglich. Es folgt nun aus Proposition 2.11, dass $M^s := \text{Quot}_n^s / \text{SL}(Y)$ der grobe Modulraum ist. \square

Bemerkung 4.35. Der Modulraum M^s besitzt nach Proposition 3.16 die Kompaktifizierung $M^{\text{ss}} := \text{Quot}_n^{\text{ss}} // \text{SL}(Y)$. Dieser Raum ist der grobe Modulraum der S-Äquivalenzklassen semistabiler Vektorbündel (siehe Abschnitt 4.6).

4.5. Der Gieseker-Morphismus

Die Einbettung des Quot-Schemas in einen projektiven Raum geschieht nach folgender Strategie: Indem auf einen Quotienten $q: \mathcal{F} \rightarrow Q$ kohärenter Garben den Funktor der globale Schnitte anwendet, erhält man den Quotienten $\kappa := H^0(q(n)): H^0(\mathcal{F}(n)) \rightarrow H^0(Q(n))$ von Vektorräumen. Die $p(n)$ -fache äußere Potenz $\wedge^{p(n)} \kappa$ definiert dann einen

4. Vektorbündel

Punkt in $\mathbb{P}(\wedge^{p(n)} Y)$. Für einen Vektorbündelquotienten $q: Y \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow E$ kann man die Reihenfolge dieser Operationen vertauschen und gelangt so zum Gieseker-Morphismus [9].

Es sei Jac^d die Jacobi-Varietät, die Geradenbündel vom Grad d auf X beschreibt, und \mathcal{P} ein Poincarébündel auf $\text{Jac}^d \times X$. Es gibt dann einen $\text{SL}(Y)$ -invarianten Morphismus $\text{pr}_{\text{Jac}^d}: \text{Quot}_n^0 \rightarrow \text{Jac}^d$ und ein Geradenbündel A auf Quot_n^0 mit $(\text{pr}_{\text{Jac}^d} \times \text{id}_X)^* \mathcal{P} \otimes \text{pr}_{\text{Quot}_n^0}^* A \cong \det(Q)$.

Nach Proposition 4.7 gibt es ein $n_3 \geq n_1$, so dass für $n \geq n_3$ und jeden Punkt $t \in \text{Jac}^d$ das Geradenbündel $\mathcal{P}_{|\{t\} \times X}(rn)$ global erzeugt ist und $h^1(\mathcal{P}_{|\{t\} \times X}(rn)) = 0$ gilt.

Wir betrachten für eine Zahl n die Garbe

$$\mathcal{G}_n := \mathcal{H}om \left(\wedge^r Y \otimes \mathcal{O}_{\text{Jac}^d}, \text{pr}_{\text{Jac}^d *} (\mathcal{P} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(nr)) \right)$$

über Jac^d . Für $n \geq n_3$ ist \mathcal{G}_n lokal frei. Die Faser über einem Punkt $y \in \text{Jac}^d$ ist isomorph zu $\text{Hom} \left(\wedge^r Y, H^0(\mathcal{P}_{|\{y\} \times X}(nr)) \right)$. Der *Gieseker-Raum* ist das projektive Bündel $\text{Gies}_n := \mathbb{P}(\mathcal{G}_n^\vee)$. Durch Wahl von \mathcal{P} kann man erreichen, dass $\mathcal{O}_{\text{Gies}_n}(1)$ sehr ampel ist.

Auf Quot_n^0 haben wir den Homomorphismus

$$\text{pr}_{\text{Quot}_n^0 *} (\wedge^r q(n)): \wedge^r Y \otimes \mathcal{O}_{\text{Quot}_n^0} \rightarrow \text{pr}_{\text{Quot}_n^0 *} (\det(Q) \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(nr)).$$

Dies definiert den $\text{SL}(Y)$ -äquivarianten *Gieseker-Morphismus*

$$\text{gies}_n: \text{Quot}_n^0 \rightarrow \text{Gies}_n$$

über Jac^d mit $\text{gies}_n^* \mathcal{O}_{\text{Gies}_n}(1) = A$.

Lemma 4.36 ([9, Lemma 4.3]). *Der Morphismus gies_n ist injektiv.*

Beweis. Es sei $p \in \text{Quot}_n^0$ ein Punkt und $q: Y \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow E$ der entsprechende Quotient. Dann gilt $\det(E(n)) \cong (\text{pr}_{\text{Jac}^d} \times \text{id}_X)^* \mathcal{P}_{|\text{gies}_n(p) \times X}$. Es sei $f: \wedge^r Y \rightarrow H^0(\det(E(n)))$ ein Repräsentant von $\text{gies}_n(p)$. Da $\det(E(n))$ nach Wahl von n global erzeugt ist, folgt aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \wedge^r Y \otimes \mathcal{O}_X & \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{\mathcal{O}_X}} & H^0(\det(E(n)) \otimes \mathcal{O}_X) \\ \parallel & & \downarrow \text{ev} \\ \wedge^r Y \otimes \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\wedge^r q(n)} & \det(E(n)), \end{array}$$

dass man $\wedge^r q(n)$ aus $\text{gies}_n(p)$ zurückgewinnt. Dieser Homomorphismus definiert einen Schnitt $X \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^r Y \otimes \mathcal{O}_X)$, der durch $\text{Gr}(Y \otimes \mathcal{O}_X, r)$ faktorisiert. Nach Proposition 2.15 erhält man nun q als Rückzug des universellen Quotienten auf $\text{Gr}(Y \otimes \mathcal{O}_X, r)$. \square

Lemma 4.37. *Es sei E Vektorbündel von Rang r und Grad d und $q: Y \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow E$ ein generisch surjektiver Homomorphismus. Der Punkt*

$$\text{gies}_n(q) := \left[H^0(\wedge^r q(n)): \wedge^r Y \rightarrow H^0 \left(\wedge^r E(n) \right) \right] \in \text{Gies}_n$$

ist genau dann GIT-(semi)stabil, wenn für jeden echten Unterraum $\{0\} \neq U \subset Y$ und das von U erzeugte Unterbündel F gilt

$$\mathrm{rk}(E) \dim(U) (\leq) \mathrm{rk}(F) \dim(Y).$$

Beweis. Es sei $\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathrm{SL}(Y)$ eine Einparameteruntergruppe. Dann gibt es Gewichte $\gamma_1 < \dots < \gamma_{k+1}$ und eine Zerlegung $Y = \bigoplus_{i=1}^{k+1} Y^i$ mit $\lambda(t) \cdot y = t^{\gamma_i} y$ für $y \in Y^i$. Wir setzen $Y_j := \bigoplus_{i=1}^j Y^i$ für $1 \leq j \leq k+1$. Für ein Tupel $\underline{i} \in \{1, \dots, k+1\}^r$ bezeichnen wir mit $Y_{\underline{i}} \subset \bigwedge^r Y$ das Bild von $\bigotimes_{i=1}^r Y_{i_i}$. Für einen Punkt $f \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^r Y, H^0(\mathcal{O}_X(nr)))$ gilt dann

$$\mu(\lambda, [f]) = -\min\{\gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_r} \mid f|_{Y_{\underline{i}}} \neq 0\}.$$

Es sei nun $E_i \subset E$ das von Y_i erzeugte Unterbündel, $i = 1, \dots, k+1$. Dann finden wir

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, \mathrm{gies}_n(t)) &= -\sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i (\mathrm{rk}(E_i) - \mathrm{rk}(E_{i-1})) \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j (p(n) \mathrm{rk}(E_j) - \dim(Y_j) \mathrm{rk}(E)) \end{aligned}$$

mit $\alpha_j := (\gamma_{j+1} - \gamma_j)/r$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Lemma 4.38. *Es sei $p \in \mathrm{Quot}_n^0$ ein Punkt mit Quotient $q: Y \otimes \mathcal{O}(-n) \rightarrow E$.*

(i) *Für einen Unterraum $U \subset Y$ und die durch U erzeugte Untergarbe $F \subset E$ gilt*

$$\mathrm{rk}(E) h^0(F(n)) (\leq) \mathrm{rk}(F) \dim(Y) \implies \mathrm{rk}(E) \dim(U) (\leq) \mathrm{rk}(F) \dim(Y).$$

(ii) *Für ein Unterbündel F , $U := H^0(q(n))^{-1}(H^0(F(n)))$ und die von U erzeugte Untergarbe F' gilt*

$$\mathrm{rk}(E) h^0(F(n)) (\leq) \mathrm{rk}(F) \dim(Y) \iff \mathrm{rk}(E) \dim(U) (\leq) \mathrm{rk}(F') \dim(Y).$$

Beweis. (i) Dies folgt sofort aus $\dim(U) \leq h^0(F(n))$.

(ii) Dies folgt aus $\dim(U) = h^0(F(n))$ und $\mathrm{rk}(F') \leq \mathrm{rk}(F)$. \square

Korollar 4.39. *Für $n \geq n_3$ und einen Punkt $p \in \mathrm{Quot}_n^0$ ist Q_p ist genau dann (semi)stabil, wenn $\mathrm{gies}_n(p)$ GIT-(semi)stabil ist.*

Beweis. Dies folgt nun aus Korollar 4.26, Lemma 4.37 und Lemma 4.38 \square

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Quot}_n^{(s)s} := \mathrm{gies}_n^{-1}(\mathrm{Gies}_n^{(s)s})$ das offene Unterschema der Punkte mit (semi)stabilem Vektorbündel.

Proposition 4.40 (vgl. [9, Lemma 4.5]). *Der Morphismus*

$$\mathrm{gies}_n^{\mathrm{ss}}: \mathrm{Quot}_n^{\mathrm{ss}} \rightarrow \mathrm{Gies}_n^{\mathrm{ss}}$$

ist für $n \geq n_2$ eigentlich.

4. Vektorbündel

Beweis. Wir benutzen das Bewertungskriterium. Es sei R ein diskreter Bewertungsring und K sein Quotientenkörper. Wir betrachten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(K) & \longrightarrow & \text{Quot}_n^{\text{ss}} \\ \downarrow & & \text{gies}_n^{\text{ss}} \downarrow \\ \text{Spec}(R) & \longrightarrow & \text{Gies}^{\text{ss}}. \end{array}$$

Da $\overline{\text{Quot}_n^0}$ projektiv ist, gibt es eine eindeutige Fortsetzung $f: \text{Spec}(R) \rightarrow \overline{\text{Quot}_n^0}$. Als Rückzug der universellen Familie erhalten wir daher eine Familie

$$q_R: Y \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow Q_R$$

auf $\text{Spec}(R) \times X$. Wir betrachten die modifizierte Familie

$$Y \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow Q_R \rightarrow Q_R^{\vee\vee} =: E_R.$$

Als reflexive Garbe über der regulären Fläche $\text{Spec}(R) \times X$ ist E_R lokal frei ([19, Prop. 1.3 und Cor. 1.4]). Am speziellen Punkt \mathfrak{m} ist der Kern der Abbildung $Q_{R,\mathfrak{m}} \rightarrow E_{R,\mathfrak{m}}$ gerade die Torsionsuntergarbe, der Morphismus $Y \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow E_{R,\mathfrak{m}}$ ist also generisch surjektiv. Über jedem Punkt $s \neq \mathfrak{m}$ stimmen $Q_{R,\mathfrak{m}}$ und $E_{R,\mathfrak{m}}$ überein. Der Morphismus

$$\text{pr}_{\text{Spec}(R)*} \left(\bigwedge^r Y \otimes \mathcal{O}_{\text{Spec}(R)} \right) \rightarrow \text{pr}_{\text{Spec}(R)*} \left(\bigwedge^r (E_R \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(n)) \right)$$

liefert einen Morphismus $\text{Spec}(R) \rightarrow \text{Gies}_n^{\text{ss}}$, der auf $\text{Spec}(K)$ mit dem gegebenen übereinstimmt. Nach Lemma 4.37 und $\text{rk}(Q_{R,\mathfrak{m}}) = \text{rk}(E_{R,\mathfrak{m}})$ gilt

$$\dim(U) \text{rk}(Q_{R,\mathfrak{m}}) \leq p(n) \text{rk}(\mathcal{F})$$

für jeden Unterraum $U \subset Y$ und die von U erzeugte Untergarbe \mathcal{F} . Aus Lemma 4.29 folgt dann, dass $H^0(q_{R,\mathfrak{m}}(n))$ ein Isomorphismus ist und $Q_{R,\mathfrak{m}}$ ein Vektorbündel ist. Somit faktorisiert f durch Quot_n^0 . \square

Alternativer Beweis von Proposition 4.34. Nach Proposition 3.16 existieren der projektive gute Quotient $\text{Gies}_n^{\text{ss}} // \text{SL}(Y)$ und der geometrische Quotient $\text{Gies}_n^s / \text{SL}(Y)$. Der Morphismus $\text{gies}_n^{\text{ss}}$ ist nach Lemma 4.36 injektiv, also insbesondere quasi-endlich, und nach Proposition 4.40 eigentlich. Nach [15, 8.11.1] ist gies_n dann auch endlich und insbesondere affin. Aufgrund von Proposition 3.17 existieren also auch der projektive gute Quotient $M^{\text{ss}} := \text{Quot}_n^{\text{ss}} // \text{SL}(Y)$ und der geometrische Quotient $M^s := \text{Quot}_n^s / \text{SL}(Y)$. Dass M^s der grobe Modulraum der stabilen Vektorbündel ist, folgt nun wie im ersten Beweis. \square

4.6. S-Äquivalenz

Der grobe Modulraum der stabilen Vektorbündel besitzt nach Konstruktion die Kompaktifizierung $\text{Quot}_n^{\text{ss}} // \text{SL}(Y)$. Nach Proposition 3.7 lässt sich dieser Raum als grober Modulraum von S-Äquivalenzklassen auffassen.

Lemma 4.41 ([24, Lemma 4.4.3]). *Es sei $p \in \text{Quot}_n$ ein Punkt mit Quotient $q := q_p: Y \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow Q_p$, λ eine Einparameteruntergruppe mit assoziierter Fahne $(Y_\bullet, \underline{\alpha})$, und $F_j \subset Q_p$ die durch Y_j , $j = 1, \dots, l(Y_\bullet)$ erzeugten Untergarben. Wenn $p_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t), p)$ der Limespunkt ist, dann gilt*

$$Q_{p_\infty} = \bigoplus_{j=1}^{l(Y_\bullet)} F_j / F_{j-1}.$$

Beweis. Wir wählen eine Spaltung $Y = \bigoplus_{i=1}^{l(Y_\bullet)+1} Y^i$ mit $Y_j = \bigoplus_{i=1}^j Y^i$, $j = 1, \dots, l(Y_\bullet)$. Wir betrachten auf $S := \text{Spec}(\mathbb{C}[t])$ die Garbe

$$\mathcal{Y} := \bigoplus_{i=1}^{l(Y_\bullet)+1} Y^i \otimes t^{(\gamma_i - \gamma_1)} \cdot \mathcal{O}_S = \sum_{j=1}^{l(Y_\bullet)+1} Y_j \otimes t^{(\gamma_j - \gamma_1)} \cdot \mathcal{O}_S$$

und den Isomorphismus

$$f: Y \otimes \mathcal{O}_S = \bigoplus_{i=1}^{l(Y_\bullet)+1} Y^i \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{Y}$$

gegeben durch Multiplikation eines Eigenraums Y^i mit $t^{\gamma_i - \gamma_1}$. Auf $U := S \setminus \{0\} = \text{Spec}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ gilt $\mathcal{Y} = Y \otimes \mathcal{O}_S$, und $f|_U$ entspricht dem Homomorphismus $\lambda \otimes t^{\gamma_1} \text{id}_{\mathcal{O}_S}$.

Wir betrachten nun auf $S \times X$ die Garbe

$$F_S := \sum_{j=1}^{l(Y_\bullet)+1} \text{pr}_X^* F_j \otimes t^{(\gamma_j - \gamma_1)} \cdot \mathcal{O}_S.$$

Der Quotient

$$q_S: Y \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \xrightarrow{f} \text{pr}_S^* \mathcal{Y} \otimes \text{pr}_X^*(-n) \xrightarrow{\text{pr}_X^* q \otimes \text{id}_{\mathcal{O}_S}} F_S$$

induziert einen Morphismus $h: S \rightarrow \text{Quot}_n$. Auf $U \times X$ gilt $F_S|_{U \times X} = \text{pr}_X^* F|_{U \times X}$ und $q_S|_U = \text{pr}_X^* q \circ (\lambda \otimes t^{\gamma_1} \text{id}_{\mathcal{O}_S})$. Somit haben wir $h(t) = \rho(\lambda^{-1}(t), p)$ für $t \neq 0$. Am Punkt $0 \in S$ erhalten wir nun

$$F_{S|\{0\} \times X} = F_S / t \cdot F_S \cong \bigoplus_{j=1}^{l(Y_\bullet)+1} F_j / F_{j-1}.$$

□

Lemma 4.42. *Es sei $n \geq n_3$, $p \in \text{Quot}_n^{\text{ss}}$ ein Punkt mit Quotient $q: Y \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow E$ und $\lambda \in X_*(\text{SL}(Y))$ eine Einparameteruntergruppe mit assoziierter Fahne $(Y_\bullet, \underline{\alpha})$. Es sei $E_j \subset E$ die von Y_j erzeugte Untergarbe, $j = 1, \dots, l(Y_\bullet)$. Wenn $\mu(\lambda, \text{gies}_n(p)) = 0$ gilt, dann gilt $\mu(E_j) = \mu(E)$, $Y_j = H^0(q(n))^{-1} H^0(E_j(n))$ und E_j ist ein Unterbündel, $j = 1, \dots, l(Y_\bullet)$.*

4. Vektorbündel

Beweis. Es sei $1 \leq j < l(Y_\bullet)$. Aus $\text{rk}(E) \dim(Y_j) = \text{rk}(E_j) \dim(Y)$ folgt mit Lemma 4.38, (i), und der Schnittsemistabilität $\text{rk}(E)h^0(E_j(n)) = \text{rk}(E_j) \dim(Y)$. Mit der Injektivität von $H^0(q(n))$ folgt sofort $Y_j = H^0(q(n))^{-1}H^0(E_j(n))$. Nach Korollar 4.26 gilt $\mu(E_j) = \mu(E)$. Wegen Lemma 4.24 folgt außerdem $h^1(E_j(n)) = 0$. Es sei nun E'_j das von E_j generisch erzeugte Unterbündel und $T_j := E'_j/E_j$. Wegen $h^1(E_j(n)) = 0$ gilt $h^0(E'_j(n)) = h^0(E_j(n)) + h^0(T_j)$. Aus der Schnittsemistabilität für E'_j folgt nun $T_j = 0$, so dass E_j ein Unterbündel ist. \square

Lemma 4.43. *Es sei $p \in \text{Quot}_n^{\text{ss}}$ ein Punkt mit Quotient $q: Y \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow E$, $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ eine gewichtete Fahne und $Y_j := H^0(q(n))^{-1}(H^0(E_j(n)))$, $j = 1, \dots, l(E_\bullet)$. Wenn $\mu(E_j) = \mu(E)$ gilt, dann folgt $\mu(Y_\bullet, \underline{\alpha}, \text{gies}_n(p)) = 0$ und E_j wird von Y_j erzeugt für $j = 1, \dots, l(E_\bullet)$.*

Beweis. Wegen Korollar 4.26 und der Schnittsemistabilität gilt $\text{rk}(E)h^0(E_j(n)) = \text{rk}(E_j)h^0(E_j(n))$. Es sei F_j die von Y_j erzeugte Untergarbe. Aus Lemma 4.38, (ii), folgt $\text{rk}(E) \dim(Y_j) = \text{rk}(F_j) \dim(Y)$. Also gilt $\text{rk}(E_j) = \text{rk}(F_j)$. Das vorangegangene Lemma zeigt dann $F_j = E_j$. \square

Definition 4.44. Es sei E ein semistabiles Vektorbündel und E_\bullet eine Fahne mit $\mu(E_i) = \mu(E)$, $i = 1, \dots, l(E_\bullet)$. Dann nennen wir

$$\text{df}_{E_\bullet}(E) := \bigoplus_{i=1}^{l(E_\bullet)} E_i/E_{i-1}$$

die *zulässige Deformation* von E entlang E_\bullet .

Korollar 4.45. *Die S-Äquivalenz (siehe Definition 3.5) wird durch die Relation $E \sim \text{df}_{E_\bullet}(E)$ für jedes semistabile Vektorbündel E und jede Fahne E_\bullet mit $\mu(E_j) = \mu(E)$, $j = 1, \dots, l(E_\bullet)$, erzeugt.*

Beweis. Dies folgt aus Bemerkung 3.27 und Lemma 4.41. \square

Im Fall der Vektorbündel lässt sich zu jeder S-Äquivalenzklasse ein eindeutiger Repräsentant bestimmen.

Definition 4.46. Es sei E ein semistabiles Vektorbündel auf X . Eine Filtrierung

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_s \subset E_{s+1} = E$$

heißt *Jordan-Hölder-Filtrierung*, falls $\mu(E_i) = \mu(E)$, $i = 0, \dots, s$ gilt und E_i/E_{i-1} stabil ist für $i = 1, \dots, s+1$. Das *assoziierte graduierte Objekt* ist das Vektorbündel

$$\text{gr}(E) := \bigoplus_{i=1}^{s+1} E_i/E_{i-1}.$$

Proposition 4.47 ([24, Prop. 1.5.2]). *Es sei E ein semistabiles Vektorbündel. Dann gilt:*

- (i) *Es existiert eine Jordan-Hölder-Filtrierung von E .*

(ii) Das assoziierte graduierte Objekt $\text{gr}(E)$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. (i) Der Beweis erfolgt per Induktion über $r = \text{rk}(E)$. Für $r = 1$ ist die Aussage klar. Es sei nun $r > 1$. Falls E stabil ist, ist $0 \subset E$ eine Filtrierung mit den geforderten Eigenschaften. Andernfalls gibt es ein echtes Unterbündel $F \subset E$ mit $\mu(F) = \mu(E)$. Nach Lemma 4.6 gilt für den Quotienten $Q := E/F$ ebenfalls $\mu(Q) = \mu(E)$ und F und Q sind semistabil. Nach Induktionsvoraussetzung existieren nun Filtrierungen

$$\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{t+1} = F \quad \text{und} \quad \{0\} = Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_{u+1} = Q$$

mit den obigen Eigenschaften. Wir setzen $K_i := \ker(E \rightarrow Q \rightarrow Q/Q_i)$ für $0 \leq i \leq u+1$. Dann ist

$$\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{t+1} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_{u+1} = E$$

die gesuchte Filtrierung.

(ii) Es seien $\{0\} = E_0 \subset \cdots \subset E_{s+1} = E$ und $\{0\} = F_0 \subset \cdots \subset F_{t+1} = E$ zwei Jordan-Hölder-Filtrierungen von E . Per Induktion über s zeigen wir $t = s$ und die Existenz eines Isomorphismus zwischen den assoziierten graduierten Objekten. Sei zunächst $s = 0$, so dass E stabil ist. Nach Lemma 4.14 ist der Homomorphismus $E \rightarrow E/F_t$ ein Isomorphismus. Es folgt $t = 0 = s$. Sei nun $s \geq 1$ vorausgesetzt. Es sei k der Index mit $E_1 \subset F_k$ und $E_1 \not\subset F_{k-1}$. Dann gibt es einen nicht-trivialen Homomorphismus $f: E_1 \rightarrow F_k/F_{k-1}$, der nach Lemma 4.14 ein Isomorphismus ist. Daher gilt $F_i \cap E_1 = \{0\}$ für $i \leq k-1$. Man überzeugt sich außerdem, dass $\mu(E_i/E_1) = \mu(E)$, $i = 2, \dots, s+1$ gilt, und E/E_1 semistabil ist. Dann sind die Filtrierungen

$$\begin{aligned} \{0\} \subset E_2/E_1 \subset \cdots \subset E/E_1 \quad \text{und} \\ \{0\} \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{k-1} = F_k/E_1 \subset \cdots \subset F_t/E_1 \subset E/E_1 \end{aligned}$$

Jordan-Hölder-Filtrierungen von E/E_1 . Nach Induktionsvoraussetzung gilt $s = t$ und es gibt einen Isomorphismus $g: \bigoplus_{i=2}^{s+1} E_i/E_{i-1} \rightarrow \bigoplus_{i=1, i \neq k}^{s+1} F_i/F_{i-1}$. Der Homomorphismus $f \oplus g$ ist dann der gesuchte Isomorphismus. \square

Definition 4.48. Ein Vektorbündel E mit $E \cong \text{gr}(E)$ heißt *polystabil*.

Das folgende Lemma zeigt, dass ein Punkt $p \in \text{Quot}_n^{\text{ss}}$ mit polystabilem Vektorbündel GIT-polystabil ist.

Lemma 4.49. *Es sei E ein polystabiles Vektorbündel und F_\bullet eine Fahne mit Steigungen $\mu(F_i) = \mu(E)$, $i = 1, \dots, l(F_\bullet)$. Dann gilt $E \cong \text{df}_{F_\bullet}(E)$.*

Beweis. Aus der Konstruktion ergibt sich, dass man F_\bullet zu einer Jordan-Hölder-Filtrierung E_\bullet ergänzen kann. Da E polystabil ist, folgt $E \cong \bigoplus_{i=1}^l E_i/E_{i-1}$. Insbesondere gibt es für $1 \leq i \leq l(F_\bullet)$ einen Index $1 \leq j(i) \leq l(E_\bullet)$ mit $F_i \cong \bigoplus_{j=1}^{j(i)} E_j/E_{j-1}$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Korollar 4.50. *Zwei semistabile Vektorbündel E und E' sind genau dann S-Äquivalent, wenn $\text{gr}(E) \cong \text{gr}(E')$ gilt.*

5. Prinzipalbündel

Dieses Kapitel formuliert die Ergebnisse über algebraische Prinzipalbündel aus Serres Artikel [49] in der Sprache der Stacks. Die Basiskategorie ist in diesem Kapitel die Kategorie $\underline{\text{Sch}}/k$ der Schemata über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k mit einer Grothendieck-Topologie (siehe Definition A.13). Für spätere Anwendungen werden wir $k = \mathbb{C}$ annehmen.

5.1. Faserbündel, gefaserte Systeme und Prinzipalbündel

Definition 5.1. Es seien F und X Schemata über k . Ein *Faserbündel mit typischer Faser F über X* ist eine Morphismus $p: B \rightarrow X$ über k , so dass es eine Überdeckung $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ und Isomorphismen $\varphi_i: f_i^*B \rightarrow Y_i \times_X F$ über Y_i für $i \in I$ gibt. Ein *Morphismus $f: p \rightarrow p'$ von Faserbündeln* ist ein Morphismus in $\underline{\text{Mor}}(\underline{\text{Sch}}/k)$, also ein kommutierendes Quadrat. Wir bezeichnen die Kategorie der Faserbündel mit typischer Faser F mit $\underline{\text{Fib}}_F$.

Lemma 5.2. *Die Kategorie $\underline{\text{Fib}}_F$ ist ein Prestack über $\underline{\text{Sch}}/k$. Wenn F affin oder projektiv mit amplem Geradenbündel $\mathcal{O}_F(1)$ ist, dann ist $\underline{\text{Fib}}_F$ ein Stack.*

Beweis. Zunächst ist $\underline{\text{Mor}}(\underline{\text{Sch}}/k)$ nach Korollar A.70 ein Prestack. $\underline{\text{Fib}}_F$ ist per Definition eine volle Unterkategorie von $\underline{\text{Mor}}(\underline{\text{Sch}}/k)$. Um Beispiel A.65, (i), anwenden zu können, müssen wir nachweisen, dass jeder Rückzug eines Faserbündels ebenfalls ein Faserbündel ist. Sei also $p: B \rightarrow X$ ein Faserbündel und $f: Y \rightarrow X$ ein Morphismus. Nach Voraussetzung gibt es eine Überdeckung $\{h_i: U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ und Isomorphismen $\varphi_i: h_i^*B \rightarrow U_i \times F$. Wegen Definition A.2 (i) ist $\{h'_i: Y \times_X U_i \rightarrow Y \mid i \in I\}$ eine Überdeckung von Y , und wir erhalten trivialisierende Isomorphismen $f_i'^* \varphi_i: h_i'^* f^* B \cong f_i'^* h_i^* B \rightarrow Y \times_X U_i \times F$ über $Y \times U_i$.

Wir zeigen nun, dass $\underline{\text{Fib}}_F$ eine lokale Unterkategorie von $\underline{\text{Mor}}(\underline{\text{Sch}}/k)$ ist. Dazu müssen wir nachweisen, dass jeder affine Morphismus $p: Z \rightarrow X$ mit einer Überdeckung $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$, so dass f_i^*Z ein Faserbündel ist, selbst ein Faserbündel ist. Nach Definition gibt es dann Überdeckungen $\{h_{ij}: V_{ij} \rightarrow Y_i \mid j \in J_i\}$ von Y_i und Isomorphismen $\varphi_{ij}: h_{ij}^* f_i^* Z \rightarrow V_{ij} \times F$. Da nach Definition A.2, (ii), $\{V_{ij} \rightarrow Y_i \rightarrow X \mid i \in I, j \in J_i\}$ eine Überdeckung von X ist, folgt die Behauptung.

Wenn F affin ist, dann ist $\underline{\text{Fib}}_F$ eine lokale Unterkategorie der Kategorie der affinen Morphismen $\underline{\text{AffMor}}(\underline{\text{Sch}}/k)$, die nach Proposition A.80 ein Stack ist. Aus Lemma A.82 folgt, dass $\underline{\text{Fib}}_F$ ein Stack ist. Wenn F projektiv ist, folgt die Behauptung aus Proposition A.83 \square

Definition 5.3. Seien G eine algebraische Gruppe, $\pi: P \rightarrow X$ ein Morphismus von Schemata über k und ρ eine Rechtswirkung von G auf P . Das Tupel (π, ρ) heißt

5. Prinzipalbündel

gefasertes System mit Gruppe G , wenn π G -invariant ist, d.h. wenn folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} P \times G & \xrightarrow{\rho} & P \\ \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \pi \\ P & \xrightarrow{\pi} & X. \end{array}$$

Ein Morphismus $(\varphi, f): (\pi: P \rightarrow X, \rho) \rightarrow (\pi': P' \rightarrow X, \rho')$ gefasertes Systeme ist ein Paar aus einem Morphismus $f: X \rightarrow X'$ und einem G -äquivariantem Morphismus $\varphi: P \rightarrow P'$ mit $\pi' \circ \varphi = f \circ \pi$, d.h. die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} P \times G & \xrightarrow{\rho} & P \\ \downarrow f \times \text{id}_G & & \downarrow f \\ P' \times G & \xrightarrow{\rho'} & P' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varphi} & P' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

Bemerkung 5.4. Es sei $\mathcal{F} := \underline{\text{Mor}}(\underline{\text{Sch}}/k)$ die gefaserte Kategorie der Morphismen und $F' := h_G \circ \text{pr}_1$ der durch die Gruppe G definierte Funktor. Dann sind die gefaserten Systeme aus Definition 5.3 gerade die Objekte der Kategorie der gefaserten Systeme $\mathcal{F}^{F'}$ aus Abschnitt A.7.1.

Beispiel 5.5. Für jedes Schema X ist das Tupel $(\text{pr}_1: X \times G \rightarrow X, \text{id}_X \times \mu)$ ein gefasertes System. Es wird das *triviale Bündel* genannt.

Definition 5.6. Es seien G eine algebraische Gruppe und X ein Schema. Ein *Prinzipalbündel* (oder *Hauptfaserbündel*) mit *Basis* X und *Strukturgruppe* G ist ein gefasertes System $(\pi: P \rightarrow X, \rho)$, so dass eine Überdeckung $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ und Isomorphismen $\varphi_i: f_i^* P \rightarrow Y_i \times G$ gefasertes Systeme über Y_i existieren. Ein Morphismus von Prinzipalbündeln ist ein Morphismus der gefaserten Systeme.

Wir bezeichnen der Kategorie der G -Prinzipalbündel mit $\underline{\text{Bun}}_G$.

Bemerkung 5.7. Die Prinzipalbündel in der étale endlichen Topologie (Definition A.13, (iii)) entsprechen den von Serre in [49] eingeführten lokal isotrivialen Prinzipalbündeln. Wir werden im Folgenden Prinzipalbündel in einer beliebigen Topologie aus Definition A.13 behandeln. Jedes Prinzipalbündel in einer gröberen Topologie ist auch ein Prinzipalbündel in der fppf-Topologie.

Proposition 5.8. Wenn G eine affine oder projektive algebraische Gruppe ist, dann bildet die Kategorie der G -Prinzipalbündel einen Stack über $\underline{\text{Sch}}/k$.

Beweis. Die Kategorie der gefaserten Systeme ist gerade die Kategorie

$$\text{pr}_2: \underline{\text{Mor}}(\underline{\text{Sch}})^G \rightarrow \underline{\text{Sch}}.$$

Sie ist nach Korollar A.70 und Korollar A.86 ein Prestack. Schränken wir uns auf affine Morphismen ein, so folgt mit Proposition A.80, dass $p: \underline{\text{AffMor}}(\underline{\text{Sch}})^G \rightarrow \underline{\text{Sch}}$ sogar ein Stack ist. Der Beweis, dass die volle Unterkategorie der G -Prinzipalbündel ein Stack ist, verläuft nun analog zum Beweis von Lemma 5.2. \square

Lemma 5.9. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ ein Morphismus. Dann ist jeder Morphismus $\varphi: X \times G \rightarrow Y \times G$ von G -Prinzipalbündeln eindeutig durch einen Morphismus $g: X \rightarrow G$ bestimmt.*

Beweis. Wir betrachten den Morphismus

$$g: X \cong X \times \text{Spec } k \xrightarrow{\text{id}_X \times e} X \times G \xrightarrow{\varphi} Y \times G \xrightarrow{\text{pr}_G} G.$$

Da φ fasertreu und G -äquivariant ist, gilt nun $\varphi = (f \circ \text{pr}_X, \mu \circ (g \times \text{id}_G))$. \square

Korollar 5.10. *Die Kategorie der G -Prinzipalbündel ist in Gruppoiden gefasert über Sch/k .*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass jeder Morphismus $\varphi: P \rightarrow P'$ von G -Prinzipalbündeln über X ein Isomorphismus ist.

(i) Seien zunächst P und P' trivial. Wir betrachten also einen Morphismus $\varphi: X \times G \rightarrow X \times G$. Nach dem vorangegangenen Lemma ist er gegeben durch einen Morphismus $g: X \rightarrow G$. Der durch $g^{-1} := \text{inv} \circ g$ bestimmte Morphismus $\psi = (\text{pr}_X, \mu \circ (g^{-1} \circ \text{pr}_X, \text{pr}_G))$ ist dann ein G -invarianter Morphismus über X , der offensichtlich invers zu φ ist.

(ii) Seien nun P und P' beliebige Prinzipalbündel. Es gibt eine Überdeckung $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$, die beide trivialisiert. Die Morphismen $\varphi_i := f_i^* \varphi$ sind nach Teil (i) Isomorphismen. Die inversen Morphismen erfüllen automatisch die Kozykelbedingung und steigen daher zu einem Morphismus $\psi: P' \rightarrow P$ ab, der invers zu φ ist. \square

Bemerkung 5.11. Zu einem G -Prinzipalbündel P über X gibt es eine Überdeckung $\mathcal{U} = \{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$, so dass $f_i^*(P) \cong Y_i \times G$ gilt. Wir erhalten als Abstiegsdatum G -äquivariante Isomorphismen

$$\varphi_{ij}: Y_i \times_X Y_j \times G \cong \text{pr}_2^* f_j^*(P) \rightarrow \text{pr}_1^* f_i^*(P) \cong Y_i \times_X Y_j \times G,$$

die die Kozykelbedingung A.4 erfüllen. Nach Lemma 5.9 entsprechen die φ_{ij} Morphismen $g_{ij}: Y_i \times Y_j \rightarrow G$, die dann die Bedingung

$$\mu \circ (\text{pr}_{12}^* g_{ij}, \text{pr}_{23}^* g_{jk}) = \text{pr}_{13}^* g_{ik} \quad (5.1)$$

erfüllen. Ist umgekehrt eine Familie von Morphismen $\{g_{ij}\}$ mit dieser Eigenschaft gegeben, so erfüllen die dadurch definierten Morphismen φ_{ij} die Kozykelbedingung und verkleben nach dem vorangegangenen Abschnitt die trivialen Bündel $Y_i \times Y_j \times G$ zu einem G -Prinzipalbündel über X . Wir bezeichnen eine solche Familie $\{g_{ij} \mid (i, j) \in I^2\}$ ebenfalls als *Kozykel* und die Menge aller Kozykel mit $Z(\mathcal{U})$.

Ein Morphismus $\varphi: P \rightarrow P'$ von Prinzipalbündeln, die auf \mathcal{U} trivial werden, entspricht einer Familie von Morphismen $\gamma_i: Y_i \rightarrow G$. Die Verträglichkeitsbedingung A.5 mit den Übergangsfunktionen wird dann zu

$$\mu \circ (g'_{ij}, \text{pr}_2^* \gamma_j) = \mu \circ (\text{pr}_1^* \gamma_i, g_{ij}). \quad (5.2)$$

Umgekehrt definiert jede Familie γ_i mit dieser Eigenschaft einen Morphismus $P \rightarrow P'$. Wir nennen zwei Kozykel $\{g_{ij}\}, \{g'_{ij}\} \in Z(\mathcal{U})$ äquivalent, wenn es eine Familie $\{\gamma_i\}$ gibt, so dass diese Gleichung erfüllt ist.

5. Prinzipalbündel

Die Überlegungen lassen sich wie folgt zusammenfassen: Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen von Prinzipalbündeln über X mit Strukturgruppe G , die auf der Überdeckung \mathcal{U} trivial werden, mit $\tilde{H}^1(\mathcal{U}, G)$. Nach der vorangegangenen Bemerkung gibt es eine Bijektion $\tilde{H}^1(\mathcal{U}, G) \cong Z(\mathcal{U})/\sim$. Wir bezeichnen mit $\tilde{H}^1(X, G)$ die Menge der Isomorphieklassen von G -Prinzipalbündeln auf X .

Lemma 5.12. *Es gilt*

$$\tilde{H}^1(X, G) = \varinjlim_{\mathcal{U} \in \mathcal{T}(X)} \tilde{H}^1(\mathcal{U}, G),$$

wobei die Überdeckungen nach Verfeinerung geordnet sind.

Proposition 5.13 ([49, Prop. 2]). *Ein gefasertes System $p: P \rightarrow X$ mit Gruppe G ist genau dann ein G -Prinzipalbündel, wenn gilt:*

(i) *Es gibt eine Überdeckung $\{f_i: Y_i \rightarrow X | i \in I\}$ und Morphismen $s_i: Y_i \rightarrow P$ mit $p \circ s_i = f_i$.*

(ii) *Der Morphismus $\theta = (\text{pr}_P, \rho): P \times G \rightarrow P \times_X P$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. „ \Rightarrow “: (i) Sei P ein Prinzipalbündel und $\{f_i: Y_i \rightarrow X | i \in I\}$ eine Überdeckung, die P trivialisiert. Die Verknüpfung der Schnitte $s'_i = \text{id}_{Y_i} \times e_G: Y_i \rightarrow Y_i \times G$ mit der Projektion $Y_i \times G \rightarrow P$ ergeben Morphismen s_i mit der gewünschten Eigenschaft.

(ii) Der Rückzug von θ unter f_i ist der Morphismus $\text{id}_{Y_i} \times (\text{pr}_1, \mu): Y_i \times G \times G \rightarrow Y_i \times G \times G$. Der Morphismus $\psi_i := \text{id}_{Y_i} \times (\text{pr}_1, \mu \circ (\text{inv} \circ \text{pr}_1, \text{pr}_2))$ ist dann offensichtlich invers zu $f_i^* \theta$. Die Morphismen ψ_i erfüllen die Kozykelbedingung und steigen daher zu einem Morphismus θ^{-1} ab.

„ \Leftarrow “: Seien nun (i) und (ii) erfüllt. Dann ist

$$(\text{pr}_{Y_i}, \text{pr}_G \circ \theta^{-1} \circ (s_i \times \text{id}_P)): Y_i \times_X P \rightarrow Y_i \times G$$

ein G -invarianter Isomorphismus über X . In der Tat definiert

$$(\text{pr}_{Y_i}, \rho \circ (s_i \times \text{id}_G)): Y_i \times G \rightarrow Y_i \times_X P \cong f_i^* P$$

einen dazu inversen Morphismus. \square

Proposition 5.14 ([49, Prop. 3]). *Ist G eine affine algebraische Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe, so ist G ein Prinzipalbündel mit Strukturgruppe H über G/H .*

Beweis. Zunächst ist G/H nach Proposition 1.26 eine quasi-projektive Varietät. Wir zeigen, dass das gefaserte System $p: G \rightarrow G/H$ die Voraussetzungen aus Proposition 5.13 erfüllt:

(ii) Der Morphismus $\theta = (\text{id}_G, \mu): G \times H \rightarrow G \times_{G/H} G$ ist ein Isomorphismus; der inverse Morphismus ist durch $(\text{pr}_1, \mu(\text{inv} \circ \text{pr}_1, \text{pr}_2))$ gegeben.

(i) Sei G_0 die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements von G und $H_0 = H \cap G_0$. Dann ist $K(G_0)/K(G_0/H_0)$ eine separable Körpererweiterung. Es gibt daher eine Untervarietät X von G_0 , so dass die Projektion $f: X \rightarrow G_0/H_0$ einer endlichen separablen Körpererweiterung $K(X)/K(G_0/H_0)$ entspricht. Es gibt dann eine offene Teilmenge $U \subset G_0/H_0$, so dass die Einschränkung von f auf das Urbild eine unverzweigte Überlagerung ist. Dies definiert den gesuchten Morphismus s in einer Umgebung von e_G/H_0 . Durch Translation erhält man zu jedem Punkt einen solchen Morphismus. \square

5.2. Assoziierte Faserbündel

Im Folgenden sei $p: P \rightarrow X$ ein G -Prinzipalbündel und F ein affines Schema mit einer Linkswirkung $\sigma: G \times F \rightarrow F$ oder ein projektives Schema mit einer Linkswirkung σ und einer Linearisierung in einem amplem Geradenbündel $\mathcal{O}_F(1)$ (siehe Definition 3.12). Wir konstruieren ein Faserbündel mit typischer Faser F , indem wir die Faser G durch F ersetzen. Es sei dazu $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ eine Überdeckung und $\{g_{ij}\}$ der zu P gehörige Kozykel. Dann definieren die Objekte $Y_i \times F$ zusammen mit den Übergangsfunktionen

$$(\mathrm{pr}_{Y_i \times_X Y_j}, \sigma \circ (g_{ij} \times \mathrm{id}_F)): Y_i \times_X Y_j \times F \rightarrow Y_i \times_X Y_j \times F$$

ein Objekt $P \times^\sigma F$ in $\mathrm{Fib}_F(X)$.

Definition 5.15. Das Faserbündel $P \times^\sigma F$ ist das zu P assoziierte Faserbündel mit typischer Faser F .

Die Unabhängigkeit der Konstruktion von der gewählten Überdeckung folgt aus der folgenden Proposition.

Proposition 5.16 ([49, Prop. 4]). *Es gibt einen Morphismus $p: P \times F \rightarrow P \times^\sigma F$, der $P \times F$ zu einem G -Prinzipalbündel über $P \times^\sigma F$ macht.*

Beweis. Wir betrachten auf $P \times F$ die Rechtswirkung

$$(\rho, \sigma^{-1}) := (\rho \times \sigma) \circ (\mathrm{pr}_P, \mathrm{pr}_G, \mathrm{inv} \circ \mathrm{pr}_G, \mathrm{pr}_F): P \times F \times G \rightarrow P \times F.$$

Die Überdeckung $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ trivialisiert gleichzeitig P und $P \times^\sigma F$. Es gibt also Isomorphismen $f_i^*(P) \cong Y_i \times G$, $f_i^*(P \times F) \cong Y_i \times G \times F$ und $f_i^*(P \times^\sigma F) \cong Y_i \times F$. Die Morphismen $\pi_i: Y_i \times G \times F \rightarrow Y_i \times F$, $\pi_i = \mathrm{id}_{Y_i} \times \sigma$ sind G -invariant und verträglich mit den Übergangsfunktionen. Sie verkleben daher zu einem G -invarianten Morphismus $\pi: P \times F \rightarrow P \times^\sigma F$. Die G -äquivalenten Isomorphismen $\psi_i := \mathrm{id}_{Y_i} \times (\sigma, \mathrm{pr}_G): Y_i \times G \times F \rightarrow Y_i \times F \times G$ über $Y_i \times F$ zeigen schließlich, dass $P \times F$ lokal trivial über $P \times^\sigma F$ ist.

$$\begin{array}{ccccc}
 (Y_i \times F) \times G & \xleftarrow{\psi_i} & Y_i \times G \times F & \longrightarrow & P \times F \\
 & \searrow & \downarrow \pi_i & \searrow & \downarrow \\
 & & Y_i \times F & \longrightarrow & P \\
 & & \downarrow & \searrow & \downarrow \pi \\
 & & Y_i \times F & \longrightarrow & P \times^\sigma F \\
 & & \downarrow & \searrow & \downarrow p \\
 & & Y_i & \xrightarrow{f_i} & X
 \end{array}$$

□

Bemerkung 5.17. (i) Das assoziierte Bündel $P \times^\sigma F$ ist der Quotient von $P \times F$ bezüglich der Wirkung (ρ, σ^{-1}) (siehe Definition 2.6).

(ii) Es sei $\varphi: P \rightarrow P'$ ein Morphismus von Prinzipalbündeln über X und $\{h_i: U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ eine trivialisierende Überdeckung von X . Der Morphismus φ wird dann beschrieben durch Morphismen $g_i: U_i \rightarrow G$. Die Morphismen $(\mathrm{pr}_{U_i}, \sigma \circ (g_i \times \mathrm{id}_{U_i})) : U_i \times F \rightarrow U_i \times F$ verkleben zu einem Morphismus $P \times^\sigma F \rightarrow P' \times^\sigma F$. Die Wirkung σ definiert so einen Morphismus $\sigma_*: \mathrm{Bun}_G \rightarrow \mathrm{Fib}_F$ von Stacks.

5.3. Erweiterung und Reduktion der Strukturgruppe

Sei $\theta: H \rightarrow G$ ein Morphismus affiner algebraischer Gruppen. Durch die Komposition mit der Multiplikation erhält man eine Linkswirkung von H auf G .

Lemma 5.18 ([49, Prop. 5]). *Ist P ein Prinzipalbündel über X mit Strukturgruppe H , so ist das assoziierte Faserbündel $P \times^\theta G$ ein Prinzipalbündel über X mit Strukturgruppe G . Es gibt einen kanonischen äquivarianten Morphismus $\tilde{\theta}: P \rightarrow P \times^\theta G$ über X .*

Beweis. Sei $\{f_i: Y_i \rightarrow X | i \in I\}$ eine P trivialisierende Überdeckung. Aus der Konstruktion des assoziierten Faserbündels wird deutlich, dass diese Überdeckung auch das assoziierte Faserbündel trivialisiert. Da die Rechtsmultiplikation mit der Linksmultiplikation verträglich ist, ist die Rechtswirkung von G auf $Y_i \times G$ mit den Übergangsfunktionen verträglich. Wir erhalten so eine Rechtswirkung von G auf $P \times^\theta G$, die das assoziierte Bündel zu einem Prinzipalbündel macht.

Die Morphismen $\text{id}_{Y_i} \times \theta: Y_i \times H \rightarrow Y_i \times G$, $i \in I$, sind äquivariant und mit den Übergangsfunktionen verträglich. Sie definieren daher einen äquivarianten Morphismus $\tilde{\theta}: P \rightarrow P \times^\theta G$. \square

Man sagt, dass das G -Prinzipalbündel $P \times^\theta G$ aus dem H -Prinzipalbündel P durch *Erweiterung der Strukturgruppe* entsteht. Für die Erweiterung gilt folgende Kürzungsregel:

Lemma 5.19. *Ist P ein H -Prinzipalbündel und F ein affines Schema mit einer Linkswirkung σ von G , so gilt $(P \times^\theta G) \times^\sigma F \cong P \times^{\theta^* \sigma} F$, wobei $\theta^* \sigma$ die durch θ induzierte Wirkung von H auf F ist.*

Beweis. Dies ist offensichtlich aus der Konstruktion der assoziierten Faserbündel. \square

Es sei nun $i: H \rightarrow G$ die Inklusion einer abgeschlossenen algebraischen Untergruppe.

Lemma 5.20 ([49, Prop. 8]). *Ist P ein Prinzipalbündel über X mit Strukturgruppe G , so ist P eine Prinzipalbündel über $P \times^G (G/H)$ mit Strukturgruppe H .*

Beweis. Sei $\{f_i: Y_i \rightarrow X | i \in I\}$ eine Überdeckung, die P und $P \times^G (G/H)$ trivialisiert. Die Projektionen $Y_i \times G \rightarrow Y_i \times (G/H)$ sind offensichtlich H -invariant und mit den Übergangsfunktionen verträglich. Sie steigen daher zu einem H -invarianten Morphismus $P \rightarrow P \times^G (G/H)$ ab. Nach Proposition 5.14 ist G ein H Prinzipalbündel über G/H . Es gibt also eine Überdeckung $\{h_j: V_j \rightarrow G/H | j \in J\}$, so dass $h_j^*(G) \cong V_j \times H$ gilt. Dann bilden $Y_i \times V_j \rightarrow P \times^G (G/H)$ eine Überdeckung, die P als H -Prinzipalbündel trivialisiert. \square

Definition 5.21. Eine *Reduktion der Strukturgruppe von G nach H über X* ist ein Paar (P, s) bestehend aus einem G -Prinzipalbündel P über X und einem Schnitt $s: X \rightarrow P \times^G (G/H)$. Ein *Morphismus $f: (P, s) \rightarrow (P', s')$ von Reduktionen nach H* ist ein Morphismus $f: P \rightarrow P'$, so dass der induzierte Morphismus $\bar{f}: P \times^G (G/H) \rightarrow P' \times^G (G/H)$ $\bar{f} \circ s = s'$ erfüllt. Dies definiert die Kategorie $\text{Red}_G^H(X)$ der Reduktionen der Strukturgruppe von G nach H über X .

Proposition 5.22 ([49, Prop. 9]). *Wenn $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe ist, so ist $\underline{\text{Bun}}_G$ isomorph zu $\underline{\text{Red}}_G^H$.*

Beweis. (i) Es sei Q ein Prinzipalbündel mit Strukturgruppe H über X . Das assoziierte Faserbündel $P := i_*(Q) = Q \times^H G$ ist nach Lemma 5.18 ein Prinzipalbündel mit Strukturgruppe G . Wenn $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ eine trivialisierende Überdeckung ist, dann sind die Morphismen $(\text{id}_{Y_i}, \pi \circ e_H): Y_i \rightarrow Y_i \times G/H$, $i \in I$, mit den Übergangsfunktionen verträglich. Somit erhält man einen Schnitt $\bar{e}: X \rightarrow P \times^H (G/H)$. Wenn $f: Q \rightarrow Q'$ ein Morphismus ist, dann ist $i_*(f): Q \times^H G \rightarrow Q' \times^H G$ ein Morphismus mit $\bar{i}_*(f) \circ s = s'$. Dies definiert einen Morphismus $\underline{\text{Bun}}_G \rightarrow \underline{\text{Red}}_G^H$.

(ii) Sei nun ein G -Prinzipalbündel P und ein Schnitt $s: X \rightarrow P \times^G (G/H)$ gegeben. Nach Lemma 5.20 ist P ein H -Prinzipalbündel über $P \times^G (G/H)$. Wir erhalten ein H -Prinzipalbündel über X als Rückzug $Q := s^*(P)$. Wenn $f: P \rightarrow P'$ ein Morphismus mit $\bar{f} \circ s = s'$ ist, dann ist f ein Morphismus von H -Prinzipalbündeln über $P' \times^G (G/H)$. Der Rückzug liefert somit einen Morphismus $s'^*(f): Q \rightarrow Q'$. Wir haben so einen Morphismus $\underline{\text{Red}}_G^H \rightarrow \underline{\text{Bun}}_G$.

(iii) Es bleibt zu zeigen, dass die konstruierten Morphismen einen Isomorphismus definieren. Sei zunächst Q ein H -Prinzipalbündel, $P := Q \times^H G$ das durch Erweiterung entstehende G -Prinzipalbündel und $\bar{e}: X \rightarrow P \times^G (G/H)$ der entsprechende Schnitt. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\tilde{i}} & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\bar{e}} & P \times^G (G/H). \end{array}$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft des Faserprodukts definiert dies einen Morphismus $Q \rightarrow \bar{e}^*(P)$ über X , der nach Korollar 5.10 ein Isomorphismus ist.

Sei umgekehrt ein G -Prinzipalbündel P mit einem Schnitt s in das assoziierte Bündel gegeben und sei $Q = s^*(P)$ der Rückzug. Es gibt eine Überdeckung $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$, die sowohl Q als auch P trivialisiert. Wir bezeichnen mit φ_i und s_i die Rückzüge des H -äquivarianten Morphismus $\varphi: Q \rightarrow P$ bzw. des Schnittes s unter f_i . Die φ_i sind durch Morphismen $\gamma_i: Y_i \rightarrow G$ gegeben, die mit den Übergangsfunktionen h_{ij} und g_{ij} von Q bzw. P verträglich sind, d.h.

$$\mu \circ (\text{pr}_1^* \gamma_i, h_{ij}) = \mu \circ (g_{ij}, \text{pr}_2^* \gamma_j).$$

Also definieren die γ_i auch einen Isomorphismus $\psi: Q \times^H G \rightarrow P$ von der Erweiterung von Q zu P . Die Kommutativität des folgenden Diagramm zeigt, dass der dadurch induzierte Morphismus $\bar{\psi}: Q \times^H (G/H) \rightarrow P \times^G (G/H)$ den Schnitt \bar{e} im assoziierten

5. Prinzipalbündel

Bündel der Erweiterung in den Schnitt s überführt.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y_i \times G & & \\
 & \text{id} \times i \nearrow & \downarrow & \searrow \psi_i & \\
 Y_i \times H & \xrightarrow{\varphi_i} & Y_i \times G & & Y_i \times G \\
 \downarrow & & \downarrow \pi_i & & \downarrow \pi_i \\
 & & Y_i \times (G/H) & & \\
 \downarrow & \bar{e}_i \nearrow & \downarrow \bar{\psi}_i & & \\
 Y_i & \xrightarrow{s_i} & Y_i \times (G/H) & &
 \end{array}$$

Somit ist $\psi: (s^*(P) \times^H G, \bar{e}) \rightarrow (P, s)$ ein Isomorphismus von Reduktionen. \square

Wir betrachten zwei G -Prinzipalbündel P und P' über X . Das Faserprodukt $P \times_X P'$ ist dann ein $G \times G$ -Prinzipalbündel. Wir bezeichnen mit $\sigma: (G \times G) \times G \rightarrow G$ die Linkswirkung gegeben durch $\sigma := \mu \circ (\text{id}_G \times \mu) \circ (\text{pr}_1, \text{pr}_3, \text{inv} \circ \text{pr}_2)$.

Lemma 5.23. *Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge $\text{Mor}_{\text{Bun}_G(X)}(P', P)$ der Isomorphismen von P nach P' und der Menge der Schnitte im assoziierten Bündel $(P \times_X P') \times^\sigma G$.*

Beweis. Es sei $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ eine Überdeckung, die P und P' trivialisiert. Wir erhalten Kozykel $\{g_{ij}\}$ und $\{g'_{ij}\}$ von P bzw. P' . Die Überdeckung trivialisiert dann auch $P \times_X P'$, und der entsprechende Kozykel ist $\{(g_{ij}, g'_{ij})\}$. Ein Morphismus $\alpha: P' \rightarrow P$ entspricht einer Familie $\{\alpha_i: Y_i \rightarrow G\}$ mit $\mu \circ (g_{ij}, \text{pr}_2^* \alpha_j) = \mu(\text{pr}_1^* \alpha_i, g'_{ij})$. Ein Schnitt $\beta: X \rightarrow (P \times_X P') \times^\sigma G$ wird dargestellt durch eine Familie $\{\beta_i: Y_i \rightarrow G\}$ mit der Eigenschaft $\sigma(g_{ij}, g'_{ij}, \text{pr}_2^* \beta_j) = \text{pr}_1^* \beta_i$. Mit der Definition von σ ergibt sich die Äquivalenz dieser Bedingungen. \square

Bemerkung 5.24. (i) Es sei Δ das Bild von $(\text{id}_G, \text{inv} \circ \text{id}_G): G \rightarrow G \times G$. Das assoziierte Bündel $(P \times_X P) \times^\sigma G$ ist dann natürlich isomorph zum assoziierten Bündel mit Faser $(G \times G)/\Delta$. Ein Isomorphismus $P' \rightarrow P$ entspricht daher einer Reduktion der Strukturgruppe $G \times G$ von $P \times_X P'$ nach Δ .

(ii) Für eine Prinzipalbündel P ist $\text{Aut}(P) := P \times_X P \times^\sigma G$ ein Gruppenschema über X . In der Tat definieren die lokalen Schnitte $\text{id}_{Y_i} \times e: Y_i \rightarrow Y_i \times G$ und die lokalen Multiplikation $\text{id}_{Y_i} \times \mu: Y_i \times G \times G \rightarrow Y_i \times G$ einen Schnitt $e: X \rightarrow \text{Aut}(P)$ und eine Multiplikation $\mu: \text{Aut}(P) \times_X \text{Aut}(P) \rightarrow \text{Aut}(P)$, die die Eigenschaften eines Gruppenobjekts erfüllen. Außerdem erhält man eine Linkswirkung $\sigma: \text{Aut}(P) \times_X P \rightarrow P$, die mit der Rechtswirkung von G auf P verträglich ist.

5.4. Exakte Sequenzen

Die Sätze über die Erweiterung und Reduktion der Strukturgruppe lassen sich in einer exakten Sequenz zusammenfassen. Wir benötigen dazu die Definition einer exakten Sequenz von punktierten Mengen.

Definition 5.25. Es seien M_i Mengen mit ausgezeichneten Punkten $x_i \in M_i$ für $i = 1, 2, 3$. Eine Sequenz von Abbildungen

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$$

mit $f_i(x_i) = x_{i+1}$, $i = 1, 2$ ist *exakt* in M_2 , falls $f_2^{-1}(x_3) = \text{im}(f_1)$ gilt.

Ist eine Gruppenstruktur auf M_1 gegeben, so dass x_1 das neutrale Element ist, und eine Wirkung ρ von M_1 auf M_2 , so dass f_1 äquivariant ist, fordern wir zusätzlich, dass $f_2(x) = f_2(y)$ genau dann gilt, wenn es ein Element $z \in M_1$ mit $\rho(z, x) = y$ gibt.

Die Menge $\tilde{H}^1(X, G)$ ist durch das triviale Bündel punktiert, ebenso ist die Menge der Morphismen $H^0(X, G) := \text{Mor}_S(X, G)$ eine durch das neutrale Element punktierte Menge. Außerdem trägt die Menge $H^0(X, G)$ eine Gruppenstruktur und wirkt auf natürliche Weise auf $H^0(X, G/H)$.

Proposition 5.26 ([49, Prop. 11]). *Sei G eine affine algebraische Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe und X ein Schema. Dann gibt es eine exakte Sequenz*

$$\{e\} \rightarrow H^0(X, H) \rightarrow H^0(X, G) \rightarrow H^0(X, G/H) \xrightarrow{d} \tilde{H}^1(X, H) \rightarrow \tilde{H}^1(X, G).$$

Hierbei bildet d ein Element $f \in H^0(X, G/H)$ auf den Rückzug des H -Prinzipalbündels $X \times G \rightarrow X \times (G/H)$ unter dem Schnitt $(\text{id}_X \times f)$ ab.

Beweis. Die Exaktheit in $H^0(X, H)$ und $H^0(X, G)$ ist offensichtlich. Sei nun $f \in H^0(X, G/H)$. Nach Proposition 5.22 erhält man durch Rückzug des trivialen G -Prinzipalbündels ein H -Prinzipalbündel $d(f) = (\text{id}_X \times f)^*(X \times G)$, dessen Erweiterung zu einem G -Prinzipalbündel trivial ist. Umgekehrt entsteht jedes H -Prinzipalbündel, das nach Erweiterung trivial ist, auf diese Art.

Seien nun $f, f' \in H^0(X, G/H)$ und $g: X \rightarrow G$ ein Morphismus mit $\mu \circ (g, f) = f'$. Dann ist $\text{id}_X \times g$ ein Automorphismus des trivialen Prinzipalbündels, der $\text{id}_X \times f$ in $\text{id}_X \times f'$ überführt. Aufgrund der Äquivalenz der Kategorien nach Proposition 5.22 sind dann auch die durch Reduktion entstehenden H -Prinzipalbündel $d(f)$ und $d(f')$ isomorph. Umgekehrt ergibt ein Isomorphismus der reduzierten Prinzipalbündel $d(f) \cong d(f')$ einen Automorphismus $X \times G \rightarrow X \times G$, der durch einen Morphismus $g: X \rightarrow G$ mit $\mu \circ (g, f) = f'$ gegeben ist. \square

Wenn H eine normale Untergruppe ist, trägt $H^0(X, G/H)$ ein Gruppenstruktur. Man erklärt eine Wirkung von $H^0(X, G/H)$ auf $\tilde{H}^1(X, H)$ auf folgende Weise: Es sei $\bar{g} \in H^0(X, G/H)$ und P ein H -Prinzipalbündel. Da die Erweiterung $(P \times^H G) \times^G G/H \cong X \times G/H$ trivial ist, definiert der Schnitt $s := \text{id}_X \times \bar{g}: X \rightarrow X \times G/H$ eine Reduktion der Strukturgruppe von $P \times^H G$. Wir setzen $\rho(\bar{g}, P) := s^*(P \times^H G)$. Man prüft, dass dies eine Wirkung definiert.

Proposition 5.27 ([49, Prop. 12]). *Ist G eine affine algebraische Gruppe und H eine abgeschlossene normale Untergruppe, so gibt es eine exakte Sequenz*

$$\{e\} \rightarrow H^0(X, H) \rightarrow H^0(X, G) \rightarrow H^0(X, G/H) \xrightarrow{d} \tilde{H}^1(X, H) \rightarrow \tilde{H}^1(X, G) \rightarrow \tilde{H}^1(X, G/H).$$

5. Prinzipalbündel

Beweis. Die Exaktheit in $\tilde{H}^1(X, G)$ ist offensichtlich durch die Beschreibung mithilfe von Kozykeln. Die Exaktheit in den ersten Termen folgt aus der vorangegangenen Proposition. Es bleibt die Exaktheit in $\tilde{H}^1(X, H)$ zu prüfen. Sind P, P' zwei H -Prinzipalbündel und ist φ ein Isomorphismus der Erweiterungen, so ist der induzierte Morphismus der assoziierten Bündel $\tilde{\varphi}: X \times G/H \rightarrow X \times G/H$ gegeben durch einen Morphismus $\bar{g} \in H^0(X, G/H)$. Dieser erfüllt dann $\rho(g, P) = P'$. Umgekehrt sind für $\bar{g} \in H^0(X, G/H)$ die Erweiterungen der H -Prinzipalbündel P und $\rho(\bar{g}, P)$ nach Konstruktion isomorph. \square

Ist zusätzlich G eine abelsche Gruppe, so hat auch $\tilde{H}^1(X, G)$ die Struktur einer abelschen Gruppe.

Korollar 5.28 ([49, Prop. 13]). *Ist G eine abelsche affine algebraische Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe, so gibt es eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen*

$$\begin{aligned} \{e\} \rightarrow H^0(X, H) \rightarrow H^0(X, G) \rightarrow H^0(X, G/H) \xrightarrow{d} \\ \rightarrow \tilde{H}^1(X, H) \rightarrow \tilde{H}^1(X, G) \rightarrow \tilde{H}^1(X, G/H). \end{aligned}$$

Bemerkung 5.29. (i) Wenn G abelsch ist und man G mit seiner Schnittgarbe identifiziert, stimmen die Gruppen $\tilde{H}^1(X, G)$ mit der étalen Kohomologie überein (siehe [6]).

(ii) Wenn zusätzlich alle G -Prinzipalbündel lokal trivial in der Zariski-Topologie sind, kann man $\tilde{H}^1(X, G)$ durch die gewöhnliche Kohomologie ersetzen.

5.5. Spezielle Gruppen

Definition 5.30. Eine algebraischen Gruppe G heißt *speziell*, wenn jedes G -Prinzipalbündel in der fppf-Topologie auch ein G -Prinzipalbündel in der Zariski-Topologie ist.

Lemma 5.31. *Sei P ein H -Prinzipalbündel über X . Wenn die Erweiterung $P \times^H G$ ein G -Prinzipalbündel in der Zariski-Topologie ist und G über G/H ein H -Prinzipalbündel in der Zariski-Topologie ist, so ist auch P ein Prinzipalbündel in der Zariski-Topologie.*

Beweis. In dem Beweis von Lemma 5.20 können nach Voraussetzung alle Überdeckungen als Überdeckungen in der Zariski-Topologie angenommen werden. Daher ist $P \times^H G$ ein H -Prinzipalbündel über $P \times^H (G/H)$ in der Zariski-Topologie. Nach Proposition 5.22 ist P isomorph zum Rückzug dieses Prinzipalbündels und ist daher auch ein Prinzipalbündel in der Zariski-Topologie. \square

Korollar 5.32 ([49, Lemme 1]). *Sei G eine spezielle algebraische Gruppe und H eine Untergruppe. H ist genau dann speziell, wenn G über G/H ein Prinzipalbündel in der Zariski-Topologie ist.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Diese Richtung folgt direkt aus der Definition.

„ \Leftarrow “: Sei P ein H -Prinzipalbündel über einem Schema X . Das durch Erweiterung der Strukturgruppe entstehende G -Prinzipalbündel $P \times^H G$ ist nach Voraussetzung ein Prinzipalbündel in der Zariski-Topologie. Nach dem vorangegangenen Lemma ist dann auch P ein Prinzipalbündel in der Zariski-Topologie. \square

Zunächst bewies Serre die folgenden zwei Kriterien:

Proposition 5.33 (Serre). (i) *Jede spezielle Gruppe ist linear und zusammenhängend.*

(ii) *Eine affine algebraische Gruppe $G \subset \mathrm{GL}(n, k)$ ist genau dann speziell, wenn $\mathrm{GL}(n, k) \rightarrow \mathrm{GL}(n, k)/G$ ein Prinzipalbündel in der Zariski-Topologie ist.*

Beweis. Siehe [49, §4, Théorème 1 und 2]. □

Schließlich gelange es Grothendieck, die speziellen Gruppen vollständig zu klassifizieren.

Proposition 5.34 (Grothendieck). *Eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe G ist genau dann speziell, wenn $G_{\mathrm{ss}} := G/\mathcal{R}(G)$ isomorph zu einem Produkt spezieller linearer und symplektischer Gruppen ist.*

Beweis. Siehe [11, Théorème 3]. □

Proposition 5.35. *Die Kategorie der $\mathrm{GL}(r, k)$ -Prinzipalbündel ist äquivalent zur Kategorie der Vektorbündel von Rang r mit Isomorphismen.*

Beweis. Die natürliche Wirkung $\sigma: \mathrm{GL}(r, k) \times k^r \rightarrow k^r$ definiert einen treuen Funktor $\sigma_*: \underline{\mathrm{Bun}}_{\mathrm{GL}(r, k)} \rightarrow \underline{\mathrm{Fib}}_{k^r}$. Da $\mathrm{GL}(r, k)$ speziell ist, liefert ein $\mathrm{GL}(r, k)$ -Bündel ein Zariskilokal triviales Bündel. Zu jedem Vektorbündel E auf X ist das Prinzipalbündel $\mathcal{I}\mathrm{so}(X \times k^r, E)$ ein Prinzipalbündel, dessen assoziiertes Vektorbündel isomorph zu E ist. □

Beispiel 5.36. Es sei E ein Vektorbündel von Rang r , $\lambda \in X_*(\mathrm{SL}(r, k))$ eine Einparameteruntergruppe mit Eigenräumen V^i und Gewichten γ^i , $i = 1, \dots, l + 1$, und $P := \mathcal{I}\mathrm{so}(X \times k^r, E)$ das entsprechende $\mathrm{GL}(r, k)$ -Prinzipalbündel. Eine Reduktion der Strukturgruppe $\beta: X \rightarrow Q := Q_{\mathrm{SL}(V)}(\lambda)$ entspricht dem Datum einer Fahne

$$\{0\} = E_0 \subset \dots \subset E_{l+1} = E$$

mit $E_j = P \times^Q V_j$, $V_j := \bigoplus_{i=1}^j V^i$.

Wenn χ_λ der zu λ duale Charakter aus Lemma 3.40 ist, dann berechnet man für das assoziierte Geradenbündel

$$\beta^* P \times^{\chi_\lambda} \mathbb{C} = \bigotimes_{i=1}^{l+1} \det(E_i/E_{i-1})^{\otimes \gamma_i}.$$

Insbesondere ist der Grad dieses Bündels gegeben durch

$$\deg(\beta^* P \times^{\chi_\lambda} \mathbb{C}) = \sum_{j=1}^l \alpha_j (\deg(E) \mathrm{rk}(E_j) - \deg(E_j) \mathrm{rk}(E)).$$

Wenn E ein Vektorbündel von Rang r auf X ist und $\rho: \mathrm{GL}(r, k) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung ist, dann bezeichnen wir mit E_ρ das assoziierte Bündel

$$E_\rho := \mathcal{I}\mathrm{so}(X \times k^r, E) \times^\rho V$$

6. Dekorierte Tumps

Ein Tump ist ein Tupel von Vektorbündeln auf X zusammen mit einem Morphismus von einem assoziierten Vektorbündel in ein Geradenbündel. A. Schmitt hat in [47, Section 2.5] eine Stabilitätsbedingung für diese Objekte eingeführt und ihren Modulraum konstruiert. Wir verallgemeinern hier diese Konstruktion auf folgende Weise: Wir fixieren einen Punkt x_0 der Basis X und betrachten ein weiteres assoziiertes Bündel. Ein dekoriertes Tump ist ein Tump zusammen mit einem Punkt in der Faser dieses assoziierten Bündels über x_0 . Wir definieren einen Stabilitätsbegriff für diese Objekte und konstruieren ihren groben Modulraum als GIT-Quotienten.

6.1. Gespaltene Vektorbündel

6.1.1. Gespaltene Vektorräume

Es sei T eine endliche Indexmenge.

Definition 6.1. Ein T -gespaltener Vektorraum ist ein T -Tupel $W = (W^t, t \in T)$ von Vektorräumen. Ein *Homomorphismus T -gespaltener Vektorräume* $f: W \rightarrow V$ ist ein Tupel $(f^t: W^t \rightarrow V^t, t \in T)$ von Vektorraumhomomorphismen.

Das Tupel $\underline{r}(W) := (\dim(W^t), t \in T)$ ist der *Dimensionsvektor* von W . Für ein Tupel $\underline{\kappa} \in \mathbb{Z}_{>0}^T$ setzen wir $W^{\oplus \underline{\kappa}} := \bigoplus_{t \in T} W^{t \oplus \kappa_t}$ und $\dim_{\underline{\kappa}}(W) := \dim(W^{\oplus \underline{\kappa}})$.

Bemerkung 6.2. Die T -gespaltenen Vektorräume bilden eine abelsche Kategorie. Insbesondere haben wir den Begriff eines Unterraums und eines Quotienten.

Es sei W ein T -gespaltener Vektorraum mit Dimensionsvektor $\underline{r} := \underline{r}(W)$. Die Automorphismengruppe von W ist dann

$$\mathrm{GL}_T(W) := \prod_{t \in T} \mathrm{GL}(W^t) \cong \mathrm{GL}(\underline{r}, \mathbb{C}) := \prod_{t \in T} \mathrm{GL}(r_t, \mathbb{C}).$$

Die Gruppe $\mathrm{GL}_T(W)$ kann als Untergruppe von $\mathrm{GL}(\bigoplus_{t \in T} W^t)$ angesehen werden. Für ein Tupel $\underline{\kappa} \in \mathbb{Z}_{>0}^T$ haben wir eine natürliche Einbettung $i^{\underline{\kappa}}: \mathrm{GL}_T(W) \rightarrow \mathrm{GL}(W^{\oplus \underline{\kappa}})$. Wir betrachten die Gruppe

$$\mathrm{SL}_{\underline{\kappa}, T}(W) := \left\{ (g_t, t \in T) \in \mathrm{GL}_T(W) \mid \prod_{t \in T} \det(g_t)^{\kappa_t} = 1 \right\}. \quad (6.1)$$

Wenn λ eine Einparameteruntergruppe von $\mathrm{SL}_{\underline{\kappa}, T}(W)$ ist, dann gibt es eine Zerlegung $W = \bigoplus_{i=1}^{k+1} W^i$ gespaltener Vektorräume und Gewichte $\gamma_1 < \dots < \gamma_{k+1}$ mit $\lambda(t) \cdot w = t^{\gamma_i} w$ für $w \in W^i$ und $t \in \mathbb{C}^*$. Wir definieren die *assoziierte gewichtete Fahne* $(W_{\bullet}, \underline{\alpha})$ der Länge $l(W_{\bullet}) = k$ von λ durch $W_j := \bigoplus_{i=1}^j W^i$ und $\alpha_j := (\gamma_{j+1} - \gamma_j) / \dim_{\underline{\kappa}}(W)$ für $1 \leq j \leq k$.

6. Dekorierete Tumps

Ist umgekehrt eine gewichtete Fahne $(W_\bullet, \underline{\alpha})$ der Länge $l(W_\bullet)$ gegeben, so definieren wir das Tupel $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}(W_\bullet, \underline{\alpha}, \underline{\kappa})$ durch

$$\gamma_i(\underline{\kappa}, \underline{\alpha}) := \sum_{j=1}^{l(W_\bullet)} \alpha_j \dim_{\underline{\kappa}}(W_j) - \sum_{j=i}^{l(W_\bullet)} \alpha_j \dim_{\underline{\kappa}}(W), \quad i = 1, \dots, l(W_\bullet) + 1. \quad (6.2)$$

Wir wählen eine Zerlegung $W = \bigoplus_{i=1}^{l(W_\bullet)+1} W^i$ mit $W_j = \bigoplus_{i=1}^j W^i$. Dann ist die assoziierte gewichtete Fahne der Einparameteruntergruppe λ definiert durch $\lambda(t) \cdot w = t^{\gamma_i} w$ für $w \in W^i$ gerade $(W_\bullet, \underline{\alpha})$.

Definition 6.3. Eine Darstellung $\rho: \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ heißt *homogen vom Grad* $\gamma \in \mathbb{Z}$, falls $\rho(z \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{rt}}, t \in T) = z^\gamma \cdot \mathrm{id}_V$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ gilt.

Proposition 6.4. *Es sei $W := (\mathbb{C}^{rt}, t \in T)$, $\rho: \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine homogene Darstellung und $\underline{\kappa} \in \mathbb{Z}_{>0}^T$. Dann gibt es Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, so dass V ein direkter Summand von $W_{a,b,c}^{\oplus \underline{\kappa}} := (W^{\oplus \underline{\kappa}})_{a,b,c}$ als $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ -Modul ist.*

Beweis. Nach Proposition 1.42 gibt es eine Darstellung $\tilde{\rho}: \mathrm{GL}(W^{\oplus \underline{\kappa}}) \rightarrow \mathrm{GL}(V \oplus V')$, so dass ρ ein direkter Summand von $\tilde{\rho} \circ i^{\underline{\kappa}}$ ist. Dabei kann man $\tilde{\rho}$ homogen wählen. Nach Proposition 1.41 gibt es dann Zahlen a, b, c , so dass $\tilde{\rho}$ ein direkter Summand der Darstellung $\tilde{\rho}_{a,b,c}: \mathrm{GL}(W^{\oplus \underline{\kappa}}) \rightarrow \mathrm{GL}(W_{a,b,c}^{\oplus \underline{\kappa}})$ ist. Schließlich ist ρ ein direkter Summand der Darstellung $\rho_{a,b,c}^{\underline{\kappa}} := \tilde{\rho}_{a,b,c} \circ i^{\underline{\kappa}}$. \square

6.1.2. Gespaltene Garben

Es sei nun X eine glatte projektive Kurve vom Geschlecht g .

Definition 6.5. Eine kohärente T -gespaltene Garbe ist ein Tupel $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^t, t \in T)$ kohärenter Garben. Ein *Morphismus T -gespaltener Garben* ist ein Tupel von Garbenhomomorphismen $(f^t: \mathcal{F}^t \rightarrow \mathcal{G}^t, t \in T)$.

Das Tupel $\underline{r}(\mathcal{F}) := (\mathrm{rk}(\mathcal{F}^t), t \in T) \in \mathbb{N}^T$ ist der *Rangvektor*, $\underline{d}(\mathcal{F}) := (\mathrm{deg}(\mathcal{F}^t), t \in T) \in \mathbb{Z}^T$ der *Gradvektor*. Wieder definieren wir $\mathcal{F}^{\oplus \underline{\kappa}} := \bigoplus_{t \in T} \mathcal{F}^{t \oplus \kappa t}$ für ein Tupel $\underline{\kappa} \in \mathbb{Z}_{>0}^T$.

Ebenso wie die T -gespaltenen Vektorräume bilden die T -gespaltenen kohärenten Garben eine abelsche Kategorie.

Definition 6.6. Es sei \mathcal{F} eine T -gespaltene kohärente Garbe. Für ein Tupel $\underline{\chi} \in \mathbb{Q}^T$ definieren wir den $\underline{\chi}$ -Rang

$$\mathrm{rk}_{\underline{\chi}}(\mathcal{F}) := \sum_{t \in T} \chi_t \mathrm{rk}(\mathcal{F}^t),$$

für $\underline{\kappa} \in \mathbb{Z}_{>0}^T$ und $\underline{\chi} \in \mathbb{Q}^T$ den $\underline{\kappa}$ - $\underline{\chi}$ -Grad

$$\mathrm{deg}_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(\mathcal{F}) := \mathrm{deg}(\mathcal{F}^{\oplus \underline{\kappa}}) + \mathrm{rk}_{\underline{\chi}}(\mathcal{F}) = \sum_{t \in T} (\kappa_t \mathrm{deg}(\mathcal{F}^t) + \chi_t \mathrm{rk}(\mathcal{F}^t))$$

und, falls $\mathrm{rk}_{\underline{\kappa}}(\mathcal{F}) \neq 0$, die $\underline{\kappa}$ - $\underline{\chi}$ -Steigung

$$\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(\mathcal{F}) := \frac{\mathrm{deg}_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(\mathcal{F})}{\mathrm{rk}_{\underline{\kappa}}(\mathcal{F})}.$$

Definition 6.7. Ein T -gespaltenes Vektorbündel ist eine T -gespaltene Garbe $E = (E^t, t \in T)$, so dass für jedes $t \in T$ die Garbe E^t ein Vektorbündel ist. Ein *Morphismus T -gespaltener Vektorbündel* ist ein Homomorphismus der T -gespaltene Garben.

Bemerkung 6.8. Wenn E ein gespaltene Vektorbündel mit Rangvektor \underline{r} ist, dann ist das Rahmenbündel $P(E) := \prod_{t \in T} \mathcal{I}so(\mathbb{C}^{r_t}, E^t)$ ein $GL(\underline{r}, \mathbb{C})$ -Prinzipalbündel. Umgekehrt kann man zu einem $GL(\underline{r}, \mathbb{C})$ -Prinzipalbündel P das assoziierte gespaltene Vektorbündel $(P \times^{GL(\underline{r}, \mathbb{C})} \mathbb{C}^{r_t}, t \in T)$ konstruieren. Analog zu Proposition 5.35 zeigt man, dass das Datum eines T -gespaltene Vektorbündels mit Rangvektor \underline{r} äquivalent zum Datum eines $GL(\underline{r}, \mathbb{C})$ -Prinzipalbündels ist.

Definition 6.9. Ein T -gespaltene Vektorbündel E ist *(semi)stabil*, falls für jede echte T -gespaltene Untergarbe \mathcal{F} mit $\text{rk}_{\underline{\kappa}}(\mathcal{F}) \neq 0$ gilt

$$\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(\mathcal{F}) (\leq) \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E).$$

Bemerkung 6.10. (i) Im Fall $|T| = 1$ ist ein T -gespaltene Vektorbündel E nichts weiter als ein Vektorbündel, und E ist genau dann als T -gespaltene Vektorbündel (semi)stabil, wenn E als Vektorbündel (semi)stabil ist.

(ii) Wie im Fall der Vektorbündel zeigt man, dass ein T -gespaltene Vektorbündel E genau dann (semi)stabil ist, wenn $\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(F) (\leq) \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E)$ für jedes T -gespaltene Unterbündel $F \subset E$ gilt. Weiter sind $\underline{\kappa}$ -Rang und $\underline{\kappa}$ - $\underline{\chi}$ -Grad additiv auf kurzen exakten Sequenzen, so dass Lemma 4.6 sinngemäß gilt. Ebenso gibt es zu jedem T -gespaltene Vektorbündel E eine eindeutige Harder–Narasimhan-Filtrierung. Wir erhalten so auch die Größen $\mu_{\max}(E) := \mu_{\max \underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E)$ und $\mu_{\min}(E) := \mu_{\min \underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E)$.

Definition 6.11. Eine *gewichtete Fahne* $(E_{\bullet}, \underline{\alpha})$ eines T -gespaltene Vektorbündels E ist eine Fahne E_{\bullet} gespaltene Unterbündel zusammen mit einem *Gewichtsvektor* $\underline{\alpha} \in \mathbb{Q}_{>0}^{l(E_{\bullet})}$.

Für eine gewichtete Fahne $(E_{\bullet}, \underline{\alpha})$ der Länge $l = l(E_{\bullet})$ eines gespaltene Bündels E definieren wir die Größe

$$M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_{\bullet}, \underline{\alpha}) := \sum_{j=1}^{l(E_{\bullet})} \alpha_j \left(\deg_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) - \deg_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_j) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E) \right). \quad (6.3)$$

Man sieht leicht, dass E genau dann (semi)stabil ist, wenn für jede Fahne $(E_{\bullet}, \underline{\alpha})$

$$M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_{\bullet}, \underline{\alpha}) (\geq) 0$$

gilt.

Für ein T -gespaltene Vektorbündels E setzen wir $T(E) := \{t \in T \mid E^t \neq \{0\}\}$.

Lemma 6.12. (i) Ein stabiles T -gespaltene Vektorbündel E erfüllt $|T(E)| = 1$.

(ii) Es sei E ein semistabiles T -gespaltene Vektorbündel und $t_0 \in T(E)$. Dann ist das Vektorbündel E^{t_0} semistabil mit Steigung $\mu(E^{t_0}) = \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) - \chi_{t_0}/\kappa_{t_0}$.

6. Dekorierte Tumps

Beweis. Für eine nicht-leere echte Teilmenge $I \subset T(E)$ bezeichne E_I das T -gespaltene Vektorbündel $E_I = (E_I^t, t \in T)$ mit $E_I^t = E^t$, falls $t \in I$ gilt, und $E_I^t = \{0\}$ sonst. Wir erhalten die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow E_I \rightarrow E \rightarrow E_{T \setminus I} \rightarrow 0.$$

Wenn E (semi)stabil ist, gilt daher $\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_I) (\leq) \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E)$ und $\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) (\leq) \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_{T \setminus I})$ für alle nicht-leeren echten Teilmengen I . Die Annahme, dass E stabil ist und eine solche Teilmenge I existiert, führt also zu einem Widerspruch.

Wenn E semistabil ist, folgt $\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) = \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_I)$ für alle echten nicht-leeren Teilmengen $I \subset T(E)$. Insbesondere erhält man mit $I := \{t_0\}$ die Bedingung

$$\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) = \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_I) = \mu(E^{t_0}) + \frac{\chi_{t_0}}{\kappa_{t_0}}.$$

Es sei nun $F \subset E^{t_0}$ ein Unterbündel. Wir betrachten das T -gespaltene Bündel \tilde{F} mit $\tilde{F}^t := \{0\}$, falls $t \neq t_0$, und $\tilde{F}^{t_0} := F$. Aus der Semistabilität von E ergibt sich

$$\mu(F) + \frac{\chi_{t_0}}{\kappa_{t_0}} = \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(\tilde{F}) \leq \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) = \mu(E^{t_0}) + \frac{\chi_{t_0}}{\kappa_{t_0}}.$$

Es folgt $\mu(F) \leq \mu(E^{t_0})$, so dass E^{t_0} semistabil ist. □

Wir setzen nun

$$h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E) := \sum_{t \in T} (\kappa_t h^0(E^t) + \chi_t \operatorname{rk}(E^t))$$

und $h_{\underline{\kappa}}^0 := h_{\underline{\kappa}, 0}^0$, sowie

$$m(\underline{\kappa}, \underline{\chi}) := \min \left\{ \frac{\chi_t}{\kappa_t} \mid t \in T \right\}, \quad M(\underline{\kappa}, \underline{\chi}) := \max \left\{ \frac{\chi_t}{\kappa_t} \mid t \in T \right\}.$$

Lemma 6.13. (i) Für ein semistabiles T -gespaltenes Vektorbündel E gilt

$$h_{\underline{\kappa}}^0(E) \leq \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E) \left[\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) - m(\underline{\kappa}, \underline{\chi}) + 1 \right]_+.$$

(ii) Für ein beliebiges T -gespaltenes Vektorbündel E mit $r := \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E)$ gilt

$$h_{\underline{\kappa}}^0(E) \leq (r-1) \left[\mu_{\max}(E) - m(\underline{\kappa}, \underline{\chi}) + 1 \right]_+ + \left[\mu_{\min}(E) - m(\underline{\kappa}, \underline{\chi}) + 1 \right]_+.$$

Beweis. (i) Es sei E ein semistabiles T -gespaltenes Vektorbündel. Da für jeden Index $t \in T$ das Vektorbündel E^t semistabil ist, gilt nach Lemma 4.23 $h^0(E^t) \leq [\deg(E^t) + \operatorname{rk}(E^t)]_+$. Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T} \kappa_t h^0(E^t) &\leq \sum_{t \in T} \kappa_t [\deg(E^t) + \operatorname{rk}(E^t)]_+ \\ &\leq \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E) \left[\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) - m(\underline{\kappa}, \underline{\chi}) + 1 \right]_+. \end{aligned}$$

(ii) Dies folgt wie Lemma 4.23, (ii), aus Teil (i) und der Existenz einer Harder-Narasimhan-Filtrierung. □

Bemerkung 6.14. Es sei $\rho : \mathrm{GL}(\underline{r}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine homogene Darstellung. Dann induziert eine gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ eines gespaltenen Bündels E auch eine gewichtete Fahne $(E_{\rho, \bullet}, \underline{\alpha}_\rho)$ des assoziierte Bündels $E_\rho := P(E) \times^\rho V$: Zunächst gibt es eine Zahl $m \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass $m\underline{\alpha} \in (\mathbb{Z}/r)^{l(E_\bullet)}$ gilt. Wir wählen eine Fahne W_\bullet von $W := (\mathbb{C}^{r^t}, t \in T)$ vom Typ \underline{r} und eine Zerlegung $W = \bigoplus_{i=1}^{l(E_\bullet)+1} W^i$ mit $W_j = \bigoplus_{i=1}^j W^i$ für $1 \leq j \leq l(E_\bullet)$. Zusammen mit den Gewichten $\underline{\gamma}(W_\bullet, m\underline{\alpha}, \underline{\kappa})$ aus (6.2) definiert dies eine Einparameteruntergruppe λ von $\mathrm{SL}_{\underline{\kappa}, T}(W)$. Die Einparameteruntergruppe $\rho_*\lambda$ von $\mathrm{SL}(V)$ definiert eine assoziierte gewichtete Fahne $(V_\bullet, \underline{\beta})$ von V .

Das Datum der Fahne E_\bullet entspricht einer Reduktion der Strukturgruppe des Rahmenbündels $P(E)$ auf $Q_{\mathrm{GL}_T(W)}(\lambda)$. Da $\rho(Q_{\mathrm{GL}_T(W)}(\lambda)) \subset Q_{\mathrm{GL}(V)}(\rho_*\lambda)$ gilt, induziert dies eine Reduktion des $\mathrm{GL}(V)$ -Prinzipalbündels ρ_*P auf $Q_{\mathrm{GL}(V)}(\rho_*\lambda)$. Die assoziierten Vektorbündel $F_i := \rho_*P(E) \times^{Q_{\mathrm{GL}(V)}(\rho_*\lambda)} V_i$ bestimmen eine Fahne von E_ρ . Wir setzen $(E_{\rho, \bullet}, \underline{\alpha}_\rho) := (F_\bullet, (1/m)\underline{\beta})$.

6.2. Das Modulproblem dekorierter Tumps

6.2.1. Stabile dekorierte Tumps

Es seien $\underline{r} \in \mathbb{N}^T$ ein Rangvektor, $\rho : \mathrm{GL}(\underline{r}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(V_1)$, $\sigma : \mathrm{GL}(\underline{r}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(V_2)$ zwei homogene Darstellungen, $\underline{d} \in \mathbb{Z}^T$ und $l \in \mathbb{Z}$.

Definition 6.15. Ein σ -dekorierter ρ -Tump vom Typ (\underline{d}, l) ist ein Tupel (E, L, φ, s) , wobei E ein T -gespaltenes Vektorbündel mit Rangvektor $r(E) = \underline{r}$ und Gradvektor $d(E) = \underline{d}$ ist, L ein Geradenbündel vom Grad l , $\varphi : E_\rho \rightarrow L$ ein nicht-trivialer Homomorphismus und $s : E_{\sigma|\{x_0\}} \rightarrow \mathbb{C}$ ein surjektiver Homomorphismus ist.

Zwei σ -dekorierte ρ -Tumps (E, L, φ, s) und (E', L', φ', s') sind *isomorph*, falls es einen Isomorphismus $f : E \rightarrow E'$, einen Isomorphismus $h_1 : L \rightarrow L'$ mit $\varphi' \circ f_\rho = h_1 \circ \varphi$ und ein $c \in \mathbb{C}^*$ mit $s' \circ f_{\sigma|\{x_0\}} = c \cdot s$ gibt. Hierbei sind $f_\rho : E_\rho \rightarrow E'_\rho$ und $f_\sigma : E_\sigma \rightarrow E'_\sigma$ die durch f induzierten Isomorphismen.

Wir fixieren nun einen Rangvektor \underline{r} , homogene Darstellungen ρ, σ sowie einen Typ (\underline{d}, l) und sprechen im Folgenden lediglich von dekorierten Tumps.

Es seien $\underline{\kappa} \in \mathbb{Z}_{>0}^T$ und $\underline{\chi} \in \mathbb{Q}_{>0}^T$ gegeben. Weiter sei (E, L, φ, s) ein dekoriertes Tump und $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ eine gewichtete Fahne der Länge $l = l(E_\bullet)$. Nach Bemerkung 6.14 definiert $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ gewichtete Fahnen $(E_{\rho, \bullet}, \underline{\alpha}_\rho)$ und $(E_{\sigma, \bullet}, \underline{\alpha}_\sigma)$ von E_ρ bzw. E_σ . Durch Einschränkung auf den generischen Punkt η von X erhalten wir eine Fahne $\mathbb{E}_{\rho, \bullet}$ von $\mathbb{E}_\rho := E_{\rho|\{\eta\}}$ sowie den Punkt $[\varphi_\eta] \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_\rho)$. Wir setzen

$$\mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) := \mu_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}_\rho)}(1)}(\mathbb{E}_{\rho, \bullet}, \underline{\alpha}_\rho, [\varphi_\eta]).$$

Bemerkung 6.16. Es sei $W := (\mathbb{C}^{r^t}, t \in T)$ und $W_j^t := \mathrm{span}(e_1, \dots, e_{\mathrm{rk}(E_j^t)}) \subset W_j^t$ für $t \in T$ und $j = 1, \dots, l+1$. Wir wählen eine offene Menge $U \subset X$, so dass $\varphi|_U$ surjektiv ist, und Trivialisierungen $\psi^t : E|_U^t \rightarrow \mathcal{O}_U \otimes W^t$ mit $\psi(E_j^t) = \mathcal{O}_U \otimes W_j^t$ für $j = 1, \dots, l$ und $t \in T$. Es sei $\psi_\rho : E_\rho \rightarrow \mathcal{O}_U \otimes V_1$ die induzierte Trivialisierung. Die Komposition $\varphi|_U \circ \psi_\rho^{-1}$ liefert einen Schnitt $\beta : U \rightarrow \mathbb{P}(V_1)$.

6. Dekorierte Tumps

Wir wählen $m \in \mathbb{N}$, so dass $m\alpha$ in $(\mathbb{Z}/r)^{l(E_\bullet)}$ liegt. Die durch $(W_j^t, t \in T, 1 \leq j \leq l+1)$ bestimmte Fahne definiert zusammen mit den Gewichten $\gamma_k(W_\bullet, m\alpha, \underline{\kappa})$ aus (6.2) eine Einparameteruntergruppe $\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathrm{SL}_{\underline{\kappa}}(r, \mathbb{C})$. Nach [47, Exercise 2.3.2.2] gilt dann

$$\mu_1(E_\bullet, \alpha, \varphi) = \frac{1}{m} \max\{\mu_\rho(\lambda, \beta(x)) \mid x \in U\}.$$

Analog erhalten wir durch Einschränkung von $E_{\sigma, \bullet}$ auf den Punkt x_0 eine Fahne F_\bullet von $E_{\sigma|_{\{x_0\}}}$. Wir setzen

$$\mu_2(E_\bullet, \alpha, s) := \mu_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_{\sigma|_{\{x_0\}}})}(1)}(F_\bullet, \alpha_\sigma, [s]).$$

Definition 6.17. Es seien $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Q}_{>0}$. Ein σ -dekoriertes ρ -Tump ist $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -*(semi)stabil*, falls für jede gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ gilt

$$M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_\bullet, \underline{\alpha}) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) (\geq) 0. \quad (6.4)$$

Bemerkung 6.18. Man beachte, dass μ_1 und μ_2 unabhängig von der Wahl von $\underline{\chi}$ sind. Weiter sieht man leicht $\deg_{\underline{\kappa}, \underline{\chi} + c\underline{\kappa}} = \deg_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}} + c \mathrm{rk}_{\underline{\kappa}}$ für $c \in \mathbb{Q}$. Folglich gilt $M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}'} = M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}$ für $\underline{\chi}' = \underline{\chi} + c\underline{\kappa}$. Mit $c := -(r, \underline{\chi}) / (r, \underline{\kappa})$, wobei $(-, -)$ das Standardskalarprodukt bezeichnet, erreicht man $(\underline{\chi}', \underline{\kappa}) = 0$ ohne Veränderung des Stabilitätsbegriffs. Unter dieser Voraussetzung gilt dann $\deg_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}'}(E) = \deg(E^{\oplus \underline{\kappa}})$. Es folgt

$$M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}'}(E_\bullet, \underline{\alpha}) = M_{\underline{\kappa}, 0}(E_\bullet, \underline{\alpha}) - \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \mathrm{rk}_{\underline{\kappa}}(E) \mathrm{rk}_{\underline{\chi}'}(E_j).$$

Bemerkung 6.19. Da wir voraussetzen, dass ρ und σ homogen sind, gibt es nach Proposition 6.4 Zahlen $a_m, b_m, c_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m = 1, 2$, so dass V_1 bzw. V_2 ein direkter Summand von $W_{a_1, b_1, c_1}^{\oplus \underline{\kappa}}$ bzw. $W_{a_2, b_2, c_2}^{\oplus \underline{\kappa}}$ ist. Wir erhalten daher Surjektionen $p_1: E_{a_1, b_1, c_1}^{\oplus \underline{\kappa}} \rightarrow E_\rho$ und $p_2: E_{a_2, b_2, c_2}^{\oplus \underline{\kappa}} \rightarrow E_\sigma$. Für $m = 1, 2$ und ein Indextupel $\underline{i} \in I_m := \{1, \dots, l\}^{a_m}$ definieren wir

$$E^{\otimes \underline{i}} := (E_{i_1}^{\oplus \underline{\kappa}} \otimes \dots \otimes E_{i_{a_m}}^{\oplus \underline{\kappa}})^{\oplus b_m} \otimes \left(\bigwedge^r E^{\oplus \underline{\kappa}} \right)^{\otimes -c_m} \subset E_{a_m, b_m, c_m}^{\oplus \underline{\kappa}}.$$

Dann gilt wegen Beispiel 3.37

$$\mu_1(E_\bullet, \alpha, \varphi) = - \min \left\{ \sum_{j=1}^l \alpha_j (a_1 \mathrm{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) - r \nu_j(\underline{i})) \mid (\varphi \circ p_1)|_{E^{\otimes \underline{i}}} \neq 0, \underline{i} \in I_1 \right\}, \quad (6.5)$$

$$\mu_2(E_\bullet, \alpha, s) = - \min \left\{ \sum_{j=1}^l \alpha_j (a_2 \mathrm{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) - r \nu_j(\underline{i})) \mid (s \circ p_2)|_{E_{\{x_0\}}^{\otimes \underline{i}}} \neq 0, \underline{i} \in I_2 \right\} \quad (6.6)$$

mit $r := \mathrm{rk}_{\underline{\kappa}}(E)$ und $\nu_j(\underline{i}) := \#\{i \in \underline{i} \mid i \leq j\}$.

6.2.2. S-Äquivalenz

Es sei (E, L, φ, s) ein $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -semistabiler dekorierter Tump.

Definition 6.20. Eine gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ heißt *kritisch*, wenn

$$M_{\kappa, \chi}(E_\bullet, \underline{\alpha}) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}) = 0$$

gilt.

Es sei nun $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ eine kritische Fahne. Wir definieren $E_{\text{gr}}^t := \bigoplus_{j=1}^l E_j^t / E_{j-1}^t$ für $t \in T$ und das T -gespaltene Vektorbündel

$$E_{\text{gr}} := (E_{\text{gr}}^t, t \in T).$$

Dieses T -gespaltene Vektorbündel kann auch wie folgt konstruiert werden: Es sei W_\bullet eine Fahne von $W := (\mathbb{C}^{r_t}, t \in T)$ vom selben Typ wie E_\bullet . Wir wählen ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\gamma(W_\bullet, m\underline{\alpha}, \underline{\kappa})$ ganzzahlig ist. Es gibt dann eine Einparameteruntergruppe λ von $\text{SL}_{\underline{\kappa}, T}(W)$ mit assoziierter gewichteter Fahne $(W_\bullet, m\underline{\alpha})$. Das Datum der Fahne E_\bullet entspricht einer Reduktion der Strukturgruppe $\beta: X \rightarrow P/Q_{\text{GL}(r, \mathbb{C})}(\lambda)$. Man erhält so dass $Q_{\text{GL}(r, \mathbb{C})}(\lambda)$ -Prinzipalbündel $P' := \beta^* P$. Durch Erweiterung der Strukturgruppe mit der Projektion auf den Levifaktor $\pi: Q_{\text{GL}(r, \mathbb{C})}(\lambda) \rightarrow L_{\text{GL}(r, \mathbb{C})}(\lambda)$ erhalten wir das $L_{\text{GL}(r, \mathbb{C})}(\lambda)$ -Prinzipalbündel $\pi_* P'$. Das dazu assoziierte T -gespaltene Vektorbündel ist dann isomorph zu E_{gr} .

Nach Bemerkung 6.14 bestimmt E_\bullet auch eine Fahne $E_{\rho, \bullet}$ von $E_\rho \cong P' \times^\rho V_1$. Das Vektorbündel $E_{\text{gr}, \rho}$ wird dann als assoziiertes Vektorbündel von $\rho_* \pi_* P'$ konstruiert. Es sei $\pi': Q_{\text{GL}(V_1)}(\rho_* \lambda) \rightarrow L_{\text{GL}(V_1)}(\rho_* \lambda)$ die Projektion auf den Levifaktor. Dann gilt $\pi' \circ \rho = \rho \circ \pi$, so dass das assoziierte Bündel gegeben ist durch

$$E_{\text{gr}, \rho} \cong \bigoplus_{i=1}^{l(E_{\rho, \bullet})+1} E_{\rho, i} / E_{\rho, i-1}.$$

Es sei $i_0 := \min\{1 \leq i \leq l(E_{\rho, \bullet}) + 1 \mid \varphi|_{E_{\rho, i}} \neq 0\}$. Dann definiert $\varphi|_{E_{\rho, i_0}}$ einen nicht-trivialen Homomorphismus $\varphi_0: E_{\rho, i_0} / E_{\rho, i_0-1} \rightarrow L$. Es sei $\varphi_{\text{gr}}: E_{\text{gr}, \rho} \rightarrow L$ die Komposition der Projektion $E_{\text{gr}, \rho} \rightarrow E_{\rho, i_0} / E_{\rho, i_0-1}$ mit φ_0 .

Ebenso definiert E_\bullet eine Fahne $E_{\sigma, \bullet}$ von E_σ mit

$$E_{\text{gr}, \sigma} \cong \bigoplus_{j=1}^{l(E_{\sigma, \bullet})+1} E_{\sigma, j} / E_{\sigma, j-1}.$$

Es sei $j_0 := \min\{1 \leq j \leq l(E_{\sigma, \bullet}) + 1 \mid s|_{E_{\sigma, j}|_{\{x_0\}}} \neq 0\}$. Dann definiert s einen surjektiven Homomorphismus $s_0: E_{\sigma, j_0} / E_{\sigma, j_0-1}|_{\{x_0\}} \rightarrow \mathbb{C}^*$. Es sei s_{gr} die Komposition von s_0 mit der Projektion $E_{\text{gr}, \sigma}|_{\{x_0\}} \rightarrow E_{\sigma, j_0} / E_{\sigma, j_0-1}|_{\{x_0\}}$. Wir definieren die *zulässige Deformation* von (E, L, φ, s) entlang $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ durch

$$\text{df}_{(E_\bullet, \underline{\alpha})}(E, L, \varphi, s) := (E_{\text{gr}}, L, \varphi_{\text{gr}}, s_{\text{gr}}).$$

Definition 6.21. Wir definieren *S-Äquivalenz* als die durch Isomorphie und die Relationen

$$(E, L, \varphi, s) \sim \text{df}_{(E_\bullet, \underline{\alpha})}(E, L, \varphi, s)$$

für alle kritische Fahnen $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ erzeugte Relation.

6.2.3. Familien dekoriertes Tumps

Es sei $\text{Jac}^l(X)$ die Jacobi-Varietät für Geradenbündel vom Grad l auf X . Wir fixieren ein Poincaré-Bündel \mathcal{L} auf $\text{Jac}^l \times X$.

Definition 6.22. Eine durch ein Schema S parametrisierte Familie σ -dekoriertes ρ -Tumps vom Typ (\underline{d}, l) ist ein Tupel $D_S = (E_S, \kappa_S, N_{1,S}, N_{2,S}, \varphi_S, s_S)$, wobei

- E_S eine T -gespaltene flache kohärente Garbe auf $S \times X$ ist, so dass für jeden Punkt $s \in S$ die Garbe $E_{S,s} := E_{S|\{s\} \times X}$ ein T -gespaltenes Vektorbündel mit Gradvektor \underline{d} und Rangvektor \underline{r} ist,
- $\kappa_S: S \rightarrow \text{Jac}^l(X)$ ein Morphismus ist,
- $N_{1,S}, N_{2,S}$ zwei Geradenbündel auf S sind,
- $\varphi_S: E_{S,\rho} \rightarrow \text{pr}_S^* N_{1,S} \otimes (\kappa_S \times \text{id}_X)^* \mathcal{L}$ ein Homomorphismus ist, so dass für jeden Punkt $s \in S$ die Einschränkung $\varphi_{S|\{s\} \times X}$ nicht-trivial ist
- und $s_S: E_{S,\sigma|S \times \{x_0\}} \rightarrow N_{S,2}$ ein surjektiver Homomorphismus ist.

Zwei Familien D_S und D'_S auf S sind *isomorph*, wenn

- ein Geradenbündel L_S auf S und ein Isomorphismus $f: E_S \rightarrow E'_S \otimes \text{pr}_S^* L_S$ existiert,
- $\kappa_S = \kappa'_S$ gilt,
- es einen Isomorphismus $h_1: N_{1,S} \rightarrow N'_{1,S} \otimes L_S^{\otimes \deg(\rho)}$ gibt mit

$$(\varphi'_S \otimes \text{id}_{L_S^{\otimes \deg(\rho)}}) \circ f_\rho = (\text{pr}_S^* h_1 \otimes \text{id}_{(\kappa_S \times \text{id}_X)^* \mathcal{L}}) \circ \varphi_S,$$

- und es einen Isomorphismus $h_2: N_{2,S} \rightarrow N'_{2,S} \otimes L_S^{\otimes \deg(\sigma)}$ gibt mit

$$(s'_S \otimes \text{id}_{L_S^{\otimes \deg(\sigma)}}) \circ f_{\sigma|S \times \{x_0\}} = h_2 \circ s_S.$$

Definition 6.23. Eine durch S parametrisierte Familie D_S heißt $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)-stabil, wenn für jeden Punkt $s \in S$ der dekorierte Tump $D_{S|s} := (E_{S|s}, \kappa_{S|s}, \varphi_{S|s}, s_{S|s})$ $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabil ist.

Diese Daten definieren den Modulfunktor

$$\mathcal{T}\text{mp}^{(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)\text{-(s)s}}(\sigma, \rho, \underline{d}, l): \underline{\text{Sch}} \rightarrow \underline{\text{Sets}}$$

der $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabilen σ -dekorierten ρ -Tumps vom Typ (\underline{d}, l) .

Wir erinnern daran, dass wir in Bemerkung 6.19 Zahlen a_2, b_2 und c_2 fixiert haben, so dass die Darstellung σ ein direkter Summand der natürlichen Darstellung $W_{a_2, b_2, c_2}^{\oplus \kappa}$ ist. Wir sind nun in der Lage, das zentrale Ergebnis dieses Kapitels zu formulieren.

Theorem 6.24. Für $a_2 \delta_2 < 1$ existiert der (projektive) grobe Modulraum

$$\text{Tmp}^{(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)\text{-(s)s}}(\sigma, \rho, \underline{d}, l)$$

der $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabilen σ -dekorierten ρ -Tumps vom Typ (\underline{d}, l) .

Die folgenden Abschnitte widmen sich der Konstruktion dieses Modulraums. Der Beweis von Theorem 6.24 wird am Ende von Abschnitt 6.5 gegeben.

Bemerkung 6.25. (i) Die Voraussetzung $a_2\delta_2 < 1$ ist notwendig, um die $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -Stabilität eines dekorierten Tumps mit der GIT-Stabilität des entsprechenden Punktes im Gieseker-Raum vergleichen zu können (siehe Proposition 6.42), und um die Eigentlichkeit des Gieseker-Morphismus zu beweisen (siehe Proposition 6.46). In konkreten Beispielen lässt sich diese Bedingung aber durch angepasste Konstruktionen abschwächen (vgl. Bemerkung 6.50).

(ii) Wir betrachten die triviale Darstellung $\sigma: G \rightarrow \mathrm{SL}(1) = \{1\}$. Dann ist $E_\sigma = \mathcal{O}_X$ und $\mathbb{P}(E_\sigma) \cong X$. Es gibt also genau einen Punkt $s \in \mathbb{P}(E_\sigma)|_{x_0}$. Die Kategorie der σ -dekorierten ρ -Tumps ist dann äquivalent zur Kategorie der ρ -Tumps, die in [47, Section 2.5] beschrieben wurde. Weiterhin findet man $\mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) = 0$ für jede gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$, so dass auch der Begriff der (Semi)Stabilität übereinstimmt. Somit ist Theorem 6.24 eine Verallgemeinerung von [47, Thm. 2.5.3.7].

6.3. Konstruktion des Parameterraums

6.3.1. Dekorierte Quotiententumps

Proposition 6.26. *Es gibt eine Konstante C , so dass für jeden $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -semistabilen dekorierten Tump (E, L, φ, s) gilt:*

(i) *Jede T -gespaltene Untergarbe $F \subset E$ erfüllt*

$$\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(F) < \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + C.$$

(ii) *Für jeden Index $t_0 \in T$ erfüllt jedes nicht-triviale Unterbündel $F^{t_0} \subset E^{t_0}$*

$$\mu(F^{t_0}) < \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + C - m(\underline{\kappa}, \underline{\chi}).$$

Beweis. (i) Wir betrachten die gewichtete Fahne $(\{0\} \subset F \subset E, (1))$ T -gespaltener Vektorbündel. Die $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -Semistabilität impliziert

$$\deg_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) \mathrm{rk}_{\underline{\kappa}}(F) - \deg_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(F) \mathrm{rk}_{\underline{\kappa}}(E) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) \geq 0.$$

Wir erhalten mit (6.5) und (6.6)

$$\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(F) \leq \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + (\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2) \frac{r-1}{r}$$

mit $r := (\underline{\kappa}, \underline{r}) = \mathrm{rk}_{\underline{\kappa}}(E)$.

(ii) Wir betrachten nun die T -gespaltene Garbe \tilde{F} mit $\tilde{F}^{t_0} = F^{t_0}$ und $\tilde{F}^t = \{0\}$ für $t \neq t_0$. Dann gilt $\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(\tilde{F}) = \mu(F^{t_0}) + \chi_{t_0}/\kappa_{t_0}$. Mit Teil (i) folgt die Behauptung. \square

Korollar 6.27. *Es gibt ein n_0 , so dass für $n \geq n_0$, jeden $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -semistabilen dekorierten Tump (E, L, φ, s) und jedes $t \in T$ gilt: Das Bündel $E^t(n)$ ist global erzeugt und $H^1(E^t(n))$ verschwindet.*

6. Dekorierte Tumps

Motiviert durch die Konstruktion des Modulraums stabiler Vektorbündel betrachten wir zunächst ein einfacheres Modulproblem. Es sei $n \geq n_0$, $p_t(n) := d_t + r_t(n + 1 - g)$, $Y^t := \mathbb{C}^{p_t(n)}$, $t \in T$, und $Y := (Y^t, t \in T)$.

Definition 6.28. Eine durch ein Schema S parametrisierte *Familie dekorierte Quotiententumps* ist ein Tupel $(q_S, \kappa_S, N_{1,S}, N_{2,S}, \varphi_S, s_S)$, wobei $q_S: Y \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow E_S$ ein Quotient T -gespaltener Vektorbündel ist, so dass $(E_S, \kappa_S, N_{1,S}, N_{2,S}, \varphi_S, s_S)$ eine Familie dekorierte Tumps ist und für alle $s \in S$ der Homomorphismus $H^0(q_{S,s}(n))$ ein Isomorphismus ist und $h^1(E_{S,s}(n))$ verschwindet. Ein *Isomorphismus* zweier Familien mit $\kappa_S = \kappa'_S$ ist ein Isomorphismus (f, h_1, h_2) der Familien dekorierte Tumps mit $f \circ q_S = q'_S$.

Diese Daten definieren den Modulfunktor

$$\text{QTmp}_{Y \otimes \mathcal{O}_X(-n), X}^{d,l}: \underline{\text{Sch}}/\mathbb{C} \rightarrow \underline{\text{Sets}}$$

der dekorierten Quotienten-Tumps vom Typ (\underline{d}, l) .

Lemma 6.29. *Es seien S ein Schema, $\mathcal{E}_S, \mathcal{F}_S$ zwei kohärente Garben auf $S \times X$ und $\varphi: \mathcal{E}_S \rightarrow \mathcal{F}_S$ ein Morphismus. Wenn \mathcal{F}_S flach über S ist, dann gibt es ein abgeschlossenes Unterschema $V(\varphi) \subset S$ mit der Eigenschaft, dass ein Morphismus $f: T \rightarrow S$ genau dann durch $V(\varphi)$ faktorisiert, wenn der Rückzug $(f \times \text{id}_X)^* \varphi$ trivial ist.*

Beweis. Siehe [47, Proposition 2.3.5.1] für den Fall, dass \mathcal{E}_S und \mathcal{F}_S lokal frei sind. Der allgemeine Fall wird in [10, Lemma 3.1] bewiesen. \square

Proposition 6.30. *Der feine Modulraum $\text{QTmp}_n = \text{QTmp}_{Y \otimes \mathcal{O}_X(-n), X}^{d,l}$ der dekorierten Quotiententumps vom Typ (\underline{d}, l) existiert.*

Beweis. Für $t \in T$ sei $\text{Quot}_n^t := \text{Quot}_{Y^t \otimes \mathcal{O}_X(-n), X}^{d_t, r_t}$ das Quot-Schema mit universellem Quotienten $q_t: Y^t \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow Q^t$ auf $\text{Quot}_n^t \times X$ (siehe Abschnitt 2.4). Weiter sei $\text{Quot}_n^{t,0}$ das offene Unterschema aus Lemma 4.9, so dass für jeden Punkt $p \in \text{Quot}_n^{t,0}$ die Garbe Q_p^t lokal frei ist und $H^0(q_{t,p}(n))$ ein Isomorphismus ist. Wir setzen $\text{Quot}_n := \prod_{t \in T} \text{Quot}_n^{t,0}$, und $Q := ((\text{pr}_t \times \text{id}_X)^* Q^t, t \in T)$, so dass man auf $\text{Quot}_n \times X$ den Quotienten $q: Y \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow Q$ von T -gespaltenen Vektorbündeln hat. Wir betrachten nun für eine ganze Zahl m auf $\text{Quot} \times \text{Jac}^l \times X$ die Garben

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \text{pr}_{\text{Quot}_n \times X}^* Q \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(m), \\ \mathcal{G} &:= (\text{pr}_{\text{Jac}^l} \times \text{id}_X)^* \mathcal{L} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(m). \end{aligned}$$

Für genügend großes m sind für jeden Punkt $s \in P_0 := \text{Quot} \times \text{Jac}^l$ die Garben \mathcal{F}_s und \mathcal{G}_s global erzeugt, und es gilt $h^1(\mathcal{F}_s^t) = h^1(\mathcal{G}_s^t) = 0$, $t \in T$, so dass nach dem Basiswechsel- und Kohomologiesatz $\text{pr}_{P_0^*} \mathcal{F}$ und $\text{pr}_{P_0^*} \mathcal{G}$ lokal frei sind. Wir bilden das Bündel

$$P_1 := \mathbb{P}(\text{Hom}(\text{pr}_{P_0^*} \mathcal{F}, \text{pr}_{P_0^*} \mathcal{G})^\vee)$$

über P_0 . Auf P_1 gibt es dann den tautologischen Homomorphismus

$$f: \text{pr}_{P_0^*}^* \text{pr}_{P_0^*} \mathcal{F} \rightarrow \text{pr}_{P_0^*}^* \text{pr}_{P_0^*} \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{P_1}(1)$$

sowie auf $P_1 \times X$ die surjektiven Auswertungshomomorphismen

$$\text{ev}_{\mathcal{F}}: \text{pr}_{P_0}^* \text{pr}_{P_0^*} \mathcal{F} \rightarrow \text{pr}_{P_0 \times X}^* \mathcal{F}, \quad \text{ev}_{\mathcal{G}}: \text{pr}_{P_0}^* \text{pr}_{P_0^*} \mathcal{G} \rightarrow \text{pr}_{P_0 \times X}^* \mathcal{G}.$$

Es sei $K := \ker(\text{ev}_{\mathcal{F}})$ und h die Einschränkung von $(\text{ev}_{\mathcal{G}} \otimes \text{id}_{\mathcal{O}_{P_1}(1)}) \circ \text{pr}_{P_1}^* f$ auf K . Dann gibt es nach Lemma 6.29 ein abgeschlossenes Unterschema $P_2 := V(h)$ von P_1 , auf dem h verschwindet. Auf P_2 gibt es dann einen tautologischen Homomorphismus

$$\bar{f}: \text{pr}_{\text{Quot}_n \times X}^* \mathcal{Q}_\rho \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(m) \rightarrow (\text{pr}_{\text{Jac}^l} \times \text{id}_X)^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{P_1}(1) \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(m).$$

Wir setzen $\varphi := \bar{f} \otimes \text{id}_{\text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-m)}$.

Schließlich bilden wir $P := \mathbb{P}(\text{pr}_{\text{Quot}_n \times X}^* \mathcal{Q}_\sigma)_{|P_2 \times \{x_0\}}$. Auf P haben wir nun den universellen Quotienten T -gespaltener Vektorbündel mit Gradvektor \underline{d} und Rangvektor \underline{r}

$$\tilde{q}: Y \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow \tilde{E}$$

mit $\tilde{E} := (\tilde{E}^t, t \in T)$ und $\tilde{E}^t := \text{pr}_{\text{Quot}_n^t \times X}^* \mathcal{Q}^t$, den tautologischen Homomorphismus

$$\tilde{\varphi}: \tilde{E}_\rho \rightarrow \tilde{L} \otimes \text{pr}_P^* \tilde{N}_1$$

mit $\tilde{\kappa} := \text{pr}_{\text{Jac}^l}$, $\tilde{L} := (\tilde{\kappa} \times \text{id}_X)^* \mathcal{L}$ und $\tilde{N}_1 := \text{pr}_{P_1}^* \mathcal{O}_{P_1}(1)$, sowie den tautologischen Homomorphismus $\tilde{s}: \tilde{E}_{\sigma|P \times \{x_0\}} \rightarrow \mathcal{O}_P(1) =: \tilde{N}_2$.

Das folgende Lemma zeigt, dass $\text{QTmp}_n := P$ der feine Modulraum der dekorierten Quotiententumps ist. \square

Lemma 6.31. *Die durch QTmp_n parametrisierte Familie $(\tilde{q}, \tilde{\kappa}, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{\varphi}, \tilde{s})$ erfüllt die universelle Eigenschaft für Familien dekorierte Quotiententumps.*

Beweis. Es sei S ein Schema und $(q_S, \kappa_S, N_{1,S}, N_{2,S}, \varphi_S, s_S)$ eine durch S parametrisierte Familie dekorierte Quotiententumps. Aufgrund der universellen Eigenschaft des Quot-Schemas bestimmen die Quotienten $q_{S,t}$, $t \in T$, einen eindeutigen Morphismus $f_0: S \rightarrow \text{Quot}_n$ mit $h^* \tilde{q} \cong q_S$. Zusammen mit κ_S erhält man einen Morphismus $f_1: S \rightarrow \text{Quot}_n \times \text{Jac}^l$. Der Homomorphismus

$$\text{pr}_{S^*}(E_{S,\rho} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(m)) \xrightarrow{\text{pr}_{S^*}(\varphi_S(m))} N_{1,S} \otimes \text{pr}_{S^*}((\kappa_S \times \text{id}_X)^* \mathcal{L} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}(m))$$

liefert einen Morphismus $f_2: S \rightarrow P_1$ über f_1 , der nach Konstruktion über P_2 faktorisiert. Er erfüllt $f_2^*(\mathcal{O}_{P_1}(1)) \cong N_{1,S}$ und $f_2^* \tilde{\varphi} \cong \varphi_S$. Schließlich bestimmt $s_S: E_{S,\sigma|S \times \{x_0\}} \cong f_1^* \tilde{E}_{\sigma|P_2 \times \{x_0\}} \rightarrow N_{2,S}$ einen Morphismus $f: S \rightarrow \text{QTmp}_n$ über f_1 . Nach Konstruktion gilt dann

$$f^*(\tilde{q}, \tilde{\kappa}, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{\varphi}, \tilde{s}) \cong (q_S, \kappa_S, N_{1,S}, N_{2,S}, \varphi_S, s_S).$$

\square

6.3.2. Der Gieseker-Morphismus

Für einen Index $t \in T$ sei Jac^{dt} die Jacobi-Varietät der Geradenbündel vom Grad d_t auf X und \mathcal{P}^t ein Poincaré-Bündel auf $\text{Jac}^{dt} \times X$. Wir betrachten auf $\text{Jac}^d := \prod_{t \in T} \text{Jac}^{dt}$ das Geradenbündel

$$\mathcal{P}^{\otimes \underline{\kappa}} := \bigotimes_{t \in T} (\text{pr}_{\text{Jac}^{dt}} \times \text{id}_X)^* \mathcal{P}^{t \otimes \kappa_t}.$$

Nach Proposition 4.7 gibt es ein n_1 , so dass für $n \geq n_1$, $t \in T$ und einen Punkt $y \in \text{Jac}^{dt}$ gilt:

- $h^1(\mathcal{P}_{\{y_1\} \times X}^t(nr_t)) = h^1(\mathcal{P}_{\{y_1\} \times X}^{\otimes \kappa_{c_1}} \otimes \mathcal{L}_{\{y_2\} \times X})(na_1) = 0$,
- $\mathcal{P}_{\{y\} \times X}^t(nr_t)$ und $(\mathcal{P}_{\{y_1\} \times X}^{\otimes \kappa_{c_1}} \otimes \mathcal{L}_{\{y_2\} \times X})(na_1)$ sind global erzeugt.

Wir wählen ein $n \geq n_1$. Dann ist die Garbe

$$\mathcal{G}_{1,t} := \mathcal{H}om \left(\bigwedge^{r_t} Y^t \otimes \mathcal{O}_{\text{Jac}^{dt}}, \text{pr}_{\text{Jac}^{dt}*} (\mathcal{P}^t \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(r_t n)) \right)$$

über Jac^{dt} lokal frei. Wir definieren $\text{Gies}_{1,t} := \mathbb{P}(\mathcal{G}_{1,t}^\vee)$. Ohne Einschränkung darf man annehmen, dass $\mathcal{O}_{\text{Gies}_{1,t}}(1)$ sehr ampel ist.

Es sei $p_t: \text{Quot}_n^{t,0} \rightarrow \text{Jac}^{dt}$ der durch $\det(Q^t)$ bestimmte Morphismus. Es gibt dann ein Geradenbündel \mathcal{A}^t auf $\text{Quot}_n^{t,0}$ mit $\det(Q^t) \cong \text{pr}_{\text{Quot}_n^{t,0}}^* \mathcal{A}^t \otimes (p_t \times \text{id}_X)^* \mathcal{P}^t$. Der Vorschub des Homomorphismus

$$\bigwedge^{r_t} (q_t \otimes \text{id}_{\text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(n)}) : \bigwedge^{r_t} Y^t \otimes \mathcal{O}_{\text{Quot}_n^{t,0} \times X} \rightarrow \det(Q^t) \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(nr_t)$$

von $\text{Quot}_n^{t,0} \times X$ nach $\text{Quot}_n^{t,0}$ definiert einen $\text{GL}(Y^t)$ -äquivarianten Morphismus

$$\iota_{1,t}: \text{Quot}_n^{t,0} \rightarrow \text{Gies}_{1,t}$$

über Jac^{dt} mit $\iota_{1,t}^* \mathcal{O}_{\text{Gies}_{1,t}}(1) = \mathcal{A}^t$. Wir setzen $\text{Gies}_1 := \prod_{t \in T} \text{Gies}_{1,t}$ und erhalten den $\text{GL}_T(Y)$ -äquivarianten Morphismus

$$\iota_1 := \prod_{t \in T} \left(\iota_{1,t} \circ \text{pr}_{\text{Quot}_n^{t,0}} \right) : \text{Quot}_n \rightarrow \text{Gies}_1$$

über Jac^d mit $\iota_1^* \mathcal{O}_{\text{Gies}_1}(1) = \mathcal{A} := \bigotimes_{t \in T} \text{pr}_{\text{Quot}_n^{t,0}}^* \mathcal{A}^t$.

Wir betrachten nun auf $J := \text{Jac}^d \times \text{Jac}^l$ die lokal freie Garbe

$$\mathcal{G}_2 := \mathcal{H}om \left(Y_{a_1, b_1}^{\oplus \underline{\kappa}} \otimes \mathcal{O}_J, \text{pr}_{J*} \left(\text{pr}_{\text{Jac}^d \times X}^* \mathcal{P}^{\otimes \underline{\kappa}_{c_1}} \otimes \text{pr}_{\text{Jac}^l \times X}^* \mathcal{L} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(na_1) \right) \right)$$

und setzen $\text{Gies}_2 := \mathbb{P}(\mathcal{G}_2^\vee)$. Indem man die Poincaré-Bündel \mathcal{L} und \mathcal{P}^t mit ausreichend hohen Potenzen der dualen Bündel von ampelen Geradenbündeln auf Jac^l bzw. Jac^{dt} tensoriert, kann man erreichen, dass $\mathcal{O}_{\text{Gies}_2}(1)$ sehr ampel ist.

Auf $\text{QTmp}_n \times X$ haben wir nach Proposition 6.4 die Surjektionen

$$Y_{a_1, b_1}^{\oplus \underline{\kappa}} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-a_1 n) \rightarrow \tilde{E}_{a_1, b_1}^{\oplus \underline{\kappa}} \rightarrow \tilde{E}_\rho \otimes \det(\tilde{E}^{\oplus \underline{\kappa}})^{\otimes c_1}.$$

Durch Komposition mit $\tilde{\varphi} \otimes \text{id}_{\det(\tilde{E}^{\oplus \kappa})^{\otimes c_1}}$ und Tensorieren mit $\text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(a_1 n)$ erhalten wir einen Homomorphismus

$$Y_{a_1, b_1}^{\oplus \kappa} \otimes \mathcal{O}_{\text{QTmp}_n \times X} \rightarrow \tilde{L} \otimes \text{pr}_{\text{QTmp}_n}^* \tilde{N}_1 \otimes \det(\tilde{E}^{\oplus \kappa})^{\otimes c_1} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(na_1).$$

Wir benutzen $\det(\tilde{E}^{\oplus \kappa}) = \text{pr}_{\text{Quot}_n}^* \mathcal{A}^{\otimes \kappa} \otimes \text{pr}_{\text{Jac}^d \times X}^* \mathcal{P}^{\otimes \kappa}$ mit

$$\mathcal{A}^{\otimes \kappa} := \bigotimes_{t \in T} \text{pr}_{\text{Quot}_n^{t,0}}^* \mathcal{A}^{t \otimes \kappa_t}$$

und bilden den Vorschub nach QTmp_n , um den Homomorphismus

$$Y_{a_1, b_1}^{\oplus \kappa} \otimes \mathcal{O}_{\text{QTmp}_n} \rightarrow \text{pr}_{\text{QTmp}_n}^* \left(\tilde{L} \otimes \text{pr}_{\text{Jac}^d \times X}^* \mathcal{P}^{\otimes \kappa c_1} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(na_1) \right) \otimes \mathcal{B}$$

mit $\mathcal{B} := \tilde{N}_1 \otimes \text{pr}_{\text{Quot}_n}^* \mathcal{A}^{\otimes \kappa c_1}$ zu erhalten. Dieser definiert einen $\text{GL}_T(Y)$ -äquivalenten Morphismus

$$\iota_2: \text{QTmp}_n \rightarrow \text{Gies}_2$$

über Jac^d mit $\iota_2^* \mathcal{O}_{\text{Gies}_2}(1) = \mathcal{B}$. Analog haben wir auf $\text{QTmp}_n \times X$ die Surjektionen

$$Y_{a_2, b_2}^{\oplus \kappa} \otimes \mathcal{O}_{\text{QTmp}_n \times X}(-a_2 n) \rightarrow \tilde{E}_{a_2, b_2}^{\oplus \kappa} \rightarrow \tilde{E}_\sigma \otimes \det(\tilde{E})^{\otimes \kappa c_2}.$$

Durch Einschränken auf $\text{QTmp}_n \times \{x_0\}$ und Komposition mit \tilde{s} erhalten wir den Homomorphismus

$$Y_{a_2, b_2}^{\oplus \kappa} \otimes \mathcal{O}_{\text{QTmp}_n} \rightarrow \tilde{N}_2 \otimes \text{pr}_{\text{Quot}_n}^* \mathcal{A}^{\otimes \kappa c_2} \otimes \text{pr}_{\text{Jac}^d \times X}^* \mathcal{P}_{|\text{QTmp}_n}^{\otimes \kappa c_2}.$$

Dies definiert einen $\text{GL}_T(Y)$ -äquivalenten Morphismus

$$\iota_3: \text{QTmp}_n \rightarrow \mathbb{P}(Y_{a_2, b_2}^{\oplus \kappa}) =: \text{Gies}_3$$

mit $\iota_3^* \mathcal{O}_{\text{Gies}_3}(1) = \tilde{N}_2 \otimes \text{pr}_{\text{Quot}_n}^* \mathcal{A}^{\otimes \kappa c_2} \otimes (\text{pr}_{\text{Jac}^d} \times \text{id}_X)^* \mathcal{P}_{|\text{QTmp}_n}^{\otimes \kappa c_2}$. Wir definieren nun den *Gieseker-Raum*

$$\text{Gies}_n := \text{Gies}_1 \times_{\text{Jac}^d} \text{Gies}_2 \times \text{Gies}_3.$$

Die oben konstruierten Morphismen ι_i , $i = 1, 2, 3$, bestimmen den $\text{GL}_T(Y)$ -äquivalenten Morphismus

$$\text{gies}_n := (\iota_1 \circ \text{pr}_{\text{Quot}_n}, \iota_2, \iota_3): \text{QTmp}_n \rightarrow \text{Gies}_n$$

über $\text{Jac}^d \times \text{Jac}^l$.

Lemma 6.32. *Der Gieseker-Morphismus ist injektiv.*

Beweis. Es sei $p \in \text{QTmp}_n$ ein Punkt mit assoziiertem dekorierten Quotiententump (q, L, φ, s) . Aus der Wahl von n und Lemma 4.36 ergibt sich, dass ι_1 injektiv ist, d.h. q ist durch $\text{gies}_n(p)$ bestimmt. Analog sieht man, dass φ durch das Bild $\iota_2(p)$ eindeutig bestimmt ist. Schließlich ist offensichtlich, dass $\iota_3(p)$ die Dekoration s festlegt. \square

6. Dekorierte Tumps

Wir linearisieren die Wirkung von $GL_T(Y)$ im Geradenbündel

$$\mathcal{O}_{\text{Gies}_n}(\eta_t, t \in T, \theta_1, \theta_2) := \left(\bigotimes_{t \in T} \text{Pr}_{\text{Gies}_{t,1}}^* \mathcal{O}_{\text{Gies}_{t,1}}(\eta_t) \right) \boxtimes \mathcal{O}_{\text{Gies}_2}(\theta_1) \boxtimes \mathcal{O}_{\text{Gies}_3}(\theta_2)$$

mit

$$\begin{aligned} \eta_t &:= z \left((p(n) + (r, \underline{\chi}) - a_1 \delta_1 - a_2 \delta_2) \kappa_t - r \chi_t \right), \quad t \in T, \\ \theta_1 &:= zr \delta_1, \quad \theta_2 := zr \delta_2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Hierbei ist $p(n) := \dim(Y^{\oplus \kappa}) = \sum_{t \in T} \kappa_t p_t(n)$ und $z \in \mathbb{N}_{>0}$ eine Zahl, so dass η_t , $t \in T$, und θ_m , $m = 1, 2$, ganzzahlig sind. Indem man n genügend groß wählt, kann man erreichen, dass diese Zahlen positiv sind, und das konstruierte Geradenbündel somit sehr ampel ist.

Bemerkung 6.33. Es seien L^{d_t} Geradenbündel vom Grad d_t , $t \in T$ und L ein Geradenbündel vom Grad l auf X . Die Faser von Gies_n über dem durch diese Geradenbündel bestimmten Punkt in $\text{Jac}^d \times \text{Jac}^l$ ist dann isomorph zu

$$\prod_{t \in T} \text{Gies}_{1,t}(L^{d_t}) \times \mathbb{P} \left(\text{Hom} \left(Y_{a_1, b_1}^{\oplus \kappa}, H^0(L^{d \otimes c_1} \otimes L(a_1 n)) \right)^\vee \right) \times \mathbb{P}(Y_{a_2, b_2}^{\oplus \kappa}).$$

mit $L^d := \bigotimes_{t \in T} L^{d_t}$ und

$$\text{Gies}_{1,t}(L^{d_t}) := \mathbb{P} \left(\text{Hom} \left(\bigwedge^r Y^t, H^0(L^{d_t}(nr_t)) \right)^\vee \right).$$

Es sei $q: Y \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow E$ ein generisch surjektiver Morphismus T -gespaltener Vektorbündel mit $\underline{r}(E) = \underline{r}$ und $\det(E^i) \cong L^{d_t}$, $t \in T$. Dies definiert Punkte $[M_t] \in \text{Gies}_{1,t}$, $t \in T$. Analog zu Lemma 4.37 berechnet man für eine Einparameteruntergruppe λ von $\text{SL}_{\underline{\kappa}, T}(Y)$ mit assoziierter gewichteter Fahne $(Y_\bullet, \underline{\alpha})$

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, [M_t]) &= - \sum_{k=1}^{l(Y_\bullet)+1} \gamma_k \left(\text{rk}(F_k^t) - \text{rk}(F_{k-1}^t) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{l(Y_\bullet)} \alpha_j \left(p(n) \text{rk}(F_j^t) - \text{rk}(E^t) \dim_{\underline{\kappa}}(Y_j) \right), \end{aligned} \quad (6.8)$$

wobei $F_j^t \subset E^t$ die von $Y_j^t = Y^t \cap Y_j$ erzeugte Untergarbe ist. Für zwei Punkte

$$[T_1] \in \mathbb{P} \left(\text{Hom} \left(Y_{a_1, b_1}^{\oplus \kappa}, H^0(L^{d \otimes c_1} \otimes L(a_1 n)) \right)^\vee \right), \quad [T_2] \in \mathbb{P}(Y_{a_2, b_2}^{\oplus \kappa}),$$

berechnet man mit Beispiel 3.37

$$\mu(\lambda, [T_1]) = - \min \left\{ \sum_{j=1}^{l(Y_\bullet)} \alpha_j (a_1 \dim_{\underline{\kappa}}(Y_j) - p(n) \nu_j(\underline{i})) \mid \underline{i} \in I_1 : T_1|_{Y^{\otimes \underline{i}}} \neq 0 \right\}, \quad (6.9)$$

$$\mu(\lambda, [T_2]) = - \min \left\{ \sum_{j=1}^{l(Y_\bullet)} \alpha_j (a_2 \dim_{\underline{\kappa}}(Y_j) - p(n) \nu_j(\underline{i})) \mid \underline{i} \in I_2 : T_2|_{Y^{\otimes \underline{i}}} \neq 0 \right\}. \quad (6.10)$$

Insbesondere haben wir die Abschätzung

$$-a_2 \sum_{j=1}^{l(Y_\bullet)} \alpha_j \dim_{\underline{\kappa}}(Y_j) \leq \mu(\lambda, [T_2]) \leq a_2 \sum_{j=1}^{l(Y_\bullet)} \alpha_j (p(n) - \dim_{\underline{\kappa}}(Y_j)). \quad (6.11)$$

6.4. Vergleich der Stabilitätsbegriffe

6.4.1. Schnittstabilität

Für eine gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ und eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Größe

$$M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet, \underline{\alpha}, n) := \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E(n)) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) - h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E_j(n)) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E) \right).$$

Definition 6.34. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Ein dekorierter Tump (E, L, φ, s) ist $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ - n -schnitt(semi)stabil, wenn für jede gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ gilt

$$M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet, \underline{\alpha}, n) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) (\geq) 0.$$

Lemma 6.35. Es gibt ein $n_2 \geq n_1$, so dass für $n \geq n_2$, jeden $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ - n -schnitt-semistabilen dekorierten Tump (E, L, φ, s) und jedes $t \in T$ gilt: $h^1(E^t(n)) = 0$.

Beweis. Angenommen es gilt $h^1(E^{t_0}(n)) = h^0(E^{t_0 \vee}(-n) \otimes \omega_X) \neq 0$ für einen Index $t_0 \in T$ und $f: E^{t_0}(n) \rightarrow \omega_X$ ist ein nicht-trivialer Homomorphismus. Es sei $F^{t_0}(n) := \ker(f)$ und \tilde{F} das T -gespaltene Bündel mit $\tilde{F}^{t_0} = F^{t_0}$ und $\tilde{F}^t = E^t$ für $t \neq t_0$. Die Schnittsemistabilität für die Fahne $(\tilde{F} \subset E, (1))$ liefert

$$h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(F(n)) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E) \leq h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E(n)) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F) + (a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F).$$

Es gilt $h^0(E^{t_0}(n)) \leq h^0(F^{t_0}(n)) + g$, $\operatorname{rk}(F^{t_0}) = \operatorname{rk}(E^{t_0}) - 1$ und daher

$$h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E(n)) - \kappa_{t_0} g - \chi_{t_0} \leq h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(F(n)).$$

Wir erhalten somit die Abschätzung

$$\kappa_{t_0} h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E(n)) \leq (\kappa_{t_0} g + \chi_{t_0}) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E) + (a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2) (\operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E) - \kappa_{t_0}).$$

Schließlich findet man mit dem Satz von Riemann-Roch

$$\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + n + 1 - g \leq \frac{h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E(n))}{\operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E)} \leq g + \frac{\chi_{t_0}}{\kappa_{t_0}} + \frac{r - \kappa_{t_0}}{\kappa_{t_0} r} (a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2).$$

Für $n \geq 2g + M(\underline{\kappa}, \underline{\chi}) - \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + (a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2)$ muss also $h^1(E^t(n)) = 0$ für alle $t \in T$ gelten. \square

Proposition 6.36. Für $n \geq n_2$, einen $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ - n -schnitt-semistabilen dekorierten Tump (E, L, φ, s) und eine gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ gilt

$$M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_\bullet, \underline{\alpha}) \geq M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet, \underline{\alpha}, n).$$

Insbesondere ist jeder $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ - n -schnitt(semi)stabile dekorierte Tump dann auch $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabil.

6. Dekorierte Tumps

Beweis. Dies folgt aus dem vorangegangenen Lemma und dem Satz von Riemann-Roch. \square

Lemma 6.37. *Es gibt ein $n_3 \geq n_2$, so dass für $n \geq n_3$, jeden $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -semistabilen dekorierten Tump (E, L, φ, s) , jede T -gespaltene Untergarbe $F \subset E$ und jedes $t \in T$ mit $h^1(F^t(n)) \neq 0$ gilt:*

$$h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E(n)) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F) - h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(F(n)) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E) - \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F)(a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2) > 0.$$

Beweis. Es gibt nach Proposition 6.26 eine Konstante C mit $\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^{\max}(E) < \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + C$ für alle semistabilen T -gespaltenen Vektorbündel E . Wir setzen

$$\underline{C} := g + C - m(\underline{\kappa}, \underline{\chi}) + \frac{1}{\operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E)}(a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2)$$

und teilen die Klasse der T -gespaltenen Unterbündel von E in zwei Klassen

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ F \mid \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^{\min}(F) < \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + C - \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F)\underline{C} - \operatorname{rk}_{\underline{\chi}}(F) \right\}, \\ B &:= \left\{ F \mid \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^{\min}(F) \geq \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + C - \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F)\underline{C} - \operatorname{rk}_{\underline{\chi}}(F) \right\}. \end{aligned}$$

Es sei zunächst F aus A . Nach Lemma 6.13 haben wir

$$\begin{aligned} h_{\underline{\kappa}}^0(F(n)) &\leq (\operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F) - 1) \left[\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^{\max}(F(n)) - m(\underline{\kappa}, \underline{\chi}) + 1 \right]_+ \\ &\quad + \left[\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^{\min}(F(n)) - m(\underline{\kappa}, \underline{\chi}) + 1 \right]_+. \end{aligned}$$

Aus der Definition von A und dem Satz von Riemann-Roch ergibt sich

$$\begin{aligned} h_{\underline{\kappa}}^0(F(n)) &< \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F) \left(\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + 1 + n - g - \frac{1}{\operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E)}(a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2) \right) - \operatorname{rk}_{\underline{\chi}}(F) \\ &\leq \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F) \frac{h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E(n))}{\operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E)} - \frac{\operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F)}{\operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E)}(a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2) - \operatorname{rk}_{\underline{\chi}}(F). \end{aligned}$$

Also gilt

$$h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E(n)) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F) - h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(F(n)) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E) - \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F)(a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2) > 0.$$

Es sei nun F aus B . Für eine Komponente F^t haben wir nach Definition und Korollar 6.27, (ii),

$$\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + C - \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F)\underline{C} - \operatorname{rk}_{\underline{\chi}}(F) - M(\underline{\kappa}, \underline{\chi}) \leq \mu(F^t) < \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + C - m(\underline{\kappa}, \underline{\chi}).$$

Es gibt daher nur endlich viele Kombinationen von Grad und Rang für F^t , so dass die Menge der Isomorphieklassen solcher Vektorbündel beschränkt ist. Es gibt also ein n_3 , so dass $h^1(F^t(n)) = 0$ für alle $n \geq n_3$ gilt. \square

Bemerkung 6.38. Das vorangegangene Lemma legt folgende Konstruktion nahe: Es sei $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ eine gewichtete Fahne der Länge $l = l(E_\bullet)$. Wir wählen $n \geq n_3$ und zerlegen die Menge der Indizes $I = \{1, \dots, l\}$ in zwei Teilmengen

$$\begin{aligned} \{i_1^A, \dots, i_r^A\} &:= \{i \in I \mid \exists t \in T : h^1(E_i^t(n)) \neq 0\}, \\ \{i_1^B, \dots, i_s^B\} &:= \{i \in I \mid \forall t \in T : h^1(E_i^t(n)) = 0\}, \end{aligned}$$

wobei wir annehmen, dass die Indizes aufsteigend angeordnet sind, d.h. $i_1^A < \dots < i_r^A$ und $i_1^B < \dots < i_s^B$. Wir definieren dann die gewichteten Fahnen $(E_\bullet^A, \underline{\alpha}^A)$ und $(E_\bullet^B, \underline{\alpha}^B)$ durch

$$\begin{aligned} E_\bullet^A : \quad \{0\} &= E_0 \subset E_{i_1^A} \subset \dots \subset E_{i_r^A} \subset E, \\ E_\bullet^B : \quad \{0\} &= E_0 \subset E_{i_1^B} \subset \dots \subset E_{i_s^B} \subset E, \end{aligned}$$

und die Gewichtsvektoren $\underline{\alpha}^A := (\alpha_{i_1^A}, \dots, \alpha_{i_r^A})$ bzw. $\underline{\alpha}^B := (\alpha_{i_1^B}, \dots, \alpha_{i_s^B})$.

Proposition 6.39. *Es sei $n \geq n_3$, (E, L, φ, s) ein $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabiler dekorierter Tump und $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ eine gewichtete Fahne. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet, \underline{\alpha}, n) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) \\ &\geq M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet^B, \underline{\alpha}^B) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet^B, \underline{\alpha}^B, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet^B, \underline{\alpha}^B, s). \end{aligned}$$

Insbesondere ist (E, L, φ, s) auch $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ - n -schnitt(semi)stabil.

Beweis. (i) Wir nehmen zunächst $(E_\bullet, \underline{\alpha}) = (E_\bullet^B, \underline{\alpha}^B)$ an, d.h. $h^1(E_j^t(n)) = 0$ für alle $t \in T$ und $1 \leq j < l(E_\bullet)$. Nach Korollar 6.27 gilt auch $h^1(E^t(n)) = 0$ für alle $t \in T$. Mit dem Satz von Riemann-Roch folgt

$$h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E(n)) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) - h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E_j(n)) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E) = \deg_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) - \deg_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_j) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E)$$

für alle $1 \leq j < l(E_\bullet)$. Daher gilt

$$\begin{aligned} &M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet, \underline{\alpha}, n) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) \\ &= M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet, \underline{\alpha}) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s). \end{aligned}$$

(ii) Falls es einen Index j und ein $t \in T$ mit $h^1(E_j^t(n)) \neq 0$ gibt, benutzen wir die in Bemerkung 6.38 beschriebene Zerlegung der Fahne. Aus Lemma 3.38 erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} &M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet, \underline{\alpha}, n) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) \\ &\geq M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet^B, \underline{\alpha}^B, n) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet^B, \underline{\alpha}^B, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet^B, \underline{\alpha}^B, s) \\ &\quad + M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet^A, \underline{\alpha}^A, n) - (\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2) \sum_{j=1}^{u-1} \alpha_j^A \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j^A). \end{aligned}$$

Der zweite Term ist nach Lemma 6.37 positiv. Die gesuchte Ungleichung ergibt sich nun aus Teil (i). \square

6. Dekorierte Tumps

Korollar 6.40. Für $n \geq n_3$ ist ein dekoriertes Tump genau dann $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)-stabil, wenn er $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ - n -schnitt(semi)stabil ist. In diesem Fall gilt für jede gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$

$$\begin{aligned} & M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet, \underline{\alpha}, n) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) (\geq) 0 \\ \iff & M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_\bullet, \underline{\alpha}) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) (\geq) 0. \end{aligned}$$

6.4.2. GIT-Stabilität

Im Folgenden sei $p \in \text{QTmp}_n$ und $(E, L, \varphi, s) := (\tilde{E}, \tilde{L}, \tilde{\varphi}, \tilde{s})|_p$ der durch p definierte dekorierte Tump.

Wir ordnen einer gewichteten Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ in E eine gewichtete Fahne $\Gamma_p(E_\bullet, \underline{\alpha}) = (Y_\bullet, \underline{\beta})$ von Y auf folgende Weise zu: Wir setzen

$$U_j^t := H^0(\tilde{q}_t(n))^{-1}(H^0(E_j^t(n))) \subset Y^t, \quad t \in T,$$

und $U_j := (U_j^t, t \in T)$ für $1 \leq j \leq l(E_\bullet)$. Es sei Y_\bullet die durch die Räume U_j , $1 \leq j \leq l(E_\bullet)$ induzierte Fahne der Länge $l(Y_\bullet) \leq l(E_\bullet)$. Für $1 \leq h \leq l(Y_\bullet)$ setzen wir $J(h) := \{j \in \{1, \dots, u\} \mid U_j = Y_h\}$ und

$$\beta_h := \sum_{j \in J(h)} \alpha_j, \quad 1 \leq h \leq l(Y_\bullet).$$

Dabei ist auch die triviale Fahne $Y_\bullet = (\{0\} \subset Y)$ mit Gewicht $\underline{\beta} \in \{0\}$ zugelassen. Für diese Fahne gilt $\mu(Y_\bullet, \underline{\beta}, \text{gies}_n(p)) = 0$.

Proposition 6.41. (i) Für jede gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ und jede Einparameteruntergruppe λ mit Fahne $(Y_\bullet, \underline{\beta}) = \Gamma_p(E_\bullet, \underline{\alpha})$ gilt

$$\frac{\mu(\lambda, \text{gies}_n(t))}{zp(n)} \leq M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet, \underline{\alpha}, n) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s).$$

(ii) Im Fall der Gleichheit gilt $l(E_\bullet) = l(Y_\bullet)$ und E_j wird generisch von Y_j erzeugt für $1 \leq j < l(E_\bullet)$.

Beweis. Es sei F_h das durch Y_h generisch erzeugte T -gespaltene Unterbündel. Wir setzen $j(h) := \min J(h)$. Wegen $\dim(Y_h^t) = h^0(E_j^t)$ und $\text{rk}(F_h^t) \leq \text{rk}(E_j^t)$ für $1 \leq h \leq l(Y_\bullet)$, $j \in J(h)$ und $t \in T$ ergibt sich aus Gleichung (6.8)

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, [M_t]) &= \sum_{h=1}^{l(Y_\bullet)} \beta_h \left(p(n) \text{rk}(F_h^t) - \dim_{\underline{\kappa}}(Y_h) \text{rk}(E^t) \right) \\ &\leq \sum_{j=j(1)}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(p(n) \text{rk}(E_j^t) - h_{\underline{\kappa}}^0(E_j(n)) \text{rk}(E^t) \right) \end{aligned}$$

und wegen $h^0(E_j^t) = 0$ für $t \in T$, $j \in J(0)$,

$$0 \leq \sum_{j \in J(0)} \alpha_j \left(p(n) \text{rk}(E_j^t) - h_{\underline{\kappa}}^0(E_j(n)) \text{rk}(E^t) \right).$$

Mit der gewählten Linearisierung (6.7) ergibt sich wegen $p(n) = h_{\underline{\kappa}}^0(E(n))$, $r = \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E)$ und $(r, \underline{\chi}) = \text{rk}_{\underline{\chi}}(E)$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t \in T} \eta_t \mu(\lambda, [M_t]) \leq \\
 & z \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j (p(n) + (r, \underline{\chi}) - a_1 \delta_1 - a_2 \delta_2) \left(p(n) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) - r h_{\underline{\kappa}}^0(E_j(n)) \right) \\
 & \quad - z \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(r p(n) \text{rk}_{\underline{\chi}}(E_j) - r h_{\underline{\kappa}}^0(E_j(n)) (r, \underline{\chi}) \right) \\
 & = z \left[p(n) \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E(n)) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) - h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E_j(n)) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E) \right) \right. \\
 & \quad \left. + (a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2) \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(r h_{\underline{\kappa}}^0(E_j(n)) - p(n) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) \right) \right].
 \end{aligned}$$

Man beachte, dass hier Gleichheit nur gelten kann, wenn $J(0) = \emptyset$ und $\text{rk}(F_h^t) = \text{rk}(E_j^t)$ für $1 \leq h < l(Y_\bullet)$, $j \in J(h)$ und $t \in T$ gilt.

Es seien $\underline{h}^{(1)}$ und $\underline{h}^{(2)}$ Tupel, für die in (6.9) bzw. (6.10) das Minimum angenommen wird. Für einen Index $0 \leq j \leq l(E_\bullet)$ sei $0 \leq h(j) \leq l(Y_\bullet)$ der Index mit $Y_{h(j)} = U_j$. Wegen $\nu_{h(j)}(\underline{h}^{(m)}) = 0$ und $h_{\underline{\kappa}}^0(E_j(n)) = 0$ für $m = 1, 2$, $j \in J(0)$ gilt

$$\begin{aligned}
 \mu(\lambda, [T_1]) &= \sum_{h=1}^{l(Y_\bullet)} \beta_h \left(p(n) \nu_h(\underline{h}^{(1)}) - a_1 \dim_{\underline{\kappa}}(Y_h) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(p(n) \nu_{h(j)}(\underline{h}^{(1)}) - a_1 h_{\underline{\kappa}}^0(E_j(n)) \right), \\
 \mu(\lambda, [T_2]) &= \sum_{h=1}^{l(Y_\bullet)} \beta_h \left(p(n) \nu_h(\underline{h}^{(2)}) - a_2 \dim_{\underline{\kappa}}(Y_h) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(p(n) \nu_{h(j)}(\underline{h}^{(2)}) - a_2 h_{\underline{\kappa}}^0(E_j(n)) \right).
 \end{aligned}$$

Die bisherige Rechnung zeigt mit $\theta_1 = z r \delta_1$ und $\theta_2 = z r \delta_2$

$$\begin{aligned}
 \mu(\lambda, \text{gies}_n(p)) &= \sum_{t \in T} \eta_t \mu(\lambda, [M_t]) + \theta_1 \mu(\lambda, [T_1]) + \theta_2 \mu(\lambda, [T_2]) \\
 &\leq z p(n) \left[\sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E(n)) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) - \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E) h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E_j(n)) \right) \right. \\
 &\quad + \delta_1 \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(r \nu_{h(j)}(\underline{h}^{(1)}) - a_1 \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) \right) \\
 &\quad \left. + \delta_2 \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(r \nu_{h(j)}(\underline{h}^{(2)}) - a_2 \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) \right) \right].
 \end{aligned}$$

6. Dekorierte Tumps

Wir definieren nun

$$j_l^{(m)} := j(h_l^{(m)}), \quad m = 1, 2, \quad l = 1, \dots, a_m.$$

Da $T_{1|Y^{\otimes \underline{h}^{(1)}}} \neq 0$ gilt und das von $Y^{\otimes \underline{h}^{(1)}}$ erzeugte Bündel $F^{\otimes \underline{h}^{(1)}}$ in $E^{\otimes \underline{j}^{(1)}}$ enthalten ist, muss auch $\varphi_{|E^{\otimes \underline{j}^{(1)}}} \neq 0$ gelten. Aus (6.5) folgt

$$\mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) \geq \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(r\nu_j(\underline{j}^{(1)}) - a_1 \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) \right).$$

Ebenso sieht man mit Gleichung (6.6)

$$\mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) \geq \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(r\nu_j(\underline{j}^{(2)}) - a_2 \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) \right).$$

Da $j(h) \leq j$ äquivalent zu $h \leq h(j)$ ist, haben wir $\nu_{h(j)}(\underline{h}^{(m)}) = \nu_j(\underline{j}^{(m)})$ für $m = 1, 2$. Insgesamt ergibt sich

$$\frac{\mu(\lambda, \operatorname{gies}_n(p))}{zp(n)} \leq M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet, \underline{\alpha}, n) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s).$$

□

Wir ordnen nun einer gewichteten Fahne $(Y_\bullet, \underline{\beta})$ von Y eine gewichtete Fahne $Q_p(Y_\bullet, \underline{\beta})$ von E zu: Es seien F_h die von Y_h erzeugten T -gespaltenen Untergarben und E'_h die von den Garben F_h generisch erzeugten Unterbündel. Wir bezeichnen mit E_\bullet die durch die Bündel E'_h mit $h^1(F_h^t(n)) = 0$ für alle $t \in T$ definierte Fahne der Länge $l(E_\bullet) \leq l(Y_\bullet)$ von E . Für einen Index $1 \leq j \leq l(E_\bullet)$ setzen wir $H(j) := \{1 \leq h \leq l(Y_\bullet) \mid E'_h = E_j\}$, $h(j) := \min H(j)$ und definieren

$$\alpha_j := \sum_{h \in H(j)} \beta_h, \quad 1 \leq j < l(E_\bullet).$$

Schließlich definieren wir $Q_p(Y_\bullet, \underline{\beta}) := (E_\bullet, \underline{\alpha})$. Auch hier ist die triviale Fahne $\{0\} \subset E$ mit Gewicht $\underline{\alpha} \in \{0\}$ zugelassen.

Proposition 6.42. *Es sei $a_2 \delta_2 < 1$, $n \geq n_3$, λ eine Einparameteruntergruppe mit gewichteter Fahne $(Y_\bullet, \underline{\beta})$ und $(E_\bullet, \underline{\alpha}) = Q_p(Y_\bullet, \underline{\alpha})$.*

(i) *Wenn (E, L, φ, s) $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -semistabil ist, dann gilt*

$$\frac{\mu(\lambda, \operatorname{gies}_n(t))}{zp(n)} \geq M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet, \underline{\alpha}, n) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s).$$

(ii) *Bei Gleichheit gilt $l(E_\bullet) = l(Y_\bullet)$ und $E'_h = E_h$, $Y_h = H^0(q_p(n))^{-1}(H^0(E_h(n)))$ für $1 \leq h < l(Y_\bullet)$.*

Beweis. (i) Analog zu Bemerkung 6.38 zerlegen wir die Fahne $(Y_\bullet, \underline{\beta})$ in zwei Fahnen $(Y_\bullet^A, \underline{\beta}^A)$ und $(Y_\bullet^B, \underline{\beta}^B)$, so dass $h^1(F_h^{Bt}(n))$ für alle $t \in T$ und $1 \leq h \leq l(Y_\bullet^B)$ verschwindet, und es für alle $1 \leq h \leq l(Y_\bullet^A)$ ein $t \in T$ mit $h^1(F_h^{At}(n)) \neq 0$ gibt. Nach Lemma 3.38 erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, \text{gies}(p)) &= \sum_{t \in T} \eta_t \mu(Y_\bullet, \underline{\beta}, [M_t]) + \theta_1 \mu(Y_\bullet, \underline{\beta}, [T_1]) + \theta_2 \mu(Y_\bullet, \underline{\beta}, [T_2]) \\ &\geq \sum_{t \in T} \eta_t \mu(Y_\bullet^A, \underline{\beta}^A, [M_t]) - (a_1 \theta_1 + a_2 \theta_2) \sum_{h=1}^{l(Y_\bullet^A)} \beta_h^A \dim_{\underline{\kappa}}(Y_h^A) \\ &\quad + \sum_{t \in T} \eta_t \mu(Y_\bullet^B, \underline{\beta}^B, [M_t]) + \theta_1 \mu(Y_\bullet^B, \underline{\beta}^B, [T_1]) + \theta_2 \mu(Y_\bullet^B, \underline{\beta}^B, [T_2]). \end{aligned}$$

Mit der Linearisierung (6.7) und Gleichung (6.8) folgt wegen $\dim_{\underline{\kappa}}(Y_h^A) \leq h_{\underline{\kappa}}^0(F_h^A)$

$$\begin{aligned} &\sum_{t \in T} \eta_t \mu(Y_\bullet^A, \underline{\beta}^A, [M_t]) - (a_1 \theta_1 + a_2 \theta_2) \sum_{h=1}^{l(Y_\bullet^A)} \beta_h^A \dim_{\underline{\kappa}}(Y_h^A) \\ &\geq zp(n) \sum_{h=1}^{l(Y_\bullet^A)} \beta_h^A \left[h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E(n)) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(F_h^A) - h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(F_h^A(n)) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E) - (a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(F_h^A) \right]. \end{aligned}$$

Nach Lemma 6.37 ist dieser Ausdruck positiv. Es gilt also

$$\mu(\lambda, \text{gies}_n(p)) \geq \mu((Y_\bullet^B, \underline{\beta}^B), \text{gies}_n(p)),$$

und Gleichheit kann nur eintreten, wenn $h^1(F_h^t(n)) = 0$ für alle $t \in T$, $1 \leq h < l(Y_\bullet)$ gilt.

(ii) Wir nehmen nun an, dass $h^1(F_h^t(n)) = 0$ für $t \in T$ und $1 \leq h < l(Y_\bullet)$ gilt. Wegen $\dim(Y_h^t) \leq h^0(F_h^t)$ und Gleichung (6.8) haben wir zunächst

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, [M_t]) &= \sum_{h=1}^{l(Y_\bullet)} \beta_h \left(p(n) \text{rk}(F_h^t) - r_t \dim_{\underline{\kappa}}(Y_h) \right) \\ &\geq \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \sum_{h \in H(j)} \beta_h \left(p(n) \text{rk}(F_h^t) - r_t h_{\underline{\kappa}}^0(F_h(n)) \right) \\ &\quad + \sum_{h \in H(l(E_\bullet)+1)} \beta_h r_t (p(n) - \dim_{\underline{\kappa}}(Y_h)). \end{aligned}$$

Man beachte, dass Gleichheit nur gelten kann, wenn $\dim(Y_h) = h^0(F_h(n))$ für alle h gilt.

Es seien $\underline{i}^{(m)}$, $m = 1, 2$, Indextupel, für die jeweils das Minimum in (6.5) bzw. (6.6) angenommen wird. Wir definieren

$$h_k^{(m)} := h(i_k^{(m)}), \quad k = 1, \dots, a_m, \quad m = 1, 2.$$

Weil $Y^{\otimes \underline{h}^{(1)}}$ das Bündel $E^{\otimes \underline{i}^{(1)}}$ generisch erzeugt und $\varphi_{|E^{\otimes \underline{i}^{(1)}}} \neq 0$ gilt, muss auch

6. Dekorierte Tumps

$T_{1|Y^{\otimes \underline{1}}(1)} \neq 0$ gelten. Aus Gleichung (6.9) folgt

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, [T_1]) &\geq \sum_{h=1}^{l(Y_\bullet)} \beta_h \left(p(n) \nu_h(\underline{h}^{(1)}) - a_1 \dim_{\underline{\kappa}}(Y_h) \right) \\ &\geq \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \sum_{h \in H(j)} \beta_h \left(p(n) \nu_h(\underline{h}^{(1)}) - a_1 h_{\underline{\kappa}}^0(F_h(n)) \right) \\ &\quad + a_1 \sum_{h \in H(l(E_\bullet)+1)} \beta_h (p(n) - \dim_{\underline{\kappa}}(Y_h)). \end{aligned}$$

Wenn die Torsionsgarben $T_h := E'_h/F_h$ nicht trivial sind, kann $T_{2|Y^{\otimes \underline{2}}(2)}$ verschwinden, auch wenn $s_{|E^{\otimes \underline{2}}(2)} \neq 0$ gilt. Wir finden mithilfe der Gleichungen (6.10) und (6.11) lediglich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, [T_2]) &\geq \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \sum_{h \in H(j)} \beta_h \left(p(n) (\nu_h(\underline{h}^{(2)}) - a_2 h_{\underline{\kappa}}^0(T_h)) - a_2 h_{\underline{\kappa}}^0(F_h(n)) \right) \\ &\quad - a_2 \sum_{h \in H(l(E_\bullet)+1)} \beta_h \dim_{\underline{\kappa}}(Y_h). \end{aligned}$$

Zusammen mit der Linearisierung (6.7) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\mu(\lambda, \text{gies}_n(p))}{zp(n)} &\geq \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \sum_{h \in H(j)} \beta_h \left(h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E(n)) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(F_h) - r h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(F_h(n)) - a_2 \delta_2 r h_{\underline{\kappa}}^0(T_h) \right) \\ &\quad + \delta_1 \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \sum_{h \in H(j)} \beta_h \left(r \nu_h(\underline{h}^{(1)}) - a_1 \text{rk}_{\underline{\kappa}}(F_h) \right) \\ &\quad + \delta_2 \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \sum_{h \in H(j)} \beta_h \left(r \nu_h(\underline{h}^{(2)}) - a_2 \text{rk}_{\underline{\kappa}}(F_h) \right) \\ &\quad + r \sum_{h \in H(l(E_\bullet)+1)} \beta_h (p(n) - \dim_{\underline{\kappa}}(Y_h) - a_2 \delta_2). \end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung $a_2 \delta_2 < 1$ ist der Term $(p(n) - \dim_{\underline{\kappa}}(Y_h) - a_2 \delta_2)$ positiv. Aufgrund der Annahme $h^1(F_h^t(n)) = 0$ erhält man aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow F_h \rightarrow E'_h \rightarrow T_h \rightarrow 0$$

die Gleichung $h_{\underline{\kappa}}^0(E'_h(n)) = h_{\underline{\kappa}}^0(F_h(n)) + h_{\underline{\kappa}}^0(T_h)$. Damit ergibt sich

$$r h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(F_h(n)) + a_2 \delta_2 r h_{\underline{\kappa}}^0(T_h) = r h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E'_h(n)) - r h_{\underline{\kappa}}^0(T_h) (1 - a_2 \delta_2) \leq r h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E'_h(n)).$$

Hier kann Gleichheit nur eintreten, wenn $T_h = 0$, $1 \leq h \leq l(Y_\bullet)$ gilt. Wegen $\text{rk}_{\underline{\kappa}}(F_h) = \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E'_h) = \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j)$, $h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E'_h) = h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E_j)$ und $\nu_h(\underline{h}^{(m)}) = \nu_j(\underline{i}^{(m)})$ für $h \in H(j)$ findet

man schließlich

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(\lambda, \text{gies}_n(p))}{zp(n)} &\geq \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E(n)) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) - h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0(E_j(n)) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) \right) \\
&\quad + \delta_1 \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(r\nu_j(\underline{i}^{(1)}) - a_1 \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) \right) \\
&\quad + \delta_2 \sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(r\nu_j(\underline{i}^{(2)}) - a_2 \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) \right) \\
&= M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^s(E_\bullet, \underline{\alpha}, n) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s).
\end{aligned}$$

Im Falle der Gleichheit folgt aus den Beobachtungen zunächst $h^1(F(n)) = 0$, $F_h = E'_h$, und $\dim(Y_h) = h^0(E'_h(n))$, $1 \leq h \leq l(Y_\bullet)$. Daraus folgt dann $l(Y_\bullet) = l(E_\bullet)$ und schließlich $Y_h = H^0(q_p(n))^{-1}(H^0(E_h(n)))$. \square

Korollar 6.43. *Es sei $a_2\delta_2 < 1$ und $n \geq n_3$. Für jeden Punkt $p \in \text{QTmp}_n$ gilt: Der dekorierte Tump $(\tilde{E}, \tilde{L}, \tilde{\varphi}, \tilde{s})|_p$ ist genau dann $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabil, wenn $\text{gies}_n(p)$ GIT-(semi)stabil ist.*

6.5. Beweis von Theorem 6.24

6.5.1. Lokal universelle Familien

Es sei $\text{QTmp}_n^{(s)s} := \text{gies}_n^{-1}(\text{Gies}_n^{(s)s})$ das offene Unterschema der $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)-stabilen dekorierten Tumps.

Lemma 6.44. *Für $n \geq n_3$ erfüllt die Familie $(\tilde{E}, \tilde{\kappa}, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{\varphi}, \tilde{s})$ auf $\text{QTmp}_n^{(s)s}$ die lokal universelle Eigenschaft für Familien $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabiler dekoriertes Tumps.*

Beweis. Es sei S ein Schema und $(E_S, \kappa_S, N_{1,S}, N_{2,S}, \varphi_S, s_S)$ eine durch S parametrisierte Familie $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -semistabiler dekoriertes Tumps und $s \in S$ ein Punkt. Aufgrund von Proposition 6.26 und der lokal universellen Eigenschaft des Quot-Schemas (Lemma 4.10) gibt es eine Umgebung U von s und einen Morphismus $f_0: U \rightarrow \text{Quot}_n^0$ mit $(f_0 \times \text{id}_X)^*Q \cong E_{S|U \times X}$. Wir betrachten die durch U parametrisierte Familie dekoriertes Quotiententumps

$$((f_0 \times \text{id}_X)^*q, \kappa_{S|U}, N_{1,S|U}, N_{2,S|U}, \varphi_{S|U}, s_{S|U}).$$

Nach Lemma 6.31 gibt es dann einen Morphismus $f: U \rightarrow \text{QTmp}_n$ mit der gewünschten Eigenschaft. Aufgrund von Korollar 6.43 faktorisiert f durch $\text{QTmp}_n^{(s)s}$. \square

Auf Quot_n haben wir die natürliche Wirkung von

$$\text{PGL}_T(Y) := \text{GL}_T(Y)/\mathbb{C}^*.$$

Die Wirkung lässt sich anheben auf QTmp_n .

6. Dekorierte Tumps

Proposition 6.45. *Wenn $f_1, f_2: S \rightarrow \text{QTmp}_n$ zwei Morphismen sind, so dass die Rückzuge der lokal universellen Familie isomorph sind, dann gibt es einen Morphismus $g: S \rightarrow \text{PGL}_T(Y)$ mit $g \cdot f_1 = f_2$.*

Beweis. Wie in Lemma 4.11 gibt es Isomorphismen $g'_t: Y^t \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow Y^t \otimes \text{pr}_S^* L$, die die Isomorphismen $E_1 \rightarrow E_2 \otimes \text{pr}_S^* L_S$ induzieren. Der Morphismus $g' := (g'_t, t \in T): Y \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow Y \otimes \text{pr}_S^* L_S$ induziert dann einen Morphismus $g: S \rightarrow \text{PGL}_T(Y)$ mit den geforderten Eigenschaften. \square

6.5.2. Eigentlichkeit des Giesecker-Morphismus

Proposition 6.46. *Es gibt ein $n_4 \geq n_3$, so dass für $n \geq n_4$ und $a_2 \delta_2 < 1$ die Einschränkung des Giesecker-Morphismus*

$$\text{gies}_n^{\text{ss}} := \text{gies}_{n|_{\text{QTmp}_n^{\text{ss}}}} : \text{QTmp}_n^{\text{ss}} \rightarrow \text{Gies}_n^{\text{ss}}$$

eigentlich ist.

Beweis. Es sei R ein diskreter Bewertungsring und K sein Quotientenkörper. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(K) & \xrightarrow{f} & \text{QTmp}_n^{\text{ss}} \\ p \downarrow & & \downarrow \text{gies}_n^{\text{ss}} \\ \text{Spec}(R) & \xrightarrow{h} & \text{Gies}_n^{\text{ss}} \end{array}$$

Der Morphismus f definiert eine Familie dekorierte Quotienttumps auf $\text{Spec}(K) \times X$. Der Quotient q_K entspricht einem Morphismus $\text{Spec}(K) \rightarrow \text{Quot}_n$, der sich eindeutig zu einem Morphismus $\text{Spec}(R) \rightarrow \text{Quot}_n$ fortsetzen lässt, da Quot_n projektiv ist. Dies entspricht einem Quotienten $q'_R: Y \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow F_R$. Dabei ist es möglich, dass F_R auf der Faser über dem speziellen Punkt $\{\mathfrak{m}\} \times X$ Torsion besitzt. Wir betrachten daher stattdessen den generisch surjektiven Homomorphismus

$$q_R: Y \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow F_R \rightarrow F_R^{\vee\vee} =: E_R.$$

Die Komponenten E_R^t der T -gespaltene Garbe E_R sind reflexiv auf der regulären Fläche $\text{Spec}(R) \times X$ und somit lokal frei (siehe [19, Prop. 1.3 und Cor. 1.4]).

Es sei $\text{pr}_{\text{Jac}^l}: \text{Gies}_n \rightarrow \text{Jac}^l$ die Projektion. Dann ist $\kappa_R := \text{pr}_{\text{Jac}^l} \circ h$ die eindeutige Fortsetzung von κ_K nach $\text{Spec}(R)$.

Wir betrachten für eine Zahl m auf $\text{Spec}(R)$ die Garben

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \text{pr}_{\text{Spec}(R)*} \left(Y_{a_1, b_1}^{\oplus \kappa} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(m - na_1) \right) \\ \mathcal{G} &:= \text{pr}_{\text{Spec}(R)*} \left((\kappa_R \times \text{id}_X)^* \mathcal{L} \otimes \det(E_R)^{\otimes \kappa c_1} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(m) \right) \end{aligned}$$

mit $\det(E_R)^{\otimes \kappa} := \bigotimes_{t \in T} \det(E_R^t)^{\otimes \kappa t}$. Für genügend großes m sind beide Garben lokal frei und wir konstruieren das projektive Bündel

$$\text{pr}_R: \Phi_0 := \mathbb{P}(\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})^\vee) \rightarrow \text{Spec}(R)$$

über $\text{Spec}(R)$. Auf $\Phi_0 \times X$ gibt es den tautologischen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi_0: \text{pr}_{\Phi_0}^* \text{pr}_{\Phi_0^*} \left(Y_{a_1, b_1}^{\oplus \kappa} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(m - a_1 n) \right) &\rightarrow \\ &\rightarrow (\kappa_R \times \text{id}_X)^* \mathcal{L} \otimes \text{pr}_R^* \det(E_R)^{\otimes \kappa c_1} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{O}_{\Phi_0}(1). \end{aligned}$$

Nun sei Φ das abgeschlossene Unterschema, auf dem die Einschränkung von φ_0 auf den Kern des Homomorphismus

$$\text{pr}_{\Phi_0}^* \text{pr}_{\Phi_0^*} \left(Y_{a_1, b_1}^{\oplus \kappa} \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(m - a_1 n) \right) \rightarrow \text{pr}_R^* (E_{R, \rho} \otimes \det(E_R)^{\otimes \kappa c_1}) \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(m)$$

verschwindet. Auf $\Phi \times X$ haben wir dann den tautologischen Homomorphismus

$$\varphi := \varphi_{0|\Phi} \otimes \text{id}_{\text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-m)}: \text{pr}_R^* E_{R, \rho} \rightarrow \text{pr}_R^* (\kappa_R \times \text{id}_X)^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\Phi}(1).$$

Der Morphismus $\varphi_K: E_{K, \rho} \rightarrow (\kappa_K \times \text{id}_X)^* \mathcal{L} \otimes \text{pr}_{\text{Spec}(K)}^* N_{1, K}$ definiert einen Morphismus $f_1: \text{Spec}(K) \rightarrow \Phi$ über $\text{Spec}(R)$ mit $f_{1*} \mathcal{O}_{\Phi}(1) = N_{1, K}$. Da $\Phi \rightarrow \text{Spec}(R)$ projektiv ist, gibt es eine eindeutige Fortsetzung $\bar{f}_1: \text{Spec}(R) \rightarrow \Phi$. Wir setzen $\varphi_R := (\bar{f}_1 \times \text{id}_X)^*(\varphi): E_{R, \rho} \rightarrow (\kappa_R \times \text{id}_X)^* \mathcal{L} \otimes \text{pr}_{\text{Spec}(R)}^* N_{1, R}$ mit $N_{1, R} := \bar{f}_{1*} \mathcal{O}_{\Phi}(1)$.

Wir betrachten schließlich das projektive Schema $\Psi := \mathbb{P}(Y_{a_2, b_2}^{\oplus \kappa})$. Der Homomorphismus $Y_{a_2, b_2}^{\oplus \kappa} \otimes \mathcal{O}_{\text{Spec}(K)} \rightarrow E_{K, \sigma|_{\text{Spec}(K) \times \{x_0\}}} \rightarrow N_{2, K}$ definiert einen Morphismus $f_2: \text{Spec}(K) \rightarrow \Psi$ mit $f_{2*} \mathcal{O}_{\Psi}(1) = N_{2, K}$. Aufgrund der Projektivität gibt es eine eindeutige Fortsetzung $\bar{f}_2: \text{Spec}(R) \rightarrow \Psi$. Dies entspricht einem Homomorphismus $s_R: Y_{a_2, b_2}^{\oplus \kappa} \otimes \mathcal{O}_{\text{Spec}(R)} \rightarrow N_{2, R} := \bar{f}_{2*} \mathcal{O}_{\Psi}(1)$.

Insgesamt erhält man die Familie $D_R := (q_R, \kappa_R, N_{1, R}, N_{2, R}, \varphi_R, s_R)$ auf $\text{Spec}(R)$, die den Morphismus $h: \text{Spec}(R) \rightarrow \text{Gies}_n^{\text{ss}}$ induziert. Es bleibt zu zeigen, dass q_R ein Quotient ist. Wir betrachten dazu die Einschränkung auf die spezielle Faser ($q: Y \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow E, L, \varphi, s$).

Der Homomorphismus $H^0(q(n)): Y \rightarrow H^0(E(n))$ ist injektiv: Es sei U der Kern von $H^0(q(n))$ und F die von U erzeugte T -gespaltene Untergarbe. Wir betrachten die gewichtete Fahne $(\{0\} \subset U \subset Y, (1))$. GIT-Semistabilität in Gies_n bedeutet

$$0 \leq \sum_{t \in T} \eta_t \mu(\lambda, [M_t]) + \eta_1 \mu(\lambda, [T_1]) + \eta_2 \mu(\lambda, [T_2]).$$

Man beachte, dass $\varphi_{R|E^{\otimes i}} = 0$ gilt, falls $i_k < 2$ für ein $1 \leq k \leq a_1$ gilt. Folglich haben wir $\nu_1(\underline{i}^{(1)}) = 0$ in (6.9). Über $\nu_1(\underline{i}^{(2)})$ können wir dagegen keine Aussage treffen. Mit (6.11) finden wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq z(p(n) + (\underline{r}, \underline{\chi}) - a_1 \delta_1 - a_2 \delta_2)(-\dim_{\underline{\kappa}}(U)r) + zr(\underline{r}, \underline{\chi}) \dim_{\underline{\kappa}}(U) \\ &\quad - z\delta_1 r a_1 \dim_{\underline{\kappa}}(U) + z\delta_2 r a_2 (p(n) - \dim_{\underline{\kappa}}(U)) \\ &= zp(n)r(\delta_2 a_2 - \dim_{\underline{\kappa}}(U)). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Wegen $a_2 \delta_2 < 1$ folgt daraus $\dim_{\underline{\kappa}}(U) = 0$ und somit $U = \{0\}$.

Es sei $E \rightarrow Q$ ein T -gespaltener Quotient mit minimaler Steigung, $U := \ker(Y \rightarrow H^0(Q(n)))$ und $F \subset E$ das von U erzeugte T -gespaltene Unterbündel. Die GIT-

6. Dekorierete Tumps

Stabilitätsbedingung bezüglich der Fahne $(U \subset Y, (1))$

$$\begin{aligned} 0 \leq & z \left[(p(n) + (r, \underline{\chi}) - a_1\delta_1 - a_2\delta_2)(p(n) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F) - r \dim_{\underline{\kappa}}(U)) \right. \\ & \left. - p(n)r \operatorname{rk}_{\underline{\chi}}(F) + r \operatorname{rk}_{\underline{\chi}}(E) \dim_{\underline{\kappa}}(U) + (\delta_1 r a_1 + \delta_2 r a_2)(p(n) - \dim_{\underline{\kappa}}(U)) \right] \\ = & z p(n) \left[(p(n) + (r, \underline{\chi})) \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F) - r \dim_{\underline{\kappa}}(U) - r \operatorname{rk}_{\underline{\chi}}(F) + (a_1\delta_1 + a_2\delta_2)(r - \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F)) \right] \end{aligned}$$

liefert mit $\dim_{\underline{\kappa}}(U) \geq p(n) - h_{\underline{\kappa}}^0(Q(n))$ zunächst

$$0 \leq (p(n) + (r, \underline{\chi}) - a_1\delta_1 - a_2\delta_2)(\operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F) - r) + r h_{\underline{\kappa}}^0(Q(n)) + r((r, \underline{\chi}) - \operatorname{rk}_{\underline{\chi}}(F)).$$

Wegen $\operatorname{rk}(E)_{\underline{\kappa}} \geq \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(F) + \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(Q)$ und $\operatorname{rk}_{\underline{\chi}}(E/F) \leq [M(\underline{\kappa}, \underline{\chi})]_+ \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E/F)$ erhält man daraus die Ungleichung

$$\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + n + 1 - g \leq \frac{h_{\underline{\kappa}}^0(Q(n))}{\operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(Q)} + \frac{a_1\delta_1 + a_2\delta_2}{\operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E)} + [M(\underline{\kappa}, \underline{\chi})]_+ r.$$

Da Q ein semistabiles T -gespaltenes Vektorbündel ist, gilt nach Lemma 6.13 $h_{\underline{\kappa}}^0(Q(n)) \leq \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(Q)(\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(Q) + n - m(\underline{\kappa}, \underline{\chi}) + 1)$. Es ergibt sich also

$$\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}} \min(E) = \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(Q) \geq \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + m(\underline{\kappa}, \underline{\chi}) - r[M(\underline{\kappa}, \underline{\chi})]_+ - \frac{a_1\delta_1 + a_2\delta_2}{r} - g.$$

Da für jeden Index $t \in T$ $\mu_{\min}(E^t) \geq \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}} \min(E) - M(\underline{\kappa}, \underline{\chi})$ gilt, ist die Menge der Vektorbündel beschränkt. Es gibt daher ein $n_4 \geq n_3$, so dass für $n \geq n_4$ gilt: $h^1(E(n)) = 0$ und $E(n)$ ist global erzeugt. Aus Dimensionsgründen ist dann $H^0(q(n))$ ein Isomorphismus und q ist surjektiv.

Man erkennt schließlich, dass s_R durch $E_{R, \sigma | \operatorname{Spec}(R) \times \{x_0\}}$ faktorisiert. Die Familie D_R ist also eine Familie dekorierter Quotiententumps und definiert einen Morphismus $\bar{f}: \operatorname{Spec}(R) \rightarrow \operatorname{QTmp}_n^{\text{ss}}$, der f fortsetzt. \square

6.5.3. S-Äquivalenz

Lemma 6.47. *Es sei $a_2\delta_2 < 1$, $n \geq n_3$, $p \in \operatorname{QTmp}_n^{\text{ss}}$ und $(E, L, \varphi, s) := (\tilde{E}, \tilde{L}, \tilde{\varphi}, \tilde{s})|_p$. Dann induzieren Γ_p und Q_p eine Bijektion zwischen der Menge der gewichteten Fahnen $(Y_{\bullet}, \underline{\beta})$ von Y mit $\mu(Y_{\bullet}, \underline{\beta}, \operatorname{gies}_n(p)) = 0$ und der Menge der kritischen gewichteten Fahnen $(E_{\bullet}, \underline{\alpha})$ von E .*

Beweis. Wenn $(Y_{\bullet}, \underline{\beta})$ eine gewichtete Fahne von Y mit $\mu(Y_{\bullet}, \underline{\beta}, \operatorname{gies}_n(p)) = 0$ ist, dann ist die Fahne $(E_{\bullet}, \underline{\alpha}) := Q_p(Y_{\bullet}, \underline{\beta})$ wegen Proposition 6.42, (i), und Korollar 6.40 auch kritisch. Nach Proposition 6.42, (ii), gilt dann $\Gamma_p(E_{\bullet}, \underline{\alpha}) = (Y_{\bullet}, \underline{\beta})$.

Es sei $(E_{\bullet}, \underline{\alpha})$ eine kritische gewichtete Fahne. Aufgrund von Korollar 6.40, Proposition 6.41, (i), und der GIT-Semistabilität von $\operatorname{gies}_n(p)$ gilt dann für $(Y_{\bullet}, \underline{\beta}) := \Gamma_p(E_{\bullet}, \underline{\alpha})$

$$\mu(Y_{\bullet}, \underline{\beta}, \operatorname{gies}_n(p)) = 0.$$

Nach Proposition 6.41, (ii), gilt $l(Y_{\bullet}) = l(E_{\bullet})$ und E_j wird von Y_j generisch erzeugt, $1 \leq j \leq l(E_{\bullet})$. Aus Proposition 6.42, (ii), folgt dann $Q_p(Y_{\bullet}, \underline{\beta}) = (E_{\bullet}, \underline{\alpha})$. \square

Proposition 6.48. *Es sei $p \in \text{QTmp}_n^{\text{ss}}$, $(E, L, \varphi, s) := (\tilde{E}, \tilde{L}, \tilde{\varphi}, \tilde{s})|_p$, λ eine Einparameteruntergruppe mit $\mu(\lambda, \text{gies}_n(p)) = 0$, $p_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\lambda(t), p)$ der Limespunkt, $(Y_\bullet, \underline{\beta})$ die zu λ assoziierte Fahne und $(E_\bullet, \underline{\alpha}) := Q_p(Y_\bullet, \underline{\alpha})$ die entsprechende Fahne von E . Dann gilt*

$$\text{df}_{(E_\bullet, \underline{\alpha})}(E, L, \varphi, s) \cong (\tilde{E}, \tilde{L}, \tilde{\varphi}, \tilde{s})|_{p_\infty}.$$

Beweis. Wir wählen eine Spaltung $Y = \bigoplus_{i=1}^{l(Y_\bullet)+1} Y^i$ mit $Y_j = \bigoplus_{i=1}^j Y^i$, $j = 1, \dots, l(Y_\bullet)$, setzen $\underline{\gamma} := \underline{\gamma}(Y_\bullet, \underline{\alpha}, \underline{\kappa})$ und betrachten auf $S := \text{Spec}(\mathbb{C}[t])$ den Quotienten

$$q_S: Y \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow E_S$$

aus Lemma 4.41 mit

$$E_S := \sum_{j=1}^{l(Y_\bullet)+1} \text{pr}_X^* E_j \otimes t^{\gamma_j - \gamma_1} \cdot \mathcal{O}_S.$$

Es seien $(F_\bullet, \underline{\alpha}^{(1)})$ und $(G_\bullet, \underline{\alpha}^{(2)})$ die durch ρ und σ induzierten gewichteten Fahnen von E_ρ bzw. E_σ aus Bemerkung 6.14. Wir setzen $\underline{\gamma}^{(1)} := \underline{\gamma}(F_\bullet, \underline{\alpha}^{(1)})$ und $\underline{\gamma}^{(2)} := \underline{\gamma}(G_\bullet, \underline{\alpha}^{(2)})$. Dann sind die assoziierten Bündel auf S gegeben durch

$$E_{S,\rho} = \sum_{j=1}^{l(F_\bullet)+1} t^{\gamma_j^{(1)} - \gamma_1^{(1)}} \text{pr}_X^* F_j,$$

$$E_{S,\sigma} = \sum_{j=1}^{l(G_\bullet)+1} t^{\gamma_j^{(2)} - \gamma_1^{(2)}} \text{pr}_X^* G_j.$$

Es sei

$$i_0 := \min\{1 \leq i \leq l(F_\bullet) + 1 \mid \varphi|_{F_i} \neq 0\},$$

$$j_0 := \min\{1 \leq j \leq l(G_\bullet) + 1 \mid s|_{G_j|_{\{x_0\}}} \neq 0\}.$$

Wir betrachten die durch φ und s induzierten Homomorphismen

$$\varphi_S: E_{S,\rho} \rightarrow t^{\gamma_{i_0}^{(1)} - \gamma_1^{(1)}} \text{pr}_X^* L,$$

$$s_S: E_{S,\sigma|_{S \times \{x_0\}}} \rightarrow t^{\gamma_{j_0}^{(2)} - \gamma_1^{(2)}} \mathcal{O}_S.$$

Es sei $\kappa_S: S \rightarrow \text{Jac}^l(X)$ der durch L definierte konstante Morphismus. Die Familie dekorierter Quotienten-Tumps $(q_S, \kappa, N_{1,S}, N_{2,S}, \varphi_S, s_S)$ mit $N_{1,S} := t^{\tilde{\gamma}_{j_0} - \tilde{\gamma}_1} \mathcal{O}_S$ und $N_{2,S} := t^{\gamma_{j_0}^{(2)} - \gamma_1^{(2)}} \mathcal{O}_S$ induziert einen Morphismus $f: S \rightarrow \text{QTmp}_n$, so dass $f(t) = \rho(\lambda(t^{-1}), p)$ für $t \neq 0$ gilt.

Über dem Punkt $t = 0$ gilt nun

$$\varphi_{S|\{0\} \times X}: E_{S,\rho|\{0\} \times X} = \bigoplus_{j=1}^{l(F_\bullet)+1} t^{\gamma_j^{(1)} - \gamma_1^{(1)}} F_j / F_{j-1} \rightarrow L \otimes t^{\gamma_{i_0}^{(1)} - \gamma_1^{(1)}} \mathcal{O}_S / t^{\gamma_{i_0}^{(1)} - \gamma_1^{(1)} + 1} \mathcal{O}_S,$$

so dass $\varphi_{S|\{0\} \times X}$ durch die Komposition $\bigoplus_{j=1}^{l(F_\bullet)} F_j / F_{j-1} \rightarrow F_{j_0} / F_{j_0-1} \rightarrow L$ gegeben ist. Ebenso findet man

$$s_{S|\{0\}}: E_{S,\sigma|\{0\} \times \{x_0\}} = \bigoplus_{j=1}^{l(G_\bullet)+1} t^{\gamma_j^{(2)} - \gamma_1^{(2)}} G_j / G_{j-1}|_{\{x_0\}} \rightarrow t^{\gamma_{j_0}^{(2)} - \gamma_1^{(2)}} \mathcal{O}_S / t^{\gamma_{j_0}^{(2)} - \gamma_1^{(2)} + 1} \mathcal{O}_S.$$

6. Dekorierte Tumps

Durch Vergleich mit der Definition der zulässigen Deformation ergibt sich die Behauptung. \square

Zusammen mit Bemerkung 3.27 zeigen diese Ergebnisse, dass die Definition der S-Äquivalenz für dekorierte Tumps mit der allgemeinen Definition in Definition 3.5 übereinstimmt.

Beweis von Theorem 6.24. Wir betrachten die reduktive Gruppe $\mathrm{SL}_{\underline{\kappa},T}(Y)$ aus (6.1). Nach Proposition 3.16 existieren der projektive gute Quotient $\mathrm{Gies}_n^{\mathrm{ss}} // \mathrm{SL}_{\underline{\kappa},T}(Y)$ und der geometrische Quotient $\mathrm{Gies}_n^s / \mathrm{SL}_{\underline{\kappa},T}(Y)$. Der Morphismus $\mathrm{gies}_n^{\mathrm{ss}}$ ist nach Lemma 6.32 injektiv, also insbesondere quasi-endlich, und nach Proposition 6.46 eigentlich. Nach [15, 8.11.1] ist gies_n dann auch endlich und insbesondere affin. Es existieren daher nach Proposition 3.17 der projektive gute Quotient

$$\mathrm{Tmp}^{(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)\text{-ss}}(\sigma, \rho, \underline{d}, l) := \mathrm{QTmp}_n^{\mathrm{ss}} // \mathrm{SL}_{\underline{\kappa},T}(Y)$$

sowie der geometrische Quotient

$$\mathrm{Tmp}^{(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)\text{-s}}(\sigma, \rho, \underline{d}, l) := \mathrm{QTmp}_n^s / \mathrm{SL}_{\underline{\kappa},T}(Y).$$

Da die Projektion von $\mathrm{SL}_{\underline{\kappa},T}(Y)$ auf $\mathrm{PGL}_T(Y)$ endlichen Kern hat, stimmen die Begriffe der GIT-Stabilität bezüglich beider Gruppen überein. Aufgrund der lokal universellen Eigenschaft von $\mathrm{QTmp}_n^{(s)s}$ und Proposition 3.7 ist $\mathrm{Tmp}^{(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)\text{-}(s)s}$ der grobe Modulraum der $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabilen dekorierten Tumps. \square

6.6. Anwendungen

6.6.1. Dekorierte Swamps und Vektorbündel

Wir betrachten den Fall $|T| = 1$. Einen σ -dekorierten ρ -Tump (E, L, φ, s) bezeichnen wir dann als σ -dekorierten ρ -Swamp. Ein dekoriertes Swamp besteht also aus einem Vektorbündel E , einem Geradenbündel L , einem Homomorphismus $\varphi: E_\rho \rightarrow L$ und einem Punkt $s \in E_{\sigma|\{x_0\}}^\vee$. Das Tupel $(\deg(E), \deg(L))$ ist der Typ des dekorierten Swamps. Wie in Bemerkung 6.18 beschrieben, darf man ohne Einschränkung $\underline{\chi} = (0)$ annehmen. Die Wahl von $\underline{\kappa}$ hat dann keine Auswirkung auf die Stabilität. Man darf daher in allen Formeln $\deg_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}} = \deg$, $\mathrm{rk}_{\underline{\kappa}} = \mathrm{rk}$ und $h_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^0 = h^0$ einsetzen. Insbesondere ist ein dekoriertes Swamp $(\underline{E}, L, \varphi, s)$ genau dann (δ_2, δ_2) -(semi)stabil, wenn für jede gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ gilt

$$\sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j (\deg(E) \mathrm{rk}(E_j) - \deg(E_j) \mathrm{rk}(E)) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) (\geq) 0.$$

Ebenso erhalten wir die Begriffe eines dekorierten Quotienten-Swamps und parametrisierter Familien dieser Objekte. Nach Proposition 6.30 existiert der feine Modulraum

$$\mathrm{QSw}_{Y \otimes \mathcal{O}_X(-n), X}^{d, l} = \mathrm{QTmp}_{Y \otimes \mathcal{O}_X(-n), X}^{(d), l}$$

der dekorierten Quotientenswamps vom Typ (d, r) , und nach Theorem 6.24 existiert der (projektive) grobe Modulraum

$$\mathrm{Sw}^{(\delta_1, \delta_2)\text{-}(s)s}(\sigma, \rho, d, l) = \mathrm{Tmp}^{(\delta_1, \delta_2)\text{-}(s)s}(\sigma, \rho, (d), l)$$

der (δ_1, δ_2) -(semi)stabilen dekorierten Swamps vom Typ (d, l) .

Bemerkung 6.49. Analog zu Bemerkung 6.25, (ii), erhält man die ρ -Swamps (ohne Dekoration über x_0) aus [47, Section 2.3], indem man die triviale Darstellung $\sigma: G \rightarrow \mathrm{SL}(1)$ betrachtet.

Es sei nun ρ die triviale Darstellung, so dass $E_\rho \cong \mathcal{O}_X$ gilt. Für jeden dekorierten ρ -Swamp (E, L, φ, s) vom Typ $(d, l = 0)$ ist dann $\varphi: \mathcal{O}_X \rightarrow L$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist $(\mathrm{id}_E, \varphi): (E, \mathcal{O}_X, \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X}, s) \rightarrow (E, L, \varphi, s)$ ein Isomorphismus dekoriierter Swamps. Die Kategorie der σ -dekorierten ρ -Swamps vom Typ $(d, 0)$ ist somit äquivalent zur Kategorie der σ -dekorierten Vektorbündel vom Grad d : Ein Objekt besteht darin aus einem Vektorbündel E vom Grad d zusammen mit einem Punkt $s \in E_{\sigma|x_0}^\vee$. Ein Isomorphismus $(f, z): (E, s) \rightarrow (E', s')$ ist ein Isomorphismus $f: E \rightarrow E'$ von Vektorbündeln und eine Zahl $z \in \mathbb{C}^*$, so dass $s' \circ f_\sigma = z \cdot s$ gilt. Die Stabilitätsrate von φ ist immer $\mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) = 0$, so dass man in allen Rechnungen $\delta_1 = 0$ setzen kann.

6.6.2. Parabolische Vektorbündel

Es sei $W := \mathbb{C}^r$ und $1 \leq r_1 < \dots < r_l \leq r$ ganze Zahlen. Weiter sei $F := \mathrm{Fl}(W, \underline{r})$ die Fahnenvarietät und σ die natürliche Wirkung von $\mathrm{GL}(r)$ auf F . Dann ist $E_\sigma = \mathrm{Fl}(E, \underline{r})$ und ein Punkt $s \in E_{\sigma|x_0}$ entspricht einer Fahne U_\bullet vom Typ \underline{r} in $E_{|x_0}$. Die Kategorie der σ -dekorierten Vektorbündel vom Grad d ist also gerade die Kategorie der quasi-parabolischen Vektorbündel, die von Mehta–Seshadri [30] untersucht wurde. Die Fahnenvarietät besitzt eine Einbettung in das Produkt von l Graßmann-Varietäten, die jeweils eine Linearisierung in einem amplen Geradenbündel haben. Wir linearisieren nun die Wirkung σ in $\mathcal{O}_{\mathrm{Fl}(W, \underline{r})}(\beta_1, \dots, \beta_l)$. Es sei $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ eine gewichtete Fahne. Mit Beispiel 3.36 findet man die Stabilitätsbedingung

$$0(\leq) \sum_{j=1}^s \alpha_j \left[\left(\deg(E) + \delta_2 \sum_{i=1}^l \beta_i r_i \right) \mathrm{rk}(E_j) - \left(\deg(E_j) + \delta_2 \sum_{i=1}^l \beta_i \dim(U_i \cap E_{j|x_0}) \right) \mathrm{rk}(E) \right].$$

Definiert man für ein Unterbündel $F \subset E$ den *parabolischen Grad* durch

$$\mathrm{pardeg}(F) := \deg(F) + \delta_2 \sum_{i=1}^l \beta_i \dim(F_{\{x_0\}} \cap U_i),$$

so ist (E, s) genau dann (semi)stabil, wenn für jedes echte Unterbündel $F \subset E$ gilt

$$\frac{\mathrm{pardeg}(F)}{\mathrm{rk}(F)} (\leq) \frac{\mathrm{pardeg}(E)}{\mathrm{rk}(E)}$$

Wenn man die *parabolischen Gewichte* durch $\tilde{\alpha}_i := \delta_2 \sum_{j=i}^l \beta_j$ definiert, erhält man den Stabilitätsbegriff von Mehta–Seshadri [30] zurück.

6. Dekorierte Tumps

Bemerkung 6.50. Für die Konstruktion des Modulraums verwenden wir die Einbettung $\text{Fl}(W, \underline{r}) \rightarrow \mathbb{P}(V_2)$ mit

$$V_2 := \bigotimes_{j=1}^l \left(\bigwedge^{r-r_j} V \right)^{\otimes \beta_j}.$$

Die natürliche Darstellung von $\text{GL}(r) \rightarrow \text{GL}(V_2)$ ist polynomiell und homogen vom Grad $a_2 = \sum_{j=1}^l \beta_j(r - r_j)$. Aufgrund der Voraussetzung $\delta_2 a_2 < 1$ können wir zunächst nur den Modulraum für kleine parabolische Gewichte konstruieren. Man kann jedoch in der Konstruktion des Gieseker-Raums $\mathbb{P}(Y_{a_2, b_2})$ ersetzen durch $\prod_{i=1}^l \text{Gr}(Y, r - r_i)$. Aus Beispiel 3.35 ergibt sich anstelle von (6.11) die Abschätzung

$$-\sum_{j=1}^{l(Y_\bullet)} \alpha_j \dim(Y_j) \sum_{i=1}^l \beta_i(r - r_i) \leq \mu(\lambda, [T_2]) \leq \sum_{j=1}^{l(Y_\bullet)} \alpha_j \dim(Y_j) \sum_{i=1}^l \beta_i(p(n) - (r - r_i)).$$

Eine genaue Inspektion der Beweise zu Proposition 6.42 und Proposition 6.46 zeigt, dass sich mit dieser Abschätzung die Behauptungen auch unter der Voraussetzung $\tilde{\alpha}_1 = \delta_2 \sum_{j=1}^l \beta_j < 1$ beweisen lassen. Somit können wir für alle zulässigen Gewichte $\tilde{\alpha}_l < \dots < \tilde{\alpha}_1 < 1$ den Modulraum der semistabilen parabolischen Vektorbündel konstruieren.

6.6.3. Vektorbündel mit Niveaustuktur

Eine *Niveaustuktur* auf einem Vektorbündel E ist eine Trivialisierung $E|_{\{x_0\}} \rightarrow \mathbb{C}^r$. Um einen kompakten Modulraum zu erhalten, muss man die betrachtete Kategorie erweitern. Dazu gibt es verschiedene Ansätze.

Niveaustuktur nach Seshadri

Seshadri [50] definiert ein Vektorbündel mit Niveaustuktur als ein Vektorbündel E zusammen mit einem Homomorphismus $f: E|_{\{x_0\}} \rightarrow \mathbb{C}^r$. Zwei Vektorbündel mit Niveaustuktur (E, f) und (E', f') sind isomorph, wenn es einen Isomorphismus $\psi: E \rightarrow E'$ mit $f' \circ \psi|_{\{x_0\}} = f$ gibt. Es sei $F := \mathbb{P}(\text{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^r)^\vee)$ und σ die durch Rechtsmultiplikation induzierte Wirkung von $\text{GL}(r)$ auf F . Dann ist die Kategorie der σ -dekorierten Swamps äquivalent zur Kategorie der Vektorbündel mit Niveaustuktur. Ein σ -dekoriertes Swamp ist δ_2 -(semi)stabil, falls für jedes Unterbündel $F \subset E$

$$(\deg(E) - \delta_2) \text{rk}(F) - (\deg(F) - \delta_2 c(F, f)) \text{rk}(E) (\geq) 0$$

mit

$$c(F, f) := \begin{cases} 0, & f|_{F|_{\{x_0\}}} = 0, \\ 1, & f|_{F|_{\{x_0\}}} \neq 0, \end{cases}$$

gilt. Dies entspricht den Stabilitätsbedingungen von Seshadri [50, §4, I, Déf. 2].

Vollständige Homomorphismen

Ein weiterer Ansatz zur Kompaktifizierung der Vektorbündel mit Niveaustuktur benutzt die vollständigen Homomorphismen: Es sei $H := \prod_{i=1}^r (\text{End}(\wedge^i \mathbb{C}^r) \setminus \{0\})$ und $\Omega' \subset H \times \mathbb{C}^{r-1}$ die Teilmenge

$$\Omega' := \left\{ (\underline{f}, \underline{l}) \in H \times \mathbb{C}^{r-1} \mid \forall 1 \leq i \leq r : \wedge^i f_1 = \prod_{j=1}^{i-1} l_j^{i-j} f_i, l_i \neq 0 \right\}.$$

Der Abschluss Ω von Ω' ist der Raum der *vollständigen Homomorphismen*. Einen Punkt $f \in \Omega$ bezeichnen wir als *vollständigen Homomorphismus* $f: \mathbb{C}^r \Rightarrow \mathbb{C}^r$. Analog kann man für zwei Vektorräume V und W der Dimension r den Raum der vollständigen Homomorphismen $V \Rightarrow W$ als abgeschlossenes Unterschema von

$$\prod_{i=1}^r \left(\text{Hom} \left(\wedge^i V, \wedge^i W \right) \setminus \{0\} \right) \times \mathbb{C}^{r-1}$$

konstruieren.

Für eine Zahl $k \leq r$ und ein Tupel $\underline{r} \in \mathbb{N}^k$ mit $0 < r_1 < \dots < r_k = r$ bezeichne $\Omega_{\underline{r}}$ das lokal abgeschlossene Unterschema

$$\Omega_{\underline{r}} := \left\{ (\underline{f}, \underline{l}) \in \Omega \mid \forall 1 \leq i \leq r : l_i = 0 \Leftrightarrow i \in \underline{r} \right\}.$$

Man erhält eine Stratifikation

$$\Omega = \bigcup_{\underline{r}} \Omega_{\underline{r}}.$$

Proposition 6.51. *Für eine Folge $\underline{r} = (r_1, \dots, r_k)$ wird ein Punkt $f \in \Omega_{\underline{r}}$ eindeutig beschrieben durch ein Tupel $(v_1, \dots, v_k; l_1, \dots, l_{r_1-1}, l_{r_1+1}, \dots, l_{r-1})$ mit den Eigenschaften*

- $l_i \neq 0$ für $i \notin \underline{r}$,
- $v_1: \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^r$ ist Homomorphismus von Rang r_1 ,
- $v_2: \ker(v_1) \rightarrow \mathbb{C}^r / \text{im}(v_1)$ ist ein Homomorphismus von Rang $r_2 - r_1$,
- $v_3: \ker(v_2) \rightarrow (\mathbb{C}^r / \text{im}(v_1)) / \text{im}(v_2)$ ist ein Homomorphismus von Rang $r_3 - r_2$,
- u.s.w.

Beweis. Es sei $(v_1, \dots, v_k; l_1, \dots, l_{r_1-1}, l_{r_1+1}, \dots, l_{r-1})$. Wir definieren $W_j := \ker(v_j)$ für $1 \leq j \leq k$ sowie $W'_1 = \text{im}(v_1)$ und $W'_j := \ker(\mathbb{C}^r \rightarrow (\mathbb{C}^r / W'_{j-1}) / \text{im}(v_j))$, $1 < j \leq k$. Die Homomorphismen v_j definieren dann Isomorphismen $\bar{v}_j: W_{j-1} / W_j \rightarrow W'_j / W'_{j-1}$. Für eine Zahl $1 \leq i \leq r$ setzen wir

$$\begin{aligned} j_-(i) &:= \max\{j \mid j = 0, \dots, k, r_j < i\}, & i_- &:= r_{j_-(i)}, \\ j_+(i) &:= \min\{j \mid j = 0, \dots, k, i \leq r_j\}, & i^+ &:= r_{j_+(i)}. \end{aligned}$$

6. Dekorierte Tumps

Die Isomorphismen \bar{v}_j induzieren einen Endomorphismus

$$\begin{array}{ccc}
 \bigwedge^i \mathbb{C}^r & \xrightarrow{\quad} & \bigwedge^{i-i_-} (W_{j_-(i)}/W_{j_+(i)}) \otimes \bigotimes_{j=1}^{j_-(i)} r_{j-r_{j-1}} \bigwedge (W_{j-1}/W_j) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 h_i \downarrow & & \\
 \bigwedge^i \mathbb{C}^r & \xleftarrow{\quad} & \bigwedge^{i-i_-} (W'_{j_+(i)}/W'_{j_-(i)}) \otimes \bigotimes_{j=1}^{j_-(i)} r_{j-r_{j-1}} \bigwedge (W'_j/W'_{j-1}).
 \end{array} \tag{6.13}$$

Wir setzen nun

$$f_i := \left(\prod_{\substack{1 \leq j < i \\ j \notin r}} l_j^{i-j} \right)^{-1} h_i.$$

Man prüft, dass $(\underline{f}, \underline{l})$ einen Punkt in Ω_r beschreibt. Lafforgue zeigt, dass diese Zuordnung eine Bijektion ist (siehe [27, Proposition 1]). \square

Die Gruppe $(\mathbb{C}^*)^r$ wirkt frei auf Ω durch

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{C}^*)^r \times \Omega &\rightarrow \Omega \\
 (z, (\underline{f}, \underline{l})) &\mapsto (\underline{f}', \underline{l}')
 \end{aligned}$$

mit $f'_i := z_i f_i$, $1 \leq i \leq r$ und $l'_i := z_{i-1}^{-1} z_i^2 z_{i+1}^{-1} l_i$ für $1 \leq i \leq r-1$ mit $z_0 := 1$. Der Quotient $\overline{\text{PGL}}(r, \mathbb{C}) := \Omega / (\mathbb{C}^*)^r$ ist isomorph zum Abschluss des $\text{GL}(r, \mathbb{C})$ -Orbits von $([\text{id}] \bigwedge^i \mathbb{C}^r, 1 \leq i \leq r)$ in $\prod_{i=1}^r \mathbb{P}(\text{Hom}(\bigwedge^i \mathbb{C}^r, \bigwedge^i \mathbb{C}^r)^\vee)$.

Bemerkung 6.52. Der Raum $\overline{\text{PGL}}(r, \mathbb{C})$ ist gerade die „wundervolle Kompaktifizierung“ von De Concini–Procesi [5] (siehe auch Abschnitt 8.4.2).

Vektorbündel mit Niveaustuktur

Ein *Vektorbündel mit Niveaustuktur* ist ein Vektorbündel E zusammen mit einem vollständigen Homomorphismus $f: E|_{\{x_0\}} \Rightarrow \mathbb{C}^r$. Zwei Vektorbündel mit Niveau-Struktur (E, f) und (E', f') sind *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $\varphi: E \rightarrow E'$ mit $f' \circ \varphi = f$ gibt.

Wenn σ die Linkswirkung von $\{e\} \times \text{GL}(r, \mathbb{C})$ auf $\overline{\text{PGL}}(r, \mathbb{C})$ bezeichnet, dann ist die Kategorie der Vektorbündel mit Niveau-Struktur äquivalent zur Kategorie der σ -dekorierten Vektorbündel. Wir linearisieren die Wirkung von $\text{GL}(r, \mathbb{C})$ auf $\overline{\text{PGL}}(r, \mathbb{C})$ in

$$\prod_{i=1}^r \text{Pr}_{\mathbb{P}(\text{End}(\bigwedge^i \mathbb{C}^r)^\vee)}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\text{End}(\bigwedge^i \mathbb{C}^r)^\vee)}(\theta_i)$$

mit positiven Zahlen θ_i , $i = 1, \dots, r$.

Es sei nun (E, f) ein Vektorbündel mit Niveau-Struktur. Nach Proposition 6.51 definiert f eine absteigende Fahne W_\bullet von $E|_{\{x_0\}}$, eine aufsteigende Fahne W'_\bullet von

\mathbb{C}^r und Isomorphismen $v_i: W_{i-1}/W_i \rightarrow W'_i/W'_{i-1}$. Wir setzen $r_j := r - \dim(W_j)$, $j = 0, \dots, k$ und definieren

$$c_i(V, W_\bullet) := \min \left\{ \dim(V/(V \cap W_{j+(i)})), \dim(V/(V \cap W_{j-(i)})) + i - i_- \right\}. \quad (6.14)$$

Proposition 6.53. *Ein σ -dekoriertes Vektorbündel (E, f) ist genau dann δ_2 -(semi)-stabil, falls jedes Unterbündel $F \subset E$ die Bedingung*

$$\deg_{\delta_2 \underline{\theta}}(E) \operatorname{rk}(F) - \deg_{\delta_2 \underline{\theta}}(F) \operatorname{rk}(E) (\geq) 0$$

mit

$$\deg_{\delta_2 \underline{\theta}}(F) := \deg(F) - \delta_2 \sum_{i=1}^r \theta_i c_i(F|_{\{x_0\}}, W_\bullet)$$

erfüllt.

Beweis. Wir setzen $V := E|_{\{x_0\}}$. Für eine Zahl $1 \leq i \leq r$ sei $h_i: \Lambda^i V \rightarrow \Lambda^i \mathbb{C}^r$ der analog zu (6.13) durch die Isomorphismen v_j , $1 \leq j \leq k$, induzierte Homomorphismus. Für den Punkt $[h_i] \in \mathbb{P}(\operatorname{Hom}(\Lambda^i V, \Lambda^i \mathbb{C}^r)^\vee)$ und eine Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(\operatorname{SL}(V))$ mit gewichteter Fahne $(V_\bullet, \underline{\alpha})$ berechnet man ähnlich wie in Beispiel 3.39

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, [h_i]) &= - \sum_{j=1}^{l(V_\bullet)+1} \gamma_j (c_i(V_j, W_\bullet) - c_i(V_{j-1}, W_\bullet)) \\ &= \sum_{k=1}^{l(V_\bullet)} \alpha_k (rc_i(V_k, W_\bullet) - \dim(V_k) c_i(V, W_\bullet)). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Um dieses Ergebnis besser interpretieren zu können, definiert man das Polynom

$$q(s) := \sum_{1 \leq i \leq s} \theta_i i + \sum_{s < i \leq r} \theta_i s - \left(\sum_{i=1}^r \theta_i i \right) \frac{s}{r}.$$

Lemma 6.54. *Es gilt*

$$\sum_{i=1}^r \theta_i (rc_i(F|_{\{x_0\}}, W_\bullet) - \operatorname{rk}(F)i) = r \sum_{s \in \mathcal{I}} \left(q(s_- + \dim(\overline{W}_{j_-(s)})/\overline{W}_{j_+(s)}) - q(s_-) \right)$$

mit $\overline{W}_j := F|_{\{x_0\}} \cap W_j$.

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned} A &:= \sum_{s \in \mathcal{I}} (q(s_- + \dim(\overline{W}_{j_-(s)})/\overline{W}_{j_+(s)}) - q(s_-)) \\ &= \sum_{i=1}^r \theta_i \left(\sum_{\substack{s \in \mathcal{I} \\ s > i^+}} (i - i) + B_{s=i^+} + \sum_{\substack{s \in \mathcal{I} \\ s \leq i^-}} \dim(\overline{W}_{j_-(s)})/\overline{W}_{j_+(s)} \right) - \left(\sum_{i=1}^r \theta_i i \right) \frac{\operatorname{rk}(F)}{r} \end{aligned}$$

6. Dekorierte Tumps

mit

$$\begin{aligned} B_{s=i^+} &= \begin{cases} \dim(\overline{W}_{j_-(s)}/\overline{W}_{j_+(s)}), & s_- + \dim(\overline{W}_{j_-(s)}/\overline{W}_{j_+(s)}) < i, \\ t - s_-, & s_- + \dim(\overline{W}_{j_-(s)}/\overline{W}_{j_+(s)}) \geq i \end{cases} \\ &= \min \left\{ \dim(\overline{W}_{j_-(s)}/\overline{W}_{j_+(s)}), i - i_- \right\}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{\substack{s \in \underline{r} \\ s \leq i_-}} \dim(\overline{W}_{j_-(s)}/\overline{W}_{j_+(s)}) = \dim(F_{\{x_0\}}/\overline{W}_{j_-(i)})$$

erhält man schließlich

$$A = \sum_{i=1}^r \theta_i c_i(F_{\{x_0\}}, W_\bullet) - \left(\sum_{i=1}^r \theta_i i \operatorname{rk}(F) \right) \frac{1}{r}.$$

□

Korollar 6.55. *Ein σ -dekoriertes Vektorbündel (E, f) ist genau dann δ_2 -(semi)stabil, wenn für jedes Unterbündel $F \subset E$*

$$\deg(F)r(\leq) \deg(E) \operatorname{rk}(F) + r\delta_2 \sum_{s \in \underline{r}} q \left(s_- + \dim(\overline{W}_{j_-(s)}/\overline{W}_{j_+(s)}) \right) - q(s_-)$$

gilt.

Bemerkung 6.56. Es sei X eine Kurve über einem endlichen Körper. Ein *Shtuka* über einem Schema S ist ein Paar von Vektorbündeln E, E' auf $X \times S$ zusammen mit zwei Morphismen $0, \infty : S \rightarrow X$ und injektiven Morphismen

$$E \rightarrow E' \leftarrow (\operatorname{Fr} \times \operatorname{id}_S)^* E,$$

so dass der Träger von E'/E und $E'/(\operatorname{Fr} \times \operatorname{id}_S)^* E$ gleich dem Graphen von 0 bzw. ∞ ist. Hierbei bezeichnet $\operatorname{Fr} : X \rightarrow X$ den Frobeniusmorphismus. Diese Objekte spielen eine wichtige Rolle im Langlands-Programm. Lafforgue konstruiert in [27] eine Kompaktifizierung des Stacks der Shtukas mit Methoden von Drinfeld.

Ngô Dac hat eine alternative Methode zur Kompaktifizierung des Stacks der Shtukas vorgestellt. Dazu führt er den Stack der degenerierte Shtukas mit einer Niveaustuktur ein. Mithilfe von Mumfords GIT zeigt er dann, dass der Stack der Shtukas als Quotient des Stacks der degenerierten Shtukas mit Niveaustuktur eigentlich ist. Die Stabilitätsbedingung für Vektorbündel mit Niveaustuktur, die er dabei einführt, stimmt mit der Bedingung aus Korollar 6.55 überein (siehe [37, Théorème A]).

7. Asymptotische Stabilität

In diesem Kapitel wird die $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -Stabilität dekorierter Tumps im Grenzfall $\delta_1 \gg 0$ untersucht. Wir passen dazu zunächst einige Erkenntnisse zur Instabilitäts-Fahne von Kempf [25] und Ramanan–Ramanathan [40] an unsere Konventionen an. Außerdem benötigen wir ein Ergebnis zur Stabilität im Produktraum aus [46]. Als direkte Anwendung konstruieren wir den Modulraum der parabolischen Higgs-Bündel.

7.1. Die Instabilitäts-Fahne

7.1.1. Zustände einer Darstellung

Es sei G eine reductive Gruppe, $T \subset G$ ein maximaler Torus und $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung. Dann gibt es eine Zerlegung

$$V = \bigoplus_{\chi \in X^*(T)} V^\chi$$

mit Eigenräumen $V^\chi = \{v \in V \mid \forall g \in T : \rho(g, v) = \chi(g) \cdot v\}$.

Definition 7.1. Die Menge der *Zustände* eines Punktes $x = [f] \in \mathbb{P}(V)$ ist

$$\mathrm{St}_T(\rho, [f]) := \{\chi \in X^*(T) \mid f|_{V^\chi} \neq 0\}.$$

Für eine Teilmenge $U \subset \mathbb{P}(V)$ setzen wir $\mathrm{St}_T(\rho, U) := \bigcup_{x \in U} \mathrm{St}_T(\rho, x)$ und weiter $\mathrm{St}_T(\rho) := \mathrm{St}_T(\rho, \mathbb{P}(V))$.

Bemerkung 7.2. Für einen Punkt $x \in \mathbb{P}(V)$ und $\lambda \in X_*(T)$ gilt

$$\mu_\rho(\lambda, x) = -\min\{\langle \chi, \lambda \rangle \mid \chi \in \mathrm{St}_T(\rho, x)\}.$$

Wir betrachten nun die reellen Vektorräume

$$X_{*,\mathbb{R}}(T) := X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \quad X_{\mathbb{R}}^*(T) := X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Es sei $\langle -, - \rangle: X_{\mathbb{R}}^*(T) \otimes_{\mathbb{R}} X_{*,\mathbb{R}}(T) \rightarrow \mathbb{R}$ die lineare Fortsetzung der natürlichen Paarung. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mu_{\rho,x}: X_{*,\mathbb{R}}(T) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto -\min\{\langle \chi, \lambda \rangle \mid \chi \in \mathrm{St}_T(\rho, x)\} \end{aligned}$$

ist die stückweise lineare Fortsetzung von $\mu_\rho(-, x)$ nach $X_{*,\mathbb{R}}(T)$. Wir fixieren eine Borel-Untergruppe $B \subset G$, die T enthält, und betrachten die Kammer

$$K := \{\lambda \in X_*(T) \mid B \subset Q_G(\lambda)\},$$

sowie den von K erzeugten konvexen rationalen polyedrischen Kegel $K_{\mathbb{R}} \subset X_{*,\mathbb{R}}(T)$. Dies ist der Abschluss einer Weylkammer, und jede Einparameteruntergruppe λ von G ist konjugiert zu einer Einparameteruntergruppe in K .

7. Asymptotische Stabilität

Beispiel 7.3. Es sei $G = \mathrm{SL}(r)$, T der maximale Torus der Diagonalmatrizen und B die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Weiter sei V_\bullet die Standardfahne in \mathbb{C}^r . Dann ist

$$K_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^r \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \lambda_i,$$

wobei λ_i die durch den Gewichtsvektor $\underline{\gamma}_r^{(i)}$ und die Standardbasis definierte Einparameteruntergruppe ist.

Es sei $S \subset \mathrm{St}_T(\rho)$ eine Menge von Zuständen und $\chi \in S$. Wir definieren den rationalen Kegel $K(S, \chi)$ als Abschluss von

$$K'(S, \chi) := \{\lambda \in K_{\mathbb{R}} \mid \forall \chi' \in S \setminus \{\chi\} : \langle \chi, \lambda \rangle < \langle \chi', \lambda \rangle\}.$$

Wir erhalten so eine Fächerdarstellung

$$K_{\mathbb{R}} = \bigcup_{\chi \in S} K(S, \chi).$$

Bemerkung 7.4. Die Einschränkung von $\mu_\rho(-, x)$ auf einen Kegel $K(\mathrm{St}_T(\rho, x), \chi)$ ist dann linear, genauer gilt $\mu_\rho(\lambda, x) = -\langle \chi, \lambda \rangle$ für jedes $\lambda \in K(\mathrm{St}_T(\rho, x), \chi)$.

Zu jedem Strahl von $K(S, \chi)$ gibt es einen eindeutigen primitiven ganzzahligen Erzeuger. Wir bezeichnen mit $\Gamma'(S)$ die Menge aller solcher Erzeuger.

Allgemeiner definieren wir zu zwei Charakteren $\chi, \chi' \in X^*(T)$ die *Wand*

$$W_{\chi, \chi'} := \{\lambda \in K_{\mathbb{R}} \mid \langle \chi - \chi', \lambda \rangle = 0\}.$$

Wenn S eine endliche Menge von Charakteren ist, ist das Komplement der Vereinigung aller Wände eine endliche disjunkte Vereinigung offener rationaler polyedrischer Kegel

$$K_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{\chi, \chi' \in S} W_{\chi, \chi'} = \bigcup_{i \in I(S)} K_i.$$

Für jede Teilmenge $S' \subset S$ und jedes $i \in I(S)$ ist dann die Einschränkung der Funktion $-\min\{\langle \chi, \lambda \rangle \mid \chi \in S'\}$ auf \bar{K}_i linear. Zu jedem Index $i \in I(S)$ und zu jedem Strahl des rationalen polyedrischen Kegels \bar{K}_i gibt es einen eindeutigen primitiven ganzzahligen Erzeuger λ . Die Menge aller dieser Erzeuger bezeichnen wir mit $\Gamma(S)$. Für alle Teilmengen $S' \subset S$ gilt dann $\Gamma'(S') \subset \Gamma(S)$.

Lemma 7.5. *Es sei $x \in \mathbb{P}(V)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) *Für jede nicht-triviale Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(G)$ gilt $\mu_\rho(\lambda, x)(\geq)0$.*
- (ii) *Für alle $g \in G$ und alle $\lambda \in \Gamma'(\mathrm{St}_T(\rho, \rho(g, x)))$ gilt $\mu_\rho(\lambda, \rho(g, x))(\geq)0$.*
- (iii) *Für alle $g \in G$ und $\lambda \in \Gamma(\mathrm{St}_T(\rho))$ gilt $\mu_\rho(\lambda, \rho(g, x))(\geq)0$.*

Beweis. „(i) \Rightarrow (ii),(iii)“: Dies ist klar.

„(i) \Leftarrow (ii),(iii)“: Es sei $\lambda \in X_*(G)$ eine nicht-triviale Einparameteruntergruppe. Dann gibt es $g \in G$ mit $\lambda' := g\lambda g^{-1} \in K$. Somit gibt es $\chi \in \mathrm{St}_T(\rho, g \cdot x)$, so dass λ' in $K(\mathrm{St}_T(\rho, g \cdot x), \chi)$ enthalten ist. Die Einparameteruntergruppe λ' lässt sich dann als

Linearkombination $\lambda' = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i$ mit $c_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\lambda_i \in \Gamma(\text{St}_T(\rho, g \cdot x))$ schreiben. Es folgt

$$\mu_\rho(\lambda, x) = \mu_\rho(\lambda', \rho(g, x)) = \sum_{i=1}^n c_i \mu_\rho(\lambda_i, \rho(g, x)) (\geq) 0.$$

□

Bemerkung 7.6. Dieses Lemma liefert für viele Anwendungen eine Vereinfachung des Stabilitätskriteriums. Außerdem erhält man die abstrakte Aussage, dass nur eine endliche, von x unabhängige Menge von Konjugationsklassen von Einparameteruntergruppen untersucht werden muss.

7.1.2. Linearformen auf rationalen Kegeln

Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexer rationaler polyedrischer Kegel und S eine endliche nicht-leere Menge von Linearformen auf \mathbb{R}^n . Wir definieren die Funktion

$$\begin{aligned} \mu_S: K &\rightarrow \mathbb{R} \\ l &\mapsto \mu_S(l) := -\min\{\chi(l) \mid \chi \in S\}. \end{aligned}$$

Ist $S' \subset S$ eine Teilmenge, so gilt $\mu_{S'}(l) \leq \mu_S(l)$ für alle $l \in K$. Außerdem ist μ_S stetig und stückweise linear. Insbesondere hat man $\mu_S(c \cdot l) = c \cdot \mu_S(l)$ für $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Es sei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n und $\| - \|$ die dadurch induzierte Norm. Wir bezeichnen mit $\bar{\mu}_S$ die Einschränkung von μ_S auf $K \cap S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Lemma 7.7. *Die Funktion $\bar{\mu}_S$ hat höchstens ein negatives lokales Minimum.*

Beweis. Da $\bar{\mu}$ stetig und $K \cap S^{n-1}$ kompakt ist, existiert das globale Minimum m_0 . Im Fall $m_0 \geq 0$ ist nichts zu zeigen. Es sei nun $m_0 < 0$ und $l_0 \in K \cap S^{n-1}$ ein Punkt mit $\bar{\mu}_S(l_0) = m_0$. Angenommen es gibt ein weiteres negatives lokales Minimum bei $l_1 \neq l_0$. Wir betrachten für $0 \leq t \leq 1$ den Punkt $l(t) = tl_0 + (1-t)l_1 \in K$. Dann gilt

$$\chi(l(t)) \geq -tm_0 - (t-1)\mu_S(l_1) \geq -\mu_S(l_1)$$

für alle $\chi \in S$. Wegen $\|l(t)\| < 1$ und $\mu(l(t)) < 0$ für genügend kleine $t > 0$ haben wir $\mu_S(l(t)/\|l(t)\|) < \mu_S(l(t)) \leq \mu_S(l_1)$. Dies widerspricht der lokalen Minimalität bei l_1 . □

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass $m_0 := \min\{\bar{\mu}_S(l) \mid l \in K \cap S^{n-1}\} < 0$ gilt und $l_0 \in K \cap S^{n-1}$ der eindeutig bestimmte Punkt mit $\bar{\mu}_S(l_0) = m_0$ ist.

Bemerkung 7.8. Wir betrachten die Teilmenge

$$S' := \{\chi \in S \mid \chi(l_0) = -m_0\} \subset S.$$

Dann hat $\bar{\mu}_{S'}$ ebenfalls ein negatives lokales Minimum bei l_0 . Nach dem Lemma ist m_0 dann auch das globale Minimum von $\bar{\mu}_{S'}$.

Lemma 7.9. *Falls die Linearformen in S rational sind, gibt es einen eindeutigen Punkt $\lambda_0 \in \mathbb{Z}^n$ mit $\mathbb{Z}_{>0} \cdot \lambda_0 = \mathbb{R}_{>0} \cdot l_0 \cap \mathbb{Z}^n$.*

7. Asymptotische Stabilität

Beweis. Wir betrachten den rationalen Untervektorraum

$$V := \{l \in \mathbb{R}^n \mid \forall \chi, \chi' \in S' : \chi(l) = \chi'(l)\} \subset \mathbb{R}^n$$

und $\bar{S} := \{\chi|_V \mid \chi \in S'\}$. Dann liegt l_0 in V , \bar{S} enthält genau ein Element $\bar{\chi}$ und die Funktion $\bar{\mu}_{\bar{S}}$ auf $\{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ hat ein globales Minimum bei $l_0 \in V$. Das Element l_0 muss daher orthogonal zu $\ker(\bar{\chi})$ stehen. Da $\bar{\chi}$ und damit auch sein Annihilator rational ist, folgt die Behauptung. \square

Lemma 7.10. Für jedes $l \in K$ mit $\langle l, l_0 \rangle (\leq) 0$ gilt $\mu_S(l) (\geq) 0$.

Beweis. (i) Es sei $\langle l, l_0 \rangle < 0$. Wir betrachten $l(t) = l_0 + t \cdot l$. Dann gibt es $\epsilon > 0$ mit $\|l(t)\|^2 = \|l_0\|^2 + 2t\langle l_0, l \rangle + t^2\|l\|^2 < 1$ und $\mu_S(l(t)) < 0$ für $0 < t < \epsilon$. Wir finden nun $\mu_S(l(t)/\|l(t)\|) < \mu_S(l(t)) < m_0 + t\mu_S(l)$. Die Annahme $\mu_S(l) \leq 0$ liefert also einen Widerspruch zur Minimalität von m_0 .

(ii) Im Fall $\langle l, l_0 \rangle = 0$ folgt $\mu_S(l) = 0$ aus der Stetigkeit von $\bar{\mu}_S$. \square

Definition 7.11. Eine nicht-leere Menge S von Linearformen auf \mathbb{R}^n heißt (*semi*)*stabil*, falls $\mu_S(l) (\geq) 0$ für jedes $l \in K \setminus \{0\}$ gilt.

Wir bezeichnen mit χ_0 die durch l_0 und das Skalarprodukt definierte Linearform $l \mapsto \langle l_0, l \rangle$.

Lemma 7.12. Die Menge $S_0 := \{\chi + m_0\chi_0 \mid \chi \in S\}$ ist *semistabil*.

Beweis. Es sei $l \in K$ beliebig. Es sei $S'_0 := \{\chi + m_0\chi_0 \mid \chi \in S'\} \subset S_0$, so dass $\mu_{S'_0}(l) \leq \mu_{S_0}(l)$ gilt. Wir schreiben $l = t \cdot l_0 + l'$ mit $\langle l', l_0 \rangle = 0$. Nach dem vorangegangenen Lemma gibt es $\chi \in S'$ mit $\chi(l') \leq 0$. Dann berechnen wir

$$(\chi + m_0\chi_0)(l) = -tm_0 + \chi(l') + m_0t \leq 0.$$

Dies zeigt $\mu_{S'_0}(l) \geq 0$ und somit $\mu_{S_0}(l) \geq 0$. \square

7.1.3. Die Instabilitäts-Einparameteruntergruppe

Wir kehren nun zurück zur Situation, dass G eine affine reductive Gruppe, T ein maximaler Torus und $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung ist. Nach Proposition 1.25 gibt es eine Einbettung $i: G \rightarrow \mathrm{GL}(r)$. Es sei D_n der maximale Torus der Diagonalmatrizen. Der Isomorphismus $X_*(D_n) \cong \mathbb{Z}^n$ und die Standardpaarung induzieren eine weylinvariante Paarung $(-, -): X_*(D_n) \times X_*(D_n) \rightarrow \mathbb{Z}$. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass das Bild von T in D_n enthalten ist. Die Einschränkung der Paarung liefert dann ein Skalarprodukt $(-, -): X_{*,\mathbb{R}}(T) \times X_{*,\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir bezeichnen die induzierte Norm mit $\|-\|_T$. Wenn T' ein weiterer Torus ist, gibt es ein $g \in G$ mit $gT'g^{-1} = T$. Wir definieren dann für $\lambda \in X_*(T')$ die Norm $\|\lambda\|_G := \|g\lambda g^{-1}\|_T$. Da das Skalarprodukt weylinvariant ist, ist dies nach [34, Ch. 2, §2, Lemma 2.8] wohldefiniert. Wir untersuchen nun die Funktion

$$\begin{aligned} \nu_\rho: X_*(G) \setminus \{0\} \times \mathbb{P}(V) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\lambda, x) &\mapsto \frac{\mu_\rho(\lambda, x)}{\|\lambda\|}. \end{aligned}$$

Proposition 7.13 (Kempf [25]). *Es sei $x \in \mathbb{P}(V)$ ein instabiler Punkt.*

- (i) *Die Funktion $X_*(G) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\lambda \mapsto \nu_\rho(\lambda, x)$ nimmt ein Minimum $m_0 < 0$ an.*
- (ii) *Es sei T ein Torus und $\lambda \in X_*(T)$ ein indivisible Einparameteruntergruppe mit $\nu_\rho(\lambda, x) = m_0$. Dann gibt es zu jeder Einparameteruntergruppe $\lambda' \in X_*(T)$ mit $\nu_\rho(\lambda', x) = m_0$ ein $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $\lambda' = k \cdot \lambda$.*
- (iii) *Wenn λ_1, λ_2 zwei indivisible Einparameteruntergruppen mit $\nu_\rho(\lambda_1, x) = \nu_\rho(\lambda_2, x) = m_0$ sind, dann gilt $Q_G(\lambda_1) = Q_G(\lambda_2)$ und λ_1, λ_2 sind konjugiert in $Q_G(\lambda_1)$.*

Beweis. (i) Es sei $T \subset G$ ein maximaler Torus. Da G durch Konjugation transitiv auf der Menge der Tori wirkt, finden wir

$$\min\{\nu_\rho(\lambda, x) \mid \lambda \in X_{*,\mathbb{R}}(G)\} = \min\{\nu_\rho(\lambda, \rho(g, x)) \mid \lambda \in X_{*,\mathbb{R}}(T), g \in G\}.$$

Weil die Menge der Zustände endlich ist, gibt es auch eine endlich Menge $\Gamma \in G$ mit

$$\min\{\nu_\rho(\lambda, x) \mid \lambda \in X_{*,\mathbb{R}}(G)\} = \min\{\nu_\rho(\lambda, \rho(g, x)) \mid \lambda \in X_{*,\mathbb{R}}(T), g \in \Gamma\}.$$

Nach Lemma 7.7 gibt es ein $g \in \Gamma$ und $l \in X_{*,\mathbb{R}}(T)$, an dem das Minimum angenommen wird. Nach Lemma 7.9 dürfen wir sogar $\lambda \in X_*(T)$ wählen. Dann gilt $\mu_\rho(g^{-1}\lambda g, x) = \|\lambda\|m_0$.

(ii) Dieser Teil folgt sofort aus Lemma 7.9.

(iii) Nach [4, Corollary 14.13] gibt es einen maximalen Torus $T' \subset Q_G(\lambda_1) \cap Q_G(\lambda_2)$. Weiter finden wir $g_i \in Q_G(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, mit $g_i \lambda_i g_i^{-1} \in X_*(T')$. Nach Teil (ii) gilt nun $g_1 \lambda_1 g_1^{-1} = g_2 \lambda_2 g_2^{-1}$. Daraus folgt dann auch $Q_G(\lambda_1) = Q_G(\lambda_2)$. \square

Definition 7.14. Es sei $x \in \mathbb{P}(V)$ ein instabiler Punkt. Wir nennen

$$m_0 := \min\{\nu_\rho(\lambda, x) \mid \lambda \in X_*(G)\}$$

die *Instabilitätsrate von x* . Eine indivisible Einparameteruntergruppe λ_0 mit $\nu_\rho(\lambda_0, x) = m_0$ heißt *Instabilitätseinparameteruntergruppe zu x* . Die Gruppe $Q_G(x) := Q_G(\lambda_0)$ ist die *parabolische Instabilitätsuntergruppe zu x* . Nach Proposition 7.13 (iii) ist diese Definition unabhängig von der Wahl von λ_0 .

Bemerkung 7.15. Da die Menge $\text{St}_T(\rho)$ endlich ist, gibt es nur endlich viele Teilmengen der Form $\text{St}_T(\rho, x)$ für ein $x \in \mathbb{P}(V)$. Es gibt daher auch nur endlich viele Konjugationsklassen von Instabilitätseinparameteruntergruppen.

Es sei $x \in \mathbb{P}(V)$ ein instabiler Punkt und $\lambda \in X_*(T)$ eine Instabilitätseinparameteruntergruppe. Es gibt Zahlen $k \in \mathbb{N}$ und $\gamma_1 < \dots < \gamma_{k+1}$ sowie ein Zerlegung

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k+1} V^i.$$

mit $\lambda(z)(v) = z^{\gamma_i} v$ für $v \in V^i$. Wir setzen $V_j := \bigoplus_{1 \leq i \leq j} V^i$. Es sei $i_0 := \min\{i = 1, \dots, k+1 \mid x|_{V^i} \neq 0\}$. Wenn x durch $f \in V^\vee$ repräsentiert wird, dann gilt

$$x_\infty = \lim_{z \rightarrow \infty} \lambda(z)x = [f_{i_0}],$$

wobei $f_{i_0} := f|_{V^{i_0}} \circ \text{pr}_{i_0}$ die i_0 -te Komponente von f ist. Sie definiert einen Punkt in $\mathbb{P}(V_{i_0}/V_{i_0-1})$, den wir mit \bar{x}_∞ bezeichnen.

7. Asymptotische Stabilität

Lemma 7.16. *Wenn λ_0 eine Instabilitätseinparameteruntergruppe zu x ist, dann ist λ_0 auch eine Instabilitätseinparameteruntergruppe zu $x_\infty \in \mathbb{P}(V)$.*

Beweis. Die parabolische Instabilitätsuntergruppe $Q_G(x)$ enthält eine Instabilitätseinparameteruntergruppe λ' von x_∞ . Es genügt daher zu zeigen, dass $\nu_\rho(\lambda, x_\infty) \geq \nu_\rho(\lambda_0, x_\infty)$ für jede Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(Q_G(x))$ gilt. Sei also $\lambda \in X_*(Q_G(x))$ gegeben und $T \subset Q_G(x)$ ein maximaler Torus mit $\lambda_0 \in X_*(T)$.

(i) Wir nehmen zunächst $\lambda \in X_*(T)$ an. Da

$$\text{St}_T(\rho, x_\infty) = \{\chi \in \text{St}_T(\rho, x) \mid \langle \chi, \lambda_0 \rangle = -\|\lambda_0\|m_0\}$$

gilt, folgt aus Bemerkung 7.8, dass $\nu(\lambda, x_\infty) \geq \nu_\rho(\lambda_0, x_\infty)$ gilt.

(ii) Im Fall $\lambda \notin X_*(T)$ gibt es $g \in Q_G(x)$ mit $g\lambda g^{-1} \in X_*(T)$. Da $Q_G(x) = \mathcal{R}^u(Q_G(\lambda)) \rtimes L_G(\lambda)$ gilt, können wir sogar $g \in \mathcal{R}^u(Q_G(x))$ wählen. Nun lässt sich $g \cdot f_{i_0}$ darstellen als $f_{i_0} + f'$ mit $f'_{|V_{i_0}} = 0$. Es folgt $\text{St}(T, x_\infty) \subset \text{St}_T(\rho, g \cdot x_\infty)$. Wir finden daher

$$\nu_\rho(\lambda, x_\infty) = \nu_\rho(g\lambda g^{-1}, g \cdot x_\infty) \geq \nu_\rho(g\lambda g^{-1}, x_\infty).$$

Aus Teil (i) folgt dann die Behauptung. \square

Die Gruppe $H_G(x) := Q_G(x)/\mathcal{R}^u(Q_G(x))$ wirkt auf $\bigoplus_{i=1}^p V_i/V_{i-1}$ und insbesondere auf V_{i_0}/V_{i_0-1} .

Proposition 7.17 (Ramanan–Ramanathan [40]). *Es sei x ein instabiler Punkt in $\mathbb{P}(V)$. Dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ und einen Charakter $\chi_* \in X^*(H)$, so dass $\bar{x}_\infty \in \mathbb{P}(V_{i_0}/V_{i_0-1})$ semistabil bezüglich der Linearisierung in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_{i_0}/V_{i_0-1})}(k)$ getwistet mit χ_* ist.*

Beweis. (i) Die Instabilitätseinparameteruntergruppe λ_0 zu x ist auch eine Instabilitätseinparameteruntergruppe für \bar{x}_∞ : In der Tat ist jede Einparameteruntergruppe $\bar{\lambda}$ von $H(x)$ das Bild einer Einparameteruntergruppe von $Q_G(x)$. Es gilt $\nu(\bar{\lambda}, \bar{x}_\infty) = \nu(\lambda, x_\infty)$. Nach Lemma 7.16 ist λ_0 eine Instabilitätseinparameteruntergruppe zu x_∞ . Es gilt daher $\nu(\lambda, x_\infty) \geq \nu(\lambda_0, x_\infty)$.

(ii) Es sei χ_0 der zu λ_0 duale Charakter (siehe Lemma 3.40). Weiter sei \bar{T} ein maximaler Torus in $H(x)$. Nach Lemma 7.12 ist $S_0 := \{\chi + m_0\chi_0/\|\lambda_0\| \mid \chi \in \text{St}_\rho(\bar{T}, \bar{x}_\infty)\}$ semistabil. Durch Multiplikation mit $k := \|\lambda_0\|^2 \in \mathbb{N}$ erhalten wir den ganzzahligen Charakter

$$\chi_* := k \frac{m_0\chi_0}{\|\lambda_0\|} = \mu_\rho(\lambda_0, x_\infty)\chi_0.$$

Nun ist auch $S_1 := \{k\chi + \chi_* \mid \chi \in \text{St}_{\bar{T}}(\rho, \bar{x}_\infty)\}$ semistabil. Wegen

$$S_1 \subset \left\{ \sum_{i=1}^k \chi_i + \chi_* \mid \chi_i \in \text{St}_{\bar{T}}(\rho, \bar{x}_\infty), 1 \leq i \leq k \right\} = \text{St}_{\bar{T}}(\rho_{\chi_*}^{\otimes k}, \bar{x}_\infty)$$

ist daher \bar{x}_∞ semistabil bezüglich der mit dem Charakter χ_* getwisteten Linearisierung in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_{i_0}/V_{i_0-1})}(k)$. \square

7.2. Asymptotische Stabilität

7.2.1. Stabilität im Produktraum

Es seien $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ und $\sigma: G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ zwei Darstellungen.

Definition 7.18. Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$ heißt *asymptotisch (semi)stabil*, falls für jede Einparameteruntergruppe λ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\mu_\rho(\lambda, x) + n\mu_\sigma(\lambda, y) (\geq) 0.$$

Bemerkung 7.19. Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$ ist genau dann asymptotisch (semi)stabil, wenn für jede Einparameteruntergruppe λ gilt:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \mu_\sigma(\lambda, y) \geq 0 \text{ und} \\ \text{b)} \quad & \mu_\sigma(\lambda, y) = 0 \implies \mu_\rho(\lambda, x) (\geq) 0 \end{aligned}$$

Proposition 7.20 ([46, Prop. 2.9]). *Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$ genau dann (semi)stabil bezüglich der Linearisierung in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)}(1, n)$ ist, wenn (x, y) asymptotisch (semi)stabil ist.*

Beweis. Wir fixieren einen maximalen Torus $T \subset G$, setzen

$$\begin{aligned} A &:= \max\{\langle \chi, \lambda \rangle \mid \chi \in \mathrm{St}_T(\rho), \lambda \in \Gamma(\mathrm{St}_T(\rho \otimes \sigma))\}, \\ c &:= \min\{\langle \chi, \lambda \rangle \mid \chi \in \mathrm{St}_T(\rho), \lambda \in \Gamma(\mathrm{St}_T(\sigma))\}, \end{aligned}$$

und wählen $n > n_0 := \max\{-c, A\}$.

„ \Rightarrow “: Angenommen es gibt $g \in G$ und eine Einparameteruntergruppe $\lambda \in \Gamma(\mathrm{St}_T(\sigma))$ mit $\mu_\sigma(\lambda, \sigma(g, y)) \leq -1$. Dann wäre auch

$$\mu_\rho(\lambda, \rho(g, x)) + n\mu_\sigma(\lambda, \sigma(g, y)) \leq -c - n < 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu Semistabilität von $(x, y) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$. Nach Lemma 7.5 ist y also semistabil. Die Notwendigkeit von Bedingung b) ist offensichtlich.

„ \Leftarrow “: Es sei $g \in G$ und $\lambda \in \Gamma(\mathrm{St}_T(\rho \otimes \sigma))$. Falls $\mu_\sigma(\lambda, \sigma(g, y)) \geq 1$ gilt, dann haben wir

$$\mu_{\rho \otimes \sigma^{\otimes n}}(\lambda, g \cdot (x, y)) = \mu_\rho(\lambda, \rho(g, x)) + n\mu_\sigma(\lambda, \sigma(g, y)) \geq -A + n > 0.$$

Im Fall $\mu_\sigma(\lambda, \sigma(g, y)) = 0$ folgt $\mu_\rho(\lambda, \rho(g, x)) (\geq) 0$ aus Bedingung b). In jedem Fall ist (x, y) nach Lemma 7.5 (semi)stabil. \square

Proposition 7.21 (Schmitt). *Es seien G eine affine reductive Gruppe und $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, $\sigma: G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ zwei Darstellungen. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \geq n_0$ gilt: Wenn $(x, y) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$ instabil bezüglich der Linearisierung von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)}(1, n)$ ist und y semistabil in $\mathbb{P}(W)$ ist, dann gilt für jede Instabilitäts-Einparameteruntergruppe λ_0 für (x, y)*

$$\mu_\sigma(\lambda_0, y) = 0.$$

Dies ist Theorem 2.1.10 in [46]. Wir geben hier einen geringfügig kürzeren Beweis.

7. Asymptotische Stabilität

Beweis. Wie in Abschnitt 7.1.1 beschrieben bestimmen die Mengen der Zustände $\text{St}_T(\rho)$ und $\text{St}_T(\sigma)$ Fächerzerlegungen von $K_{\mathbb{R}}$. Wir wählen eine gemeinsame Verfeinerung $K_{\mathbb{R}} = \bigcup_{i \in I} K_i$ dieser Zerlegungen. Für alle $(x, y) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$, alle $i \in I$ und alle $\lambda \in K_i$ gibt es dann Charaktere $\chi_{i,\rho} \in \text{St}_T(\rho)$, $\chi_{i,\sigma} \in \text{St}_T(\sigma)$ mit

$$\mu_\rho(\lambda, x) = -\langle \chi_{i,\rho}, \lambda \rangle, \quad \mu_\sigma(\lambda, y) = -\langle \chi_{i,\sigma}, \lambda \rangle.$$

Wir dürfen dabei die Zerlegung so verfeinern, dass alle Kegel K_i , $i \in I$, spitz sind, d.h. sie enthalten keine Gerade. Es sei Γ die Menge der primitiven, ganzzahligen Erzeuger der Strahlen der Fächerzerlegung.

Zu jedem Kegel K_i wählen wir eine Hyperebene H_i , so dass K_i der Kegel über dem Polytop $P_i := H_i \cap K_i$ ist. Für einen Index $i \in I$ sei $S_\sigma(i) \subset \text{St}_T(\sigma)$ die Menge der Zustände χ_σ mit der Eigenschaft, dass $\langle \chi_\sigma, \lambda \rangle \leq 0$ für alle $\lambda \in K_i$ gilt, und $P_i(\chi_\sigma) := \{l \in P_i \mid \langle \chi_\sigma, l \rangle = 0\}$ eine echte, nicht-leere Seite von P_i ist. Es sei $Q_i(\chi_\sigma) \subset P_i$ die konvexe Hülle der Ecken von P_i , die nicht in $P_i(\chi_\sigma)$ enthalten sind. Dann gibt es zu jedem $l \in P_i$ ein $l_1 \in P_i(\chi_\sigma)$, $l_2 \in Q_i(\chi_\sigma)$ und $0 \leq t \leq 1$ mit $l = (1-t)l_1 + tl_2$. Für einen weiteren Charakter χ definieren wir

$$\begin{aligned} N(i, \chi, \chi_\sigma) : \mathbb{R} \times P_i(\chi_\sigma) \times Q_i(\chi_\sigma) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, l_1, l_2) &\mapsto -\frac{\langle \chi, (1-t)l_1 + tl_2 \rangle}{\|(1-t)l_1 + tl_2\|}. \end{aligned}$$

Wegen $\langle \chi_\sigma, l_1 \rangle = 0$ für $l_1 \in P_i(\chi_\sigma)$ und $\langle \chi_\sigma, l_2 \rangle < 0$ für $l_2 \in Q_i(\chi_\sigma)$ berechnet man

$$\frac{\partial}{\partial t} N(i, \chi, \chi_\sigma)(0, l_1, l_2) = -\frac{\langle \chi_\sigma, l_2 \rangle \cdot \|l_1\| - 0}{\|l_1\|^2} = \frac{-\langle \chi_\sigma, l_2 \rangle}{\|l_1\|} > 0.$$

Da $P_i(\chi_\sigma)$ und $Q_i(\chi_\sigma)$ kompakt sind, finden wir $\epsilon(i, \chi_\sigma) > 0$ mit

$$\partial_t N(i, \chi, \chi_\sigma)(t, l_1, l_2) > 0$$

für $(t, l_1, l_2) \in [0, \epsilon(i, \chi_\sigma)] \times P_i(\chi_\sigma) \times Q_i(\chi_\sigma)$.

Für $i \in I$, $\chi_\sigma \in S_\sigma(i)$ sei $S_\rho(i, \chi_\sigma) \subset \text{St}_T(\rho)$ die Menge der Zustände χ_ρ mit der Eigenschaft, dass es $\lambda \in F(\chi_\sigma, i)$ mit $\langle \chi_\rho, \lambda \rangle > 0$ gibt. (Hier könnte man auch einfach alle Zustände von ρ nehmen.) Wir definieren nun

$$\begin{aligned} C_1(i, \chi_\rho, \chi_\sigma) &:= \min\{\partial_t N(i, \chi_\rho, \chi_\sigma)(t, l_1, l_2) \mid (t, l_1, l_2) \in R\}, \\ C_2(i, \chi_\sigma) &:= \min\{\partial_t N(i, \chi_\sigma, \chi_\sigma)(t, l_1, l_2) \mid (t, l_1, l_2) \in R\} > 0 \end{aligned}$$

mit $R := [0, \epsilon(i, \chi_\sigma)] \times P_i(\chi_\sigma) \times Q_i(\chi_\sigma)$ sowie

$$\begin{aligned} n_2 &:= \max\left\{-\frac{C_1(i, \chi_\rho, \chi_\sigma)}{C_2(i, \chi_\sigma)} \mid i \in I, \chi_\sigma \in S_\sigma(i), \chi_\rho \in S_\rho(i, \chi_\sigma)\right\}, \\ n_1 &:= \max\{\langle \chi, \lambda \rangle \mid \chi \in \text{St}_T(\rho), \lambda \in \Gamma\} \end{aligned}$$

und wählen $n > n_0 := \max\{n_1, n_2\}$.

Es sei nun $(x, y) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$ ein instabiler Punkt und λ_0 eine Instabilitätseinparameteruntergruppe. Es gibt dann $g \in G$, so dass $\lambda' := g\lambda_0g^{-1}$ in K liegt. Wir setzen

$x' := \rho(g, x)$ und $y' := \sigma(g, y)$. Es seien $j \in I$ ein Index mit $\lambda' \in K_j$ und $\chi_1 := \chi_{j,\rho}$, $\chi_2 := \chi_{j,\sigma}$. Da y semistabil ist, ist $F := \{\lambda \in K_j \mid \mu_\sigma(\lambda, y') = 0\}$ eine Seite von K_j .

- (i) Falls $F = K_j$ gilt, haben wir insbesondere $\mu_\sigma(\lambda_0, y) = \mu_\sigma(\lambda', y') = 0$.
- (ii) Falls $F = \{0\}$ gilt, dann haben wir

$$\mu_\rho(\lambda, x') + n\mu_\sigma(\lambda, y') \geq -n_1 + n > 0$$

für alle ganzzahligen primitiven Erzeuger λ von K_j . Dies ist ein Widerspruch zur Instabilität von (x, y) .

(iii) Es sei nun F eine echte nicht-triviale Seite von K_j , d.h. χ_2 ist in $S_\sigma(j)$ enthalten. Für mindestens einen primitiven Erzeuger λ von F gilt dann $\mu_\rho(\lambda, x) < 0$, da man ansonsten wie in (ii) einen Widerspruch zur Instabilität von (x, y) erhält. Es gilt also auch $\chi_1 \in S_\rho(i, \chi_2)$. Für alle $l_1 \in P_j(\chi_2)$, $l_2 \in Q_j(\chi_2)$ und $0 \leq t \leq \epsilon(j, \chi_2)$ haben wir

$$\begin{aligned} & \partial_t(N(j, \chi_1, \chi_2) + n \cdot N(j, \chi_2, \chi_2))(t, l_0, l_2) \\ & \geq C_1(j, \chi_1, \chi_2) + n_2 C_2(j, \chi_2)(t, l_0, l_2) > 0. \end{aligned}$$

Daher ist für $l(t) := (1-t)l_0 + tl_2$ die Abbildung

$$t \mapsto \nu_\rho(l(t), x') + n\nu_\sigma(l(t), y') = N(j, \chi_1, \chi_2)(t, l_0, l_2) + nN(j, \chi_2, \chi_2)(t, l_0, l_2)$$

streng monoton steigend. Es gibt also ein negatives lokales Minimum von $\nu_\rho + n\nu_\sigma$ bei einem Punkt $l_0 \in P_j(\chi_2)$. Nach Lemma 7.7 ist dies das globale Minimum. Da λ_0 eine Instabilitätseinparameteruntergruppe ist, muss $\lambda'/\|\lambda'\| = l_0/\|l_0\|$ gelten. Also liegt λ' in F , so dass $\mu_\sigma(\lambda_0, y) = \mu_\sigma(\lambda', y') = 0$ gilt. \square

7.2.2. Asymptotische Stabilität dekorierte Tumps

Wir kehren nun zurück zu den dekorierten Tumps aus Kapitel 6.

Definition 7.22. Ein dekoriertes Tump (E, L, φ, s) ist *asymptotisch* (δ_2, κ, χ) -*(semi)-stabil*, falls für jede gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ eine Zahl $c_1 \in \mathbb{Q}_{>0}$ existiert, so dass für alle $\delta_1 \geq c_1$ gilt

$$M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_\bullet, \underline{\alpha}) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) (\geq) 0.$$

Bemerkung 7.23. Offensichtlich ist ein dekoriertes Tump genau dann asymptotisch (δ_2, κ, χ) -*(semi)stabil*, wenn für jede gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ gilt:

- a) $\mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) \geq 0$,
- b) $\mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) = 0 \implies M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_\bullet, \underline{\alpha}) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) (\geq) 0$.

Proposition 7.24. *Es sei $\delta_2 \in \mathbb{Q}_{>0}$ fixiert. Dann gibt es ein $\Delta_1 \in \mathbb{Q}_{>0}$, so dass für $\delta_1 > \Delta_1$ jeder $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -*(semi)stabile dekorierte Tump* (E, L, φ, s) auch *asymptotisch* (δ_2, κ, χ) -*(semi)stabil* ist.*

Beweis. Für beliebiges δ_1 folgt Eigenschaft b) aus Bemerkung 7.23 direkt aus der $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -*(Semi)Stabilität*. Angenommen (E, L, φ, s) ist ein $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -*semistabiler dekoriertes Tump*, der Eigenschaft a) verletzt. Es sei $K = K(X)$ der Funktionenkörper

7. Asymptotische Stabilität

von X und $\eta = \text{Spec}(K)$ der generische Punkt. Weiter seien $\mathbb{E} := E_\eta$ und $\mathbb{E}_\rho := E_{\rho,\eta}$ die Einschränkungen der Bündel auf den generischen Punkt. Dann bedeutet die Voraussetzung, dass $[\varphi_\eta] \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_\rho)$ instabil bezüglich der $\text{SL}_\kappa(r, K)$ -Wirkung ist. Es gibt daher nach Proposition 7.13 eine Instabilitäts-Einparameteruntergruppe $\Lambda: \bar{K}^* \rightarrow \text{SL}_{\bar{\kappa}}(r, \bar{K})$. Aufgrund von [40, Theorem 2.3] ist Λ eine K -rationale Einparameteruntergruppe. Sie definiert eine gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ vom Typ r . Wir erhalten einen Morphismus $\text{Spec}(K) \rightarrow \prod_{t \in T} \text{Fl}(E^t, r^{(t)})$ (siehe Proposition 2.20). Da X glatt und projektiv mit Dimension eins ist, gibt es eine eindeutige Fortsetzung $X \rightarrow \prod_{t \in T} \text{Fl}(E^t, r^{(t)})$, die wiederum eine gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ bestimmt. Diese Fahne erfüllt nach Konstruktion

$$\mu_0 := \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) < 0.$$

Nach Bemerkung 6.14 bestimmt $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ auch eine Fahne F_\bullet von E_ρ . Es sei nun $i_0 = \min\{1 \leq i \leq l(F_\bullet) + 1 \mid \varphi|_{F_i} \neq 0\}$. Dann induziert die Einschränkung

$$\bar{\varphi} := \varphi|_{F_{i_0}}: F_{i_0}/F_{i_0-1} \rightarrow L$$

einen Morphismus $f: X \rightarrow \mathbb{P}(F_{i_0}/F_{i_0-1})$ mit $f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F_{i_0}/F_{i_0-1})}(1)) \cong \text{im}(\bar{\varphi})$.

Durch Einschränkung auf den generischen Punkt η erhalten wir die Fahne \mathbb{F}_\bullet von $\mathbb{E}_\rho := E_{|\{\eta\}}$. Der Morphismus $\bar{\varphi}$ bestimmt den Punkt $[\bar{\varphi}_\eta] \in \mathbb{P}(\mathbb{F}_{i_0}/\mathbb{F}_{i_0-1})$. Dieser Punkt entspricht dem Limespunkt $[\bar{\varphi}_\eta]_\infty$, und nach Proposition 7.17 gibt es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ und einen Charakter χ_* auf $\mathbb{H} := \mathcal{Q}_{\text{GL}(\mathbb{E})}(\Lambda)/\mathcal{R}_{\text{GL}(\mathbb{E})}^u(\Lambda)$, so dass dieser Punkt semistabil bezüglich der Wirkung von \mathbb{H} auf $\mathbb{P}(\mathbb{F}_{i_0}/\mathbb{F}_{i_0-1})$ mit der um den Charakter χ_* getwisteten Linearisierung in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F}_{i_0}/\mathbb{F}_{i_0-1})}(k)$ ist.

Es sei W_\bullet eine Fahne in W vom selben Typ wie E_\bullet . Wir wählen eine offene Teilmenge $U \subset X$ und eine Trivialisierung $E|_U \cong W \otimes \mathcal{O}_U$ mit $E_i^t|_U \cong W_i^t \otimes \mathcal{O}_U$, $t \in T$, $1 \leq i \leq l(E_\bullet)$. Dies induziert auch einen Isomorphismus $\text{SL}_{\kappa,T}(\mathbb{E}) \cong \text{SL}_{\kappa,T}(W) \times_{\mathbb{C}} \text{Spec}(K)$. Es gibt dann eine Einparameteruntergruppe $\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow \text{SL}_{\kappa,T}(W)$ mit $\lambda \times_{\mathbb{C}} \text{id}_{\text{Spec}(K)} \cong \Lambda$. Die Trivialisierung induziert nun einen Isomorphismus

$$\mathbb{H} \cong \mathcal{Q}_{\text{GL}_T(W)}(\lambda)/\mathcal{R}_{\text{GL}_T(W)}^u(\lambda) \times_{\mathbb{C}} \text{Spec}(K),$$

der $\mu_0 \chi_\lambda \times_{\mathbb{C}} \text{id}_{\text{Spec}(K)}$ mit χ_* identifiziert. Außerdem erhalten wir durch λ eine Fahne V_\bullet von V_1 und Trivialisierungen $F_i|_U \cong V_i \otimes \mathcal{O}_U$.

Die Existenz der Fahne E_\bullet entspricht einer Reduktion des Rahmenbündels P von E auf die Strukturgruppe $\mathcal{Q}_{\text{GL}_T(W)}(\lambda)$. Das assoziierte Bündel mit Faser $\mathbb{P}(V_{i_0}/V_{i_0-1})$ ist damit isomorph zu $\mathbb{P}(F_{i_0}/F_{i_0-1})$. Das assoziierte Bündel mit Faser $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_{i_0}/V_{i_0-1})}(k)$ konstruiert mit der getwisteten Wirkung ist gerade $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F_{i_0}/F_{i_0-1})}(k) \otimes \text{pr}_X^* P_{\mu_0 \chi_\lambda}$, wobei $P_{\mu_0 \chi_\lambda} := P \times^{\mu_0 \chi_\lambda} \mathbb{C}$ das via $\mu_0 \chi_\lambda$ zum Rahmenbündel P von E assoziierte Geradenbündel ist.

Es sei $Z := \mathbb{P}(V_{i_0}/V_{i_0-1})^{\text{ss}} // H$ der gute Quotient bezüglich der um $\mu_0 \chi_\lambda$ getwisteten Linearisierung in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_{i_0}/V_{i_0-1})}(k)$. Es gibt einen rationalen Morphismus

$$\pi: \mathbb{P}(F_{i_0}/F_{i_0-1}) \dashrightarrow Z.$$

Nach Voraussetzung ist die Komposition $\pi \circ f: X \rightarrow \mathbb{P}(F_{i_0}/F_{i_0-1}) \dashrightarrow Z$ am generischen Punkt definiert und lässt sich daher zu einem Morphismus $f: X \rightarrow Z$ fortsetzen. Nun

gibt es ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_{i_0}/V_{i_0-1})}(k)^{\otimes m}$ zu einem amplen Geradenbündel M auf Z absteigt. Wir finden

$$\bar{f}^*(M) \cong (L^{\otimes k}(-kD) \otimes P_{\mu_0\chi\lambda})^{\otimes m}(-D')$$

für einen weiteren effektiven Divisor D' . Es gilt also

$$kl + \deg(P_{\mu_0\chi\lambda}) \geq 0.$$

Mithilfe von Beispiel 5.36 ergibt sich nun

$$M_{\underline{\kappa}, \underline{0}}(E_{\bullet}, \underline{\alpha}) = \deg(P_{\chi\lambda}) \leq -\frac{kl}{\mu_0}.$$

Es gibt nach Bemerkung 7.15 nur endlich viele Konjugationsklassen von möglichen Instabilitätseinparameteruntergruppen. Wir finden daher Konstanten C , C_2 und $C_{\underline{\chi}}$ mit

$$C \geq \|\lambda\|^2, \quad C_2 \geq a_2 \sum_{j=1}^{l(E_{\bullet})} \alpha_j (r - \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j)),$$

$$C_{\underline{\chi}} \geq \langle \chi, \lambda \rangle = \sum_{j=1}^{l(E_{\bullet})} \alpha_j \left(\text{rk}_{\underline{\chi}}(E) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E_j) - \text{rk}_{\underline{\chi}}(E_j) \text{rk}_{\underline{\kappa}}(E) \right).$$

Aus der $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(Semi)Stabilität folgt nun

$$0(\leq) M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_{\bullet}, \underline{\alpha}) + \delta_1 \mu_1(E_{\bullet}, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_{\bullet}, \underline{\alpha}, s)$$

$$\leq \frac{kl}{-\mu_0} + C_{\underline{\chi}} - \delta_1 + \delta_2 C_2.$$

Für $\delta_1 > \Delta_1 := \max\{0, lC + C_{\underline{\chi}} + \delta_2 C_2\}$ muss also Bedingung a) erfüllt sein. \square

Proposition 7.25. *Es gibt eine Konstante C , so dass für jeden asymptotisch (δ_2, κ, χ) -semistabilen dekorierten Tump (E, L, φ, s) vom Typ (\underline{d}, l) gilt:*

$$\mu_{\max}(E) \leq \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + C.$$

Beweis. Es sei (E, L, φ, s) ein asymptotisch (δ_2, κ, χ) -semistabiler dekoriertes Tump. Wir bezeichnen mit $\mathbb{E} := E_{|\{\eta\}}$ und $\mathbb{E}_{\rho} := E_{\rho|\{\eta\}}$ die Einschränkungen auf den generischen Punkt η von X und betrachten den Raum

$$P := \mathbb{P} \left(\bigwedge_{r_t - r'} \mathbb{E} \right) \times \mathbb{P}(\mathbb{E}_{\rho})$$

Nach Proposition 7.21 gibt es für $1 \leq r' \leq r_t$ ein $n(r')$, so dass für $n \geq n(r')$ und jeden Punkt $(x, y) \in P$, so dass y semistabil ist und (x, y) instabil bezüglich der natürlichen Linearisierung in $\mathcal{O}_P(1, n)$ ist, jede Instabilitäts-Einparameteruntergruppe λ für (x, y)

$$\mu(\lambda, y) = 0$$

7. Asymptotische Stabilität

erfüllt. Wir setzen $r_{\max} := \max\{r_t \mid t \in T\}$ und wählen $n := \max\{n(r') \mid 1 \leq r' < r_{\max}\}$.

Es sei nun $t \in T$ ein Index und $F \subset E^t$ ein Unterbündel. Der Quotient $E^t \rightarrow E^t/F$ und der Morphismus $\varphi: E_\rho \rightarrow L$ definieren einen Morphismus

$$f: X \rightarrow \mathrm{Gr}(E^t, r_t - \mathrm{rk}(F)) \times_X \mathbb{P}(E_\rho) \rightarrow \mathbb{P} \left(\bigwedge^{r_t - \mathrm{rk}(F)} E^t \right) \times_X \mathbb{P}(E_\rho).$$

Falls f bezüglich der Linearisierung in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\bigwedge^{r_t - \mathrm{rk}(F)} E^t) \times \mathbb{P}(E_\rho)}(1, n)$ generisch semistabil ist, finden wir

$$\deg(f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\bigwedge^{r_t - \mathrm{rk}(F)} E^t) \times \mathbb{P}(E_\rho)}(1, n)) = \deg(\det(E^t/F) \otimes L(-D)^{\otimes n}) \geq 0$$

mit einem effektiven Divisor D auf X . Es folgt also

$$\deg(F) \leq \deg(E^t) + nl.$$

Falls f nicht generisch semistabil ist, gibt es eine Instabilitäts-Einparameteruntergruppe λ von $\mathrm{SL}(\mathbb{E})$ mit assoziierter gewichteter Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$. Wie im Beweis zu Proposition 7.24 zeigt man

$$\deg(E^t) - \deg(F) + nl + m_0 M_{\underline{\kappa}}(E_\bullet, \underline{\alpha}) \geq 0.$$

Wegen Eigenschaft a) der asymptotischen (δ_2, κ, χ) -Semistabilität und der Wahl von n gilt nun $\mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) = 0$. Aus Eigenschaft b) der asymptotischen (δ_2, κ, χ) -Semistabilität folgt daher

$$M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_\bullet, \underline{\alpha}) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) \geq 0.$$

Nach Bemerkung 7.15 nur endlich viele Konjugationsklassen möglicher Instabilitäts-Einparameteruntergruppen λ . Es gibt daher Konstanten C_2 und $C(\underline{\chi}, T)$ mit

$$C_2 \geq \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s), \quad C(\underline{\chi}) \geq \langle \underline{\chi}, \lambda \rangle.$$

In jedem Fall gilt somit

$$\deg(F) \leq \deg(E^t) + nl - m_0(\delta_2 c_2 + C(\underline{\chi})).$$

Daraus folgert man die Behauptung. □

Lemma 7.26. *Es gibt eine endliche Menge*

$$T' \subset \left\{ (r, \underline{\alpha}) \in \bigcup_u \mathbb{N}_{>0}^{u \times T} \times \mathbb{Q}_{>0}^u \mid 0 \leq r_{t,1} \leq \dots \leq r_{t,u} = r_t, t \in T \right\},$$

so dass ein dekoriertes Tump (E, L, φ, s) genau dann $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabil ist, wenn er für jede gewichtete Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ vom Typ $t \in T'$

$$M_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E_\bullet, \underline{\alpha}) + \delta_1 \mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) (\geq) 0$$

erfüllt.

Beweis. Dies ist eine leichte Folgerung aus Lemma 7.5. \square

Wir kommen nun zum wichtigsten Ergebnis dieses Kapitels.

Proposition 7.27. *Es gibt eine Konstante $\Delta \in \mathbb{Q}_{>0}$, so dass für $\delta_1 > \Delta$ ein dekoriertes Tump (E, L, φ, s) genau dann $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabil ist, wenn er asymptotisch (δ_2, κ, χ) -(semi)stabil ist.*

Beweis. Nach Proposition 7.25 gibt es eine Konstante C mit $\mu_{\max}(E) \leq \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + C$ für jeden asymptotisch (δ_2, κ, χ) -semistabilen dekorierten Tump (E, L, φ, s) . Wir definieren

$$M_0 := \max \left\{ \sum_{j=1}^{l(\underline{\alpha})} \alpha_j \operatorname{rk}_{\underline{\kappa}}(E) r_{\underline{\kappa}, j} \cdot C \mid (r, \underline{\alpha}) \in T' \right\}.$$

Wir definieren weiter $r_{\underline{\kappa}, j} := \sum_{t \in T} \kappa_t r_{t, j}$ und

$$C_2 := \min \left\{ \sum_{j=1}^{l(\underline{\alpha})} \alpha_j r_{\underline{\kappa}, j} \mid (r, \underline{\alpha}) \in T' \right\}.$$

Zu jedem Typ $(r, \underline{\alpha}) \in T'$ gibt es eine Zahl $m(\underline{\alpha}) \in \mathbb{N}$ mit $m(\underline{\alpha})\underline{\alpha} \in (1/r)\mathbb{Z}^{l(\underline{\alpha})}$. Es sei m das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Zahlen.

Für jeden asymptotisch (δ_2, κ, χ) -semistabilen dekorierten Tump (E, L, φ, s) und jede gewichtete Fahne $(E_{\bullet}, \underline{\alpha})$ mit Typ $t \in T'$ gilt dann

$$M(E_{\bullet}, \underline{\alpha}) \geq -M_0, \quad \mu_2(E_{\bullet}, \underline{\alpha}, s) \geq a_2 C_2.$$

Falls $\mu_1(E_{\bullet}, \underline{\alpha}, \varphi) > 0$ gilt, haben wir $\mu_1(E_{\bullet}, \underline{\alpha}, \varphi) \geq 1/m$.

Wir setzen nun

$$\delta_1 > -m(M_0 + \delta_2 a_2 C_2)$$

voraus. Es sei (E, L, φ, s) ein asymptotisch (δ_2, κ, χ) -semistabiler dekoriertes Tump und $(E_{\bullet}, \underline{\alpha})$ eine gewichtete Fahne mit Typ $t \in T'$. Falls $\mu_1(E_{\bullet}, \underline{\alpha}, \varphi) = 0$ gilt, folgt

$$M(E_{\bullet}, \underline{\alpha}) + \delta_1 \mu_1(E_{\bullet}, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_{\bullet}, \underline{\alpha}, s) (\geq) 0$$

direkt aus Eigenschaft b). Falls $\mu_1(E_{\bullet}, \underline{\alpha}, \varphi) > 0$ gilt, finden wir

$$M(E_{\bullet}, \underline{\alpha}) + \delta_1 \mu_1(E_{\bullet}, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_{\bullet}, \underline{\alpha}, s) \geq -M_0 + \frac{\delta_1}{m} - \delta_2 a_2 C_2 > 0,$$

so dass (E, L, φ, s) $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabil ist.

Zusammen mit Proposition 7.24 folgt die Aussage für $\Delta \geq \max\{\Delta_1, -m(M_0 + \delta_1 a_2 C_2)\}$. \square

Proposition 7.28. *Die Menge der Isomorphieklassen von Vektorbündeln E , zu denen ein $\delta_1 \in \mathbb{Q}_{>0}$ und ein $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -semistabiler dekoriertes Tump (E, L, φ, s) existieren, ist beschränkt.*

7. Asymptotische Stabilität

Beweis. Es sei (E, L, φ, s) ein $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -semistabiler dekoriertes Tump. Falls $\delta_1 > \Delta$ gilt, so ist (E, L, φ, s) nach Proposition 7.27 asymptotisch (δ_2, κ, χ) -semistabil. Nach Proposition 7.25 gibt es eine Konstante C mit $\mu_{\kappa, \chi}^{\max}(E) \leq \mu_{\kappa, \chi}(E) + C$.

Es sei nun $\delta_1 \leq \Delta$. Aus der $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -Semistabilität für eine Fahne $\{0\} \subset F \subset E$ mit Gewicht $\underline{\alpha} = (1)$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq M_{\kappa, \chi}(E_{\bullet}, \underline{\alpha}) + \delta_1 \mu_1(E_{\bullet}, \underline{\alpha}, \varphi) + \delta_2 \mu_2(E_{\bullet}, \underline{\alpha}, s) \\ &\leq \operatorname{rk}_{\kappa}(E) \operatorname{rk}_{\kappa}(F) (\mu_{\kappa, \chi}(E) - \mu_{\kappa, \chi}(F)) + \Delta a_1 (r - 1) + \delta_2 a_2 (r - 1). \end{aligned}$$

Die maximale Steigung ist in diesem Fall beschränkt durch

$$\mu_{\kappa, \chi}^{\max}(E) \leq \mu_{\kappa, \chi}(E) + (\Delta a_1 + \delta_2 a_2) \frac{r - 1}{r}.$$

Die Konstante $C' := \max\{C, (\Delta c_1 + \delta_2 c_2)(r - 1)/r\}$ liefert dann eine obere Schranke für die maximale Steigung von E . Wir schließen mit Proposition 4.7. \square

7.3. Parabolische Higgs-Bündel

Es sei L ein Geradenbündel auf X , $0 < r_1 < \dots < r_k < r$ eine Folge natürlicher Zahlen und $\beta_i \in \mathbb{N}_{>0}$ für $1 \leq i \leq k$. Ein *parabolisches Higgs-Bündel* vom Typ (L, \underline{r}) ist ein Vektorbündel E zusammen mit einem getwisteten Endomorphismus $\varphi: E \rightarrow E \otimes L$ und einer Fahne V_{\bullet} in $E|_{\{x_0\}}$ vom Typ \underline{r} mit der Eigenschaft, dass die Fahne φ -invariant ist, d.h. $\varphi|_{\{x_0\}}(V_i) \subset V_i \otimes L|_{\{x_0\}}$. Ein *Isomorphismus* $\psi: (E, \varphi, V_{\bullet}) \rightarrow (E', \varphi', V'_{\bullet})$ parabolischer Higgs-Bündel ist ein Isomorphismus $\psi: E \rightarrow E'$, so dass $\varphi' \circ \psi = (\psi \otimes \operatorname{id}_L) \circ \varphi$ und $\psi|_{\{x_0\}}(V_i) = V'_i$, $i = 1, \dots, k$ gilt.

Um einen projektiven Modulraum wie in [48] zu erhalten, erlauben wir auch „unendliche“ Endomorphismen:

Definition 7.29. Ein *parabolisches Hitchin-Paar* ist ein Tupel $(E, \varphi, \epsilon, V_{\bullet})$, wobei $(E, \varphi, V_{\bullet})$ ein parabolisches Higgs-Bündel und ϵ eine komplexe Zahl ist, so dass φ nicht-trivial ist oder $\epsilon \neq 0$ gilt.

Ein *Isomorphismus* parabolischer Hitchin-Paare $(\psi, z): (E, \varphi, \epsilon, V_{\bullet}) \rightarrow (E', \varphi', \epsilon', V'_{\bullet})$ besteht aus einem Isomorphismus $\psi: E \rightarrow E'$ der parabolischen Vektorbündel und einer Zahl $z \in \mathbb{C}^*$ mit der Eigenschaft $\varphi' \circ \psi = z \cdot (\psi \otimes \operatorname{id}_L) \circ \varphi$ und $\epsilon' = z \cdot \epsilon$.

Einem Higgs-Bündel $(E, \varphi, V_{\bullet})$ ordnen wir das Hitchin-Paar $(E, \varphi, 1, V_{\bullet})$ zu. Jedes Hitchin-Paar $(E, \varphi, \epsilon, V_{\bullet})$ mit $\epsilon \neq 0$ ist dann isomorph zum Higgs-Bündel $(E, \epsilon^{-1} \cdot \varphi, V_{\bullet})$.

Eine durch ein Schema S *parametrisierte Familie parabolischer Hitchin-Paare* ist ein Tupel $(E_S, N_S, \varphi_S, \epsilon_S, V_{S, \bullet})$, wobei E_S eine durch S parametrisierte Familie von Vektorbündeln auf X ist, N_S ein Geradenbündel auf S , $\varphi_S: E_S \rightarrow E_S \otimes \operatorname{pr}_X^* L \otimes \operatorname{pr}_S^* N_S$ ein Endomorphismus, $\epsilon_S: \mathcal{O}_S \rightarrow N_S$ ein Homomorphismus und $V_{S, \bullet}$ eine Fahne vom Typ \underline{r} in $E|_{S \times \{x_0\}}$ ist, so dass für jeden Punkt $s \in S$ die Einschränkung $(E_{S, s}, \varphi_{S, s}, \epsilon_{S, s})$ ein parabolisches Hitchin-Paar ist.

Wir fixieren nun eine Zahl l , so dass es Inklusionen $L \rightarrow \mathcal{O}_X(l)$ und $\iota: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(l)$ gibt. Wir betrachten die Darstellung $\rho: \operatorname{GL}(r) \rightarrow \operatorname{GL}(\mathbb{C}^r \otimes (\mathbb{C}^r)^{\vee} \oplus \mathbb{C})$, wobei $\operatorname{GL}(r)$ auf dem ersten Summanden durch Konjugation wirkt und auf dem zweiten Summanden

trivial wirkt. Mithilfe der Spur $E_S \otimes E_S^\vee \rightarrow \mathcal{O}_{S \times X}$ und der Inklusion $L \rightarrow \mathcal{O}_X(l)$ konstruiert man zu einem Endomorphismus $\varphi_S: E_S \rightarrow E_S \otimes \text{pr}_X^* L \otimes \text{pr}_S^* N_S$ den Homomorphismus

$$\varphi_S^\vee: E_S \otimes E_S^\vee \xrightarrow{\varphi_S \otimes \text{id}_{E_S^\vee}} E_S \otimes E_S^\vee \otimes \text{pr}_X^* L \otimes \text{pr}_S^* N_S \rightarrow \mathcal{O}_X(l) \otimes \text{pr}_S^* N_S.$$

Ein Homomorphismus $\epsilon_S: \mathcal{O}_S \rightarrow N_S$ definiert einen Homomorphismus

$$\epsilon'_S := (\text{pr}_S^* \epsilon_S \otimes \iota): \mathcal{O}_{S \times X} \rightarrow \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(l) \otimes \text{pr}_S^* N_S.$$

Eine parametrisierte Familie von Hitchin-Paaren bestimmt somit einen nicht-trivialen Homomorphismus

$$(\varphi_S^\vee, \epsilon'_S): E_{S\rho} \cong \text{End}(E_S)^\vee \oplus \mathcal{O}_{S \times X} \rightarrow \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(l) \otimes \text{pr}_S^* N_S.$$

Es sei σ die natürliche Wirkung von $\text{GL}(r)$ auf der Fahrenvarietät $\text{Fl}(\mathbb{C}^r, \underline{r})$. Die Fahne $V_{S\bullet}$ bestimmt dann einen Schnitt $s_S: S \rightarrow \text{Fl}(E_S|_{S \times \{x_0\}}, \underline{r}) \rightarrow E_{S, \sigma|_{S \times \{x_0\}}}$. Insgesamt kann man so einer parametrisierten Familie von Hitchin-Paaren eine parametrisierte Familie σ -dekorierte ρ -Swamps vom Typ (d, l) zuordnen.

Wir fixieren nun $\delta_2 \in \mathbb{Q}_{>0}$ und betrachten die natürliche Linearisierung von σ in $\mathcal{O}_{\text{Fl}(\mathbb{C}^r, \underline{r})}(\beta_1, \dots, \beta_k)$.

Definition 7.30. Ein parabolisches Hitchin-Paar ist (δ_1, δ_2) -*(semi)stabil*, wenn der assoziierte dekorierte Swamp (δ_1, δ_2) -*(semi)stabil* ist.

Nach Proposition 6.26 ist die Menge der Isomorphieklassen der Vektorbündel E , zu denen ein (δ_1, δ_2) -semistabiles Hitchin-Paar existiert, beschränkt. Es gibt also n_0 , so dass für $n \geq n_0$ und ein (δ_1, δ_2) -semistabiles Hitchin-Paar $(E, \varphi, \epsilon, V_\bullet)$ das Bündel $E(n)$ global erzeugt ist und $h^1(E(n)) = 0$ gilt. Wir fixieren einen komplexen Vektorraum Y der Dimension $p(n)$.

Eine durch ein Schema S parametrisierte Familie parabolischer Hitchin-Quotienten ist ein Tupel $(q_S, N_S, \varphi_S, \epsilon_S, V_{S\bullet})$, wobei $q_S: Y \otimes \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow E_S$ eine Familie von Vektorbündelquotienten von Grad d und Rang r , und $(E_S, N_S, \varphi_S, \epsilon_S, V_{S\bullet})$ eine Familie parabolischer Hitchin-Paare ist. Diese Daten definieren das Modulproblem der parabolischen Hitchin-Quotienten.

Proposition 7.31. Der feine Modulraum QHP der parabolischen Hitchin-Quotienten existiert als abgeschlossenes Unterschema des Modulraums der dekorierten Quotienten-Swamps $\text{QSw} = \text{QSw}_n(\rho, \sigma, d, l)$.

Beweis. Es sei $y \in \text{Jac}^l$ der Punkt, so dass die Einschränkung des Poincaré-Bündels \mathcal{L} auf $\{y\} \times X$ isomorph zu $\mathcal{O}_X(l)$ ist, und P_1 die Faser von QSw über y . Wir betrachten den Homomorphismus

$$\psi_1: \text{End}(\tilde{E})^\vee \rightarrow \text{End}(\tilde{E})^\vee \oplus \mathcal{O}_{P_1 \times X} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \text{pr}_X^* \mathcal{O}_X(l) \otimes \text{pr}_{P_1}^* \tilde{N}_1 \rightarrow \text{pr}_X^* (\mathcal{O}_X(l)/L) \otimes \text{pr}_{P_1}^* \tilde{N}_1.$$

Es sei $P_2 := V(\psi_1) \subset P_1$ das abgeschlossene Unterschema aus Lemma 6.29, auf dem ψ_1 trivial wird. Wir erhalten dann auf $P_2 \times X$ den Homomorphismus $\varphi_1: \text{End}(\tilde{E})^\vee \rightarrow$

7. Asymptotische Stabilität

$\mathrm{pr}_X^* L \otimes \mathrm{pr}_{P_2}^* \tilde{N}_1$. Wir konstruieren daraus mit $\mathrm{id}_{\mathrm{End}(\tilde{E})}: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathrm{End}(\tilde{E})^\vee \otimes \mathrm{End}(\tilde{E})$ und dem Auswertungshomomorphismus $\mathrm{ev}: \mathrm{End}(\tilde{E}) \otimes \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}$ den Homomorphismus

$$\varphi: \tilde{E} \rightarrow \mathrm{End}(\tilde{E})^\vee \otimes \mathrm{End}(\tilde{E}) \otimes \tilde{E} \xrightarrow{\varphi_1} \mathrm{End}(\tilde{E}) \otimes \tilde{E} \otimes \mathrm{pr}_X^* L \otimes \mathrm{pr}_{P_2}^* \tilde{N}_1 \xrightarrow{\mathrm{ev}} \tilde{E} \otimes \mathrm{pr}_X^* L \otimes \mathrm{pr}_{P_2}^* \tilde{N}_1.$$

Analog dazu betrachten wir den Homomorphismus

$$\psi_2: \mathcal{O}_{P_2 \times X} \rightarrow \mathrm{End}(\tilde{E}) \oplus \mathcal{O}_{P_2 \times X} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathrm{pr}_X^* \mathcal{O}_X(l) \otimes \mathrm{pr}_{P_2}^* \tilde{N}_1 \rightarrow \mathrm{pr}_X^*(\mathcal{O}_X(l)/\mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{pr}_{P_1}^* \tilde{N}_1$$

und setzen $P_3 := V(\psi_2) \subset P_2$. Auf P_3 gibt es den tautologischen Homomorphismus $\epsilon': \mathcal{O}_{P_3 \times X} \rightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathrm{pr}_{P_3}^* \tilde{N}_1$. Durch Vorschub nach P_3 erhält man den Homomorphismus $\epsilon: \mathcal{O}_{P_3} \rightarrow \tilde{N}_1$.

Schließlich sei $P_4 \subset P_3$ das abgeschlossene Unterschema, auf dem

$$\varphi|_{P_3 \times \{x_0\}}: F_i \rightarrow E|_{P_3 \times \{x_0\}}/F_i \otimes \mathrm{pr}_{P_3}^* \tilde{N}_1, \quad i = 1, \dots, s,$$

verschwindet, wobei F_\bullet die durch \tilde{s} bestimmte Fahne von $\tilde{E}|_{P_3 \times \{x_0\}}$ ist. Man erhält so eine durch P_4 parametrisierte Familie parabolischer Hitchin-Paare $(\tilde{E}, \varphi, \epsilon, V_\bullet)$. Es folgt aus der Konstruktion und der universellen Eigenschaft von QSw (siehe Lemma 6.31), dass diese Familie die universelle Familie für Familien parabolischer Hitchin-Quotienten ist. \square

Das Unterschema QHP ist $\mathrm{PGL}(r)$ -invariant. Wie im Fall der dekorierten Tumps zeigt man, dass QHP die lokal universelle Eigenschaft für Familien (δ_1, δ_2) -semistabiler Hitchin-Paare besitzt. Ferner gibt es für zwei Morphismen $f_2, f_1: S \rightarrow \mathrm{QHP}$ genau dann einen Morphismus $g: S \rightarrow \mathrm{PGL}(r)$ mit $g \cdot f_1 = f_2$, wenn die Rückzüge der universellen Familie isomorph sind (siehe Lemma 6.44 und Proposition 6.45).

Korollar 7.32. *Der grobe Modulraum $\mathrm{HP}^{(\delta_1, \delta_2)\text{-}(s)\text{s}}(d, r, L, \underline{r})$ der (δ_1, δ_2) -(semi)stabilen Hitchin-Paare vom Typ (L, \underline{r}) existiert als abgeschlossenes Unterschema des Modulraums der (δ_1, δ_2) -(semi)stabilen dekorierten Swamps $\mathrm{Sw}^{(\delta_1, \delta_2)\text{-}(s)\text{s}}$.*

Nach Proposition 7.27 gibt es eine Konstante $\Delta > 0$, so dass für alle $\delta_1 > \Delta$ ein dekoriertes Swamp genau dann (δ_1, δ_2) -(semi)stabil ist, wenn er asymptotisch δ_2 -(semi)stabil ist. Wir wählen nun ein $\delta_1 > \Delta$. Es bleibt zu untersuchen, wann ein Hitchin-Paar asymptotisch δ_2 -(semi)stabil ist.

Lemma 7.33. *Es sei K ein Körper und $\lambda: K^* \rightarrow \mathrm{SL}(r)$ eine Einparameteruntergruppe mit assoziierter gewichteter Fahne $(W_\bullet, \underline{\alpha})$. Für einen Punkt $x = [\Phi, E] \in \mathbb{P}(\mathrm{End}(K^r)^\vee \oplus K)$ gilt*

- (i) $\mu(\lambda, x) > 0$ genau dann, wenn W_\bullet nicht Φ -invariant ist.
- (ii) $\mu(\lambda, x) < 0$ genau dann, wenn $E = 0$ und $\Phi(W_i) \subset W_{i-1}$ für alle i gilt.

Beweis. Wir definieren zunächst

$$\mu(\lambda, \Phi) := \begin{cases} \max\{\gamma_i - \gamma_j \mid \Phi(W_j)/(\Phi(W_j) \cap W_{i-1}) \neq \{0\}\}, & \Phi \neq 0 \\ -\infty, & \Phi = 0 \end{cases}$$

$$\mu(\lambda, E) := \begin{cases} 0, & E \neq 0 \\ -\infty, & E = 0 \end{cases}$$

mit $\gamma_i := \sum_{j=1}^{l(Y_\bullet)} \alpha_j r_j - \sum_{j=i}^{l(Y_\bullet)} \alpha_j r$. Man findet dann

$$\mu(\lambda, [\Phi, E]) = \max\{\mu(\lambda, \Phi), \mu(\lambda, E)\}.$$

Daraus ergibt sich leicht die Behauptung. \square

Korollar 7.34. *Ein parabolisches Hitchin-Paar $(E, \varphi, \epsilon, V_\bullet)$ ist genau dann (semi)stabil, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- a) *Falls $\epsilon = 0$, ist φ nicht nilpotent.*
- b) *Für jedes φ -invariante Unterbündel $F \subset E$ gilt*

$$\text{pardeg}(E) \text{rk}(F) (\geq) \text{pardeg}(F) \text{rk}(E).$$

Beweis. Die Größe $\mu(\lambda, \Phi)$ aus dem Beweis zu Lemma 7.33 ist genau dann negativ, wenn Φ nilpotent bezüglich der Fahne W_\bullet ist. Falls φ nilpotent ist, gibt es immer eine solche Fahne. Bedingung a) aus Bemerkung 7.23 ist daher äquivalent zur ersten Bedingung. Die Äquivalenz der zweiten Bedingung mit Bedingung b) aus Bemerkung 7.23 ist offensichtlich. \square

Wir erhalten so die bekannte Stabilitätsbedingung für parabolische Higgs-Bündel (siehe [26, Def. 1.2]).

8. Dekorierte Prinzipalbündel

Dieses Kapitel enthält das zentrale Ergebnis dieser Arbeit: Die Konstruktion des Modulraums der G -Prinzipalbündel mit Dekoration in einem assoziierten Bündel über einem Punkt. Als Spezialfall erhalten wir den Modulraum der parabolischen Prinzipalbündel [20].

8.1. Das Modulproblem der dekorierten Prinzipalbündel

8.1.1. Definition dekoriertes Prinzipalbündel

Es sei X eine glatte projektive Kurve vom Geschlecht g . Weiter sei G eine affine reduktive algebraische Gruppe und $\sigma: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung.

Definition 8.1. Ein σ -dekoriertes G -Prinzipalbündel ist ein Tupel (P, s) , wobei P ein G -Prinzipalbündel und s ein Punkt im assoziierten Bündel $\mathbb{P}(P_\sigma)$ über dem Punkt $x_0 \in X$ ist. Ein *Isomorphismus* $f: (P, s) \rightarrow (P', s')$ ist ein Isomorphismus $f: P \rightarrow P'$ mit $f_{\sigma|\{x_0\}}(s') = s$, wobei $f_\sigma: \mathbb{P}(P'_\sigma) \rightarrow \mathbb{P}(P_\sigma)$ der induzierte Isomorphismus der assoziierten Bündel ist.

Da G affin ist, gibt es eine treue Darstellung $G \rightarrow \mathrm{GL}(W')$. Dann erhalten wir eine Einbettung $G \rightarrow \mathrm{SL}(W)$ mit

$$W := W' \oplus \left(\bigwedge^{\dim(W')} W' \right)^\vee.$$

Weil G auch reaktiv ist, ist das Radikal $\mathcal{R}(G)$ ein Torus (siehe [4, §11.21]). Man findet daher Charaktere $\chi_t \in X^*(\mathcal{R}(G))$, $t \in T$, und eine Zerlegung $W = \bigoplus_{t \in T} W^t$ mit $g \cdot w = \chi_t(g)w$ für $w \in W^t$ und $g \in \mathcal{R}(G)$. Da das Radikal im Zentrum liegt, sind die Räume W^t auch G -invariant. Wir definieren $r_t := \dim(W^t)$, $t \in T$, und $r := \sum_{t \in T} r_t$. Insgesamt erhalten wir eine Einbettung

$$\kappa: G \rightarrow \mathrm{GL}_T(W) \cap \mathrm{SL}(W) =: \mathrm{SL}_T(W).$$

Ein Charakter $\chi \in X^*(\mathrm{SL}_T(r))$ wird beschrieben durch ein Element $\underline{\chi} \in \mathbb{Z}^T / \Delta$, wobei Δ die Diagonale ist. Wenn e_t den t -ten Einheitsvektor bezeichnet und ξ_t den entsprechenden Charakter, dann definieren wir den *Gradvektor* \underline{d} eines Prinzipalbündels durch

$$d_t := \deg(\kappa_*(P) \times^{\xi_t} \mathbb{C}), \quad t \in T.$$

Da $\det \circ \kappa = 1$ gilt, haben wir $\sum_{t \in T} d_t = 0$.

8. Dekorierte Prinzipalbündel

Bemerkung 8.2. Nach Proposition 1.42 gibt es eine Darstellung $\sigma': \mathrm{GL}_T(W) \rightarrow \mathrm{GL}(V \oplus V')$, so dass σ ein direkter Summand von $\sigma' \circ \kappa$ ist. Man erhält eine Surjektion $P \times^{\sigma' \circ \kappa} (V \oplus V') \rightarrow P \times^\sigma V$. Ohne Einschränkung darf man daher annehmen, dass σ von einer Darstellung $\mathrm{GL}_T(W) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ kommt, die wir ebenfalls mit σ bezeichnen. Dabei müssen wir annehmen, dass σ homogen ist, um die Ergebnisse aus Kapitel 6 anwenden zu können. Nach Proposition 6.4 gibt es dann Zahlen a, b, c , so dass V ein direkter Summand von $W_{a,b,c}$ ist.

8.1.2. Stabilität

Es sei (P, s) ein σ -dekoriertes G -Prinzipalbündel. Weiter sei $\lambda \in X_*(G)$ eine Einparameteruntergruppe, $Q_G(\lambda)$ die assoziierte parabolische Untergruppe und $\beta: X \rightarrow P/Q_G(\lambda)$ eine Reduktion der Strukturgruppe. Es gibt einen maximalen Torus T , so dass λ in $X_*(T)$ liegt. Die Einbettung κ liefert ein Skalarprodukt auf $X_*(T)$. Wir definieren $\chi_\lambda \in X^*(T)$ durch $\langle \chi_\lambda, \lambda' \rangle = (\lambda, \lambda')$ für alle $\lambda' \in X_*(T)$. Nach Lemma 3.40 kommt χ_λ von einem Charakter auf $Q_{\mathrm{GL}(\underline{r})}(\kappa_* \lambda)$, den wir ebenfalls mit χ_λ bezeichnen. Es gilt nun $P \times^\sigma V = \beta^*(P) \times^\sigma V$. Wir wählen eine Trivialisierung $\psi: (\beta^*(P) \times^\sigma V)|_{\{x_0\}} \rightarrow V$ und setzen

$$\mu(\lambda, \beta, s) := \mu_\sigma(\lambda, \psi(s)).$$

Da sich verschiedene Trivialisierungen nur um ein Element $g \in Q_G(\lambda)$ unterscheiden, ist dies nach Lemma 3.33 wohldefiniert.

Definition 8.3. Es sei $\delta \in \mathbb{Q}_{>0}$ und $\chi \in X^*(\mathrm{SL}_T(\underline{r}))$. Ein σ -dekoriertes G -Prinzipalbündel (P, s) ist (δ, κ, χ) -*(semi)stabil*, wenn für jede Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(G)$ und jede Reduktion der Strukturgruppe $\beta: X \rightarrow P/Q_G(\lambda)$ gilt

$$\deg(\beta^*(P) \times^{\chi_\lambda} \mathbb{C}) + \delta \mu(\lambda, \beta, s) + \langle \chi, \kappa_* \lambda \rangle (\geq) 0.$$

Bemerkung 8.4. Die Einbettung $\kappa: G \rightarrow \mathrm{SL}_T(\underline{r})$ liefert nach Proposition 5.22 eine Äquivalenz der Kategorie der G -Prinzipalbündel mit der Kategorie der $\mathrm{GL}(\underline{r})$ -Prinzipalbündel mit Reduktion der Strukturgruppe. Das Datum eines $\mathrm{GL}(\underline{r})$ -Prinzipalbündels wiederum ist analog zu Proposition 5.35 äquivalent zum Datum eines T -gespaltenen Vektorbündels mit Rangvektor \underline{r} . Aus einem G -Prinzipalbündel P erhalten wir daher ein T -gespaltenes Vektorbündel E mit $\mathrm{rk}(E^t) = r_t$, $\deg(E^t) = d_t$, $t \in T$, und $\det(E) = \mathcal{O}_X$ sowie eine Reduktion der Strukturgruppe $\varphi: X \rightarrow \mathrm{Iso}_T(W, E)/G$ mit

$$\mathrm{Iso}_T(W, E) := \bigoplus_{t \in T} \mathrm{Iso}(W^t \otimes \mathcal{O}_X, E^t)$$

Wenn $\lambda \in X_*(G)$ eine Einparameteruntergruppe ist und $\beta: X \rightarrow P/Q_G(\lambda)$ eine Reduktion der Strukturgruppe, so findet man

$$\deg(\beta^*(P) \times^{\chi_\lambda} \mathbb{C}) = M(E_\bullet(\beta), \underline{\alpha}),$$

wobei $E_\bullet(\beta)$ die durch β bestimmte Fahne ist. Für eine Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(\mathrm{SL}_T(\underline{r}))$ mit gewichteter Fahne $(W_\bullet, \underline{\alpha})$ gilt

$$\langle \chi, \lambda \rangle = \sum_{t \in T} \chi_t \sum_{j=1}^{l(W_\bullet)} \alpha_j \left(\dim(W_j) \dim(W^t) - \dim(W) \dim(W_j^t) \right).$$

Ein dekoriertes Prinzipalbündel ist daher genau dann (semi)stabil wenn für jede Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(G)$ und jede Reduktion $\beta: X \rightarrow P/Q_G(\lambda)$ gilt

$$M_{\underline{1}, \underline{\chi}}(E_\bullet, \underline{\alpha}) + \delta\mu(\lambda, \varphi, s) (\geq) 0.$$

8.1.3. S-Äquivalenz

Es sei (P, s) ein (δ, κ, χ) -semistabiles Prinzipalbündel.

Definition 8.5. Wir nennen ein Paar (λ, β) aus einer Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(G)$ und einer Reduktion der Strukturgruppe $\beta: X \rightarrow P/Q_G(\lambda)$ *kritisch*, wenn

$$\deg(\beta^*(P) \times^{\chi\lambda} \mathbb{C}) + \delta\mu(\lambda, \beta, s) + \langle \chi, \kappa_*\lambda \rangle = 0$$

gilt.

Es sei nun (λ, β) ein kritisches Paar. Wir bezeichnen mit $\pi: Q_G(\lambda) \rightarrow L_G(\lambda)$ die Projektion auf den Levifaktor und mit $i: L_G(\lambda) \rightarrow G$ die Inklusion. Wir setzen $P' := i_*\pi_*\beta^*P$. Die Gruppe $Q_{\text{GL}(V)}(\sigma_*\lambda)$ ist der Stabilisator einer Fahne V_\bullet . Die Reduktion $X \rightarrow P/Q_G(\lambda) \rightarrow \sigma_*(P)/Q_{\text{GL}(V)}(\sigma_*\lambda)$ definiert eine Fahne F_\bullet von P_σ und es gilt

$$P' \times^\sigma V = \bigoplus_{j=1}^{l(F_\bullet)} F_j/F_{j-1}.$$

Es sei $j_0 = \min\{1 \leq j \leq l(F_\bullet) + 1 \mid s|_{F_j} \neq 0\}$. Dann induziert s einen Punkt

$$s' \in \mathbb{P}(F_{j_0}/F_{j_0-1})|_{\{x_0\}} \subset \mathbb{P}(P' \times^\sigma V)|_{\{x_0\}}.$$

Wir nennen $\text{df}_{\lambda, \beta}(P, s) := (P', s')$ die durch λ und β bestimmte *zulässige Deformation* von (P, s) .

Definition 8.6. Die *S-Äquivalenz* wird durch Isomorphie und die Relationen

$$(P, s) \sim \text{df}_{\lambda, \beta}(P, s)$$

für alle kritischen Paare (λ, β) erzeugt.

8.1.4. Parametrisierte Familien

Definition 8.7. Eine durch ein Schema S *parametrisierte Familie σ -dekoriertes Prinzipalbündel* ist ein Tripel $D_S = (P_S, N_S, s_S)$, wobei P_S ein G -Prinzipalbündel auf $S \times X$ ist, N_S ein Geradenbündel auf S ist und $s_S: P_{\sigma|S \times \{x_0\}} \rightarrow N_S$ ein surjektiver Homomorphismus ist. Zwei parametrisierte Familien D_S und D'_S sind *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $f: P_S \rightarrow P'_S$ von Prinzipalbündeln und einen Isomorphismus $h: N_S \rightarrow N'_S$ mit $s'_S \circ f_{\sigma|_{\{x_0\}}} = h \circ s_S$ gibt. Hierbei bezeichnet $f_\sigma: P_\sigma \rightarrow P'_\sigma$ den durch f induzierten Isomorphismus.

Definition 8.8. Die Familie D_S ist (δ, κ, χ) -*(semi)stabil*, wenn für jeden Punkt $s \in S$ das dekorierte Prinzipalbündel $D_{S,s} := (P_{S|\{s\} \times X}, s_{S|\{s\}})$ (δ, κ, χ) -*(semi)stabil* ist.

8. Dekorierte Prinzipalbündel

Diese Daten definieren den Modulfunktor der (semi)stabilen dekorierten Prinzipalbündel

$$\mathcal{PB}^{(\delta, \kappa, \chi)\text{-}(s)^s}(G, \sigma, \underline{d}) : \underline{\text{Sch}}/\mathbb{C} \rightarrow \underline{\text{Sets}}.$$

Wir erinnern daran, dass wir in Bemerkung 8.2 Zahlen a , b , und c fixiert haben, so dass σ ein direkter Summand der Darstellung $W_{a,b,c}$ ist. Wir haben nun alle Begriffe zur Verfügung, die für die Formulierung des zentralen Ergebnisses dieser Arbeit benötigt werden.

Theorem 8.9. *Für $\delta a < 1$ existiert der (projektive) grobe Modulraum der (δ, κ, χ) - (semi)stabilen σ -dekorierten G -Prinzipalbündel vom Typ \underline{d} .*

In den folgenden Abschnitten wird der Modulraum mithilfe der Ergebnisse aus den vorangegangenen Kapiteln konstruiert. Der Beweis von Theorem 8.9 wird in Abschnitt 8.3.3 gegeben.

Bemerkung 8.10. Man beachte, dass der Stabilitätsbegriff und auch der Parameter a von der gewählten Einbettung $\kappa : G \rightarrow \text{SL}_T(W)$ abhängen. In konkreten Beispielen kann man die Bedingung $\delta a < 1$ durch geschickte Wahl von κ oder Anpassungen in der Konstruktion des Modulraums abschwächen.

8.2. Dekorierte Prinzipalbündel und Tumps

8.2.1. Dekorierte Pseudo-Prinzipalbündel

Das Datum eines dekorierten Prinzipalbündels (P, s) ist nach Bemerkung 8.4 äquivalent zum Datum eines T -gespaltenen Vektorbündels E , einer Reduktion der Strukturgruppe $\varphi : X \rightarrow \text{Iso}_T(W, E)/G$ und einem Punkt $s \in \mathbb{P}(E_\sigma)$. Wir erweitern nun die betrachtete Kategorie und erlauben auch Schnitte $\varphi : X \rightarrow \text{Hom}_T(W, E)//G$ mit

$$\text{Hom}_T(W, E) := \bigoplus_{t \in T} \mathcal{H}\text{om}(W^t \otimes \mathcal{O}_X, E^t) = \text{Spec} \left(\text{Sym} \left(\bigoplus_{t \in T} E^{tV} \otimes W^t \right) \right).$$

Ein solcher Schnitt φ wird beschrieben durch einen Homomorphismus

$$\tau_\varphi : \text{Sym} \left(\bigoplus_{t \in T} E^{tV} \otimes W^t \right)^G \rightarrow \mathcal{O}_X.$$

Dies führt uns zu folgender Definition:

Definition 8.11. Ein σ -dekoriertes Pseudo-Prinzipalbündel ist ein Tupel (E, τ, s) bestehend aus einem T -gespaltenen Vektorbündel E mit $\text{rk}(E^t) = r_i$ und $\det(E) = \mathcal{O}_X$, einem nicht-trivialen Homomorphismus

$$\tau : \text{Sym} \left(\bigoplus_{t \in T} E^{tV} \otimes W^t \right)^G \rightarrow \mathcal{O}_X$$

und einem Punkt s im assoziierten Bündel $\mathbb{P}(E_{\sigma|\{x_0\}})$.

Ein *Isomorphismus* $f: (E, \tau, s) \rightarrow (E', \tau', s')$ ist ein Isomorphismus $f: E \rightarrow E'$ T -gespaltener Vektorbündel mit $\tau \circ \text{Sym}(\bigoplus_{t \in T} f^{t \vee} \otimes \text{id}_{W^t}) = \tau'$ und $f_\sigma(s') = s$.

Eine *Familie dekorierte Pseudo-Prinzipalbündel* ist ein Tupel $D_S := (E_S, N_S, \tau_S, s_S)$, wobei E_S ein T -gespaltenes Vektorbündel auf $S \times X$ ist, N_S ein Geradenbündel auf S ist,

$$\tau_S: \text{Sym} \left(\bigoplus_{t \in T} E_S^{t \vee} \otimes W^t \right)^G \rightarrow \pi_X^* \mathcal{O}_X$$

ein Homomorphismus über S ist, dessen Einschränkung auf einen beliebigen Punkt $s \in S$ nicht-trivial ist, und $s_S: E_{\sigma|_{S \times \{x_0\}}} \rightarrow N_S$ ein Homomorphismus ist.

Zwei Familien D_S und D'_S sind isomorph, wenn es Isomorphismen $f: E_S \rightarrow E'_S$ und $h: N_S \rightarrow N'_S$ mit $\tau'_S \circ f' = \tau_S$ und $h \circ s_S = s'_S \circ f_{\sigma|_{S \times \{x_0\}}}$ gibt, wobei f' und f_σ die durch f induzierten Isomorphismen sind.

Diese Daten definieren den Modulfunktor der dekorierten Pseudo-Prinzipalbündel

$$\mathcal{PPB}: \underline{\text{Sch}}/\mathbb{C} \rightarrow \underline{\text{Sets}}.$$

Lemma 8.12. *Ein dekoriertes Pseudo-Prinzipalbündel (E, τ, s) mit assoziiertem Schnitt $\text{Spec}(\tau): X \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_T(W, E) // G$ kommt genau dann von einem dekorierten Prinzipalbündel, wenn es einen Punkt $x \in X$ mit $\text{Spec}(\tau)(x) \in \mathcal{I}\text{so}_T(W, E)|_{\{x\}}$ gibt.*

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}\text{so}_T(W, E) \hookrightarrow \mathcal{H}\text{om}_T(W, E) & \xrightarrow{p} & X \\ \downarrow & \searrow \pi & \nearrow \bar{p} \\ \mathcal{I}\text{so}_T(W, E)/G \hookrightarrow \mathcal{H}\text{om}_T(W, E) // G & & \swarrow \sigma \end{array} .$$

Auf $\mathcal{H}\text{om}_T(W, E)$ gibt es den tautologischen Homomorphismus $\psi: W \otimes \pi_X^* \mathcal{O}_X \rightarrow \pi_X^* E$ mit Determinante

$$D := \bigwedge^r \psi: \mathcal{O}_{\mathcal{H}\text{om}_T(W, E)} \rightarrow \pi_X^*(\det(E)).$$

Weil $\det(E) \cong \mathcal{O}_X$ gilt, entspricht D einem Schnitt in $H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{H}\text{om}_T(W, E)})$. Da weiter D auch G -invariant ist, definiert D einen Schnitt $\bar{D} \in H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{H}\text{om}_T(W, E) // G})$. Wir betrachten den Rückzug $\sigma^* \bar{D} \in H^0(\mathcal{O}_X)$. Es ist offensichtlich, dass σ an den Punkten $x \in X$ mit $\sigma^* \bar{D}(x) \neq 0$ durch $\mathcal{I}\text{so}_T(W, E)/G$ faktorisiert. Wegen $H^0(\mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$ ist aber $\sigma^* \bar{D}$ trivial oder konstant. \square

8.2.2. Pseudo-Prinzipalbündel als Tumps

Wir betrachten den Raum $H := \bigoplus_{t \in T} \text{End}(\mathbb{C}^{r_t})$ mit der Linkswirkung durch $\text{SL}_T(r)$ und der Rechtswirkung durch G . Da Links- und Rechtsmultiplikation vertauschen, erhält man eine Linkswirkung von $\text{SL}_T(r)$ auf $\mathbb{P}(H^\vee) // G = \text{Proj}(\text{Sym}(H^\vee)^G)$.

Es gibt eine Zahl $d \in \mathbb{N}$, so dass $\text{Sym}(H^\vee)^G$ in den Graden $0 \leq s \leq d$ erzeugt wird, und der graduierte Ring

$$\text{Sym}^{(d)}(H^\vee)^G := \bigoplus_{i=1}^{\infty} \text{Sym}^{i(d)}(H^\vee)^G$$

8. Dekorierte Prinzipalbündel

in Grad eins erzeugt ist (siehe [33, p. 204]). Der Homomorphismus

$$V_1 := \bigoplus_{\substack{s \in \mathbb{N}^d \\ \sum i s_i = d!}} \bigotimes_{i=1}^d \text{Sym}^{s_i}(\text{Sym}^i(H^\vee)^G) \rightarrow \text{Sym}^{d!}(H^\vee)^G$$

ist dann nach Konstruktion surjektiv. Wir erhalten eine äquivariante Surjektion graduierter Algebren

$$\text{Sym}(V_1) \rightarrow \text{Sym}(\text{Sym}^{d!}(H^\vee)^G) \rightarrow \text{Sym}^{(d!)}(H^\vee)^G,$$

Man beachte, dass die natürliche Darstellung $\rho: \text{GL}(r) \rightarrow \text{GL}(V_1)$ nach Konstruktion homogen vom Grad $d!$ ist.

Es sei nun (E_S, N_S, τ_S, s_S) eine parametrisierte Familie dekorierte Pseudo-Prinzipalbündel. Wir betrachten das Vektorbündel

$$E_{S,\rho} = \bigoplus_{\substack{s \in \mathbb{N}^d \\ \sum i s_i = d!}} \bigotimes_{i=1}^d \text{Sym}^{s_i} \left(\text{Sym}^i \left(\bigoplus_{t \in T} E_S^{t\vee} \otimes W^t \right)^G \right).$$

Die Komposition von $\tau_S^{(d!)}$ mit der Surjektion

$$E_{S,\rho} \rightarrow \text{Sym}^{(d!)} \left(\bigoplus_{t \in T} E_S^{t\vee} \otimes W^t \right)^G$$

ergibt einen nicht-trivialen Morphismus $\varphi_S(\tau_S): E_{S,\rho} \rightarrow \pi_X^* \mathcal{O}_X$.

Definition 8.13. Das Tupel $(E_S, \mathcal{O}_X, N_S, \varphi(\tau_S), s_S)$ ist die zu (E_S, N_S, τ_S, s_S) assoziierte Familie dekorierte ρ -Tumps.

Definition 8.14. Ein dekoriertes Pseudo-Prinzipalbündel (E, τ, s) ist $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabil, falls der assoziierte dekorierte Tump $(E, \mathcal{O}_X, \varphi(\tau), s)$ $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabil ist.

Durch diese Definitionen erhalten wir den Modulfunktor der $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabilen dekorierten Pseudo-Prinzipalbündel $\mathcal{PPB}^{(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)-(s)s}$ zusammen mit einer natürlichen Transformation

$$\mathcal{PPB}^{(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)-(s)s} \rightarrow \mathcal{T}_{\text{mp}}^{(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)-(s)s}$$

Bemerkung 8.15. Nach Wahl von d , sind im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}(V_1) & \longrightarrow & \text{Sym} \left(\bigoplus_{i=1}^d \text{Sym}^i(H^\vee)^G \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Sym}^{(d!)}(H^\vee)^G & \longrightarrow & \text{Sym}(H^\vee)^G \end{array}$$

die vertikalen Homomorphismen surjektiv. Die horizontalen Homomorphismen induzieren Isomorphismen der entsprechenden (gewichteten) projektiven Räume. Wir erhalten daher folgendes Diagramm äquivarianter abgeschlossener Einbettungen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V_1) & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{P}(1 \leq i \leq d) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Proj}(\text{Sym}^{(d)}(H^\vee)^G) & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{P}(H^\vee)//G. \end{array}$$

Hierbei steht $\mathbb{P}(1 \leq i \leq d)$ für den gewichteten projektiven Raum

$$\mathbb{P}(1 \leq i \leq d) := \text{Proj} \left(\text{Sym} \left(\bigoplus_{i=1}^d \text{Sym}^i(H^\vee)^G \right) \right).$$

Lemma 8.16. *Es sei $h \in H$, $[h] \in \mathbb{P}(1 \leq i \leq d)$ und $v([h]) \in \mathbb{P}(V_1)$. Dann gilt*

$$\mu_{\mathcal{O}(d)}(\lambda, [h])(\geq)0 \iff \mu_{\mathcal{O}(1)}(\lambda, v([h]))(\geq)0.$$

Beweis. Es sei $[h]$ repräsentiert durch $h_i: \text{Sym}^i(H^\vee)^G \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq d$. Der Punkt $v(h)$ ist dann bestimmt durch die Linearformen

$$\begin{aligned} h_{\underline{s}}: \bigotimes_{i=1}^d \text{Sym}^{s_i}(\text{Sym}^i(H^\vee)^G) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (u_1^{(1)} \cdots u_{s_1}^{(1)}) \otimes \cdots \otimes (u_1^{(d)} \cdots u_{s_d}^{(d)}) &\mapsto \prod_{i=1}^d \prod_{j=1}^{s_i} h_i(u_j^{(i)}). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. \square

Proposition 8.17. *Die Abbildung, die einer Isomorphieklasse von dekorierten Pseudo-Prinzipalbündeln $[(E, \tau, s)]$ die Isomorphieklasse $[(E, \mathcal{O}_X, \varphi(\tau), s)]$ zuordnet, ist injektiv.*

Beweis. (i) Es seien zunächst (E, τ, s) und (E', τ', s') zwei dekorierte Pseudo-Prinzipalbündel und $\psi: E' \rightarrow E$ ein Isomorphismus der entsprechenden dekorierten Tumps. Dann ist (E', τ', s') isomorph zu $(E, \tilde{\tau}, s)$ mit $\tilde{\tau} := \tau' \circ \text{Sym}(\bigoplus_{t \in T} \psi^{t^\vee} \otimes \text{id}_{W^t})$. Wir können also $E = E'$, $s = s'$ und $\varphi_\tau = \varphi_{\tau'}$ annehmen.

(ii) Wir betrachten die induzierten Abbildungen

$$\tau_j, \tau'_j: \text{Sym}^j \left(\bigoplus_{t \in T} E^{t^\vee} \otimes W^t \right)^G \rightarrow \mathcal{O}_X.$$

Man beachte, dass τ und τ' durch die Morphismen τ_i bzw. τ'_i , $i = 1, \dots, d$, bestimmt sind. Für jedes i gibt es dann $l \in \mathbb{N}$ mit $li = d!$. Nach Konstruktion haben wir dann

$$\text{Sym}^l(\tau_i) = \text{Sym}^l(\tau'_i).$$

Somit gibt es eine l -te Einheitswurzel $\zeta_i \in \mathbb{C}^*$ mit $\tau_i = \zeta_i \cdot \tau'_i$.

8. Dekorierte Prinzipalbündel

(iii) Es sei \mathbb{E} die Einschränkung von E auf den generischen Punkt η . Der Morphismus φ_τ definiert den Punkt

$$\varphi \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_\rho) = \mathbb{P} \left(\bigoplus_{\substack{s \in \mathbb{N}^d \\ \sum is_i = d!}} \bigotimes_{i=1}^d \text{Sym}^{s_i} \left(\text{Sym}^i \left(\bigoplus_{t \in T} \mathbb{E}^{tV} \otimes W^t \right)^G \right) \right).$$

Nach Voraussetzung werden die Punkte

$$\tau, \tau' \in \bigoplus_{i=1}^d \left(\text{Sym}^i \left(\bigoplus_{t \in T} \mathbb{E}^{tV} \otimes W^t \right)^G \right)^\vee$$

beide auf φ abgebildet. Da die Veronese-Abbildung

$$\mathbb{P} \left(\bigoplus_{i=1}^d \left(\text{Sym}^i \left(\bigoplus_{t \in T} \mathbb{E}^{tV} \otimes W^t \right)^G \right) \right) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{E}_\rho)$$

eine Einbettung ist, gibt es eine $d!$ -te Einheitswurzel $\zeta \in K^*$ mit $\tau_i = \zeta^i \tau'_i$, d.h. es gilt $\zeta_i = \zeta^i$, für alle $1 \leq i \leq d$. Die Multiplikation mit ζ definiert dann einen Isomorphismus zwischen (E, τ, s) und (E, τ', s) . \square

Lemma 8.18. *Es sei $h \in H$ und $[h]$ das Bild in $\mathbb{P}(H^\vee)//G$. Wir betrachten die Wirkung von $\text{SL}_T(r)$ auf $\mathbb{P}(H^\vee)//G$.*

- (i) *Wenn h ein Isomorphismus ist, dann ist $[h]$ polystabil.*
- (ii) *Wenn $[h]$ semistabil ist, dann ist h ein Isomorphismus.*

Beweis. (i) Die Determinante $\det: H \rightarrow \mathbb{C}$ definiert einen Schnitt in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(H^\vee)}(r)$, der $\text{SL}_T(r)$ -invariant und G -invariant ist. Sie induziert daher einen Schnitt D auf $\mathbb{P}(H^\vee)//G$. Ist h ein Isomorphismus, so ist $D([h]) \neq 0$. Da $(\mathbb{P}(H^\vee)//G)_D$ affin ist, ist $[h]$ nach Definition 3.14 semistabil. Weiter ist der $\text{SL}_T(r)$ -Orbit von $[h]$ gerade das Urbild $D^{-1}(D([h]))$ und somit abgeschlossen.

(ii) Der Ring der invarianten Funktionen auf H wird von \det erzeugt. Falls h kein Isomorphismus ist, gibt es daher keine invariante Funktion f mit $f([h]) \neq 0$. \square

8.3. Konstruktion des Modulraums

8.3.1. Semistabile Reduktion

Wir erinnern daran, dass es nach Proposition 7.27 ein Δ gibt, so dass für $\delta_1 > \Delta$ ein dekoriertes Tump genau dann $(\delta_1, \delta_2, \underline{1}, \chi)$ -(semi)stabil ist, wenn er asymptotisch $(\delta_2, \underline{1}, \chi)$ -(semi)stabil ist.

Theorem 8.19 (Semistabile Reduktion). *Für $\delta_1 > \Delta$ kommt jedes $(\delta_1, \delta_2, \underline{1}, \chi)$ -semistabile dekorierte Pseudo-Prinzipalbündel von einem dekorierten G -Prinzipalbündel.*

Beweis. Es sei (E, τ, s) ein dekoriertes Pseudo-Prinzipalbündel mit $(\delta_1, \delta_2, \underline{1}, \chi)$ -semistabilem assoziierten Tump $(E, \mathcal{O}_X, \varphi(\tau), s)$. Es sei η der generische Punkt von X und K der Funktionenkörper. Wir wählen eine Trivialisierung $f: \mathbb{E} := E_\eta \rightarrow W \otimes K$. Dies induziert eine Trivialisierung $f_\rho: \mathbb{E}_\rho \rightarrow V_1 \times_{\mathbb{C}} K$. Da $(E, \mathcal{O}_X, \varphi(\tau), s)$ nach Wahl von δ_1 asymptotisch $(\delta_2, \underline{1}, \chi)$ -semistabil ist, liegt $[\varphi(\tau)_\eta \circ f_\rho^{-1}]$ in $\mathbb{P}(V_1)^{\text{ss}} \times_{\mathbb{C}} K$. Nach Lemma 8.16 und Lemma 8.18, (ii), gilt dann $\text{Spec}(\tau)_\eta \in \mathcal{I}\text{so}_T(W, E)_\eta$. Wegen Lemma 8.12 faktorisiert $\text{Spec}(\tau): X \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_T(W, E)//G$ auf ganz X durch $\mathcal{I}\text{so}_T(W, E)/G$ und definiert eine Reduktion der Strukturgruppe. \square

Bemerkung 8.20. Der Begriff der semistabilen Reduktion bezeichnet im allgemeinen die folgende Aussage: Wenn R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K ist, und P_K eine Familie semistabiler dekorierte Prinzipalbündel auf $\text{Spec}(K) \times X$ ist, dann gibt es eine endliche Erweiterung K' von K , so dass sich der Rückzug der Familie P_K nach $\text{Spec}(K') \times X$ auf die Normalisierung R' von R fortsetzen lässt. Wenn man den quasi-projektiven Modulraum der semistabilen dekorierte Prinzipalbündel konstruiert hat, ist diese Aussage äquivalent zur Eigentlichkeit des Modulraums. Wir werden im Folgenden den projektiven Modulraum der dekorierte Pseudo-Prinzipalbündel konstruieren, der den Modulraum der dekorierte Prinzipalbündel als offenes Unterschema enthält. Aus Theorem 8.19 folgt nun, dass die Modulräume gleich sind, so dass der Modulraum der dekorierte Prinzipalbündel insbesondere projektiv ist.

Proposition 8.21. *Es sei K ein perfekter Körper, G eine affine reductive Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene reductive Untergruppe über K . Zu einem Punkt $[g] \in G/H$ und einer Einparameteruntergruppe $\lambda: K^* \rightarrow G$ mit der Eigenschaft, dass der Limes $[g]_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \cdot [g]$ in G/H existiert, gibt es $g' \in \mathcal{R}(Q_G(\lambda))$ mit $[g]_\infty = g' \cdot [g]$.*

Beweis. Diese Aussage wurde von Kraft und Kuttler für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K gezeigt. Die Aussage für perfekte Körper findet man in [2, Theorem 3.3]. \square

Lemma 8.22. *Es sei K ein perfekter Körper, $\lambda: K^* \rightarrow \text{GL}(\underline{r}, K) \cap \text{SL}(r, K)$ eine Einparameteruntergruppe. Für den Punkt $x = [(\text{id}_t, t \in T)] \in \mathbb{P}(H^\vee \otimes K)//G$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gibt eine Einparameteruntergruppe $\lambda' \in X_*(G(K))$ und ein Element $g \in Q_{\text{GL}(\underline{r}, K) \cap \text{SL}(r, K)}(\lambda)$, so dass $\kappa_* \lambda' = g^{-1} \cdot \lambda \cdot g$.*

(ii) $\mu(\lambda, x) = 0$.

Beweis. „(i) \Rightarrow (ii)“: Dies folgt sofort, da G der Stabilisator von $[\text{id}]$ in $H//G$ ist.

„(i) \Leftarrow (ii)“: Es sei $x_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \cdot x$. Aufgrund von Lemma 8.18, (i), gibt es $g \in \text{GL}(\underline{r})$ mit $x_\infty = [g]$. Wegen Proposition 8.21 kann man dabei $g \in \mathcal{R}(Q_{\text{SL}_T(\underline{r})}(\lambda))$ wählen. Da λ den Punkt x_∞ invariant lässt, faktorisiert λ durch $g \cdot \kappa(G) \cdot g^{-1}$. Offensichtlich ist $\lambda' := g^{-1} \cdot \lambda \cdot g$ das Bild einer Einparameteruntergruppe von G . \square

Proposition 8.23. *Es sei (P, s) ein dekoriertes Prinzipalbündel, $(E, \mathcal{O}_X, \varphi(\tau), s)$ der assoziierte dekorierte Tump und $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ eine gewichtete Fahne. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

8. Dekorierter Prinzipalbündel

(i) *Es gibt eine Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(G)$ und eine Reduktion $\beta: X \rightarrow P/Q_G(\lambda)$, so dass $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ die durch λ und β definierte gewichtete Fahne ist.*

(ii) $\mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi(\tau)) = 0$.

Beweis. „(i) \Rightarrow (ii)“: Dies folgt direkt aus Lemma 8.22, (i) \Rightarrow (ii).

„(i) \Leftarrow (ii)“: Es sei $f: U \rightarrow X$ ein fppf-Morphismus und $h: f^*P \rightarrow U \times G$ eine Trivialisierung. Dies induziert ebenso eine Trivialisierung $\tilde{h}: f^*E \rightarrow W \otimes \mathcal{O}_U$. Es sei $\eta \in U$ der generische Punkt und $K = \mathcal{O}(U)_\eta$ der Funktionenkörper von U . Wir betrachten den T -gespaltenen Vektorraum $\mathbb{E} := E|_\eta$ und das Gruppenschema $G(K)$ und wählen eine Einparameteruntergruppe $\Lambda: K^* \rightarrow \mathrm{GL}_T(\mathbb{E}) \cap \mathrm{SL}(\mathbb{E})$ mit gewichteter Fahne $(\mathbb{E}_\bullet := E_\bullet|_\eta, \underline{\alpha})$. Nach Voraussetzung gilt dann $\mu(\Lambda, \varphi(\tau)|_\eta) = 0$, so dass es wegen Lemma 8.22, (i) \Leftarrow (ii), eine Einparameteruntergruppe $\Lambda': K^* \rightarrow G(K)$ gibt, die dieselbe gewichtete Fahne induziert. Schließlich gibt es eine Einparameteruntergruppe $\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow G$ und ein Element $g \in G(K)$ mit $\lambda \times \mathrm{id}_K = g \cdot \Lambda' \cdot g^{-1}$.

Wir betrachten nun die Trivialisierung $h'_\eta := g \cdot h_\eta \cdot g^{-1}$. Die Fahne E_\bullet definiert eine Reduktion $\beta': X \rightarrow \mathcal{I}\mathrm{so}_T(W, E)/Q_{\mathrm{GL}(T)}(\lambda)$. Das Bild des Punktes $\beta'(\eta) \in \mathcal{I}\mathrm{so}_T(W \otimes K, \mathbb{E})/Q_{\mathrm{GL}(T, K)}(\lambda)$ unter h'_η ist dann $[\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_K]$ und kommt somit von dem Punkt $[e_\eta] \in G(K)/Q_{G(K)}(\lambda)$. Das Urbild $\beta_\eta = h'^{-1}([e_\eta]) \in (P/Q_G(\lambda))_\eta$ lässt sich zur gesuchten Reduktion β fortsetzen. \square

Proposition 8.24. *Für $\delta_1 > \Delta$ gilt: Ein dekoriertes Pseudo-Prinzipalbündel ist genau dann $(\delta_1, \delta_2, \underline{1}, \chi)$ -(semi)stabil, wenn es von einem (δ_2, κ, χ) -(semi)stabilen dekorierten Prinzipalbündel kommt.*

Beweis. Es sei (E, τ, s) ein $(\delta_1, \delta_2, \underline{1}, \chi)$ -(semi)stabiles dekoriertes Pseudo-Prinzipalbündel. Wegen Theorem 8.19 kommt (E, τ, s) von einem dekorierten Prinzipalbündel (P, s) . Aufgrund der Implikation (i) \Rightarrow (ii) in Proposition 8.23 muss dieses Prinzipalbündel auch (δ_2, κ, χ) -(semi)stabil sein.

Es sei nun (P, s) ein (δ_2, κ, χ) -(semi)stabiles Prinzipalbündel, (E, τ, s) das assoziierte dekorierte Pseudo-Prinzipalbündel und $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ eine gewichtete Fahne. Aufgrund von Lemma 8.18, (i), gilt $\mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi(\tau)) \geq 0$. Falls $\mu_1(E_\bullet, \underline{\alpha}, \varphi(\tau)) = 0$ gilt, gibt es nach Proposition 8.23 ein $\lambda \in X_*(G)$ und eine Reduktion $\beta: X \rightarrow P/Q_G(\lambda)$ mit assoziierter Fahne $(E_\bullet, \underline{\alpha})$. Die (δ_2, κ, χ) -(Semi)Stabilität von (P, s) impliziert nun

$$M_{\underline{1}, \chi}(E_\bullet, \underline{\alpha}) + \delta_2(E_\bullet, \underline{\alpha}, s) (\geq) 0.$$

Dies zeigt die asymptotische $(\delta_2, \underline{1}, \chi)$ -(Semi)Stabilität von (E, τ, s) . Aufgrund der Wahl von δ_1 ist (E, τ, s) dann auch $(\delta_1, \delta_2, \underline{1}, \chi)$ -(semi)stabil. \square

Korollar 8.25. *Für $\delta_1 > \Delta$ gibt es eine Äquivalenz der Kategorie der (δ_2, κ, χ) -(semi)stabilen dekorierten Prinzipalbündel mit der Kategorie der $(\delta_1, \delta_2, \underline{1}, \chi)$ -(semi)stabilen dekorierten Pseudo-Prinzipalbündel. Insbesondere gibt es einen Isomorphismus der Modulfunktoren.*

8.3.2. Konstruktion des Parameterraums

Es sei nun $p_t(n) := d_t + r_t(n + 1 - g)$, $Y^t := \mathbb{C}^{p_t(n)}$ und $Y := \bigoplus_{t \in T} Y^t$. Eine durch ein Schema S parametrisierte Familie dekorierter Quotienten-Pseudo-Prinzipalbündel ist ein Tupel $D_s = (q_s, N_s, \tau_s, s_s)$, wobei $q_s: Y \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow E_s$ ein Quotient T -gespaltener Vektorbündel mit $\underline{r}(E) = \underline{r}$ und $\underline{d}(E) = \underline{d}$, so dass (E_s, N_s, τ_s, s_s) eine parametrisierte Familie dekorierter Pseudo-Prinzipalbündel ist und für alle $s \in S$ $H^0(q_{s,s}(n))$ ein Isomorphismus ist. Ein Isomorphismus $f: D_S \rightarrow D'_S$ ist ein Isomorphismus der Familien dekorierter Pseudo-Prinzipalbündel mit $f \circ q_s = q'_s$. Dies definiert den Modulfunktor

$$\mathcal{QPPB}_{Y \otimes \mathcal{O}_X(-n), X}^{r, d}: \underline{\text{Sch}} \rightarrow \underline{\text{Sets}}.$$

Proposition 8.26. *Der feine Modulraum $\mathcal{QPPB}_n := \mathcal{QPPB}_{Y \otimes \mathcal{O}_X(-n), X}^{r, d}$ der σ -dekorierten Quotienten-Pseudo-Prinzipalbündel existiert.*

Beweis. Für einen Index $t \in T$ bezeichne $\text{Quot}_n^t := \text{Quot}_{Y^t \otimes \mathcal{O}_X(-n), X}^{d_t, r_t}$ das Quot-Schema der Quotienten $Y^t \otimes \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow Q$ mit Grad d_t und Rang r_t aus Abschnitt 2.4. Weiter sei $\text{Quot}_n^{t,0}$ das offene Unterschema der Punkte p , so dass $h^1(Q_p^t(n)) = 0$ und $H^0(q_p^t(n))$ ein Isomorphismus ist (siehe Lemma 4.9). Auf $\text{Quot}_n := \prod_{t \in T} \text{Quot}_n^{t,0}$ gibt es dann den universellen Quotienten

$$q := \bigoplus_{\text{Quot}_n^{t,0}} \pi_{\text{Quot}_n^{t,0}}^* q_t: Y \otimes \pi_X^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow Q := \bigoplus_{t \in T} \pi_{\text{Quot}_n^{t,0}}^* Q^t$$

T -gespaltener Vektorbündel. Das Geradenbündel $\det(Q)$ definiert einen Morphismus $\pi_{\text{Jac}}: \text{Quot}_n \rightarrow \text{Jac}^0$. Es sei P_1 die Faser über dem Punkt, der dem trivialen Bündel \mathcal{O}_X entspricht. Wir haben den kanonischen Isomorphismus

$$Q^\vee \cong \bigwedge^{r-1} Q \otimes \left(\bigwedge^r Q \right)^\vee.$$

Da für jeden Punkt $p \in P_1$ das Bündel $\det(Q_p)$ trivial ist, gibt es ein Geradenbündel \mathcal{A} auf P_1 mit $\det(Q) \cong \pi_{P_1}^* \mathcal{A}$. Wir erhalten daher auf $P_1 \times X$ eine Surjektion

$$\text{Sym} \left(W \otimes \bigwedge^{r-1} (Y \otimes \pi_X^* (\mathcal{O}_X(-n))) \otimes \pi_{P_1}^* (\mathcal{A}^\vee) \right)^G \rightarrow \text{Sym} \left(\bigoplus_{t \in T} W^t \otimes Q^{t\vee} \right)^G.$$

Wir betrachten nun auf P_1 das Bündel

$$P_2 := \bigoplus_{i=1}^k \text{Hom} \left(\text{Sym}^{d_i} \left(W \otimes \bigwedge^{r-1} Y \otimes \mathcal{A}^\vee \right)^G, \pi_{X*} \pi_X^* \mathcal{O}_X(d_i n(r-1)) \right).$$

Auf $P_2 \times X$ haben wir dann die universellen Homomorphismen

$$\varphi_i: \text{Sym}^{d_i} \left(W \otimes \bigwedge^{r-1} Y \otimes \pi_{P_1}^* \mathcal{A}^\vee \right)^G \rightarrow \pi_X^* \mathcal{O}_X(d_i n(r-1)), \quad i = 1, \dots, k.$$

8. Dekorierte Prinzipalbündel

Durch Twisten mit $\mathcal{O}_X(-d_i n(r-1))$ erhalten wir den Homomorphismus

$$\varphi: \mathcal{W} := \bigoplus_{i=1}^k \mathrm{Sym}^{d_i} \left(W \otimes \bigwedge^{r-1} (Y \otimes \pi_X^* \mathcal{O}_X(-n)) \otimes \pi_X^* \mathcal{A} \right)^G \rightarrow \mathcal{O}_{P_2 \times X}.$$

Man erhält nun einerseits einen universellen Homomorphismus

$$\tau_2: \mathrm{Sym}(\mathcal{W}) \rightarrow \mathcal{O}_{P_2 \times X},$$

andererseits haben wir eine Surjektion

$$\mathrm{Sym}(\mathcal{W}) \rightarrow \mathrm{Sym} \left(\bigoplus_{t \in T} W^t \otimes Q_2^{tV} \right)^G$$

mit $Q_2 := (\pi_{Q_{\mathrm{uot}}^0} \times \mathrm{id}_X)^* Q$.

Es sei nun $P_3 \subset P_2$ das abgeschlossene Unterschema, so dass τ_2 auf $P_3 \times X$ einen Morphismus

$$\tau_3: \mathrm{Sym} \left(\bigoplus_{t \in T} W^t \otimes Q_3^{tV} \right)^G \rightarrow \mathcal{O}_{P_3 \times X}$$

mit $Q_3 := Q_2|_{P_3 \times X}$ induziert.

Wir betrachten das assoziierte Bündel $\mathrm{QPPB} := \mathbb{P}(Q_{3,\sigma|\{x_0\}})$ über P_3 . Auf $\mathrm{QPPB} \times X$ haben wir nun den universellen Quotienten T -gespaltener Vektorbündel

$$\tilde{q}: Y \otimes \pi^* \mathcal{O}_X(-n) \rightarrow \tilde{E}$$

mit $\tilde{E} := \pi^* Q_3$, den Homomorphismus

$$\tilde{\tau}: \mathrm{Sym} \left(\bigoplus_{t \in T} W^t \otimes \tilde{E}^{tV} \right)^G \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{QPPB} \times X}$$

sowie den tautologischen Homomorphismus

$$\tilde{s}: \tilde{E}_{\sigma|\{x_0\}} \rightarrow \tilde{N}_S := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathrm{QPPB})}(1).$$

Aus der Konstruktion ergibt sich, dass die Familie $(\tilde{q}, \tilde{N}_S, \tilde{\tau}, \tilde{s})$ auf $\mathrm{QPPB} \times X$ die universelle Eigenschaft für Familien dekorierte Quotienten-Pseudo-Prinzipalbündel besitzt. \square

8.3.3. Beweis von Theorem 8.9

Nach Proposition 6.26 gibt es eine Konstante C , so dass jedes $(\delta_1, \delta_2, \underline{1}, \chi)$ -semistabile dekorierte Pseudo-Prinzipalbündel (E, τ, s) die Bedingung $\mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}^{\max}(E) < \mu_{\underline{\kappa}, \underline{\chi}}(E) + C$ erfüllt. Es gibt daher ein n_0 , so dass für $n \geq n_0$ und ein semistabiles dekoriertes Pseudo-Prinzipalbündel (E, τ, s) gilt: $E(n)$ ist global erzeugt und $h^1(E(n))$ verschwindet. Wie in Lemma 6.44 zeigt man:

Lemma 8.27. *Für $n \geq n_0$ erfüllt die Familie $(\tilde{E}, \tilde{N}_S, \tilde{\tau}, \tilde{s})$ die lokal universelle Eigenschaft für Familien $(\delta_1, \delta_2, \underline{1}, \chi)$ -semistabiler dekorierte Pseudo-Prinzipalbündel.*

Auf Quot_n gibt es eine natürliche Wirkung von $\text{GL}_T(Y)$, die sich zu einer Wirkung auf QPPB_n anheben lässt. Analog zu Proposition 6.45 sieht man:

Proposition 8.28. *Wenn $f_1, f_2: S \rightarrow \text{QPPB}_n$ zwei Morphismen sind, so dass die Rückzüge der lokal universellen Familie isomorph sind. Dann gibt es einen Morphismus $g: S \rightarrow \text{GL}_T(Y)$ mit $g \cdot f_1 = f_2$.*

Beweis von Theorem 8.9. Da \mathbb{C}^* trivial auf Quot_n^0 wirkt, können wir zunächst den gewichteten projektiven Raum $\overline{\text{QPPB}}_n := \text{QPPB}_n / \mathbb{C}^*$ über Quot_n^0 bilden. Es sei nun QTmp_n der Modulraum dekorierte Quotiententumps aus Proposition 6.30. Der universellen Familie $(\tilde{q}, \tilde{\tau}, \tilde{s})$ auf QPPB_n können wir gemäß Definition 8.13 eine Familie dekorierte Quotiententumps zuordnen, die einen Morphismus $f: \text{QPPB}_n \rightarrow \text{QTmp}_n$ definiert. Dieser Morphismus ist $\text{GL}_T(Y)$ -äquivariant, und da \mathbb{C}^* trivial auf QTmp_n operiert, erhalten wir einen $\text{PGL}_T(Y)$ -äquivarianten Morphismus $\bar{f}: \overline{\text{QPPB}}_n \rightarrow \text{QTmp}_n$, der eigentlich und nach Proposition 8.17 auch injektiv ist. Nach [15, 8.11.1] ist dieser Morphismus endlich und insbesondere affin.

Nach Definition werden die (semi)stabilen dekorierte Pseudo-Prinzipalbündel parametrisiert durch $\text{QPPB}_n^{(s)s} := f^{-1}(\text{QTmp}_n^{(s)s})$. Also gilt auch

$$\text{QPPB}_n^{(s)s} / \mathbb{C}^* = \bar{f}^{-1}(\text{QTmp}_n^{(s)s}).$$

Wenn wir $\delta a_2 < 1$ voraussetzen, existiert nach Theorem 6.24 der projektive gute Quotient $\text{QTmp}_n^{\text{ss}} // \text{SL}_T(Y)$ und der Orbitraum $\text{QTmp}_n^s / \text{SL}_T(Y)$. Nach Proposition 3.17 existiert dann auch der projektive gute Quotient

$$\text{PB}^{(\delta, \kappa, \chi)\text{-ss}} := \text{QPPB}^{\text{ss}} // \text{GL}_T(Y) = \overline{\text{QPPB}}_n^{\text{ss}} // \text{SL}_T(Y)$$

sowie der geometrische Quotient

$$\text{PB}^{(\delta, \kappa, \chi)\text{-s}} := \text{QPPB}^s / \text{GL}_T(Y) = \overline{\text{QPPB}}_n^s / \text{SL}_T(Y).$$

Die lokal universelle Eigenschaft und Proposition 3.7 zeigen dann, dass $\text{PB}^{(\delta, \kappa, \chi)\text{-(s)s}}$ der grobe Modulraum der (δ, κ, χ) -(semi)stabilen dekorierte Prinzipalbündel ist. \square

8.4. Anwendungen

8.4.1. Parabolische Prinzipalbündel

Wir fixieren eine Einparameteruntergruppe $a: \mathbb{C}^* \rightarrow G$ und setzen $Q := Q_G(a)$.

Definition 8.29. Ein *parabolisches Prinzipalbündel* ist ein Paar (P, s) bestehend aus einem Prinzipalbündel P und einem Punkt $s \in P/Q|_{\{x_0\}}$.

Die Gruppe G ist ein Q -Prinzipalbündel über G/Q . Mithilfe des dualen Charakters χ_a konstruieren wir das Geradenbündel $G \times^{\chi_a} \mathbb{C}$. Dieses Geradenbündel besitzt eine natürliche Linearisierung der Wirkung von G auf G/Q . Eine parabolisches Prinzipalbündel ist also ein dekoriertes Prinzipalbündel.

Wir untersuchen nun die Stabilitätsbedingung: Es sei $\lambda \in X_*(G)$ eine Einparameteruntergruppe und $\beta: X \rightarrow G/Q_G(\lambda)$ eine Reduktion der Strukturgruppe. Wir wählen

8. Dekorierte Prinzipalbündel

eine Trivialisierung $f: \beta^* P_{\{x_0\}} \times^{Q_G(\lambda)} G/Q \rightarrow G/Q$ und einen Repräsentanten $g \in G$ von $f(s)$. Für den Limespunkt $[g]_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \cdot [g]$ gibt es nach Proposition 8.21 ein $g' \in R(Q_G(\lambda))$ mit $[g_\infty] = g' \cdot [g]$. Da die Trivialisierung f nur bis auf Multiplikation mit $Q_G(\lambda)$ definiert ist, können wir $g_\infty = g$ annehmen. Es gilt also $g^{-1}\lambda g \in Q$ und wir erhalten

$$\mu(\lambda, \beta, s) = -\langle \chi_a, g^{-1}\lambda g \rangle.$$

Es sei $(W_\bullet, \underline{\beta})$ die zur Einparameteruntergruppe $\kappa_* a$ assoziierte gewichtete Fahne und $(\underline{r}_t, t \in T)$ ihr Typ. Die Einbettung $\kappa: G \rightarrow \mathrm{GL}_T(W)$ induziert eine abgeschlossene Einbettung $\bar{\kappa}: G/Q \rightarrow \mathrm{GL}_T(W)/Q_{\mathrm{GL}_T(W)}(\kappa_* a)$. Die Wirkung von $\mathrm{GL}_T(W)$ auf die Fahne W_\bullet induziert einen Isomorphismus

$$\mathrm{GL}_T(W)/Q_{\mathrm{GL}_T(W)}(\kappa_* a) \cong \prod_{t \in T} \mathrm{Fl}(W^t, \underline{r}_t).$$

Wenn U_\bullet die durch g bestimmte Fahne und $(V_\bullet, \underline{\alpha})$ die durch λ bestimmte Fahne ist, erhalten wir nach Beispiel 3.41

$$\mu(\lambda, \beta, s) = r \sum_{i=1}^{l(V_\bullet)} \sum_{j=1}^{l(W_\bullet)} \alpha_i \beta_j \left(\dim_{\mathbb{1}}(V_i) r'_j - r \dim_{\mathbb{1}}(V_i \cap U_j) \right)$$

mit $r'_j := \sum_{t \in T} r_{t,j}$.

Bemerkung 8.30. Wir betrachten die Einbettung

$$\prod_{t \in T} \mathrm{Fl}(W^t, \underline{r}_t) \rightarrow \mathrm{Fl}(W, \underline{r})$$

und linearisieren die Wirkung von G in

$$L := \mathcal{O}_{\mathrm{Fl}(W, \underline{r}')} (r\beta_1, \dots, r\beta_{l(W_\bullet)}).$$

Nach Beispiel 3.36 findet man ebenfalls

$$\mu_L(\lambda, \bar{\kappa}(f(s))) = r \sum_{i=1}^{l(V_\bullet)} \sum_{j=1}^{l(U_\bullet)} \alpha_i \beta_j \left(\dim_{\mathbb{1}}(V_i) r'_j - r \dim_{\mathbb{1}}(V_i \cap U_j) \right).$$

Korollar 8.31. *Ein parabolische Prinzipalbündel (P, s) ist (δ, κ, χ) -(semi)stabil, falls für jede Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(G)$ und jede Reduktion $\beta: X \rightarrow P/Q_G(\lambda)$ gilt*

$$\sum_{j=1}^{l(E_\bullet)} \alpha_j \left(\mathrm{pardeg}_{\underline{\chi}}(E) \mathrm{rk}(E_j) - \mathrm{pardeg}_{\underline{\chi}}(E_j) \mathrm{rk}(E) \right) (\geq) 0,$$

wobei E das zu P assoziierte T -gespaltene Vektorbündel, $(E_\bullet, \underline{\alpha})$ die durch λ und β bestimmte gewichtete Fahne ist und

$$\mathrm{pardeg}_{\underline{\chi}}(F) := \mathrm{deg}_{\mathbb{1}, \underline{\chi}}(F) + \delta r \sum_{i=1}^{l(U_\bullet)} \beta_i \dim_{\mathbb{1}}(U_i \cap F_{\{x_0\}}).$$

Bemerkung 8.32. (i) Der Grad der homogenen Darstellung σ ist in diesem Fall $a = \sum_{i=1}^{l(U_\bullet)} r\beta_i(r - r'_i)$. Aus der allgemeinen Konstruktion unter der Bedingung $\delta a < 1$ folgt also zunächst nur die Existenz des Modulraums für kleine Gewichte β_i . Wie in Bemerkung 6.50 zeigt man jedoch, dass sich die Bedingung abschwächen lässt zu $\delta r \sum_{i=1}^{l(U_\bullet)} \beta_i < 1$. Die schwächste Bedingung an die Gewichte erhält man, indem man für κ die (nicht notwendigerweise treue) adjungierte Darstellung verwendet (siehe auch [20]).

(ii) Wenn G halbeinfach ist, kann man $T = \{1\}$ wählen. Die Stabilitätsbedingung für parabolische Prinzipalbündel reduziert sich dann auf die bekannte Bedingung (siehe [20]). Unsere Konstruktion ist somit eine Verallgemeinerung des Modulraums aus [20] für reductive Gruppen.

8.4.2. Prinzipalbündel mit Niveaustuktur

Ein Prinzipalbündel mit Niveaustuktur soll analog zu Abschnitt 6.6.3 ein Prinzipalbündel P zusammen mit einer Trivialisierung $P|_{\{x_0\}} \rightarrow G$ beschreiben. Um einen kompakten Modulraum zu erhalten, benötigt man eine Kompaktifizierung von $G/Z(G)$.

Die wundervolle Kompaktifizierung

Es sei G eine zusammenhängende, halbeinfache Gruppe, $G_{\text{ad}} := G/Z(G)$ die *adjungierte Gruppe* und $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ die universelle Überlagerung von G . Weiter sei B eine Borel-Untergruppe von \tilde{G} und $T \subset B$ ein maximaler Torus. Wir verwenden im Folgenden die Notation für Lie Algebren aus [8]. Es sei $\Phi \subset X^*(T)$ die Menge der Wurzeln von G , $\Phi^+ \subset \Phi$ die Menge der positiven Wurzeln, $\Delta \subset \Phi^+$ die Menge der einfachen Wurzeln und F die Menge der fundamentalen Gewichte. Für ein dominantes Gewicht $\chi \in X^*(T)$ bezeichne $V(\chi)$ die irreduzible Darstellung von \tilde{G} mit höchstem Gewicht χ . Die Wirkung von \tilde{G} auf $\mathbb{P}(V(\chi)^\vee)$ induziert eine treue Wirkung von G_{ad} .

Definition 8.33. Ein dominantes Gewicht χ heißt *regulär*, wenn $\chi = \sum_{\omega \in F} n_\omega \omega$ mit $n_\omega > 0$ für alle $\omega \in F$ gilt.

Wir fixieren nun ein reguläres dominantes Gewicht χ von \tilde{G} . Der natürliche Morphismus

$$f: G_{\text{ad}} \rightarrow \mathbb{P}(\text{End}(V(\chi))^\vee)$$

induziert eine $G \times G$ -äquivalente lokal abgeschlossene Einbettung von G_{ad} .

Definition 8.34. Der Abschluss von $\text{im}(f)$ ist die *wundervolle Kompaktifizierung* $\overline{G_{\text{ad}}}$ von G .

Bemerkung 8.35. Die wundervolle Kompaktifizierung $\overline{G_{\text{ad}}}$ ist unabhängig von der Wahl des regulären höchsten Gewichts χ (siehe [5, §4]).

Proposition 8.36 ([5, §3.1, Theorem]). *Die wundervolle Kompaktifizierung $\overline{G_{\text{ad}}}$ besitzt folgende Eigenschaften:*

- (i) $\overline{G_{\text{ad}}}$ ist glatt.

8. Dekorierte Prinzipalbündel

- (ii) Das Komplement $\overline{G_{\text{ad}}} \setminus G_{\text{ad}}$ ist die Vereinigung glatter Primdivisoren S_α , $\alpha \in \Delta$, mit transversalem Schnitt.
- (iii) Für jede Teilmenge $I \subset \Delta$ ist $S_I := \bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha$ der Abschluss eines eindeutigen Orbits O_I , und der Abschluss jedes Orbits ist von dieser Form.

Für eine Teilmenge $I \subset \Delta$ einfacher Wurzeln sei Φ_I die Menge der von $\Delta \setminus I$ aufgespannten Wurzeln. Wir betrachten die Lie-Algebren

$$\mathfrak{l}_I := \mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in \Phi_I} \mathfrak{g}_\alpha,$$

$\mathfrak{p}_I := \mathfrak{l}_I + \mathfrak{u}$ und $\mathfrak{p}_I^- := \mathfrak{l}_I + \mathfrak{u}^-$ sowie die entsprechenden Untergruppen L_I , P_I und P_I^- . Weiterhin betrachten wir die Menge der Charaktere

$$\text{St}_T^I(V(\chi)) := \left\{ \chi' \in \text{St}_T(V(\chi)) \mid \exists \underline{n} \in \mathbb{N}^{\Delta \setminus I} : \chi' = \chi - \sum_{\alpha \in \Delta \setminus I} n_\alpha \alpha \right\}.$$

Für einen Charakter χ' bezeichne $V^{\chi'}$ den entsprechenden Eigenraum. Es sei weiter

$$V^I := \bigoplus_{\chi' \in \text{St}_T^I(V(\chi))} V^{\chi'}$$

und pr_{V^I} die Projektion auf V^I mit $\text{pr}_{V^I|_{V^{\chi'}}} = 0$ für $\chi' \in \text{St}_T(V(\chi)) \setminus \text{St}_T^I(V(\chi))$.

Lemma 8.37. *Der Orbit O_I ist der $(G \times G)$ -Orbit von $[\text{pr}_{V^I}] \in \mathbb{P}(\text{End}(V(\chi))^\vee)$.*

Beweis. Dies ist ein Schritt auf dem Weg zum Beweis der folgenden Aussage. □

Proposition 8.38 ([5, §5.2, Theorem]). *Für $I \subset \Delta$ ist der Orbit O_I ein Faserbündel über $G_{\text{ad}}/P_I \times G_{\text{ad}}/P_I^-$ mit typischer Faser $(L_I)_{\text{ad}}$.*

Für $G = \text{SL}(n)$ impliziert diese Aussage insbesondere Proposition 6.51.

Bemerkung 8.39. Die wundervolle Kompaktifizierung $\overline{G_{\text{ad}}}$ lässt sich auch auf folgende Weise konstruieren: Es seien χ_j , $1 \leq j \leq r$ dominante Charaktere, so dass $\chi := \sum_{j=1}^r \chi_j$ regulär ist. Dann ist der Abschluss der Bildes von

$$f': G \rightarrow \prod_{j=1}^r \mathbb{P}(\text{End}(V(\chi_j))^\vee)$$

isomorph zu $\overline{G_{\text{ad}}}$. In der Tat liefert die Segre-Einbettung die Inklusion

$$s: \prod_{j=1}^r \mathbb{P}(\text{End}(V(\chi_j))^\vee) \rightarrow \mathbb{P}(\text{End}(W)^\vee)$$

mit $W := \bigotimes_{i=1}^r V(\chi_i)$. Nun zerfällt W in eine direkte Summe $W = V(\chi) \oplus W'$, wobei W' die direkte Summe irreduzibler Darstellungen mit kleinerem höchstem Gewicht ist. Die Projektion

$$\mathbb{P}(\text{End}(W)^\vee) \rightarrow \mathbb{P}(\text{End}(V(\chi))^\vee)$$

induziert dann einen Isomorphismus $\overline{\text{im}(s \circ f')} \rightarrow \overline{G_{\text{ad}}}$.

Wenn $V(\chi_j)$ für alle $1 \leq j \leq r$ auch eine Darstellung von G ist, dann erhalten wir eine natürliche Linearisierung der $G \times G$ -Wirkung auf $\overline{G_{\text{ad}}}$ im sehr amplen Geradenbündel

$$\mathcal{O}_{\overline{G_{\text{ad}}}}(\underline{\theta}) := \bigotimes_{j=1}^r \text{Pr}_{\mathbb{P}(\text{End}(V(\chi_j))^\vee)}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\text{End}(V(\chi_j))^\vee)}(\theta_j)$$

für $\underline{\theta} \in \mathbb{N}_{>0}^r$.

Stabilität von Prinzipalbündeln mit Niveaustruktur

Definition 8.40. Es sei σ die Linkswirkung von $G \cong \{e\} \times G$ auf $\overline{G_{\text{ad}}}$. Ein G -Prinzipalbündel mit Niveau-Struktur ist ein Prinzipalbündel P zusammen mit einem Punkt $s \in P \times^\sigma \overline{G_{\text{ad}}}|_{\{x_0\}}$.

Es sei nun $\lambda \in X_*(G)$ eine Einparameteruntergruppe und β eine Reduktion der Strukturgruppe nach $Q_G(\lambda)$. Wir erhalten eine Trivialisierung $f: P \times^\sigma \overline{G_{\text{ad}}}|_{\{x_0\}} \rightarrow \overline{G_{\text{ad}}}$ und somit den Punkt $f(s) \in \overline{G_{\text{ad}}}$. Nach Proposition 8.36 gibt es eine Teilmenge $I \subset \Delta$, so dass g im Orbit O_I liegt. Aufgrund der Beschreibung der Orbits in Proposition 8.38 liegt g in der Faser über einem Element $(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \in G_{\text{ad}}/P_I \times G_{\text{ad}}/P_I^-$. Wir Wählen nun $\underline{n}, \underline{\theta} \in \mathbb{N}_{>0}^F$ wie in Bemerkung 8.39. Mithilfe von Lemma 8.37 berechnet man dann

$$\mu(\lambda, \beta, s) = - \sum_{j=1}^r \theta_j \mu(\lambda, [\text{pr}_{V(\chi_j)^I} \circ g_2^{-1}]), \quad (8.1)$$

wobei $g_2 \in G$ ein Lift von \bar{g}_2 ist. Man prüft, dass dieser Ausdruck unabhängig von der Wahl von g_2 ist.

Da G halbeinfach ist, gibt es keinen nicht-trivialen Charakter $\chi \in X^*(G)$. Insgesamt ergibt sich folgendes Stabilitätskriterium:

Proposition 8.41. *Ein Prinzipalbündel P mit Niveaustruktur f ist genau dann δ -(semi)stabil, wenn für jede Einparameteruntergruppe λ von G und jede Reduktion β nach $Q_G(\lambda)$ gilt:*

$$\deg(\beta^* P \times^{\chi_\lambda} \mathbb{C}) - \delta \sum_{j=1}^r \theta_j \mu(\lambda, [\text{pr}_{V(\chi_j)^I} \circ g_2^{-1}]) (\geq) 0.$$

Spezielle lineare Prinzipalbündel

Wir betrachten zunächst den Fall $G = \text{SL}(r, \mathbb{C})$. Wir verwenden die Notation aus [8, §15]. Ein maximaler Torus ist $T := T_r \cap \text{SL}(r, \mathbb{C})$, eine Borel-Untergruppe $B_r \cap \text{SL}(r, \mathbb{C})$. Wir definieren die Charaktere $L_i \in X^*(T)$, $1 \leq i \leq r$, durch

$$L_i(\text{diag}(z_1, \dots, z_r)) := z_i.$$

Die Wurzeln sind $L_i - L_j$, $i \neq j$, die positiven Wurzeln $L_i - L_j$, $i < j$, und die primitiven Wurzeln $\alpha_i := L_i - L_{i+1}$, $1 \leq i \leq r-1$. Als fundamentale Gewichte hat man $\omega_j := \sum_{i=1}^j L_i$, $1 \leq j \leq r-1$. Eine Teilmenge $I \subset \Delta$ wird also durch eine Partition von

8. Dekorierte Prinzipalbündel

r beschrieben. Die irreduzible Darstellung mit höchstem Gewicht ω_j ist $V(\omega_j) = \bigwedge^j \mathbb{C}^r$, $1 \leq j \leq r-1$. Wir wählen $\chi_j := \omega_j$ in Bemerkung 8.39.

Es sei nun (P, s) ein $\mathrm{SL}(r)$ -Prinzipalbündel mit Niveaustuktur und E das assoziierte Vektorbündel. Die Dekoration s bestimmt eine Partition \underline{r} von r und einen Punkt $\bar{g}_2 \in \beta^* P \times^{\mathrm{SL}(r, \mathbb{C})} \mathrm{SL}(r, \mathbb{C}) / P_I^-$. Dies definiert eine absteigende Fahne W_\bullet von $E|_{\{x_0\}}$ mit $\dim(W_i) = r - r_i$. Weiter sei $\lambda \in X_*(\mathrm{SL}(r, \mathbb{C}))$ und β eine Reduktion der Strukturgruppe nach $Q_G(\lambda)$. Wenn $(F_\bullet, \underline{\alpha})$ die durch λ und β bestimmte gewichtete Fahne von E ist, berechnet man mithilfe von (8.1)

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, \beta, s) &= - \sum_{i=1}^{r-1} \theta_i \sum_{j=1}^{l(F_\bullet)+1} \gamma_j \left(c_i(F_j|_{\{x_0\}}, W_\bullet) - c_i(F_{j-1}|_{\{x_0\}}, W_\bullet) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{l(F_\bullet)} \alpha_k \sum_{i=1}^{r-1} \theta_i \left(r c_i(F_k|_{\{x_0\}}, W_\bullet) - \mathrm{rk}(F_k) i \right). \end{aligned}$$

Hierbei ist $c_i(V, W_\bullet)$ die in (6.14) definierte Funktion. Da dieser Ausdruck linear in $\underline{\alpha}$ ist und $\deg(E) = 0$ gilt, erhalten wir das folgende Kriterium.

Proposition 8.42. *Ein $\mathrm{SL}(r, \mathbb{C})$ -Prinzipalbündel P mit Niveaustuktur ist genau dann δ -(semi)stabil, falls*

$$\deg(F)r (\leq) \delta \sum_{i=1}^{r-1} \theta_i \left(c_i(F|_{\{x_0\}}, W_\bullet)r - i \mathrm{rk}(F) \right)$$

für jedes echte Unterbündel F des assoziierten Vektorbündels E gilt.

Bemerkung 8.43. Wenn man $\deg(E) = 0$ berücksichtigt, erhält man dieses Kriterium auch aus Proposition 6.53.

Die ungerade orthogonale Strukturgruppe

Wir betrachten die Gruppe $G = \mathrm{SO}(m, \mathbb{C})$ mit $m = 2r + 1$. Es sei V ein m -dimensionaler Vektorraum und $J: V \rightarrow V^\vee$ ein Isomorphismus mit $J^\vee = J$. Man findet dann eine Basis $x_1, \dots, x_r, z, y_r, \dots, y_1$, so dass J die Matrixdarstellung

$$M_m := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times m}$$

hat. Wir wählen als maximalen Torus die Untergruppe der Diagonalmatrizen $T := T_m \cap \mathrm{SO}(m)$ und als Borel-Untergruppe die Menge der oberen Dreiecksmatrizen $B_m \cap \mathrm{SO}(m)$.

Wir definieren die Charaktere $L_i \in X^*(T)$, $1 \leq i \leq r$ durch

$$L_i(\mathrm{diag}(z_1, \dots, z_r, 1, z_r^{-1}, \dots, z_1^{-1})) := z_i.$$

Nach [8, §18] haben wir die Wurzeln $\pm L_i \pm L_j$, $1 \leq i < j \leq r$, und $\pm L_i$, $1 \leq i \leq r$, die positiven Wurzeln $L_i \pm L_j$, $1 \leq i < j \leq r$, und L_i , $1 \leq i \leq r$ sowie die einfachen Wurzeln $\alpha_i := L_i - L_{i+1}$, $1 \leq i \leq r-1$, und $\alpha_r := L_r$. Ein Orbit in $\overline{\mathrm{PSO}}(m)$ wird

durch eine Partition $1 \leq r_1 < \dots < r_k < m - r_k$ beschrieben. Die entsprechenden fundamentalen Gewichte sind $\omega_j := \sum_{i=1}^j L_i$, $1 \leq j \leq r - 1$ und $\omega_r := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r L_i$. Wir wählen nun $\chi_j := \omega_j$, $1 \leq j \leq r - 1$ und $\chi_r = 2\omega_r$. Die irreduziblen Darstellungen sind dann $V(\chi_j) = \wedge^j V$, $1 \leq j \leq r$.

Wenn (P, s) ein $\mathrm{SO}(m)$ -Prinzipalbündel mit Niveaustuktur ist, dann besitzt das assoziierte Vektorbündel einen Isomorphismus $J: E \rightarrow E^\vee$ mit $J^\vee = J$. Die Dekoration s bestimmt eine Teilmenge $I \subset \Delta$ und einen Punkt $(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \in P \times^{\mathrm{SO}(m)} (\mathrm{PSO}(m)/P_I^+ \times \mathrm{PSO}(m)/P_I^-)_{|\{x_0\}}$. Dies entspricht einer Folge $r_1 < \dots, r_k < m - r_k$, einer aufsteigenden isotropen Fahne W_\bullet' von $E_{|\{x_0\}}$ mit $\dim(W_j') = r_j$ und einer absteigenden Fahne W_\bullet von $E_{|\{x_0\}}$ mit $\dim(W_i) = m - r_i$, $1 \leq i \leq l(W_\bullet)$, so dass W_\bullet^\perp isotrop ist. Eine Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(\mathrm{SO}(2r))$ mit einer Reduktion β nach $Q_G(\lambda)$ bestimmt eine aufsteigende isotrope Fahne F_\bullet von E und Gewichte $\gamma_1 < \dots < \gamma_{l(F_\bullet)} < 0$. Wir berechnen

$$\mu(\lambda, \beta, s) = 2r \sum_{k=1}^{l(F_\bullet)} \alpha_k \sum_{i=1}^r \theta_i c'_i(F_{k|\{x_0\}}, W_\bullet)$$

mit $\alpha_k := (\gamma_{k+1} - \gamma_k)/2r$, $k = 1, \dots, l(F_\bullet)$ und

$$c'_i(U, W_\bullet) := c_i(U, W_\bullet) + c_i(U^\perp, W_\bullet) - i.$$

Da weiter $\deg(E) = 0$ für das assoziierte Vektorbündel E gilt, finden wir

$$\deg(P \times^{\chi_\lambda} \mathbb{C}) = -2r \sum_{k=1}^{l(F_\bullet)} \alpha_k \left(\deg(F_k) + \deg(F_k^\perp) \right).$$

Mit $\deg(F^\perp) = \deg(F)$ erhält man schließlich die folgende Stabilitätsbedingung:

Proposition 8.44. *Ein $\mathrm{SO}(2r + 1)$ -Prinzipalbündel P mit Niveaustuktur ist genau dann δ -(semi)stabil, falls für jedes isotrope Unterbündel $F \subset E$*

$$2 \deg(F) (\leq) \delta \sum_{i=1}^r \theta_i c'_i(F_{|\{x_0\}}, W_\bullet)$$

gilt.

Symplektische Prinzipalbündel

Wir untersuchen nun den Fall $G = \mathrm{Sp}(2r, \mathbb{C})$. Es sei V ein $2r$ -dimensionaler Vektorraum und $J: V \rightarrow V^\vee$ ein Isomorphismus mit $J^\vee = -J$. Es existiert dann eine Basis von V , bezüglich der J die Matrixdarstellung

$$J = \begin{pmatrix} 0 & M_r \\ -M_r & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt. Wir wählen als maximalen Torus die Menge der Diagonalmatrizen $T := T_{2r} \cap \mathrm{Sp}(2r)$ und als Borel-Untergruppe die Menge der oberen Dreiecksmatrizen $B_{2r} \cap \mathrm{Sp}(2r)$. Weiter definieren wir die Charaktere $L_i \in X^*(T)$, $1 \leq i \leq r$ durch

$$L_i(\mathrm{diag}(z_1, \dots, z_r, z_r^{-1}, \dots, z_1^{-1})) := z_i.$$

8. Dekorierte Prinzipalbündel

Nach [8, §17] hat $\mathrm{Sp}(2r)$ die Wurzeln $\pm L_i \pm L_j$, $1 \leq i \leq j \leq r$, und die positiven Wurzeln $L_i + L_j$, $i \leq j$ und $L_i - L_j$, $i < j$. Die einfachen Wurzeln sind $\alpha_i := L_i - L_{i+1}$, $1 \leq i \leq r-1$ und $2L_r$, die entsprechenden fundamentalen Gewichte sind $\omega_j := \sum_{i=1}^j L_i$, $1 \leq j \leq r$. Als irreduzible Darstellungen mit höchstem Gewicht ω_i findet man $V(\omega_1) = V$ und $\ker(\varphi_i)$ für $2 \leq i \leq r$. Hierbei bezeichnet $\varphi_i: \Lambda^i V \rightarrow \Lambda^{i-2} V$ die Kontraktion mit J . Auch hier wird eine Teilmenge $I \subset \Delta$ durch eine Folge $1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq r - r_k$ beschrieben.

Es sei (P, s) ein $\mathrm{Sp}(2r)$ -Prinzipalbündel mit Niveaustuktur. Das assoziierte Vektorbündel E besitzt dann einen Isomorphismus $J: E \rightarrow E^\vee$ mit $J^\vee = -J$. Die Dekoration s bestimmt eine Folge $1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq r$ und einen Punkt in $g_2 \in P \times^{\mathrm{Sp}(2r)} \mathrm{PSP}(2r)/P_r^-$. Dies entspricht einer absteigenden Fahne W_\bullet von $E|_{\{x_0\}}$ mit $\dim(W_j) = 2r - r_j$, so dass W_\bullet^\perp isotrop ist.

Eine Einparameteruntergruppe $\lambda \in X_*(\mathrm{Sp}(2r))$ mit einer Reduktion β nach $Q_G(\lambda)$ bestimmt eine aufsteigende isotrope Fahne F_\bullet von E und Gewichte $\gamma_1 < \dots < \gamma_l(F_\bullet) < 0$.

Proposition 8.45. *Ein symplektisches Prinzipalbündel P mit Niveaustuktur ist genau dann δ -(semi)stabil, falls für jedes isotrope Unterbündel $F \subset E$ gilt*

$$2 \deg(F) (\leq) \delta \sum_{i=1}^{r_k} \theta_i c'_i(F|_{\{x_0\}}, W_\bullet) + \delta \sum_{i=r_k+1}^r \theta_r \max\{c'_i(F|_{\{x_0\}}, \tilde{W}_\bullet) \mid \tilde{W}_\bullet \in D(W_\bullet)\}.$$

Hierbei bezeichnet $D(W_\bullet)$ die Menge der Fahnen $W_1 \supset \dots \supset W_k \supseteq W$, so dass W maximal isotrop ist.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Fall für $\mathrm{SO}(2r+1)$. Man muss jedoch die Fahne W_\bullet immer durch einen maximalen isotropen Unterraum ergänzen, um den durch W_\bullet bestimmten Endomorphismus von $\Lambda^i V$ auf $\ker(\varphi_i)$ einzuschränken. \square

Die gerade orthogonale Gruppe

Wir kommen nun zum Fall $m = 2r$. Es existiert eine Basis $x_1, \dots, x_r, y_r, \dots, y_1$, so dass J die Matrixdarstellung M_{2r} hat. Der $\mathrm{SO}(2r)$ -invariante Isomorphismus $\Lambda^{2r} V \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_r \mapsto 1$$

fixiert eine nicht-ausgeartete Bilinearform $\wedge: \Lambda^r V \times \Lambda^r V \rightarrow \mathbb{C}$ und somit einen Isomorphismus $\varphi: \Lambda^r V \rightarrow \Lambda^r V^\vee$. Der dadurch induzierte Automorphismus $\tau := \varphi^{-1} \circ \wedge^r J$ von $\Lambda^r V$ erfüllt $\tau^2 = \mathrm{id}$, so dass die Darstellung $\Lambda^r V$ in Eigenräume $\Lambda^r V^+$ und $\Lambda^r V^-$ mit den Eigenwerten 1 bzw. -1 zerfällt. Das Bild eines maximalen isotropen Unterraums $U \subset V$ unter der Plücker-Einbettung $P: \mathrm{Gr}(V, r) \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^r V^\vee)$ liegt in der Projektivierung eines solchen Eigenraums.

Definition 8.46. Ein maximaler isotroper Unterraum U heißt *selbstdual* oder vom Typ $+1$, falls $P(U)$ in $\mathbb{P}(\Lambda^r V^{+\vee})$ liegt, und *anti-selbstdual* oder vom Typ -1 , falls $P(U)$ in $\mathbb{P}(\Lambda^r V^{-\vee})$ liegt.

Bemerkung 8.47. Wenn U ein selbstdualer Unterraum ist, dann ist jedes isotrope Komplement vom Typ $(-1)^r$.

Wir wählen als Borel-Untergruppe die Menge der oberen Dreiecksmatrizen und als maximalen Torus die Menge der Diagonalmatrizen in G . Weiter definieren wir die Charaktere

$$L_i(z_1, \dots, z_r, z_r^{-1}, \dots, z_1^{-1}) := z_i, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Die Wurzeln von $\mathrm{SO}(2r)$ sind nach [8, §19] gegeben durch $\pm L_i \pm L_j$, $1 \leq i < j \leq r$, die positiven Wurzeln sind $L_i \pm L_j$, $1 \leq i < j \leq r$ und die einfachen Wurzeln sind $\alpha_i := L_i - L_{i+1}$, $1 \leq i \leq r-1$ und $\alpha_r := L_{r-1} + L_r$. Ein Orbit in $\overline{\mathrm{PSO}}(m)$ wird daher durch eine Partition $1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq r - r_k$ beschrieben. Die fundamentalen Gewichte sind $\omega_j := \sum_{i=1}^j L_i$ für $1 \leq j \leq r-2$ und $\omega_{\pm} := \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{r-1} L_i \pm L_r \right)$. Um Darstellungen von $\mathrm{SO}(2r)$ zu erhalten, wählen wir $\chi_j := \omega_j$ für $1 \leq j \leq r-2$ und $\chi_{\pm} := 2\omega_{\pm}$. Die entsprechenden irreduziblen Darstellungen sind $V(\chi_j) = \Lambda^j V$, $1 \leq j \leq r-2$, und $V(\chi_{\pm}) = \Lambda^r V^{\pm}$.

Ein $\mathrm{SO}(2r)$ -Prinzipalbündel P entspricht einem Vektorbündel E zusammen mit einem Isomorphismus $J: E \rightarrow E^{\vee}$ mit $J^{\vee} = J$ und einem weiteren Isomorphismus $\varphi: \Lambda^r E \rightarrow \Lambda^r E^{\vee}$. Eine Dekoration s bestimmt eine Teilmenge $I \subset \Delta$ und ein Element $(\bar{g}_1, \bar{g}_2) \in \mathrm{PSO}(2r)/P_I \times \mathrm{PSO}(2r)/P_I^{-}$. Dies entspricht einer Folge $r_1 < \dots < r_k \leq r-2$, einer Teilmenge $I' \subset \{-1, 1\}$, einer aufsteigenden isotropen Fahne W'_{\bullet} mit $\dim(W'_j) = r_j$, einer absteigenden Fahne W_{\bullet} von $E|_{\{x_0\}}$ mit $\dim(W_j) = 2r - r_j$, so dass W_{\bullet}^{\perp} isotrop ist, falls $1 \in I'$ gilt, einem isotropen selbst-dualen Unterraum $W'^+ \supset W'_k$ und einem maximalen isotropen Unterraum $W^+ \subset W_k$ vom Typ $(-1)^r$, und falls $-1 \in I'$ gilt, einem isotropen anti-selbst-dualen Unterraum $W'^- \supset W'_k$ und einem isotropen Unterraum $W^- \subset W_k$ vom Typ $(-1)^{r+1}$. Wir verlängern die Fahne W_{\bullet} durch

$$W_{k+1} := \begin{cases} W_k^{\perp}, & I' = \emptyset, \\ W^+, & I' = \{+1\} \\ W^-, & I' = \{-1\} \\ (W^- \cap W^+)^{\perp}, & I' = \{-1, 1\}. \end{cases}$$

Es sei $D^{\pm}(W_{\bullet})$ die Menge der Fahnen $W_1 \supset \dots \supset W_{j-(r)} \supset W$ mit den folgenden Eigenschaften:

- W ist maximal isotrop vom Typ $\pm(-1)^r$,
- $\dim(W \cap W^{\mp}) = r-1$, falls $\mp 1 \in I'$ gilt,
- $W = W^{\pm}$, falls $\pm 1 \in I'$.

Proposition 8.48. *Ein $\mathrm{SO}(2r)$ -Prinzipalbündel P mit Niveaustuktur ist genau dann δ -(semi)stabil, falls für jedes isotrope Unterbündel $F \subset E$ gilt*

$$2 \deg(F) (\leq) \delta \sum_{i=1}^{r-2} \theta_i c'_i(F|_{\{x_0\}}, W_{\bullet}) \\ + \delta \theta_- M^-(F|_{\{x_0\}}, W_{\bullet}) + \delta \theta_+ M^+(F|_{\{x_0\}}, W_{\bullet})$$

8. Dekorierete Prinzipalbüudel

mit

$$M^\pm(U, W_\bullet) := \max \left\{ c'_r(U, \tilde{W}_\bullet) \mid \tilde{W}_\bullet \in D^\pm(W_\bullet) \right\}.$$

Bemerkung 8.49. Wie im Fall der Vektorbüudel ist zu erwarten, dass sich die Prinzipalbüudel mit Niveaustruktur verwenden lassen, um den Stack der G -Shtukas zu kompaktifizieren (vgl. Bemerkung 6.56). Resultate in dieser Richtung wurden von Ngô Dac angekündigt, sind aber bislang nicht veröffentlicht.

A. Abstiegstheorie

Dieser Anhang stellt die Aussagen der Abstiegstheorie zur Verfügung, die zur Definition der algebraischen Prinzipalbündel benötigt werden. Die Darstellung orientiert sich an Vistoli [52].

A.1. Topologien auf Kategorien

A.1.1. Grothendieck-Topologien

Eine Grothendieck-Topologie [1] ist eine Verallgemeinerung einer Topologie in dem Sinne, dass sie festlegt, welche Familien von Morphismen die Rolle einer offenen Überdeckung spielen.

Es sei \mathcal{C} eine Kategorie und X ein Objekt in \mathcal{C} . Ein *Sieb auf X* ist ein Unterfunktor S von $h_X = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X)$. Für einen Morphismus $f: Y \rightarrow X$ definieren wir den Rückzug f^*S dadurch, dass ein Morphismus $\varphi: T \rightarrow Y$ genau dann in $f^*S(T)$ liegt, wenn $f \circ \varphi$ in $S(T)$ enthalten ist. Offensichtlich ist f^*S ein Sieb auf Y , und es gilt $\text{id}^*S = S$ und $g^*f^*S = (f \circ g)^*S$, d.h. der Rückzug ist funktoriell.

Definition A.1. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Eine *Grothendieck-Topologie \mathcal{T} auf \mathcal{C}* ordnet jedem Objekt X in \mathcal{C} eine Familie von Sieben $\mathcal{T}(X)$, genannt *Überdeckungssiebe*, zu. Dabei müssen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

- (i) Ist S ein Überdeckungssieb von X und $f: Y \rightarrow X$ ein Morphismus, so ist f^*S ein Überdeckungssieb von Y .
- (ii) Ist S ein Überdeckungssieb von X und T ein Sieb auf X , so dass für alle Objekte Y und alle Morphismen $f: Y \rightarrow X$ in $S(Y)$ der Rückzug f^*T ein Überdeckungssieb von Y ist, so ist T ein Überdeckungssieb von X .
- (iii) $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X)$ ist ein Überdeckungssieb von X .

Ein Paar $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ bestehend aus einer Kategorie \mathcal{C} und einer Topologie \mathcal{T} heißt *Situs*.

Oftmals genügt es, mit einer Grothendieck-Prätologie zu arbeiten anstatt mit einer Topologie.

Definition A.2. Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Eine *Grothendieck Prätologie \mathcal{T} auf \mathcal{C}* ordnet jedem Objekt X in \mathcal{C} eine Klasse von Familien von Morphismen $\{f_i: U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ zu, genannt *Überdeckungen von X* , die die folgenden Eigenschaften erfüllen

- (i) Ist $\mathcal{U} = \{U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ eine Überdeckung von X und $f: X' \rightarrow X$ ein Morphismus, dann existieren die Faserprodukte $U_i \times_X X'$ und die Familie $f^*\mathcal{U} := \{U_i \times_X X' \rightarrow X' \mid i \in I\}$ ist eine Überdeckung von X' .

A. Abstiegstheorie

(ii) Ist $\{U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ eine Überdeckung von X , und sind $\{V_{ij} \rightarrow U_i \mid j \in J_i\}$ Überdeckungen von U_i , $i \in I$, so ist die Familie der Kompositionen $\{V_{ij} \rightarrow U_i \rightarrow X \mid i \in I, j \in J_i\}$ eine Überdeckung von X .

(iii) Ist $f: Y \rightarrow X$ ein Isomorphismus, dann ist $\{f\}$ eine Überdeckung von X .

Einer gegebenen Überdeckung $\mathcal{U} = \{f_i: U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ ordnen wir das *von \mathcal{U} erzeugte* Sieb $h_{\mathcal{U}}$ zu. Dabei liegt ein Morphismus $\varphi: T \rightarrow X$ genau dann in $h_{\mathcal{U}}(T)$, wenn es ein $i \in I$ und einen Morphismus $g: T \rightarrow U_i$ gibt, so dass $\varphi = f_i \circ g$ gilt. Man sieht leicht, dass $f^*h_{\mathcal{U}} = h_{f^*\mathcal{U}}$ gilt.

Ausgehend von einer Prätopologie erhält man eine Topologie, indem man einem Objekt X alle Siebe zuordnet, die ein von einer Überdeckung von X erzeugtes Sieb enthalten. Wenn die Kategorie \mathcal{C} Faserprodukte besitzt, kann man umgekehrt aus einer Topologie eine Prätopologie erzeugen, indem man einem Objekt X alle Familien $\mathcal{U} = \{U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ zuordnet, so dass $h_{\mathcal{U}}$ ein Überdeckungssieb von X ist.

Im Folgenden werden wir nicht zwischen einer Grothendieck-Topologie und einer Grothendieck-Prätopologie unterscheiden und bezeichnen auch eine Kategorie mit einer Prätopologie als Situs. Ebenso werden wir in der Notation keinen Unterschied zwischen einem Situs und der zugrunde liegenden Kategorie machen.

Sind $\{f_i: U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ und $\{g_j: V_j \rightarrow X \mid j \in J\}$ zwei Überdeckungen, und gibt es zu jedem $j \in J$ ein $\nu(j) \in I$ und einen Morphismus $h_j: V_j \rightarrow U_{\nu(j)}$, so dass $g_j = f_{\nu(j)} \circ h_j$ gilt, so nennt man $\{V_j \rightarrow X \mid j \in J\}$ eine *Verfeinerung* von $\{U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$. Sind $\{Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ und $\{Z_j \rightarrow X \mid j \in J\}$ zwei Überdeckungen von X , so folgt aus (i), dass $\{Y_i \times_X Z_j \rightarrow Z_j \mid i \in I\}$ eine Überdeckung von Z_j für alle $j \in J$ ist. Aus (ii) folgt nun weiter, dass $\{Y_i \times_X Z_j \rightarrow X \mid (i, j) \in I \times J\}$ eine Überdeckung von X ist. Zu zwei Überdeckungen gibt es also immer eine gemeinsame Verfeinerung.

Sind \mathcal{T} und \mathcal{T}' zwei Topologien auf \mathcal{C} , so heißt \mathcal{T}' *feiner* als \mathcal{T} , wenn jede Überdeckung in \mathcal{T} auch eine Überdeckung in \mathcal{T}' ist.

Beispiel A.3. (i) Sei X ein topologischer Raum. Wir betrachten die Kategorie $\text{Op}(X)$, in der die Objekte die offenen Teilmengen von X und die Morphismen die Inklusionen sind. Eine Grothendieck-Topologie auf $\text{Op}(X)$ erhält man, indem man als Überdeckungen einer offenen Teilmenge U die Familien $\{V_i \rightarrow U \mid i \in I\}$ mit $\cup_i V_i = U$ nimmt.

(ii) Sei Top die Kategorie der topologischen Räume und X ein topologischer Raum. Eine Familie von Morphismen $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ ist eine Überdeckung, wenn die Morphismen offene Einbettungen sind, und die Familie surjektiv ist, d.h. $\cup_i f_i(Y_i) = X$. Man prüft leicht, dass dies eine Grothendieck-Topologie definiert.

(iii) Auf Set erhält man eine Topologie, indem man als Überdeckungen einer Menge X die surjektiven Familien von Abbildungen $\{f_i: U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ nimmt, d.h. die Familien mit $\cup_{i \in I} U_i = X$.

(iv) Sei \mathcal{C} eine Kategorie mit einer Topologie \mathcal{T} und X ein Objekt in \mathcal{C} . Man erhält eine Topologie auf \mathcal{C}/X , indem man die Familien $\{U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$ von Morphismen über X als Überdeckung von $U \rightarrow X$ definiert, die auch in \mathcal{T} eine Überdeckung von U sind.

(v) Es sei \mathcal{C} ein Situs mit Produkten. Wir bezeichnen mit $\text{Mor}(\mathcal{C})$ die Kategorie der Morphismen von \mathcal{C} . Ein Morphismus in $\text{Mor}(\mathcal{C})$ von $x: X_1 \rightarrow X_2$ zu $y: Y_1 \rightarrow Y_2$ ist ein Tupel $(f_1: X_1 \rightarrow Y_1, f_2: X_2 \rightarrow Y_2)$ von Morphismen in \mathcal{C} mit $f_2 \circ x = y \circ f_1$, also ein kommutierendes Quadrat. Eine Überdeckung eines Objekts $x: X_1 \rightarrow X_2$ ist eine Menge

$\{(f_{1,i}, f_{2,i}): y_i \rightarrow x \mid i \in I\}$, so dass $\{f_{1,i}: Y_{1,i} \rightarrow X_1 \mid i \in I\}$ und $\{f_{2,i}: Y_{2,i} \rightarrow X_2 \mid i \in I\}$ Überdeckungen von X_1 und X_2 sind. Falls $\{f_i: Y_i \rightarrow X_2 \mid i \in I\}$ eine Überdeckung von X_2 in \mathcal{C} ist, ist insbesondere die Menge der kartesischen Quadrate

$$\begin{array}{ccc} Y_i \times_{X_2} X_1 & \longrightarrow & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow x \\ Y_i & \xrightarrow{f_i} & X_2 \end{array}$$

eine Überdeckung von x .

Definition A.4. Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwischen zwei Situs ist *stetig*, wenn er Überdeckungen erhält, d.h. wenn für jede Überdeckung $\{h_i: U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ eines Objekts X in \mathcal{C} die Menge $\{F(h_i): F(U_i) \rightarrow F(X)\}$ eine Überdeckung von $F(X)$ in \mathcal{D} ist.

Beispiel A.5. (i) Der Funktor $p: \mathcal{C}/X \rightarrow \mathcal{C}$, der einen Morphismus auf seinen Ursprung abbildet, ist offensichtlich stetig.

(ii) Die Funktoren $\text{pr}_1: \underline{\text{Mor}}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ und $\text{pr}_2: \underline{\text{Mor}}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, die jeden Morphismus auf seinen Ursprung bzw. sein Ziel abbilden und jedes Paar von Morphismen auf seine erste bzw. zweite Komponente, sind nach Konstruktion der Topologie auf $\underline{\text{Mor}}(\mathcal{C})$ stetig.

A.1.2. Topologien auf der Kategorie der Schemata

Wir erinnern zunächst an einige Definitionen:

Definition A.6. Ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ von Schemata heißt *lokal endlich präsentierbar*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine affine Umgebung U von x und eine affine Umgebung $V \supset f(U)$ gibt, so dass $\mathcal{O}_X(U)$ endlich präsentierbar über $\mathcal{O}_Y(V)$ ist.

Nach [13, 1.4.3] bleibt diese Eigenschaft unter Komposition und Basiswechsel erhalten. Wenn Y noethersch ist, dann ist f genau dann endlich präsentierbar, wenn f von endlichem Typ ist.

Definition A.7. Ein R -Modul M heißt *flach* bzw. *treu*, wenn der Funktor $- \otimes_R M$ exakt bzw. *treu* ist.

Ein Ringhomomorphismus $\varphi: A \rightarrow B$ ist *treuflach*, wenn B als A -Modul treuflach ist.

Lemma A.8. Sei R ein Ring und M ein R -Modul. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) M ist treuflach.
- (ii) M ist flach und für jeden R -Modul N mit $N \otimes_R M = 0$ gilt $N = 0$.
- (iii) Ein Komplex C_\bullet von R -Moduln ist genau dann exakt, wenn $C_\bullet \otimes_R M$ exakt ist.

Beweis. „(i) \Rightarrow (ii)“: Es sei N ein R -Modul mit $N \otimes_R M = 0$. Dann haben die Homomorphismen id_N und $0: N \rightarrow N$ das gleiche Bild $\text{id}_N \otimes \text{id}_M = 0$. Da M treu ist, gilt $\text{id}_N = 0$ und somit $N = 0$.

A. Abstiegstheorie

„(ii) \Rightarrow (iii)“: Wenn C_\bullet exakt ist, folgt die Exaktheit von $C_\bullet \otimes_R M$ aus der Flachheit von M . Es sei nun C_\bullet ein Komplex, so dass $C_\bullet \otimes_R M$ exakt ist. Wir betrachten die kurze Sequenz

$$0 \rightarrow \operatorname{im}(f_{i-1}) \rightarrow \ker(f_i) \rightarrow \ker(f_i)/\operatorname{im}(f_{i-1}) \rightarrow 0.$$

Nun gilt $\operatorname{im}(f_{i-1}) \otimes_R M = \operatorname{im}(f_{i-1} \otimes \operatorname{id}_M)$ und, da M flach ist, $\ker(f_i) \otimes_R M = \ker(f_i \otimes \operatorname{id}_M)$. Die Exaktheit von $C_\bullet \otimes_R M$ in C_i ist also äquivalent zu $\ker(f_i)/\operatorname{im}(f_{i-1}) \otimes_R M = 0$. Nach Voraussetzung bedeutet dies $\ker(f_i)/\operatorname{im}(f_{i-1}) = 0$.

„(iii) \Rightarrow (i)“: Die Flachheit von M ist klar. Es sei nun $f: N \rightarrow L$ ein Homomorphismus mit $f \otimes \operatorname{id}_M = 0$. Dann wird die Sequenz

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\operatorname{id}_N} N \xrightarrow{f} L$$

durch Tensorieren mit M exakt. Nach Voraussetzung ist die Sequenz selbst exakt. Daraus folgt $f = 0$. \square

Proposition A.9. *Sei $\varphi: A \rightarrow B$ ein flacher Ringhomomorphismus. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) $\varphi: A \rightarrow B$ ist treuflach.
- (ii) $\operatorname{Spec}(\varphi): \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$ ist surjektiv.
- (iii) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ gilt $B\varphi(\mathfrak{m}) \neq B$.

Beweis. „(i) \Rightarrow (ii)“: Sei p ein Punkt in $\operatorname{Spec}(A)$. Da der Restklassenkörper $k(p) = A_p/A_p p$ nicht Null ist, folgt aus Lemma A.8 (ii), dass auch $k(p) \otimes_A B$ nicht Null ist. Nun gilt $k(p) \otimes_A B = B_{\varphi(A \setminus p)} / B_{\varphi(A \setminus p)} \varphi(p)$. Die Primideale in diesem Ring sind gerade die Primideale Q in B mit $\varphi^{-1}(Q) = p$. Es gibt daher ein $Q \in \operatorname{Spec}(B)$ mit $\operatorname{Spec}(\varphi)(Q) = p$.

„(ii) \Rightarrow (iii)“: Sei \mathfrak{m} ein maximales Ideal in A . Nach Voraussetzung gibt es ein Primideal $Q \subset B$ mit $\varphi^{-1}(Q) = \mathfrak{m}$. Daraus folgt $B\varphi(\mathfrak{m}) \subset Q$.

„(iii) \Rightarrow (i)“: Wir prüfen Eigenschaft (ii) aus Lemma A.8: Sei $N \neq 0$ und $x \in N \setminus \{0\}$. Da φ flach ist, gilt $(Ax) \otimes_A B \subset N \otimes_A B$. Nun ist $Ax \cong A/\operatorname{ann}(x)$ und $\operatorname{ann}(x)$ ist in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ enthalten. Somit gibt es eine Surjektion $A/\operatorname{ann}(x) \otimes_A B = B/B\varphi(\operatorname{ann}(x)) \rightarrow B/B\varphi(\mathfrak{m})$. Da nach Voraussetzung $B/B\varphi(\mathfrak{m})$ nicht Null ist, kann auch $Ax \otimes_A B$ und damit $N \otimes_A B$ nicht Null sein. \square

Definition A.10. Ein Morphismus von Schemata $f: X \rightarrow Y$ ist *flach*, wenn für jeden Punkt $x \in X$ der Modul $\mathcal{O}_{X,x}$ flach über $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ ist. Ein Morphismus ist *treuflach*, wenn er flach und surjektiv ist.

Nach [14, 2.1.4, 2.1.6] ist diese Eigenschaft stabil unter Komposition und Basiswechsel.

Lemma A.11. *Ein flacher lokal endlich präsentierbarer Morphismus ist universell offen.*

Beweis. Siehe [14, Proposition 2.4.6]. \square

Definition A.12. Ein Morphismus ist $f: X \rightarrow Y$ *étale*, wenn er flach und unverzweigt ist.

Nach [16, 17.3.3] ist auch diese Eigenschaft stabil unter Komposition und Basiswechsel.

Definition A.13. Sei X ein Schema. Eine surjektive Familie $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ von Morphismen heißt

- (i) *fppf-Überdeckung*, wenn die Morphismen flach und lokal endlich präsentierbar sind,
- (ii) *étale Überdeckung*, wenn die Morphismen étale sind,
- (iii) *étale endliche Überdeckung*, wenn die Morphismen étale und endlich über ihrem Bild sind,
- (iv) *Zariski-Überdeckung*, wenn die Morphismen offene Einbettungen sind.

Proposition A.14. *Diese Überdeckungen definieren Grothendieck-Topologien auf $\underline{\text{Sch}}$.*

Beweis. Dies folgt daraus, dass alle geforderten Eigenschaften stabil unter Basiswechsel und Komposition sind. \square

Bemerkung A.15. Offensichtlich ist die fppf-Topologie feiner als die étale, die étale Topologie feiner als die étale endliche und die étale endliche Topologie feiner als die Zariski-Topologie.

A.2. Garben auf einem Situs

Wir erinnern zunächst an den Begriff eines darstellbaren Funktors.

Definition A.16. Es sei $F: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Sets}}$ ein Funktor, X ein Objekt in \mathcal{C} und $\Psi: F \rightarrow h_X := \text{Hom}(-, X)$ eine natürliche Transformation. Man sagt, dass X den Funktor F

- (i) *darstellt*, falls Ψ für jedes Objekt Y einen Isomorphismus zwischen $\text{Mor}(h_Y, F)$ und $\text{Mor}(Y, X)$ induziert,
- (ii) *kodarstellt*, falls Ψ für jedes Objekt Y einen Isomorphismus zwischen $\text{Mor}(F, h_Y)$ und $\text{Mor}(X, Y)$ induziert,
- (iii) *universell kodarstellt*, falls für jeden Morphismus $T \rightarrow X$ das Objekt T den Funktor $F \times_{h_X} h_T$ kodarstellt.

Bemerkung A.17. (i) Ein Objekt X stellt den Funktor genau dann dar, wenn $\Psi: F \rightarrow h_X$ ein Isomorphismus ist.

(ii) Ein Objekt X ist genau dann eine Kodarstellung von F , wenn es zu jeder natürlichen Transformation $\Psi': F \rightarrow h_Y$ einen eindeutigen Morphismus $f: X \rightarrow Y$ mit $h_f \circ \Psi = \Psi'$ gibt.

Definition A.18. Eine Kategorie \mathcal{C} heißt *klein*, wenn die Klasse der Objekte eine Menge ist.

Im Folgenden sei \mathcal{C} ein kleiner Situs.

Definition A.19. Eine *Prägarbe* \mathcal{F} auf \mathcal{C} ist ein kontravarianter Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Sets}}$. Ein Morphismus von Prägarben ist eine natürliche Transformation von Funktoren. Damit bilden die Prägarben auf \mathcal{C} eine Kategorie $\underline{\text{Presh}}(\mathcal{C})$.

Bemerkung A.20. Die Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Sets}}$ bilden im allgemeinen nur eine *Quasi-Kategorie*, d.h. die Objekte und Morphismen formen Konglomerate und keine Klassen. Wenn \mathcal{C} klein ist, dann ist $\underline{\text{Presh}}(\mathcal{C})$ jedoch isomorph zu einer Kategorie.

Definition A.21. Eine Prägarbe \mathcal{F} auf \mathcal{C} ist eine *Garbe*, wenn für alle Objekte X in \mathcal{C} und alle Überdeckungen $\{Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ von X die folgende Sequenz exakt ist

$$\mathcal{F}(X) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(Y_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(Y_i \times_X Y_j). \quad (\text{A.1})$$

Wenn nur die Injektivität erfüllt ist, so nennen wir \mathcal{F} *separiert*. Ein Morphismus von Garben ist ein Morphismus der Prägarben. Die dadurch definierte Kategorie bezeichnen wir mit $\underline{\text{Sh}}(\mathcal{C})$.

Die Bedingung lässt sich mit Überdeckungssieben formulieren.

Proposition A.22 ([52, Prop. 2.42]). *Eine Prägarbe \mathcal{F} auf \mathcal{C} ist genau dann ein Garbe, wenn für alle X aus \mathcal{C} und alle Überdeckungssiebe S auf X die Abbildung $\text{Mor}(h_X, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Mor}(S, \mathcal{F})$ ein Isomorphismus ist.*

Die *kanonische Topologie* auf einer Kategorie ist die feinste Topologie, in der jede darstellbare Prägarbe eine Garbe ist. Ein Topologie heißt *subkanonisch*, wenn sie gröber als die kanonische Topologie ist, d.h. wenn jede darstellbare Prägarbe eine Garbe ist.

Bemerkung A.23. Um Garben auf der Kategorie $\underline{\text{Sch}}$ der Schemata betrachten zu können, muss man sich auf eine Menge von Schemata einschränken. Diese können in eine kleine Kategorie eingebettet werden, die Produkte und Vereinigungen enthält. Die andere Möglichkeit besteht darin, Grothendieck-Universen zu verwenden (siehe [1]).

Lemma A.24 (vgl. [52, Prop. 2.54]). *Jeder darstellbare Funktor auf $\underline{\text{Sch}}$ ist eine Garbe in der Zariski-Topologie.*

Beweis. Dies sagt lediglich aus, dass ein Morphismus $f: Y \rightarrow X$ eindeutig durch seine Einschränkungen $f_{U_i}: U_i \rightarrow X$ für eine offene Überdeckung $\{U_i \rightarrow Y \mid i \in I\}$ bestimmt ist, und dass sich kompatible Morphismen $f_i: U_i \rightarrow X$, $i \in I$, zu einem Morphismus $Y \rightarrow X$ verkleben lassen. \square

Proposition A.25 ([52, Lemma 2.60]). *Eine Garbe \mathcal{F} auf $\underline{\text{Sch}}$ in der Zariski-Topologie ist genau dann eine Garbe in der fppf-Topologie, wenn für jeden treuflachen endlich präsentierbaren Ringhomomorphismus $\varphi: A \rightarrow B$ die folgende Sequenz exakt ist*

$$\mathcal{F}(\text{Spec } A) \rightarrow \mathcal{F}(\text{Spec } B) \rightrightarrows \mathcal{F}(\text{Spec } B \otimes_A B).$$

Beweis. „ \Rightarrow “: Die Notwendigkeit dieser Bedingung folgt aus der Definition einer Garbe.

„ \Leftarrow “: (i) Es ist zu zeigen, dass für ein Schema X und eine surjektive Familie $\{Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ flacher endlich präsentierbarer Morphismen die Sequenz (A.1) exakt ist. Wir betrachten zunächst den induzierten treuflachen Morphismus $Y := \coprod_{i \in I} Y_i \rightarrow X$. Da

\mathcal{F} ein Zariski-Garbe ist, gilt $\mathcal{F}(Y) \cong \prod_{i \in I} \mathcal{F}(Y_i)$ und $\mathcal{F}(Y \times_X Y) \cong \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(Y_i \times_X Y_j)$. Die Exaktheit von (A.1) ist daher äquivalent zur Exaktheit der Sequenz

$$\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(Y \times_X Y).$$

Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass die Überdeckung aus nur einem lokal endlich präsentierbaren treuflachen Morphismus $f: Y \rightarrow X$ besteht.

(ii) Sei zunächst X affin. Wir wählen eine offene affine Überdeckung $Y = \cup_{i \in I} Y_i$. Eine Teilmenge $J \subset I$ heißt *zulässig*, falls sie endlich ist und $\coprod_{j \in J} Y_j \rightarrow X$ surjektiv ist. Da der Morphismus nach Lemma A.11 offen und X quasikompakt ist, gibt es zulässige Teilmengen. Für eine zulässige Menge J ist also $Y_J := \coprod_{j \in J} Y_j \rightarrow X$ ein treuflacher endlich präsentierbarer Morphismus affiner Schemata. Nach Annahme ist nun die untere Zeile im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{F}(Y \times_X Y) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}(Y_J) & \longrightarrow & \mathcal{F}(Y_J \times_X Y_J) \end{array}$$

exakt. Daraus folgt die Injektivität. Hat $s \in \mathcal{F}(Y)$ gleiche Bilder in $\mathcal{F}(Y \times_X Y)$ so finden wir ein $t_J \in \mathcal{F}(Y_J)$, dessen Bild in $\mathcal{F}(Y_J \times_X Y_J)$ mit dem von y übereinstimmt. Sind J, J' zwei zulässige Teilmengen, so gilt $t_J = t_{J'}$, da beide mit t_K für die zulässige Teilmenge $K = J \cup J'$ übereinstimmen. Weil die zulässigen Teilmengen ganz I überdecken, ist t_J ein Urbild von s .

(iii) Sei nun X beliebig. Wir wählen eine offene affine Überdeckung $X = \cup_{i \in I} U_i$ und setzen $V_i = f^{-1}(U_i)$. Es ergibt sich folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{F}(Y \times_X Y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) & \longrightarrow & \prod_{i \in I} \mathcal{F}(V_i) & \longrightarrow & \prod_{i \in I} \mathcal{F}(V_i \times_{U_i} V_i) \\ \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \\ \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) & \longrightarrow & \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(V_i \cap V_j) & & \end{array} .$$

Die Spalten sind exakt, da \mathcal{F} eine Garbe in der Zariski-Topologie ist. Nach Teil (ii) ist auch die zweite Zeile exakt. Daraus folgt nun die Injektivität in der ersten Zeile, \mathcal{F} ist also separiert. Daraus folgt die Injektivität der untersten Zeile. Eine kurze Diagrammjagd zeigt dann, dass die erste Zeile exakt ist. \square

Proposition A.26. *Es sei $\varphi: A \rightarrow B$ ein treuflacher Homomorphismus und M ein A -Modul. Dann ist der Komplex*

$$C_\bullet : 0 \rightarrow M \xrightarrow{d_0} M \otimes_A B \xrightarrow{d_1} M \otimes_A B \otimes_A B \xrightarrow{d_2} \dots$$

mit $d_n(m \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i m \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_i \otimes 1 \otimes b_{i+1} \otimes \dots \otimes b_n$ exakt.

A. Abstiegstheorie

Beweis. Wir betrachten den Komplex $C_\bullet \otimes_A B$ und definieren die Homomorphismen

$$\begin{aligned} h_n: M \otimes_A B^{\otimes n+1} &\rightarrow M \otimes_A B^{\otimes n} \\ m \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_n \otimes b' &\mapsto (-1)^{n+1} m \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_{n-1} \otimes b_n b'. \end{aligned}$$

Nun gilt $h_{n+1} \circ (d_n \otimes \text{id}_B) + (d_{n-1} \otimes \text{id}_B) \circ h_n = \text{id}_n$. Somit ist id nullhomotop und der Komplex ist exakt. Da φ treuflach ist, folgt aus Lemma A.8, dass auch C_\bullet exakt ist. \square

Proposition A.27. *Für jedes affine Schema X ist h_X eine Garbe in der fppf-Topologie.*

Beweis. Nach Lemma A.24 ist ein darstellbarer Funktor eine Garbe in der Zariski-Topologie. Nach Proposition A.25 müssen wir also nur zeigen, dass für jeden endlich-präsentierbaren treuflachen Ringhomomorphismus $\varphi: A \rightarrow B$ und jeden Ring R die Sequenz

$$\text{Hom}(R, A) \rightarrow \text{Hom}(R, B) \rightrightarrows \text{Hom}(R, B \otimes_A B)$$

exakt ist. Dies folgt aber aus Proposition A.26 mit dem Spezialfall $M = A$ durch Anwenden des Funktors $\text{Hom}(R, -)$ auf die exakte Sequenz. \square

Proposition A.28 ([52, Thm. 2.55]). *Für jedes Schema S ist h_S eine Garbe in der fppf-Topologie.*

Beweis. Es sei $f: Y \rightarrow X$ ein lokal endlich präsentierbarer treuflacher Morphismus und $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ eine offene affine Überdeckung.

(i) Wir zeigen zunächst, dass h_S separiert ist. Seien dazu g und $g': X \rightarrow S$ zwei Morphismen mit $f^*g = f^*g'$. Da f surjektiv ist, stimmen g und g' als topologische Abbildungen überein. Wir können daher $U_i := g^{-1}(S_i) = g'^{-1}(S_i)$ setzen. Es seien g_i und g'_i die Einschränkung von g bzw. g' auf U_i , und f_i die Einschränkung von f auf $Y_i := f^{-1}(U_i)$. Dann stimmen die Morphismen $f_i^*g_i$ und $f_i^*g'_i: Y_i \rightarrow S_i$ überein. Da S_i affin ist, und h_{S_i} somit nach Proposition A.27 eine Garbe ist, gilt auch $g_i = g'_i$ für $i \in I$. Da h_S eine Zariski-Garbe ist, folgt daraus $g = g'$.

(ii) Sei nun ein Morphismus $g: Y \rightarrow S$ gegeben, der $pr_1^*g = pr_2^*g: Y \times_X Y \rightarrow S$ erfüllt. Als Abbildung von Mengen faktorisiert g über X . Da f offen ist (Lemma A.11), ist die Abbildung $\bar{g}: X \rightarrow S$ stetig. Wir setzen $X_i := \bar{g}^{-1}(S_i)$ und $Y_i := g^{-1}(S_i)$. Nun gilt $g \circ pr_1 = g \circ pr_2: Y_i \times_{X_i} Y_i \rightarrow S_i$. Da S_i affin ist, gibt es nach Proposition A.27 eindeutige Morphismen $\bar{g}_i: X_i \rightarrow S_i$ mit $g|_{Y_i} = \bar{g}_i \circ f|_{Y_i}$, $i \in I$. Nun gilt $\bar{g}_i \circ f|_{Y_i \cap Y_j} = g|_{Y_i \cap Y_j} = \bar{g}_j \circ f|_{Y_i \cap Y_j}$, und da h_S nach Teil (i) separiert ist, folgt

$$\bar{g}_i|_{X_i \cap X_j} = \bar{g}_j|_{X_i \cap X_j}: X_i \cap X_j \rightarrow S$$

Weil h_S eine Zariski-Garbe ist, verkleben diese Morphismen zu einem Morphismus $\bar{g}: X \rightarrow S$ mit $g = \bar{g} \circ f$. \square

Proposition A.29 ([52, Prop. 2.59]). *Ist eine Topologie auf \mathcal{C} subkanonisch, so ist für alle $S \in \mathcal{C}$ die auf \mathcal{C}/S induzierte Topologie subkanonisch.*

Beweis. Seien $f: X \rightarrow S$ und $g: Y \rightarrow S$ zwei Objekt in \mathcal{C}/S und $\{h_i: U_i \rightarrow Y \mid i \in I\}$ eine Überdeckung von g .

Sind nun $\varphi, \psi \in h_f(g)$ zwei Morphismen über S mit $\varphi \circ h_i = \psi \circ h_i$ für alle i , so gilt $\varphi = \psi$, da $\{h_i \mid i \in I\}$ auch eine Überdeckung von Y in \mathcal{C} ist, und h_X separiert ist.

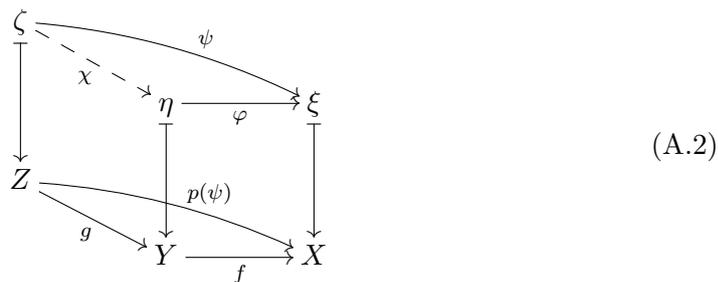
Sind Morphismen $\varphi_i: U_i \rightarrow X$ über S gegeben mit $\varphi_i \circ \text{pr}_1 = \varphi_j \circ \text{pr}_2: U_i \times_Y U_j \rightarrow X$, so bestimmen diese nach Voraussetzung einen Morphismus $\varphi: Y \rightarrow X$ mit $\varphi \circ h_i = \varphi_i$. Es bleibt zu prüfen, dass φ ein Morphismus über S ist. Es gilt aber $f \circ \varphi \circ h_i = f \circ \varphi_i = g \circ h_i$. Aus der Separiertheit von h_S folgt dann $f \circ \varphi = g$. \square

Korollar A.30. Für jeden Morphismus $f: X \rightarrow S$ ist h_f eine Garbe auf $\underline{\text{Sch}}/S$ in der fppf-Topologie.

A.3. Gefaserte Kategorien

Sei \mathcal{F} eine Kategorie mit einem Funktor p in eine Kategorie \mathcal{C} . Für ein Objekt X in \mathcal{C} nennen wir die Unterkategorie $\mathcal{F}(X)$ von \mathcal{F} der Objekte U mit $p(U) = X$ und der Morphismen f mit $p(f) = \text{id}_X$ die *Faser von \mathcal{F} über X* .

Definition A.31. Es sei $f: Y \rightarrow X$ ein Morphismus in \mathcal{C} und ξ ein Objekt über X . Ein Morphismus $\varphi: \eta \rightarrow \xi$ in \mathcal{F} mit $p(\varphi) = f$ heißt *kartesisch*, falls für jeden Morphismus $\psi: \zeta \rightarrow \xi$ in \mathcal{F} und jeden Morphismus $g: p(\zeta) \rightarrow Y$ mit $f \circ g = p(\psi)$ genau ein Morphismus $\chi: \zeta \rightarrow \eta$ mit $p(\chi) = g$ und $\varphi \circ \chi = \psi$ existiert. In diesem Fall nennen wir η einen *Rückzug von ξ entlang f* .



Bemerkung A.32. Sind $\varphi: \eta \rightarrow \xi$ und $\varphi': \eta' \rightarrow \xi$ zwei kartesische Morphismen über f , so gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $\alpha: \eta \rightarrow \eta'$ über id_Y mit $\varphi' \circ \alpha = \varphi$. Der Rückzug ist also eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Beispiel A.33. Es sei \mathcal{C} eine Kategorie mit Produkten und $\mathcal{F} := \underline{\text{Mor}}(\mathcal{C})$ mit dem Funktor $p = \text{pr}_2$. Zu jedem Objekt $\xi: X_1 \rightarrow X_2$ in \mathcal{F} und jedem Morphismus $f: Y_2 \rightarrow X_2$ in \mathcal{C} ist der Morphismus $(\text{pr}_1, f): (\text{pr}_2: X_1 \times_{X_2} Y_2 \rightarrow Y_2) \rightarrow (f: X_1 \rightarrow X_2)$ kartesisch.

Lemma A.34 ([52, Prop. 3.4]). (i) Es sei $\varphi: \xi \rightarrow \eta$ ein Morphismus und $\psi: \eta \rightarrow \zeta$ ein kartesischer Morphismus. Die Komposition $\psi \circ \varphi$ ist genau dann kartesisch, wenn φ kartesisch ist.

(ii) Ein Morphismus φ in \mathcal{F} , dessen Bild $p(\varphi)$ ein Isomorphismus in \mathcal{C} ist, ist genau dann kartesisch, wenn er ein Isomorphismus ist.

Beweis. Diese Aussagen sind einfache Folgerungen aus der universellen Eigenschaft kartesischer Morphismen. \square

A. Abstiegstheorie

Definition A.35. Eine Kategorie \mathcal{F} über \mathcal{C} ist eine *gefaserte Kategorie*, falls es zu jedem Morphismus $f: Y \rightarrow X$ und jedem Objekt ξ in $\mathcal{F}(X)$ einen kartesischen Morphismus $\varphi: \eta \rightarrow \xi$ mit $p(\varphi) = f$ gibt.

Beispiel A.36. (i) Die Kategorie \mathcal{C} ist trivialerweise eine gefaserte Kategorie über sich selbst.

(ii) Wenn \mathcal{C} endliche Produkte besitzt, ist $\text{pr}_2: \underline{\text{Mor}}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ eine gefaserte Kategorie.

Definition A.37. Es sei \mathcal{F} eine über \mathcal{C} gefaserte Kategorie. Eine volle Unterkategorie $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ heißt *stabil*, wenn gilt:

(i) Wenn ξ ein Objekt in \mathcal{G} ist und ξ' in \mathcal{F} isomorph zu ξ ist, dann liegt auch ξ' in \mathcal{G} .

(ii) Für jeden Morphismus $f: Y \rightarrow X$ in \mathcal{C} und jedes Objekt ξ in $\mathcal{G}(X)$ liegt $f^*\xi$ in $\mathcal{G}(Y)$.

Analog zu Beispiel A.36, (ii), sieht man:

Lemma A.38. Wenn \mathcal{C} endliche Produkte besitzt und \mathcal{F} eine stabile Unterkategorie von $\underline{\text{Mor}}(\mathcal{C})$ ist, dann ist \mathcal{F} eine gefaserte Kategorie über \mathcal{C} .

Definition A.39. Ein *Zusammenhang* einer gefaserten Kategorie ist die Wahl genau eines kartesischen Morphismus $\tilde{f}_\xi: f^*\xi \rightarrow \xi$ für jeden Morphismus $f: Y \rightarrow X$ und jedes Objekt ξ in $\mathcal{F}(X)$ mit $p(\tilde{f}) = f$.

Es ist immer möglich, einen Zusammenhang zu wählen, und wir werden im Folgenden annehmen, dass \mathcal{F} eine gefaserte Kategorie mit fixiertem Zusammenhang ist.

Bemerkung A.40. Wir betrachten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ Y_2 & \xrightarrow{f_2} & X_2 \end{array}$$

in \mathcal{C} . Ist $\chi: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ ein Morphismus über g und sind $\tilde{f}_i: f_i^*\xi_i \rightarrow \xi_i$ die kartesischen Morphismen über f_i , $i = 1, 2$, so gibt es einen eindeutigen Morphismus $(f_1, f_2)_h^* \chi: \eta_1 \rightarrow \eta_2$ über h mit $\tilde{f}_2 \circ (f_1, f_2)_h^* \chi = \chi \circ \tilde{f}_1$. Insbesondere erhalten wir im Fall $g = \text{id}_X$, $h = \text{id}_Y$ (und daher $f_1 = f_2 =: f$) einen Funktor $f^*: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$.

Definition A.41. Eine *Spaltung* einer gefaserten Kategorie ist ein Zusammenhang, so dass $f^*g^* = (g \circ f)^*$ für alle Objekte $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ und alle Morphismen $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ gilt.

Definition A.42. Eine gefaserte Kategorie $p: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ hat *kleine Fasern*, wenn für jedes Objekt X aus \mathcal{C} die Faser $\mathcal{F}(X)$ eine kleine Kategorie ist.

Im allgemeinen existiert zu einer gegebenen gefaserten Kategorie mit kleinen Fasern keine Spaltung, d.h. die Zuordnung $X \mapsto \mathcal{F}(X)$ und $f \mapsto f^*$ definiert keinen Funktor in die *Kategorie der kleinen Kategorien* $\underline{\text{Cat}}$, sondern lediglich einen sogenannten Pseudofunktor.

Definition A.43. Ein *kontravarianter Pseudofunktor* $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Cat}}$ besteht aus den folgenden Daten:

- (i) zu jedem Objekt X in \mathcal{C} eine kleine Kategorie $\Phi(X)$,
- (ii) zu jedem Morphismus $f: Y \rightarrow X$ in \mathcal{C} ein Funktor $\Phi(f): \Phi(X) \rightarrow \Phi(Y)$,
- (iii) zu jedem Objekt X in \mathcal{C} ein Isomorphismus $\epsilon_X: \Phi(\text{id}_X) \rightarrow \text{id}_{\Phi(X)}$ von Funktoren
- (iv) zu jeder Komposition von Morphismen $g \circ f$ in \mathcal{C} ein Isomorphismus

$$\alpha_{f,g}: \Phi(f) \circ \Phi(g) \rightarrow \Phi(g \circ f)$$

von Funktoren mit den folgenden Bedingungen:

- (a) Für jeden Morphismus $s: X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} und jedes Objekt V in $\Phi(Y)$ gilt

$$\begin{aligned} \epsilon_X(\Phi(s)(V)) &= \alpha_{\text{id}_X, s}(V), \\ \Phi(s)(\epsilon_Y(V)) &= \alpha_{s, \text{id}_Y}(V). \end{aligned}$$

- (b) Für jede Komposition $u \circ t \circ s: X \rightarrow Y$ von Morphismen in \mathcal{C} und jedes Objekt U in $\Phi(Y)$ gilt

$$\alpha_{s, u \circ t}(U) \circ \Phi(s)(\alpha_{t, u}(U)) = \alpha_{t \circ s, u}(U) \circ \alpha_{s, t}(\Phi(u)(U)).$$

Eine gefaserte Kategorie $p: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ mit kleinen Fasern und einem Zusammenhang definiert einen Pseudofunktor $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Cat}}$, wie man leicht nachprüft. Umgekehrt kann man einem solchen Pseudofunktor eine faserkleine gefaserte Kategorie \mathcal{F} zuordnen: Ein Objekt in \mathcal{F} ist ein Paar (U, X) , wobei X ein Objekt in \mathcal{C} und U ein Objekt in $\Phi(X)$ ist. Ein Morphismus $(U, X) \rightarrow (V, Y)$ ist ein Paar $(f: U \rightarrow \Phi(s)(V), s: X \rightarrow Y)$. Die Komposition zweier Morphismen $(f, s): (U, X) \rightarrow (V, Y)$ und $(g, t): (V, Y) \rightarrow (W, Z)$ ist gegeben durch $(g \cdot f, t \circ s)$ mit

$$g \cdot f = \alpha_{s, t}(W) \circ \Phi(s)(g) \circ f.$$

Die Bedingungen stellen sicher, dass dies tatsächlich eine gefaserte Kategorie \mathcal{F} über \mathcal{C} definiert (siehe [52, 3.1.3]).

Beispiel A.44. (i) Eine Prägarbe \mathcal{F} auf einem Situs \mathcal{C} definiert eine gefaserte Kategorie. Insbesondere bestimmt für jedes Objekt X aus \mathcal{C} die Garbe h_X eine gefaserte Kategorie.

(ii) Sei \mathcal{C} ein Situs und X ein Objekt in \mathcal{C} . Wir bezeichnen eine Garbe in $\underline{\text{Sh}}(\mathcal{C}/X)$ (siehe Abschnitt A.2) als *Garbe auf X* . Für einen Morphismus $f: Y \rightarrow X$ in \mathcal{C} können wir einer Garbe \mathcal{F} auf X eine Garbe $f^*(\mathcal{F})$ auf Y zuordnen, indem wir $f^*\mathcal{F}(U \rightarrow Y) = \mathcal{F}(U \rightarrow Y \rightarrow X)$ setzen. Ein Morphismus $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ von Garben auf X gibt auf offensichtliche Weise einen Morphismus $f^*(\varphi): f^*\mathcal{F} \rightarrow f^*\mathcal{G}$. Dies erklärt einen Funktor $f^*: \underline{\text{Sh}}(\mathcal{C}/Y) \rightarrow \underline{\text{Sh}}(\mathcal{C}/X)$.

In diesem Fall gilt sogar $g^*f^* = (f \circ g)^*$ und $\text{id}^* = \text{id}$. Somit erhalten wir einen Funktor von \mathcal{C} in die Kategorie der kleinen Kategorien. Die entsprechende gefaserte Kategorie bezeichnen wir mit $\underline{\text{Sh}}/\mathcal{C}$.

A. Abstiegstheorie

Durch Dualisieren der Definitionen erhalten wir die Begriffe des *kokartesischen Morphismus* und der *kogefaserten Kategorie*, in der es bis auf Isomorphie eindeutige Vorschübe gibt. Analog zur gefaserten Kategorie ist das Datum einer solchen Kategorie mit Zusammenhang und kleinen Fasern äquivalent zum Datum eines kovarianten Pseudofunktors $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Cat}}$.

Beispiel A.45. Wir betrachten die Kategorie Ring der kommutativen Ringe und darüber die Kategorie Mod, in der ein Objekt ein Tupel (A, M) aus einem Ring A und einem A -Modul M ist. Ein Morphismus $(\varphi, f): (A, M) \rightarrow (B, N)$ besteht aus einem Ringhomomorphismus $\varphi: A \rightarrow B$ und einem Homomorphismus $f: M \rightarrow N$ von A -Moduln.

Für jeden A -Modul M und jeden Homomorphismus $\varphi: A \rightarrow B$ ist der Morphismus $(\varphi, f): (A, M) \rightarrow (B, M \otimes_A B)$ mit $f(m) = m \otimes 1$ kokartesisch: Sei $(\psi, g): (A, M) \rightarrow (C, T)$ ein Morphismus in Mod und $\chi: B \rightarrow C$ ein Homomorphismus mit $\chi \circ \varphi = \psi$. Dann ist $h: M \otimes_A B \rightarrow T$, $h(m \otimes b) := \chi(b) \cdot g(m)$ der einzige Homomorphismus von B -Moduln, der $h \circ f = g$ erfüllt. Somit ist (χ, h) der gesuchte Morphismus. Man beachte, dass dies keinen Funktor, sondern nur einen Pseudofunktor beschreibt.

Definition A.46. Seien \mathcal{F} und \mathcal{G} zwei über \mathcal{C} gefaserte Kategorien. Ein *Morphismus* $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ von gefaserten Kategorien ist ein Funktor $\Phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ mit der Eigenschaft, dass $p_{\mathcal{G}} \circ \Phi = p_{\mathcal{F}}$ gilt, und das Bild eines kartesischen Morphismus wieder ein kartesischer Morphismus ist.

Eine *gefaserte Unterkategorie* von \mathcal{F} ist eine Unterkategorie $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung $p': \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{C}$ eine gefaserte Kategorie ist, und die Inklusion $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ kartesische Morphismen erhält.

Seien $\Phi, \Psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ Morphismen über \mathcal{C} gefaserten Kategorien. Eine *basistreue natürliche Transformation* $\alpha: \Phi \rightarrow \Psi$ ist eine natürliche Transformation der Funktoren, so dass für alle X in \mathcal{C} und alle U in $\mathcal{F}(X)$ der Morphismus $\alpha(U)$ in $\mathcal{G}(X)$ enthalten ist.

Definition A.47. Eine gefaserte Kategorie $p: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ ist *in Gruppoiden gefasert*, wenn für jedes X in \mathcal{C} die Faser $\mathcal{F}(X)$ ein Gruppoid ist, d.h. jeder Morphismus in $\mathcal{F}(X)$ ist ein Isomorphismus.

Proposition A.48 ([52, Prop. 3.22]). *Eine Kategorie \mathcal{F} über \mathcal{C} ist genau dann in Gruppoiden gefasert, wenn zu jedem Morphismus $f: Y \rightarrow X$ in \mathcal{C} und jedem Objekt ξ in $\mathcal{F}(X)$ ein Morphismus $\varphi: \eta \rightarrow \xi$ mit $p(\varphi) = f$ existiert und jeder Morphismus in \mathcal{F} kartesisch ist.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei \mathcal{F} über \mathcal{C} in Gruppoiden gefasert und $\varphi: D \rightarrow E$ ein Morphismus in \mathcal{F} über $f: X \rightarrow Y$. Es gibt einen kartesischen Morphismus $\psi: D' \rightarrow E$ über f und daher einen eindeutigen Morphismus $\alpha: D \rightarrow D'$ über id_X mit $\psi \circ \alpha = \varphi$. Da α ein Isomorphismus ist, ist auch φ kartesisch.

„ \Leftarrow “: Dass \mathcal{F} gefasert über \mathcal{C} ist, ist klar. Die Aussage folgt nun aus Lemma A.34, (ii). \square

Beispiel A.49. Es sei \mathcal{F} eine über \mathcal{C} gefaserte Kategorie. Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}_{\text{kart}}$ die Unterkategorie mit denselben Objekten aber nur den kartesischen Morphismen. Offensichtlich ist $\mathcal{F}_{\text{kart}}$ eine in Gruppoiden gefaserte Unterkategorie von \mathcal{F} .

Definition A.50. Eine gefaserte Kategorie $p: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ heißt *in Mengen gefasert*, wenn für jedes X in \mathcal{C} die Faser $\mathcal{F}(X)$ eine Menge ist, d.h. die Identitäten sind die einzigen Morphismen in $\mathcal{F}(X)$.

Proposition A.51 ([52, Prop. 3.25]). *Eine Kategorie \mathcal{F} über \mathcal{C} ist genau dann eine in Mengen gefaserte Kategorie, wenn es zu jedem Objekt ξ in \mathcal{F} und jedem Morphismus $f: Y \rightarrow p(\xi)$ genau einen Morphismus $\varphi: \eta \rightarrow \xi$ in \mathcal{F} mit $p(\varphi) = f$ gibt.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Seien \mathcal{F} eine in Mengen gefaserte Kategorie, ξ ein Objekt in \mathcal{F} und $f: Y \rightarrow p(\xi)$ ein Morphismus in \mathcal{C} . Es gibt einen kartesischen Morphismus $\varphi: \eta \rightarrow \xi$ mit $p(\varphi) = f$. Für jeden anderen Morphismus $\varphi': \eta' \rightarrow \xi$ über f gibt es dann einen eindeutigen Morphismus $\alpha: \eta' \rightarrow \eta$ in $\mathcal{F}(Y)$ mit $\varphi \circ \alpha = \varphi'$. Da $\mathcal{F}(X)$ eine Menge ist, folgt $\alpha = \text{id}_\eta$ und $\varphi = \varphi'$.

„ \Leftarrow “: Im Diagramm (A.2) gibt es genau einen Morphismus χ mit $p(\chi) = g$. Wegen $p(\varphi \circ \chi) = p(\psi)$ folgt dann auch, dass χ das Diagramm kommutativ macht. \square

Korollar A.52. *Es gibt eine Äquivalenz zwischen in Mengen gefaserten Kategorien über \mathcal{C} und kontravarianten Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Sets}}$.*

A.4. Äquivariante gefaserte Kategorien

Es sei \mathcal{C} eine Kategorie und $F: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Grp}}$ ein kontravarianter Funktor in die Kategorie der Gruppen.

Definition A.53. Eine *Linkswirkung* auf einem Objekt X ist eine natürliche Transformation $\rho: F \times h_X \rightarrow h_X$, so dass für alle Objekte Y die Abbildung $\rho(Y): F(Y) \times h_X(Y) \rightarrow h_X(Y)$ eine Gruppenwirkung ist. Analog definiert man eine *Rechtswirkung* $\rho: h_X \times G \rightarrow h_X$.

Bemerkung A.54. (i) Wir bezeichnen mit $\{*\}$ den Funktor, der jedem Objekt die einelementige Menge $\{*\}$ zuordnet. Dies ist das finale Objekt in der Kategorie der Funktoren von \mathcal{C} nach $\underline{\text{Sets}}$. Ein Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Grp}}$ lässt sich dann beschreiben als Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Sets}}$ zusammen mit natürlichen Transformationen $\mu_F: F \times F \rightarrow F$, $e_F: \{*\} \rightarrow F$ und $\text{inv}: F \rightarrow F$, mit den Eigenschaften

- a) $\mu_F \circ (\text{id}_F \times \mu_F) = \mu_F \circ (\mu_F \times \text{id}_F)$ (Assoziativität),
- b) $\mu_F \circ (e_F \circ \pi, \text{id}_F) = \text{id}_F = \mu_F \circ (\text{id}_F, e_F \circ \pi)$ (neutrales Element),
- c) $\mu_F \circ (\text{id}_F, \text{inv}) = \mu_F \circ (\text{inv}, \text{id}_F) = e_F \circ \pi$ (inverses Element).

Hierbei bezeichnet π die natürliche Transformation $F \rightarrow \{*\}$.

(ii) Eine Linkswirkung auf X entspricht einer natürlichen Transformation ρ , so dass

- a) $\rho \circ (e_F, \text{id}_{h_X}) = \text{id}_{h_X}$ und
- b) $\rho \circ (\mu_F \times \text{id}_{h_X}) = \rho \circ (\text{id}_F \times \rho)$.

Definition A.55. Es seien X, Y Objekte mit Linkswirkungen ρ_X und ρ_Y von F . Ein Morphismus $f: Y \rightarrow X$ ist F -äquivariant, falls das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F \times h_Y & \xrightarrow{\rho_Y} & h_Y \\ \text{id}_F \times h_f \downarrow & & \downarrow h_f \\ F \times h_X & \xrightarrow{\rho_X} & h_X. \end{array}$$

Die Paare (X, ρ_X) bestehend aus einem Objekt X und einer F -Wirkung ρ_X bilden mit den F -äquivarianten Morphismen eine Kategorie \mathcal{C}^F .

Es sei nun $p: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ eine gefaserte Kategorie, $F: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Grp}}$ und $F': \mathcal{F} \rightarrow \underline{\text{Grp}}$ zwei kontravariante Funktoren und $\Phi: F' \rightarrow F \circ p$ eine natürliche Transformation.

Definition A.56. Ein äquivariantes Objekt ist ein Tripel (ξ, ρ_ξ, ρ_X) aus einem Objekt ξ in \mathcal{F} , einer F' -Wirkung ρ_ξ auf ξ und einer F -Wirkung ρ_X auf $X := p(\xi)$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F' \times h_\xi & \xrightarrow{\rho_\xi} & h_\xi \\ \Phi \times p \downarrow & & \downarrow p \\ (F \times h_X) \circ p & \xrightarrow{p^* \rho_X} & h_X \circ p. \end{array}$$

Ein Morphismus $\varphi: (\xi, \rho_\xi, \rho_X) \rightarrow (\eta, \rho_\eta, \rho_Y)$ äquivarianter Objekte ist ein F' -äquivarianter Morphismus $\varphi: \xi \rightarrow \eta$, so dass $p(\varphi)$ F -äquivariant ist.

Wir bezeichnen die Kategorie der äquivarianten Objekte mit $\mathcal{F}_F^{F'}$.

Proposition A.57. Die Kategorie $\mathcal{F}_F^{F'}$ ist gefasert über \mathcal{C}^F .

Beweis. Es sei X ein Objekt in \mathcal{C} mit F -Wirkung ρ_X , ξ in $\mathcal{F}(X)$ mit äquivarianter F' -Wirkung ρ_ξ und $f: Y \rightarrow X$ ein äquivarianter Morphismus. Da \mathcal{F} gefasert ist, gibt es einen kartesischen Morphismus $\varphi: f^*\xi \rightarrow \xi$. Wir konstruieren zunächst eine F' -Wirkung auf $f^*\xi$: Sei dazu $\chi: \zeta \rightarrow f^*\xi \in h_{f^*\xi}$ und $g \in F'(\zeta)$. Mit der Äquivarianz von ξ und f finden wir

$$\begin{aligned} p(\rho_\xi(g, \varphi \circ \chi)) &= \rho_X(\Phi(\zeta)(g), f \circ p(\chi)) \\ &= f \circ \rho_Y(\Phi(\zeta)(g), p(\chi)). \end{aligned}$$

Es sei $h' := \rho_Y(\Phi(\zeta)(g), h)$. Wir definieren $\rho_{f^*\xi}(g, \chi) := (\text{id}_Z, f)_h^* \rho_\xi(g, \varphi \circ \chi)$. Es ist klar, dass dies eine Linkswirkung von F' auf $f^*\xi$ definiert, bezüglich der φ äquivariant ist. Ebenso sind $\rho_{f^*\xi}$ und ρ_Y nach Konstruktion verträglich.

Es bleibt zu prüfen, dass $\varphi: f^*\xi \rightarrow \xi$ kartesisch in $\mathcal{F}_F^{F'}$ ist. Sei dazu $h: Z \rightarrow Y$ ein äquivarianter Morphismus, ζ ein äquivariantes Objekt über Z und $\psi: \zeta \rightarrow \xi$ ein Morphismus äquivarianter Objekte mit $p(\psi) = f \circ h$. Da φ kartesisch in \mathcal{F} ist, gibt es einen Morphismus $\chi: \zeta \rightarrow f^*\xi$ über h mit $\varphi \circ \chi = \psi$. Wir zeigen, dass χ äquivariant ist: Sei $\sigma: \tau \rightarrow \zeta$ ein Morphismus und $g \in F(\tau)$. Dann ist $\gamma := \rho_{f^*\xi}(g, \chi \circ \sigma)$ eindeutig bestimmt durch $p(\gamma) = \rho_Y(\Phi(\tau)(g), h \circ p(\sigma))$ und $\varphi \circ \gamma = \rho_\xi(g, \varphi \circ \chi \circ \sigma)$. Da $\psi = \varphi \circ \chi$ äquivariant ist, haben wir $\varphi \circ \gamma = \varphi \circ \chi \circ \rho_\zeta(g, \sigma)$. Ebenso gilt $p(\chi \circ \rho_\zeta(g, \sigma)) = h \circ \rho_Z(\Phi(\zeta)(g), p(\sigma))$, weil ζ ein äquivariantes Objekt ist. Aufgrund der Äquivarianz von h folgt schließlich $\gamma = \chi \circ \rho_\zeta(g, \sigma)$. \square

Beispiel A.58. Wir setzen $\mathcal{F} := \underline{\text{Mor}}(\mathcal{C})$, $F' := F \circ \text{pr}_2$ und Φ die Identität. Ein Objekt in $\mathcal{F}_F^{F'}$ ist dann ein äquivarianter Morphismus in \mathcal{C} , und ein Morphismus ist ein kommutatives Quadrat äquivarianter Morphismen. Proposition A.57 zeigt, dass der Rückzug eines äquivarianten Morphismus unter einem äquivarianten Morphismus wieder äquivariant ist.

A.4.1. Linearisierungen

Definition A.59. Ein *Gruppenobjekt* in \mathcal{C} ist ein Objekt G zusammen mit einem Funktor $F_G: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Grp}}$, so dass $h_G = f \circ F_G$ gilt, wobei $f: \underline{\text{Grp}} \rightarrow \underline{\text{Sets}}$ den Vergissfunktor bezeichnet.

Ein *Morphismus von Gruppenobjekten* ist ein Morphismus $\varphi: G \rightarrow H$, so dass h_φ eine natürliche Transformation $F_G \rightarrow F_H$ induziert.

Eine *Wirkung* von G auf einem Objekt X ist eine Wirkung von F_G auf X .

Es sei nun G ein Gruppenobjekt in \mathcal{C} , $F = F_G$, $F' = F_G \circ p$ und $\Phi = \text{id}_{F'}$. Weiter sei \mathcal{F} eine über \mathcal{C} gefaserte Kategorie und $\pi: \text{pr}_2^* \xi \rightarrow \xi$ ein kartesischer Morphismus über $\text{pr}_2: G \times X \rightarrow X$. Aufgrund der universellen Eigenschaft eines kartesischen Morphismus erhält man einen Isomorphismus

$$(h_G \circ p) \times h_\xi \cong h_{\text{pr}_2^* \xi},$$

d.h. $\text{pr}_2^* \xi$ stellt den Funktor $(h_G \circ p) \times h_\xi$ dar. Nach dem Yoneda-Lemma entspricht eine natürliche Transformation $\rho_\xi: (h_G \circ p) \times h_\xi \rightarrow h_\xi$ also einem Morphismus $\beta: \text{pr}_2^* \xi \rightarrow \xi$.

Es sei $\epsilon_\xi: \xi \rightarrow \text{pr}_2^* \xi$ der eindeutig bestimmte Morphismus über

$$\epsilon_X := (e_G \times \text{id}_X): X \cong t \times X \rightarrow G \times X$$

mit $\pi \circ \epsilon_\xi = \text{id}_\xi$.

Lemma A.60 ([52, Prop. 3.47]). *Es sei \mathcal{F} gefasert über \mathcal{C} , X ein äquivariantes Objekt in \mathcal{C} und ξ in $\mathcal{F}(X)$. Das Datum einer Wirkung auf ξ ist äquivalent zum Datum eines Morphismus $\beta: \text{pr}_2^* \xi \rightarrow \xi$ über $\rho_X: G \times X \rightarrow X$ mit den Eigenschaften*

(i) $\beta \circ \epsilon_\xi = \text{id}_\xi$.

(ii) Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{pr}_3^* \xi & \xrightarrow{(\text{pr}_{23}, \text{pr}_2)^*_{(\mu_G \times \text{id}_X)} \pi} & \text{pr}_2^* \xi \\ (\text{pr}_{23}, \text{pr}_2)^*_{(\text{id}_G \times \rho_X)} \beta \downarrow & & \downarrow \beta \\ \text{pr}_2^* \xi & \xrightarrow{\beta} & \xi \end{array} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{\mu_G \times \text{id}_X} & G \times X \\ \text{id}_G \times \rho_X \downarrow & & \downarrow \rho_X \\ G \times X & \xrightarrow{\rho_X} & X \end{array}$$

A. Abstiegstheorie

Lemma A.61. *Es sei $\beta: \text{pr}_2^* \xi \rightarrow \xi$ ein Morphismus über ρ_X , so dass das Diagramm (A.3) kommutiert. Es gilt $\beta \circ \epsilon_\xi = \text{id}_\xi$ genau dann, wenn β kartesisch ist.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Der Morphismus $f := (\text{inv} \circ \text{pr}_1, \rho_X): G \times X \rightarrow G \times X$ ist eine Involution. Es sei $\varphi: \text{pr}_2^* \xi \rightarrow \text{pr}_2^* \xi$ der eindeutige Morphismus über f mit $\pi \circ \varphi = \beta$ und $\delta: \text{pr}_2^* \xi \rightarrow \text{pr}_3^* \xi$ der Morphismus über $(\text{inv} \circ \text{pr}_1, \text{pr}_1, \text{pr}_2): G \times X \rightarrow G \times G \times X$ mit

$$(\text{pr}_{23}, \text{pr}_2)_{(\mu_G \times \text{id}_X)}^* \pi \circ \delta = \epsilon_\xi .$$

Man prüft dann, dass $\varphi = (\text{pr}_{23}, \text{pr}_2)_{(\text{id}_G \times \rho_X)}^* \beta \circ \delta$ gilt.

Aus der Definition von φ und der Kommutativität von (A.3) ergibt sich

$$\begin{aligned} \pi \circ \varphi^2 &= \beta \circ (\text{pr}_{23}, \text{pr}_2)_{(\text{id}_G \times \rho_X)}^* \beta \circ \delta \\ &= \beta \circ (\text{pr}_{23}, \text{pr}_2)_{(\mu_G \times \text{id}_X)}^* \pi \circ \delta \\ &= \beta \circ \epsilon_\xi = \text{id}_\xi . \end{aligned}$$

Da π kartesisch ist, impliziert dies $\varphi^2 = \text{id}_{\text{pr}_2^* \xi}$. Somit ist φ ein Isomorphismus und insbesondere kartesisch. Dann ist nach Lemma A.34, (i), auch die Komposition $\beta = \pi \circ \varphi$ kartesisch.

„ \Leftarrow “: Da π und $\pi \circ \epsilon_\xi = \text{id}_\xi$ kartesisch sind, ist nach Lemma A.34, (i), auch ϵ_ξ kartesisch. Nach Voraussetzung ist β kartesisch, so dass die Komposition $\beta \circ \epsilon_\xi$ kartesisch ist. Weil der Morphismus $\beta \circ \epsilon_\xi$ über id_X liegt, ist er nach Lemma A.34, (ii), ein Isomorphismus.

Wir betrachten den Morphismus $e': \xi \rightarrow \text{pr}_3^* \xi$ über

$$(e_G \times e_G \times \text{id}_X): X \cong t \times t \times X \rightarrow G \times G \times X$$

mit $(\text{pr}_{23}, \text{pr}_2)_{(\mu_G \times \text{id}_X)}^* \pi \circ e' = \epsilon_\xi$. Aufgrund der Kommutativität von (A.3) gilt dann

$$\begin{aligned} \beta \circ \epsilon_\xi &= \beta \circ (\text{pr}_{23}, \text{pr}_2)_{(\mu_G \times \text{id}_X)}^* \pi \circ e' \\ &= \beta \circ (\text{pr}_{23}, \text{pr}_2)_{(\text{id}_G \times \rho_X)}^* \beta \circ e' \\ &= (\beta \circ \epsilon_\xi)^2 . \end{aligned}$$

Daraus folgt $\beta \circ \epsilon_\xi = \text{id}_\xi$. □

Proposition A.62 ([52, Prop. 3.49]). *Das Datum einer äquivarianten Wirkung auf ξ ist äquivalent zum Datum eines Isomorphismus $\beta: \text{pr}_2^* \xi \rightarrow \rho_X^* \xi$ in $\mathcal{F}(G \times X)$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} \text{pr}_3^* \xi & \xrightarrow{\cong} & (\text{pr}_2 \circ (\mu_G \times \text{id}_X))^* \xi \\ \text{pr}_{23}^* \varphi \downarrow & & \downarrow (\mu_G \times \text{id}_X)^* \varphi \\ (\rho_X \circ \text{pr}_{23})^* \xi & \xrightarrow{(\text{id}_G \times \rho_X)^* \varphi} & (\rho_X \circ (\text{id}_G \times \rho_X))^* \xi . \end{array}$$

Beweis. Diese Charakterisierung folgt direkt aus Lemma A.60, Lemma A.61 und der Tatsache, dass nach Lemma A.34 die Menge der kartesischen Morphismen $\text{pr}_2^* \rightarrow \xi$ über ρ_X isomorph zur Menge der Isomorphismen $\varphi: \text{pr}_2^* \xi \rightarrow \rho_X^* \xi$ über $\text{id}_{G \times X}$ ist. □

A.5. Stacks

Definition A.63. Sei \mathcal{C} ein Situs, \mathcal{F} eine über \mathcal{C} gefaserte Kategorie, X ein Objekt in \mathcal{C} und $\{U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ eine Überdeckung von X . Ein *Objekt mit Abstiegsdatum* ist ein Tupel $(\{\xi_i\}, \{\varphi_{ij}\})$ bestehend aus einer Familie von Objekten ξ_i in $\mathcal{F}(U_i)$ und Isomorphismen $\varphi_{ij}: \text{pr}_2^* \xi_j \rightarrow \text{pr}_1^* \xi_i$ über $U_i \times_X U_j$ mit der Kozykelbedingung

$$\text{pr}_{13}^*(\varphi_{ik}) = \text{pr}_{12}^*(\varphi_{ij}) \circ \text{pr}_{23}^*(\varphi_{jk}). \quad (\text{A.4})$$

Ein Morphismus von Objekten mit Abstiegsdatum $(\{\xi_i\}, \{\varphi_{ij}\}) \rightarrow (\{\xi'_i\}, \{\varphi'_{ij}\})$ ist eine Familie von Morphismen $\alpha_i: \xi_i \rightarrow \xi'_i$ mit der Kompatibilitätsbedingung

$$\varphi'_{ij} \circ \text{pr}_2^* \alpha_j = \text{pr}_1^* \alpha_i \circ \varphi_{ij}. \quad (\text{A.5})$$

Dies definiert die Kategorie $\mathcal{F}(\{U_i \rightarrow X\})$.

Es gibt einen Funktor $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(\{U_i \rightarrow X \mid i \in I\})$, der einem Objekt ξ über X die Familie $\xi_i = f_i^*(\xi)$ zuordnet. Da $f_i \circ \text{pr}_1 = f_j \circ \text{pr}_2$ gilt, gibt es kanonische Isomorphismen $\varphi_{ij}: \text{pr}_2^* \xi_j \rightarrow \text{pr}_1^* \xi_i$. Diese erfüllen offensichtlich die Kozykelbedingung. Ein Objekt mit Abstiegsdatum heißt *effektiv*, wenn es isomorph zu einem Objekt im Bild dieses Funktors ist.

Definition A.64. Sei \mathcal{C} ein Situs und \mathcal{F} eine über \mathcal{C} gefaserte Kategorie.

- (i) \mathcal{F} heißt *Prestack* über \mathcal{C} , wenn für alle X in \mathcal{C} und alle Überdeckungen $\{U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ der Funktor $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(\{U_i \rightarrow X\})$ volltreu ist.
- (ii) \mathcal{F} heißt *Stack* über \mathcal{C} , wenn für alle X in \mathcal{C} und alle Überdeckungen $\{U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ der Funktor $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(\{U_i \rightarrow X\})$ ein Äquivalenz von Kategorien ist.

Beispiel A.65. (i) Wenn $p: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Prestack ist und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine stabile Unterkategorie ist, dann ist \mathcal{G} ein Prestack.

(ii) Die Kategorie $\mathcal{F} = \underline{\text{Mor}}(\underline{\text{Set}})$ ist ein Stack.

(iii) Die Kategorie $\underline{\text{Sh}}/\mathcal{C}$ der Garben auf einem Situs ist ein Stack über \mathcal{C} .

Definition A.66. Ein *Morphismus von Stacks* über \mathcal{C} ist ein Morphismus der gefaserten Kategorien. Ein *2-Morphismus* zwischen zwei Morphismen ist eine basistreue natürliche Transformation der zugrunde liegenden gefaserten Kategorien. Ein Morphismus $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist ein *Isomorphismus von Stacks*, falls es einen Morphismus $g: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ und 2-Isomorphismen $f \circ g \cong \text{id}_{\mathcal{G}}$ und $g \circ f \cong \text{id}_{\mathcal{F}}$ gibt.

Sei \mathcal{F} eine über \mathcal{C} gefaserte Kategorie mit einem Zusammenhang. Für ein Objekt X in \mathcal{C} und zwei Objekte ξ, ξ' in $\mathcal{F}(X)$ betrachten wir den Funktor $\text{Mor}_X(\xi, \xi'): \mathcal{C}/X \rightarrow \underline{\text{Set}}$, der einem Objekt $f: Y \rightarrow X$ die Menge der Morphismen $\text{Mor}_{\mathcal{F}(Y)}(f^* \xi, f^* \xi')$ zuordnet. Dieser Funktor erlaubt eine elegante Reformulierung der Bedingung, dass \mathcal{F} ein Prestack ist.

Lemma A.67 ([52, Prop. 4.7]). (i) *Die gefaserte Kategorie \mathcal{F} ist genau dann ein Prestack über \mathcal{C} , wenn für alle Objekte X in \mathcal{C} und alle Objekte ξ, ξ' in $\mathcal{F}(X)$ der Funktor $\text{Mor}_X(\xi, \xi')$ eine Garbe auf \mathcal{C}/X ist.*

A. Abstiegstheorie

- (ii) \mathcal{F} ist genau dann ein Stack, wenn \mathcal{F} ein Prestack ist, und jedes Objekt mit Abstiegsdatum effektiv ist.

Etwas allgemeiner lässt sich für einen Morphismus $g: X_1 \rightarrow X_2$ in \mathcal{C} und Objekte ξ_i in $\mathcal{F}(X_i)$, $i = 1, 2$, der Funktor $\mathcal{M}or_g(\xi_1, \xi_2): \underline{\mathcal{M}or}(\mathcal{C})/g \rightarrow \underline{\mathcal{S}ets}$ definieren, indem man jedem Morphismus $(f_1, f_2): (h: Y_1 \rightarrow Y_2) \rightarrow g$ die Menge der Morphismen $f_1^*\xi_1 \rightarrow f_2^*\xi_2$ über h zuordnet. Aufgrund der natürlichen Isomorphie der Morphismen von $f_1^*\xi_1 \rightarrow f_2^*\xi_2$ über h mit den Morphismen $f_1^*\xi_1 \rightarrow f_1^*g^*\xi_2$ in $\mathcal{F}(Y_1)$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus von Funktoren

$$\mathcal{M}or_g(\xi_1, \xi_2) \cong \mathcal{M}or_{X_1}(\xi_1, f^*\xi_2) \circ \text{pr}_1 .$$

Lemma A.68. *Die gefaserte Kategorie $p: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ ist genau dann ein Prestack, wenn für alle $g: X_1 \rightarrow X_2$ in \mathcal{C} und alle $\xi_1 \in \mathcal{F}(X_1)$, $\xi_2 \in \mathcal{F}(X_2)$, der Funktor $\mathcal{M}or_g(\xi_1, \xi_2)$ eine Garbe auf $\underline{\mathcal{M}or}(\mathcal{C})/g$ ist.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Da nach Beispiel A.5 (ii) der Funktor $\text{pr}_1: \underline{\mathcal{M}or}(\mathcal{C})/f \rightarrow \mathcal{C}/X$ stetig ist, folgt die Aussage aus Lemma A.67 und dem Isomorphismus oben.

„ \Leftarrow “: Wir betrachten $f = \text{id}_X$ und $\eta = \xi'$. Dann ist $\mathcal{M}or_X(\xi, \xi')$ lediglich die Einschränkung von $\mathcal{M}or_f(\xi, \eta)$ auf Identitäten. \square

Wir erinnern den Leser an den Begriff einer stabilen Unterkategorie von $\underline{\mathcal{M}or}(\mathcal{C})$ aus Definition A.37.

Lemma A.69. *Es sei \mathcal{C} ein subkanonischer Situs und \mathcal{F} eine stabile Unterkategorie von $\underline{\mathcal{M}or}(\mathcal{C})$. Dann ist \mathcal{F} ein Prestack über \mathcal{C} .*

Beweis. Zunächst ist $\text{pr}_2: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ nach Lemma A.38 eine gefaserte Kategorie. Es seien nun $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ eine Überdeckung in \mathcal{C} , $\xi: U \rightarrow X$ und $\xi': V \rightarrow X$ zwei Objekte über X und $\alpha_i: U \times_X Y_i \rightarrow V \times_X Y_i$ Morphismen über Y_i , die die Kompatibilitätsbedingung (A.5) erfüllen. Die Kompositionen $\text{pr}_V \circ \alpha_i$ sind Elemente von $h_V(U \times_X Y_i)$, deren Rückzüge in $h_V(U \times_X Y_i \times_X Y_j)$ übereinstimmen für $(i, j) \in I^2$. Da h_V eine Garbe ist, definieren sie einen eindeutigen Morphismus $\alpha: U \rightarrow V$. Es bleibt zu zeigen, dass α ein Morphismus über X ist. Es gilt aber $\xi' \circ \alpha \circ \text{pr}_U = \xi' \circ \text{pr}_V \circ \alpha_i = f_i \circ \text{pr}_{Y_i} \circ \alpha_i = f_i \circ \text{pr}_{Y_i} = \xi \circ \text{pr}_U$, d.h. die Morphismen $\xi' \circ \alpha$ und ξ stimmen auf einer Überdeckung überein. Weil h_X als Garbe insbesondere separiert ist, gilt daher $\xi = \xi' \circ \alpha$. \square

Insbesondere folgt mit Proposition A.28 und Korollar A.30:

Korollar A.70. $\underline{\mathcal{M}or}(\underline{\mathcal{S}ch})$ und $\underline{\mathcal{M}or}(\underline{\mathcal{S}ch}/S)$ sind Prestacks über $\underline{\mathcal{S}ch}$ bzw. $\underline{\mathcal{S}ch}/S$.

Proposition A.71 ([52, Prop. 4.9]). *Seien \mathcal{C} ein Situs, $F: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\mathcal{S}ets}$ ein kontravarianter Funktor und \mathcal{F} die dadurch definierte in Mengen gefaserte Kategorie. Dann gilt*

- (i) \mathcal{F} ist genau dann ein Prestack, wenn F separiert ist.
(ii) \mathcal{F} ist genau dann ein Stack, wenn F eine Garbe ist.

Beweis. (i) Da die einzigen Morphismen in den Fasern Identitäten sind, ist der Funktor $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(\{U_i \rightarrow X\})$ immer treu. Die Aussage, dass $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(\{U_i \rightarrow X\})$ voll ist, ist äquivalent zur Injektivität der Abbildung $F(X) \rightarrow \prod F(U_i)$.

(ii) Die Isomorphismen eines Abstiegsdatums sind Identitäten. Die Effektivität der Abstiegsdaten ist daher äquivalent zur Exaktheit der Garbensequenz (A.1). \square

Mit Proposition A.28 und Korollar A.30 folgt sofort:

Korollar A.72. (i) Für jedes Schema X definiert der zu X assoziierte Funktor h_X einen Stack über $\underline{\text{Sch}}$.

(ii) Für jeden Morphismus $f: X \rightarrow S$ definiert der Funktor h_f einen Stack über $\underline{\text{Sch}}/S$ in der fppf-Topologie.

Wir bezeichnen die durch h_X definierte gefaserte Kategorie mit X . Ein Stack der zu einem durch ein Schema definierten Stack X isomorph ist, heißt *darstellbarer Stack*. Ähnlich wie im Beweis des Yoneda-Lemmas zeigt man:

Lemma A.73. Es sei X ein Schema und \mathcal{F} ein Stack. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien zwischen den Morphismen $X \rightarrow \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}(X)$.

A.6. Abstieg quasi-kohärenter Garben

In diesem Abschnitt wird die Abstiegstheorie für quasi-kohärente Garben entwickelt.

Es sei $\varphi: A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. Aus einem A -Modul M erhält man den B -Modul $M \otimes_A B$ und den Morphismus $i_M: M \rightarrow M \otimes_A B$. Aus diesem B -Modul erhält man die zwei $B \otimes_A B$ -Moduln $M \otimes_A B \otimes_A B$ und $B \otimes_A M \otimes_A B$. Sie sind verbunden durch den Isomorphismus von $B \otimes_A B$ -Moduln $\psi: M \otimes_A B \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A M \otimes_A B$ mit $\psi(m \otimes b \otimes b') = b \otimes m \otimes b'$. Dieser Isomorphismus erfüllt die Kozykelbedingung

$$\psi_{31} = \psi_{32} \circ \psi_{21}: M \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A M \otimes_A B$$

mit $\psi_{21} := \psi \otimes \text{id}_B$, $\psi_{32} := \text{id}_B \otimes \psi$ und $\psi_{31} := (\text{id}_B \otimes \tau) \circ (\psi \otimes \text{id}_B) \circ (\text{id}_{M \otimes_A B} \otimes \tau)$, wobei τ durch $\tau(b_1 \otimes b_2) := b_2 \otimes b_1$ gegeben ist.

Wir definieren nun die Kategorie $\underline{\text{Mod}}(A \rightarrow B)$: Ein Objekt ist ein Paar (N, ψ) aus einem B -Modul N und einem Isomorphismus $\psi: N \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A N$ von $B \otimes_A B$ -Moduln, der die Kozykelbedingung

$$\psi_{31} = \psi_{32} \circ \psi_{21}: N \otimes_A B \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A N$$

erfüllt. Ein Morphismus $\theta: (N, \psi) \rightarrow (N', \psi')$ ist ein Morphismus $\theta: N \rightarrow N'$, der mit ψ und ψ' kompatibel ist, also $\psi' \circ (\theta \otimes \text{id}_B) = (\text{id}_B \otimes \theta) \circ \psi$ erfüllt.

Wie oben beschrieben definiert ein A -Modul M ein Objekt (M, ψ) in $\underline{\text{Mod}}(A \rightarrow B)$. Ist $f: M \rightarrow M'$ ein Morphismus von A -Moduln, so ist der Morphismus $f \otimes \text{id}_B$ offensichtlich verträglich mit ψ . Somit erhalten wir einen Funktor $\underline{\text{Mod}}_A \rightarrow \underline{\text{Mod}}(A \rightarrow B)$.

Proposition A.74 ([52, Thm. 4.21]). Wenn $\varphi: A \rightarrow B$ treuflach ist, definiert der Funktor $\underline{\text{Mod}}_A \rightarrow \underline{\text{Mod}}(A \rightarrow B)$ eine Äquivalenz von Kategorien.

A. Abstiegstheorie

Beweis. (i) Wir zeigen zunächst, dass der Funktor volltreu ist. Seien dazu $f: M \rightarrow M'$ und $f': M \rightarrow M'$ zwei Morphismen von A -Moduln, so dass $(f \otimes \text{id}_B) = (f' \otimes \text{id}_B)$ gilt. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i_M} & M \otimes_A B & & \\ & & \downarrow (f-f') & & \downarrow 0 & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i_{M'}} & M' \otimes_A B & & \end{array}$$

Da $M' \rightarrow M' \otimes_A B$ injektiv ist, folgt $f = f'$.

Sei umgekehrt ein Morphismus $\theta: (M \otimes_A B, \psi) \rightarrow (M' \otimes_A B, \psi')$ gegeben. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i_M} & M \otimes_A B & \xrightarrow{\alpha - \psi^{-1} \circ \beta} & M \otimes_A B \otimes_A B \\ & & \downarrow f & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta \otimes \text{id}_B \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i_{M'}} & M' \otimes_A B & \xrightarrow{\alpha' - \psi'^{-1} \circ \beta'} & M' \otimes_A B \otimes_A B \end{array}$$

mit $\alpha: M \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B \otimes_A B$, $m \otimes b \mapsto m \otimes b \otimes 1$, $\beta: M \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A M \otimes_A B$, $m \otimes b \mapsto 1 \otimes m \otimes b$ und analogen Definitionen für α' , β' . Es ist kommutativ aufgrund der Kompatibilität von θ mit ψ und ψ' . Die Zeilen sind exakt nach Proposition A.26. Somit wird ein Morphismus $f: M \rightarrow M'$ mit $f(m) \otimes 1 = \theta(m \otimes 1)$ definiert. Da θ ein Homomorphismus von B -Moduln ist, gilt $(f \otimes \text{id}_B) = \theta$, der Funktor ist also voll.

(ii) Sei nun (N, φ) ein Objekt in $\text{Mod}(A \rightarrow B)$. Wir betrachten die Abbildungen $\alpha: N \rightarrow N \otimes_A B$, $n \mapsto n \otimes 1$ und $\beta: N \rightarrow B \otimes_A N$, $n \mapsto 1 \otimes n$. Wir setzen $M = \ker(\varphi \circ \alpha - \beta)$, wobei wir M als A -Modul auffassen. Die Elemente von M sind also die Elemente n aus N mit $\varphi(n \otimes 1) = 1 \otimes n$,

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\varphi \circ \alpha - \beta} B \otimes_A N.$$

Der Homomorphismus $\theta: M \otimes_A B \rightarrow N$, $m \otimes b \mapsto b \cdot m$ definiert einen Morphismus $(M \otimes_A B, \psi) \rightarrow (N, \varphi)$, da gilt

$$\begin{aligned} \varphi \circ (\theta \otimes \text{id}_B)(m \otimes b \otimes b') &= \varphi(bm \otimes b') \\ &= (b \otimes b')(1 \otimes m) \\ &= (\text{id}_B \otimes \theta)(b \otimes m \otimes b') \\ &= (\text{id}_B \otimes \theta) \circ \psi(m \otimes b \otimes b'). \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass θ ein Isomorphismus ist. Wir betrachten dazu das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M \otimes_A B & \xrightarrow{i \otimes \text{id}_B} & N \otimes_A B & \xrightarrow{(\varphi \circ \alpha - \beta) \otimes \text{id}_B} & B \otimes_A N \otimes_A B \\ & & \downarrow \theta & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_{32} \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{d_0} & B \otimes_A N & \xrightarrow{d_1} & B \otimes_A B \otimes_A N \end{array}$$

mit $d_0(n) = 1 \otimes n$, $d_1(b \otimes n) = (b \otimes 1 \otimes n - 1 \otimes b \otimes n)$. Da $A \rightarrow B$ treuflach ist, sind die Zeilen exakt. Weiter gilt $\varphi \circ (i \otimes \text{id}_B) = d_0 \circ \theta$, das heißt das erste Quadrat ist kommutativ. Außerdem berechnen wir $\varphi_{32} \circ (\beta \otimes \text{id}_B)(n \otimes b) = \varphi_{32}(1 \otimes n \otimes b)$ und

$$\begin{aligned} \varphi_{32} \circ ((\varphi \circ \alpha) \otimes \text{id}_B)(n \otimes b) &= \varphi_{32}(\varphi(n \otimes 1) \otimes b) \\ &= \varphi_{31}(n \otimes 1 \otimes b) \end{aligned}$$

mit der Kozykelbedingung, so dass die Differenz mit $d_1 \circ \varphi(n \otimes b) = \varphi_{31}(n \otimes 1 \otimes b) - \varphi_{32}(1 \otimes n \otimes b)$ übereinstimmt. Das Diagramm ist also kommutativ. Da φ und φ_{32} Isomorphismen sind, folgt aus dem Fünferlemma, dass auch θ ein Isomorphismus ist. \square

Die Kategorie der affinen Schemata ist antiäquivalent zur Kategorie der Ringe, und für einen Ring A ist die Kategorie der A -Moduln äquivalent zur Kategorie der quasi-kohärenten Garben auf $\text{Spec}(A)$. Ebenso sieht man, dass für einen Ringhomomorphismus $\varphi: A \rightarrow B$ die Kategorie $\text{QCoh}(\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A)$ äquivalent zu $\text{Mod}(A \rightarrow B)$ ist. Damit erhalten wir als Folgerung:

Korollar A.75. *Für jeden treuflachen Morphismus $f: U \rightarrow X$ affiner Schemata ist der Funktor $\text{QCoh}(X) \rightarrow \text{QCoh}(U \rightarrow X)$ eine Äquivalenz von Kategorien.*

Lemma A.76 ([52, Lemma 4.25]). *Es sei \mathcal{F} ein Stack über Sch mit der Zariski-Topologie. \mathcal{F} ist genau dann Stack über Sch mit der fppf-Topologie, wenn für jeden treuflachen lokal endlich präsentierbaren Ringhomomorphismus $\varphi: A \rightarrow B$ der Funktor $\mathcal{F}(\text{Spec } A) \rightarrow \mathcal{F}(\{\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A\})$ eine Äquivalenz von Kategorien ist.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Die Notwendigkeit der Bedingung folgt direkt aus der Definition.

„ \Leftarrow “: Für die Rückrichtung benötigen wir mehrere Schritte.

(i) \mathcal{F} ist ein Prestack in der fppf-Topologie: Sei X ein Schema und ξ und η zwei Objekte in $\mathcal{F}(X)$. Der Funktor $\text{Mor}_X(\xi, \eta): \text{Sch}/X \rightarrow \text{Set}$ ist nach Voraussetzung eine Garbe in der Zariski-Topologie. Die Tatsache, dass der Funktor volltreu ist, ist gerade die Voraussetzung, um Proposition A.25 anwenden zu dürfen. Danach ist $\text{Mor}_X(\xi, \eta)$ eine Garbe in der fppf-Topologie.

(ii) Sei $\{f_i: U_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ eine Überdeckung in der fppf-Topologie. Wir betrachten $V = \coprod_i U_i$ und den induzierten Morphismus $f: V \rightarrow X$. Da \mathcal{F} ein Stack in der Zariski-Topologie ist, gibt es Äquivalenzen $\mathcal{F}(V) \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ und $\mathcal{F}(V \times_X V) \rightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_X U_j)$. Dies ergibt eine Äquivalenz $\mathcal{F}(\{V \rightarrow X\}) \rightarrow \mathcal{F}(\{U_i \rightarrow X\})$ und der Funktor $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(\{U_i \rightarrow X\})$ faktorisiert über diese Äquivalenz. Daher ist der Funktor $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(\{V \rightarrow X\})$ genau dann eine Äquivalenz, wenn $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(\{U_i \rightarrow X\})$ eine ist.

(iii) Sei X affin und $f: V \rightarrow X$ ein treuflacher lokal endlich präsentierbarer Morphismus. Da f offen und X quasi-kompakt ist, gibt es eine endliche Menge von offenen affinen Unterschemata $V_i \subset V$, so dass $\coprod_{i \in I} V_i \rightarrow X$ surjektiv ist. Der induzierte Morphismus $U = \coprod_{i \in I} V_i \rightarrow X$ ist dann treuflach, lokal endlich präsentierbar und affin. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U \rightarrow X)$ eine Äquivalenz. Da $U \rightarrow X$ eine Verfeinerung von $V \rightarrow X$ ist, ist auch $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(V \rightarrow X)$ eine Äquivalenz.

(iv) Sei nun X beliebig und $f: V \rightarrow X$ ein treuflacher Morphismus. Wir wählen ein offene affine Überdeckung $\cup_{i \in I} U_i = X$ von X und setzen $V_i := f^{-1}(U_i)$. Ein Objekt (η, φ) in $\mathcal{F}(V \rightarrow U)$ liefert Objekte (η_i, φ_i) in $\mathcal{F}(V_i \rightarrow U_i)$, die nach Schritt (iii)

A. Abstiegstheorie

jeweils ein Objekt ξ_i in $\mathcal{F}(U_i)$ ergeben. Da \mathcal{F} nach Schritt (i) ein Prestack in der fppf-Topologie ist, gibt es auf $U_{ij} := U_i \cap U_j$ und $V_{ij} := f^{-1}(U_{ij})$ eindeutige Isomorphismen $\alpha_{ij}: \xi_j|_{U_{ij}} \rightarrow \xi_i|_{U_{ij}}$. Diese erfüllen die Kozykelbedingung, d.h. $(\{\xi_i\}, \{\alpha_{ij}\})$ ist ein Objekt mit Abstiegsdatum in der Zariski-Topologie. Nach Voraussetzung gibt es dann ein Objekt ξ in $\mathcal{F}(X)$ mit den gewünschten Eigenschaften. \square

Proposition A.77 ([52, Thm 4.23]). *Die Kategorie $\underline{\text{QCoh}}$ der quasikohärenten Garben ist ein Stack über $\underline{\text{Sch}}$ mit der fppf-Topologie.*

Beweis. Dies folgt aus dem vorangegangenen Lemma und Korollar A.75. \square

Wir bezeichnen mit $\underline{\text{QCohAlg}}(X)$ die Kategorie der quasi-kohärenten Garben auf einem Schema X , die ein \mathcal{O}_X -Algebrastruktur haben. Wir erhalten eine gefaserte Kategorie $\underline{\text{QCohAlg}}$ über $\underline{\text{Sch}}$. Zu einer \mathcal{O}_X -Algebra und einer Überdeckung von X erhält man ein Objekt mit Abstiegsdatum, das die Algebrastruktur respektiert. Eine Umkehrung dieser Aussage ist das folgende Lemma.

Lemma A.78 ([52, Lemma 4.30]). *Es sei $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ eine fppf-Überdeckung eines Schemas X .*

- (i) *Sind \mathcal{F} und \mathcal{G} quasi-kohärente Garben von \mathcal{O}_X -Algebren und ist $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus quasi-kohärenter Garben, so dass $f_i^* \alpha: f_i^* \mathcal{F} \rightarrow f_i^* \mathcal{G}$ ein Algebrahomomorphismus ist, $i \in I$, dann ist α ein Algebrahomomorphismus.*
- (ii) *Es sei \mathcal{F} eine quasikohärente Garbe auf X . Wenn jeder Rückzug $f_i^* \mathcal{F}$ eine Algebrastruktur besitzt, so dass alle Isomorphismen $\varphi_{ij}: \text{pr}_2^* f_j^* \mathcal{F} \rightarrow \text{pr}_1^* f_i^* \mathcal{F}$ Algebrahomomorphismen sind, dann gibt es eine eindeutige Algebrastruktur auf \mathcal{F} , die diese Algebrastruktur auf $f_i^* \mathcal{F}$ induziert.*

Beweis. (i) Die Morphismen $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\mu} \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$ und $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha \otimes \alpha} \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{\mu'} \mathcal{G}$ stimmen lokal in der fppf-Topologie überein. Da $\underline{\text{QCoh}}$ ein Stack ist, ist insbesondere $\text{Hom}_X(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, \mathcal{G})$ separiert. Die Morphismen stimmen daher auch global überein.

(ii) Nach Voraussetzung gibt es lokal Multiplikationen $\mu_i: f_i^* \mathcal{F} \otimes f_i^* \mathcal{F} \rightarrow f_i^* \mathcal{F}$, die mit den Isomorphismen verträglich sind, d.h. $\varphi_{ij} \circ \text{pr}_2^* \mu_j = \text{pr}_1^* \mu_i \circ (\varphi_{ij} \otimes \varphi_{ij})$. Da $\text{Hom}_X(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, \mathcal{F})$ eine Garbe ist, gibt es daher genau einen Morphismus $\mu: \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, der μ_i auf Y_i induziert.

Auf die gleiche Weise zeigt man, dass die neutralen Elemente $1_i: \mathcal{O}_{Y_i} \rightarrow f_i^* \mathcal{F}$ genau einen Morphismus $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$ mit den entsprechenden Eigenschaften ergeben, und dass die Multiplikation assoziativ und kommutativ ist. \square

Proposition A.79 ([52, Thm 4.29]). *Die Kategorie der quasi-kohärenten kommutativen Algebren $\underline{\text{QCohAlg}}$ bildet einen Stack über $\underline{\text{Sch}}$ mit der fppf-Topologie.*

A.6.1. Abstieg von Morphismen von Schemata

Es sei S ein Schema und $\underline{\text{AffMor}}(\underline{\text{Sch}}/S) = \underline{\text{AffMor}}(\underline{\text{Sch}})/\text{id}_S$ die Klasse der affinen Morphismen über S . Dies ist eine gefaserte Kategorie über $\underline{\text{Sch}}/S$.

Proposition A.80 ([52, Thm 4.33]). *Die gefaserte Kategorie $\underline{\text{AffMor}}(\underline{\text{Sch}}/S)$ ist ein Stack über $\underline{\text{Sch}}/S$ mit der fppf-Topologie.*

Beweis. (i) Zunächst ist $\underline{\text{Mor}}(\underline{\text{Sch}}/S)$ nach Korollar A.70 ein Prestack. Da der Rückzug eines affinen Morphismus wieder affin ist, folgt aus Beispiel A.65, (i), dass auch die volle Unterkategorie $\underline{\text{AffMor}}(\underline{\text{Sch}}/S)$ ein Prestack ist.

(ii) Es bleibt also zu zeigen, dass jedes Objekt mit Abstiegsdatum effektiv ist. Nun ist die Kategorie der kommutativen \mathcal{O}_X -Algebren antiäquivalent zur Kategorie der affinen Morphismen nach X ist (siehe [18, II, Exercise. 5.17]). Daher ergibt sich diese Aussage aus Proposition A.79. \square

Definition A.81. Es sei \mathcal{C} ein Situs und \mathcal{F} eine gefaserte Kategorie. Eine stabile Unterkategorie \mathcal{G} von \mathcal{F} heißt *lokal*, wenn gilt: Ein Objekt ξ in $\mathcal{F}(X)$, zu dem eine Überdeckung $\{f_i: V_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ von X existiert, so dass für alle $i \in I$ $f_i^*\xi$ ein Objekt in $\mathcal{G}(V_i)$ ist, liegt selbst in $\mathcal{G}(X)$.

Lemma A.82. *Wenn \mathcal{F} ein Stack über \mathcal{C} ist, dann ist jede lokale Unterkategorie \mathcal{G} von \mathcal{F} ein Stack.*

Beweis. Nach Lemma A.38 ist \mathcal{G} eine gefaserte Kategorie. Da \mathcal{G} eine volle Unterkategorie ist, ist \mathcal{G} nach Beispiel A.65, (i), auch ein Prestack. Die Definition einer lokalen Unterkategorie stellt sicher, dass jedes Objekt mit Abstiegsdatum effektiv ist. \square

Im allgemeinen ist ein Objekt mit Abstiegsdatum projektiver Morphismen nicht effektiv. Man muss hierfür voraussetzen, dass alle Objekte mit einem amplem Geradenbündel ausgestattet sind.

Proposition A.83 ([52, Thm. 4.38]). *Es sei \mathcal{F} eine lokale Unterkategorie von flachen, eigentlichen Morphismen aus $\underline{\text{Mor}}(\underline{\text{Sch}}/S)$ mit der fppf-Topologie mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Zu jedem Objekt $\xi: U \rightarrow X$ in \mathcal{F} existiert ein Geradenbündel L_ξ auf U , das relativ ample bezüglich ξ ist.*
- (ii) *Zu jedem kartesischen Morphismus $(f_1, f_2): (\eta: V \rightarrow Y) \rightarrow (\xi: U \rightarrow X)$ in \mathcal{F} gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\rho_f: f_1^*L_\xi \rightarrow L_{f_2^*\xi}$.*

Dann ist \mathcal{F} ein Stack.

Beweis. Man sieht leicht, dass \mathcal{F} ein Stack in der Zariski-Topologie ist. Wir prüfen das Kriterium aus Lemma A.76: Zunächst folgt aus Lemma A.69, dass \mathcal{F} ein Prestack ist. Es sei nun $f: Y \rightarrow X$ ein flacher, surjektiver Morphismus, $\eta: V \rightarrow Y$ ein Objekt in \mathcal{F} und $\psi: \text{pr}_1^*V \rightarrow \text{pr}_2^*V$ ein Isomorphismus über $Y \times_X Y$, der die Kozykelbedingung erfüllt.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es natürliche Isomorphismen $\rho_f^{\otimes n}: f^*L_\eta^{\otimes n} \rightarrow L_\xi^{\otimes n}$. Man kann daher annehmen, dass die Geradenbündel L_η sehr ample sind und $h^1(\eta^{-1}(y), L_\eta) = 0$ für jeden Punkt $y \in Y$ gilt. Wir betrachten nun zu $\xi: U \rightarrow X$ in \mathcal{F} die Garbe $M_\xi := \xi_*L_\xi$ auf X . Nach Annahme erhalten wir eine abgeschlossene Einbettung $V \rightarrow \mathbb{P}(M_\eta)$. Aufgrund des Basiswechsel- und Kohomologiesatz gibt es außerdem induzierte Isomorphismen $\sigma_g: g^*M_\eta \rightarrow M_{g^*\eta}$. Der Isomorphismus ψ induziert einen Isomorphismus $\varphi: \text{pr}_1^*M_\eta \rightarrow$

$\text{pr}_2^* M_\eta$ auf $V \times_X V$, der die Kozykelbedingung erfüllt. Nach Proposition A.77 gibt es eine Garbe M_ξ auf X , deren Abstiegsdatum isomorph zu (M_η, φ) ist. Wir setzen $P := \mathbb{P}(M_\xi)$. Dann ist V ein abgeschlossenes Unterschema von $Y \times_X P = \mathbb{P}(M_\eta)$, das stabil unter dem kanonischen Morphismus $Y \times_X P \times_X Y \rightarrow Y \times_X Y \times_X P$ ist.

Da f surjektiv ist, gibt es eine Menge $U \subset P$ mit $V = Y \times_X U$. Nun ist $\text{pr}_2: Y \times_X P \rightarrow P$ flach und surjektiv, weil $f: V \rightarrow X$ flach und surjektiv ist. Da pr_2 nach Lemma A.11 universell offen ist, ist pr_2 eine Submersion. Also ist $U \subset \mathbb{P}(M_\xi)$ ein abgeschlossenes Unterschema. Da \mathcal{F} lokal ist, liegt $\xi: U \rightarrow X$ in $\mathcal{F}(X)$. \square

A.7. Äquivariante Stacks

Es sei \mathcal{C} ein Situs und $F: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Grp}}$ ein Funktor. Wir erhalten auf der Kategorie \mathcal{C}^F aus Definition A.55 eine Topologie, indem wir einem Objekt X alle Überdeckungen zuordnen, deren Morphismen äquivariant sind. Da Rückzüge äquivarianter Morphismen nach Beispiel A.58 wieder äquivariant sind, definiert diese Zuordnung tatsächlich eine Grothendieck-Topologie.

Es sei nun $p: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ eine gefaserte Kategorie, $F': \mathcal{F} \rightarrow \underline{\text{Grp}}$ ein Funktor und $\Phi: F' \rightarrow F \circ p$ eine natürliche Transformation. Wir betrachten die gefaserte Kategorie der äquivarianten Objekte $\mathcal{F}_F^{F'}$ aus Proposition A.57.

Lemma A.84. *Wir betrachten ein kommutatives Quadrat*

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad} & Z \\ h' \downarrow & \scriptstyle f' & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \scriptstyle f & \end{array}$$

in \mathcal{C} , wobei X und Y mit einer F -Wirkung versehen seien und f äquivariant sei. Weiter sei ξ in $\mathcal{F}(X)$ ein äquivariantes Objekt. Dann gilt für jeden Morphismus $\psi: \zeta \rightarrow \xi$ über h und jedes $g_1 \in F'(\zeta)$

$$(f', f)_{h'}^* \rho_\xi(g_1, \psi) = \rho_{f^* \xi}(g_2, (f', f)_{h'}^* \psi),$$

mit $g_2 := F'(\varphi')(g_1)$ und $h'' := \rho_Y(\Phi(f'^* \zeta)(g_2), h')$, wobei $\varphi: f^* \xi \rightarrow \xi$ und $\varphi': f'^* \zeta \rightarrow \zeta$ kartesische Morphismen über f bzw. f' sind.

Beweis. Mit der Definition der Wirkung aus Proposition A.57 finden wir

$$\begin{aligned} \rho_{f^* \xi}(g_2, (f', f)_{h'}^* \psi) &= (\text{id}_T, f)_{h''}^* \rho_\xi(g_2, \varphi \circ (f', f)_{h'}^* \psi) \\ &= (\text{id}_T, f)_{h''}^* \rho_\xi(g_2, \psi \circ \varphi') \\ &= (\text{id}_T, f)_{h''}^* (\rho_\xi(g_1, \psi) \circ \varphi') \\ &= (f', f)_{h'}^* \rho_\xi(g_1, \psi). \end{aligned}$$

\square

Proposition A.85. *Es sei \mathcal{C} ein Situs, $p: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ ein (Pre)-Stack und $F: \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Grp}}$, $F': \mathcal{F} \rightarrow \underline{\text{Grp}}$ zwei kontravariante Funktoren mit einer natürlichen Transformation $\Phi: F' \circ p \rightarrow F$. Dann ist $\mathcal{F}_F^{F'}$ ein (Pre)-Stack über \mathcal{C}^F .*

Beweis. Nach Proposition A.57 ist $\mathcal{F}_F^{F'}$ eine gefaserte Kategorie. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{F}_F^{F'}$ ein Prestack ist: Die Separiertheit ist dabei klar. Seien nun ξ, ξ' äquivariante Objekte über X , $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ eine äquivariante Überdeckung von X und $\alpha_i: f_i^* \xi \rightarrow f_i^* \xi'$ äquivariante Morphismen, die die Kompatibilitätsbedingung erfüllen. Da \mathcal{F} ein Prestack ist, definiert dies einen eindeutigen Morphismus $\alpha: \xi \rightarrow \xi'$ über id_X . Es ist zu zeigen, dass α äquivariant ist. Sei dazu $\psi: \zeta \rightarrow \xi$ ein Morphismus über $h: Z \rightarrow X$ und $g \in F'(\zeta)$. Wir betrachten die Morphismen $f'_i: Y_i \times_X Z \rightarrow Z$ und $h'_i: Y_i \times_X Z \rightarrow Y_i$. Es seien $\varphi'_i: f_i^* \zeta \rightarrow \zeta$ kartesische Morphismen über $f'_i, g_i := F'(\varphi'_i)(g)$ und $h'' := \rho_{Y_i}(\Phi(f_i^* \zeta)(g_i), h')$. Mithilfe von Lemma A.84 berechnen wir

$$\begin{aligned} (f'_i, f_i)_{h''}^* (\rho_{\xi'}(g, \alpha \circ \psi)) &= \rho_{f_i^* \xi'}(g_i, (f'_i, f_i)_{h'}^* (\alpha \circ \psi)) \\ &= \rho_{f_i^* \xi'}(g_i, \alpha_i \circ (f'_i, f_i)_{h'}^* (\psi)) \end{aligned}$$

sowie

$$(f'_i, f_i)_{h'}^* (\alpha \circ \rho_{\xi}(g, \psi)) = \alpha_i \circ \rho_{f_i^* \xi}(g_i, (f'_i, f_i)_{h'}^* \psi).$$

Aus der Äquivarianz von α_i und der Separiertheit von \mathcal{F} folgt nun $\rho_{\xi'}(g, \alpha \circ \psi) = \alpha \circ \rho_{\xi}(g, \psi)$.

$\mathcal{F}_F^{F'}$ ist ein Stack: Es sei $\{f_i: Y_i \rightarrow X \mid i \in I\}$ eine äquivariante Überdeckung und $(\{\xi_i\}, \{\varphi_{ij}\})$ ein äquivariantes Objekt mit Abstiegsdatum. Da \mathcal{F} ein Stack ist, gibt es ein Objekt ξ über X , dessen Abstiegsdatum isomorph zum gegebenen ist. Wir konstruieren nun eine F' -Wirkung auf ξ : Sei $\psi: \zeta \rightarrow \xi$ ein Morphismus über $h: Z \rightarrow X$ und $g \in F'(\zeta)$. Wir betrachten die Überdeckung $(f'_i, f_i): (Y_i \times_X Z \rightarrow Z) \rightarrow h$ und die Rückzüge $\varphi'_i: f_i^* \zeta \rightarrow \zeta$. Die Morphismen $\psi_i := \rho_{\xi_i}(g_i, (f'_i, f_i)_{h'}^* \psi)$ über $\rho_{Y_i}(\Phi(f_i^* \zeta)(g_i), h')$ mit $g_i := F'(\varphi'_i)(g)$ sind dann kompatibel mit den Übergangsfunktionen φ_{ij} . In der Tat berechnet man mit Lemma A.84 und der Äquivarianz von $\varphi_{ij}, \text{pr}_1: Y_i \times_X Y_j \rightarrow Y_i$ und $\text{pr}_2: Y_i \times_X Y_j \rightarrow Y_j$

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} \circ (\text{pr}_{23}, \text{pr}_2)_{\text{pr}_{12}}^* (\tilde{\psi}_j) &= \varphi_{ij} \circ \rho_{\text{pr}_2^* f_j^* \xi}(F'(\text{pr}_{23})(g_j), (f'_j \circ \text{pr}_{23}, f_j \circ \text{pr}_{23})_{\text{pr}_{12}}^* \psi) \\ &= \rho_{\text{pr}_1^* f_i^* \xi}(F'(\text{pr}_{13})(g_i), (f'_i \circ \text{pr}_1, f_i \circ \text{pr}_1)_{\text{pr}_{13}}^* \psi) \\ &= (\text{pr}_{13}, \text{pr}_1)_{\text{pr}_{12}}^* (\rho_{f_i^* \xi_i}(g, (f'_i, f_i)^* \psi)) \\ &= (\text{pr}_{13}, \text{pr}_1)_{\text{pr}_{12}}^* (\tilde{\psi}_i). \end{aligned}$$

Somit definieren die Morphismen $\tilde{\psi}_i$ einen Morphismus $\tilde{\psi}: \zeta \rightarrow \xi$ über $\rho_X(g, h)$, und wir setzen $\rho_{\xi}(g, \psi) := \tilde{\psi}$. Es ist klar, dass dies eine F' -Wirkung auf ξ definiert, die mit ρ_X verträglich ist, und die Eigenschaft hat, dass $f_i: \xi_i \rightarrow \xi$ äquivariant ist

$$\begin{array}{ccccc} \text{pr}_1^* f'^* \zeta & \longrightarrow & f'^* \zeta & \longrightarrow & \zeta \\ & \searrow & \searrow & & \searrow \\ & \text{pr}_1^* f^* \xi & \longrightarrow & f^* \xi & \longrightarrow \xi \\ \\ Y \times_X Y \times_X Z & \longrightarrow & Y \times_X Z & \xrightarrow{f'} & Z \\ & \searrow & \searrow & & \searrow \\ & Y \times_X Y & \xrightarrow{\text{pr}_1} & Y & \xrightarrow{f} X \end{array}$$

□

A.7.1. Gefaserte Systeme

Wir betrachten nun den Fall, dass $F = \{*\}$ der triviale Funktor ist. Dann gilt $\mathcal{C}^F \cong \mathcal{C}$ und es gibt genau eine natürliche Transformation $\Phi: F' \rightarrow F \circ p$. Ein äquivariantes Objekt ξ ist ein Objekt mit der Eigenschaft, dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} F' \times h_\xi & \xrightarrow{\rho_\xi} & h_\xi \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow p \\ h_\xi & \xrightarrow{p} & h_{p(\xi)} \circ p. \end{array}$$

Wir bezeichnen ein äquivariantes Objekt als *gefasertes System*. Ein Morphismus gefaserner Systeme ist ein äquivarianter Morphismus. Für die Kategorie der gefaserten Systeme $\mathcal{F}^{F'} := \mathcal{F}_{\{*\}}^{F'}$ folgt:

Korollar A.86. *Wenn \mathcal{F} ein Prestack bzw. ein Stack über \mathcal{C} ist, dann ist auch $\mathcal{F}^{F'}$ ein Prestack bzw. ein Stack über \mathcal{C} .*

Literaturverzeichnis

- [1] M. Artin, A. Grothendieck, and J.L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas: Séminaire de géométrie algébrique du bois-marie 1963/64-SGA 4. exposés I à IV, théorie des topos*, Springer, 1972.
- [2] M.E. Bate, B. Martin, G. Roehrl, and R. Tange, *Closed orbits and uniform s -instability in geometric invariant theory*, Transactions of the AMS **365** (2013), 3643–3673.
- [3] U. Bhosle and A. Ramanathan, *Moduli of parabolic G -bundles on curves*, Math. Z. **202** (1989), no. 2, 161–180.
- [4] A. Borel, *Linear algebraic groups*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [5] C. De Concini and C. Procesi, *Complete symmetric varieties*, Invariant theory (Montecatini, 1982), Lecture Notes in Math., vol. 996, Springer, Berlin, 1983, pp. 1–44.
- [6] P. Deligne, *Cohomologie étale, séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA 4 1/2, avec la collaboration de J.F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.L. Verdier*, Lecture Notes in Mathematics **569**.
- [7] S. K. Donaldson, *Twisted harmonic maps and the self-duality equations*, Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), no. 1, 127–131.
- [8] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991, A first course, Readings in Mathematics.
- [9] D. Gieseker, *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface*, Annals of Mathematics **106** (1977), no. 1, pp. 45–60.
- [10] T. L. Gomez and I. Sols, *Stable tensors and moduli space of orthogonal sheaves*, ArXiv Mathematics e-prints (2001).
- [11] A. Grothendieck, *Torsion homologique et sections rationnelles*, Anneaux de Chow et applications, Séminaire Chevalley, 2e année, Secrétariat mathématique, Paris (1958).
- [12] ———, *Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert*, Séminaire Bourbaki **6** (1960-1961), 249–276 (fre).
- [13] ———, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1964), no. 20, 259.

- [14] ———, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1965), no. 24, 231.
- [15] ———, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1966), no. 28, 255.
- [16] ———, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1967), no. 32, 361.
- [17] W.J. Haboush, *Reductive groups are geometrically reductive*, Annals of Mathematics **102** (1975), 67–83.
- [18] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [19] ———, *Stable reflexive sheaves*, Math. Ann. **254** (1980), no. 2, 121–176.
- [20] J. Heinloth and A. H. W. Schmitt, *The cohomology rings of moduli stacks of principal bundles over curves*, Doc. Math. **15** (2010), 423–488.
- [21] D. Hilbert, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen.*, Math. Ann. **36** (1890), 473–534 (German).
- [22] N. J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), no. 1, 59–126.
- [23] W.V.D. Hodge and D. Pedoe, *Methods of algebraic geometry*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1994.
- [24] D. Huybrechts and M. Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, second ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 2010.
- [25] G.R. Kempf, *Instability in invariant theory*, Annals of Mathematics **108** (1978), no. 2, pp. 299–316.
- [26] H. Konno, *Construction of the moduli space of stable parabolic Higgs bundles on a Riemann surface*, Journal of the Mathematical Society of Japan **45** (1993), no. 2, 253–276.
- [27] L. Lafforgue, *Une compactification des champs classifiant les chtoucas de drinfeld*, Journal of the American Mathematical Society **11** (1998), no. 4, 1001–1036.
- [28] J. Le Potier, *Lectures on vector bundles*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, Translated by A. Maciocia.
- [29] D. Luna, *Slices étales*, Sur les groupes algébriques, Soc. Math. France, Paris, 1973, pp. 81–105. Bull. Soc. Math. France, Paris, Mémoire 33.

- [30] V. B. Mehta and C. S. Seshadri, *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures*, Mathematische Annalen **248** (1980), no. 3, 205–239.
- [31] D. Mumford, *Projective invariants of projective structures and applications*, 1963 Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1962, pp. 526–530.
- [32] ———, *Lectures on curves on an algebraic surface*, With a section by G. M. Bergman. Annals of Mathematics Studies, No. 59, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1966.
- [33] ———, *The red book of varieties and schemes*, expanded ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1358, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello.
- [34] D. Mumford, J. Fogarty, and F. C. Kirwan, *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, 1994.
- [35] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact riemann surface*, Annals of Mathematics **82** (1965), no. 3, pp. 540–567.
- [36] P. E. Newstead, *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, vol. 51, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.
- [37] T. Ngô Dac, *Compactification des champs de chtoucas et théorie géométrique des invariants*, Astérisque (2007), no. 313, 124.
- [38] N. Nitsure, *Moduli space of semistable pairs on a curve*, Proceedings of the London Mathematical Society **3** (1991), no. 2, 275–300.
- [39] ———, *Construction of Hilbert and Quot schemes*, Fundamental algebraic geometry, Math. Surveys Monogr., vol. 123, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 105–137.
- [40] S. Ramanan and A. Ramanathan, *Some remarks on the instability flag*, Tohoku Mathematical Journal **36** (1984), no. 2, 269–291.
- [41] A. Ramanathan, *Stable principal bundles on a compact Riemann surface.*, Math. Ann. **213** (1975), 129–152.
- [42] ———, *Moduli for principal bundles over algebraic curves. I.*, Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci. **106** (1996), no. 3, 301–328.
- [43] ———, *Moduli for principal bundles over algebraic curves. II.*, Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci. **106** (1996), no. 4, 421–449.
- [44] W.F. Santos and A. Rittatore, *Actions and invariants of algebraic groups*, Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics, Taylor & Francis, 2010.
- [45] A. H. W. Schmitt, *A universal construction for moduli spaces of decorated vector bundles over curves.*, Transform. Groups **9** (2004), no. 2, 167–209.

- [46] ———, *Global boundedness for decorated sheaves*, International Mathematics Research Notices **2004** (2004), no. 68, 3637–3671.
- [47] ———, *Geometric invariant theory and decorated principal bundles*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.
- [48] Alexander Schmitt, *Projective moduli for Hitchin pairs*, Internat. J. Math. **9** (1998), no. 1, 107–118.
- [49] J.-P. Serre, *Espace fibrés algébrique*, Séminaire Claude Chevalley **3** (1958), 1–37 (fre), Reprint: Documents Mathématiques **1** (2008), 107-40.
- [50] C. S. Seshadri and J. M. Drezet, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques: conférences à l'E.N.S., juin 1980*, Astérisque, no. 95-96, Société mathématique de France, 1982.
- [51] C. T. Simpson, *Harmonic bundles on noncompact curves*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), no. 3, 713–770.
- [52] A. Vistoli, *Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, Fundamental algebraic geometry, Math. Surveys Monogr., vol. 123, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 1–104.
- [53] K. Yokogawa, *Compactification of moduli of parabolic sheaves and moduli of parabolic Higgs sheaves*, J. Math. Kyoto Univ. **33** (1993), no. 2, 451–504.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich meinem Betreuer Alexander Schmitt für seine Unterstützung danken. Weiterhin bedanke ich mich bei Bernd Martin für seine Hilfe.

Viele mathematische Diskussionen mit Klaus Altmann, Norbert Hoffmann, Victoria Hoskins und Anna Wißdorf haben zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen. Insbesondere danke ich Michel Brion für seine Hinweise zur wundervollen Kompaktifizierung.

Ich bedanke mich außerdem bei allen jetzigen und ehemaligen Mitgliedern der Arbeitsgruppen Komplexe Analysis und Algebra für ihre moralische Unterstützung und Hilfsbereitschaft.

Nicht zuletzt möchte ich meiner Familie für ihre Fürsorglichkeit und ihr Vertrauen danken.

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Konstruktion eines groben Modulraums für Prinzipalbündel auf einer glatten projektiven Kurve X mit Dekoration über einem Punkt x_0 . Diese Dekoration kann als verallgemeinerte parabolische Struktur aufgefasst werden.

Der Strategie aus [47] folgend betrachten wir in Kapitel 6 zunächst Vektorbündel mit allgemeiner globaler und lokaler Dekoration: Es seien ρ, σ zwei homogene Darstellungen von $GL(r)$. Ein σ -dekoriertes ρ -Swamp ist ein Vektorbündel E vom Rang r zusammen mit einem Schnitt $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}(E_\rho)$ und einem Punkt s in $\mathbb{P}(E_\sigma)$ über x_0 . Wir definieren zunächst eine von Parametern δ_1 und $\delta_2 \in \mathbb{Q}_{>0}$ abhängige Stabilitätsbedingung für diese Objekte. Anschließend konstruieren wir einen Parameterraum mit lokal universeller Eigenschaft und verträglicher $SL(n)$ -Wirkung. Wir zeigen, dass ein Punkt in diesem Raum genau dann GIT-(semi)stabil ist, wenn der entsprechende dekorierte Swamp (semi)stabil ist. Schließlich erhält man den (projektiven) groben Modulraum der (semi)stabilen dekorierten Swamps als GIT-Quotienten des Parameterraums. Im Hinblick auf die spätere Anwendung auf die Konstruktion des Modulraums dekoriertes Prinzipalbündel formulieren wir alle diese Ergebnisse für dekorierte Tupel von Vektorbündeln, genannt σ -dekorierte ρ -Tumps.

Als Spezialfall erhält man sowohl die Tumps aus [47] als auch die parabolischen Vektorbündel aus [30]. Eine weitere Anwendung sind die Vektorbündel mit Niveaustuktur, die Ngô Dac verwendet hat, um eine Kompaktifizierung des Raums der Shtukas mithilfe der GIT zu konstruieren [37].

Im Anschluss untersuchen wir das Verhalten der Stabilitätsbedingung für große δ_1 . Dies führt auf den Begriff der *asymptotischen* (δ_2, κ, χ) -Stabilität. In Kapitel 7 zeigen wir, dass ein $\Delta > 0$ existiert, so dass ein dekoriertes Tump genau dann asymptotisch (δ_2, κ, χ) -(semi)stabil ist, wenn er für alle $\delta_1 > \Delta$ auch $(\delta_1, \delta_2, \kappa, \chi)$ -(semi)stabil ist. Dieses Ergebnis erlaubt es, auch den Modulraum der (semi)stabilen parabolischen Higgs-Bündel als abgeschlossenen Unterraum unseres Modulraums zu konstruieren.

In Kapitel 8 kommen wir schließlich zu den Prinzipalbündeln: Es sei G eine reduktive Gruppe und $\sigma : G \rightarrow GL(r)$ eine Darstellung. Ein σ -dekoriertes Prinzipalbündel ist ein G -Bündel P zusammen mit einem Punkt $s \in \mathbb{P}(P \times^\sigma \mathbb{C}^r)_{\{x_0\}}$. Zunächst definieren wir ein von Parametern $\delta \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\chi \in X^*(G)$ abhängiges Stabilitätskriterium. Mithilfe der dekorierten Pseudo-Prinzipalbündel führen wir die stabilen σ -dekorierten Prinzipalbündel auf asymptotisch stabile dekorierte Tumps zurück. Dies erlaubt schließlich die Konstruktion des (projektiven) groben Modulraums als GIT-Quotienten eines Parameterraums mit lokal universeller Familie. Als Spezialfall erhält man die parabolischen Prinzipalbündel [3, 20].

Für eine halbeinfache Lie-Gruppe G und spezielle Wahl von σ erhält man die G -Bündel mit Niveaustuktur. Wir berechnen explizite Stabilitätsbedingungen für die orthogonale und die symplektische Gruppe. Ergebnisse von Ngô Dac in dieser Richtung sind angekündigt aber bisher nicht erschienen.