

Kapitel 6

Hadronmassen

In diesem Kapitel werden wir die Massen verschiedener Hadronen sowie die Zerfallskonstante des Pions berechnen. Die Form der Abhängigkeit dieser Hadronmassen von den Quarkmassen wird durch die chirale Symmetrie festgelegt; da wir mit einer Gitterdiskretisierung arbeiten, die die chirale Symmetrie respektiert, können wir unsere Daten direkt mit den Formeln der chiralen (Kontinuums-)Störungstheorie vergleichen, ohne vorher eine Kontinuumsextrapolation vornehmen zu müssen.

Die Parameter der Eichfeldkonfigurationen, auf denen wir die in diesem Kapitel dargestellten Ergebnisse bestimmt haben, sind in Tabelle 6.1 zusammengefaßt.

6.1 Pion

6.1.1 Masse

Die spontane Brechung der chiralen $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie zur Vektoruntergruppe $SU(2)_V$ hat zur Folge, daß das Spektrum der QCD drei pseudoskalare leichte Teilchen (Pseudo-Goldstone-Bosonen) enthält, die Pionen. Nach der Gell-Mann–Oakes–Renner–Relation [64] ist

$$m_\pi^2 \propto m_q. \quad (6.1)$$

Systematisch läßt sich die Abhängigkeit der Pionmasse von der Quarkmasse mit Hilfe der chiralen Störungstheorie beschreiben; Gleichung (6.1) ergibt sich dabei als führender Term.

Wir betrachten hier nur den Fall massenentarteter Up- und Down-Quarks, so daß auch die drei Pionen massenentartet sind. In der Valenzquarknäherung lautet die Vorhersage

Volumen	am_q	Anzahl Konfigurationen
$24^3 48$	0.0112, 0.0196, 0.028, 0.056, 0.098, 0.14	200

Tabelle 6.1: Zur Berechnung der Hadronmassen verwendete Parameter.

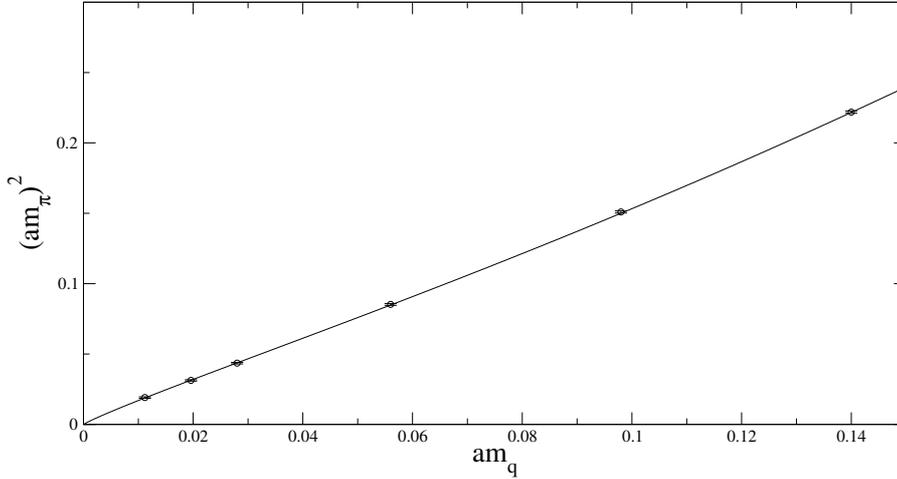


Abbildung 6.1: Das Quadrat der Pionmasse in Abhängigkeit von der Quarkmasse bei $\beta = 8.45$.

der chiralen Störungstheorie für die Pionmasse

$$m_\pi^2 = Am_q \left(1 - \delta \left(1 + \log \frac{Am_q}{\Lambda_\chi^2} \right) \right) + bm_q^2 \quad (6.2)$$

mit

$$A = \frac{2\Sigma}{f^2}. \quad (6.3)$$

Die Konstante b ist eine Linearkombination der in der nächsten Ordnung der chiralen Störungstheorie auftretenden Kopplungskonstanten. Formel (6.2) gilt im unendlichen Volumen; für endliches Volumen treten Korrekturen der Größenordnung $e^{-m_\pi L}$ auf. Da diese Korrekturen deutlich kleiner als unsere statistischen Fehler sind, werden wir diese Korrekturen ignorieren.

In Abb. 6.1 ist m_π^2 in Abhängigkeit von der Quarkmasse zusammen mit einem Fit an Gl. (6.2) dargestellt; die Fitparameter sind

$$\delta = 0.16(2) \quad (6.4)$$

$$A = 2090(90) \text{ MeV}. \quad (6.5)$$

Um die logarithmische Abweichung in (6.2) von einem linearen Verhalten deutlicher zu machen, ist in Abb. 6.2 das Verhältnis m_π/m_q^2 dargestellt.

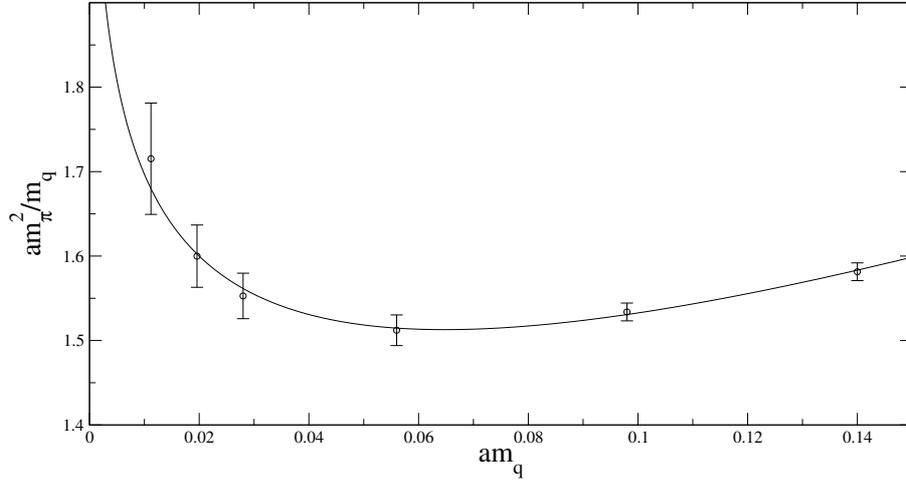


Abbildung 6.2: Das Verhältnis $\frac{m_\pi^2}{m_q^2}$ bei $\beta = 8.45$ zusammen mit einem Fit an Gl. (6.2).

6.1.2 Pion-Zerfallskonstante

Das Pion ist kein stabiles Teilchen; das geladene Pion kann nur über die schwache Wechselwirkung zerfallen. Der bei weitem häufigste Zerfallsprozeß ist

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu, \quad (6.6)$$

der durch ein W^+ -Boson vermittelt wird (Abb. 6.3).

Die Zerfallsrate für einen solchen Prozeß ist

$$\Gamma = (G_F V_{ud} f_\pi)^2 \frac{m_\pi m_\mu^2}{8\pi} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2 \quad (6.7)$$

mit der Fermi-Konstanten G_F und dem Element V_{ud} der CKM-Matrix. Die Pionzerfallskonstante f_π ist durch

$$\langle 0 | A_\mu^a | \pi^b \rangle = \delta^{ab} f_\pi p_\mu \quad (6.8)$$

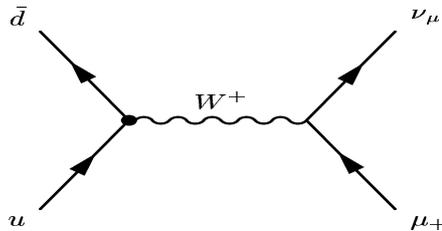


Abbildung 6.3: Zerfall des geladenen Pions $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$.

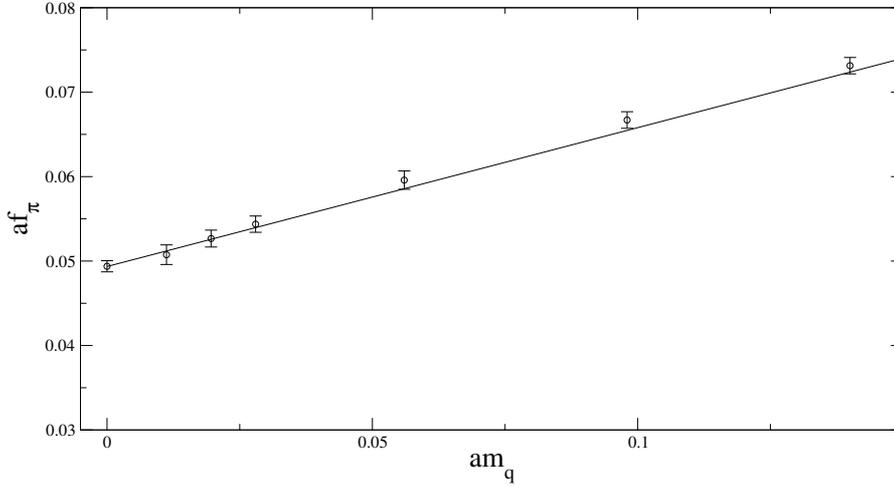


Abbildung 6.4: Die Pion-Zerfallskonstante f_π in Abhängigkeit von der Quarkmasse bei $\beta = 8.45$.

definiert (a,b sind Isospin-Indizes).

Das Matrixelement $\langle 0 | A_\mu^a | \pi^b \rangle$ kann auf dem Gitter aus den Amplituden geeigneter Zweipunktfunktionen gewonnen werden. Unter Benutzung der aus der Wardidentität des erhaltenen Axialvektorstromes (Gl. (3.55)) folgenden Beziehung

$$p_\mu \langle 0 | \hat{A}_\mu^a | \pi^b \rangle = 2m_q \langle 0 | P^a | \pi^b \rangle \quad (6.9)$$

erhalten wir folgende Gleichung für f_π :

$$f_\pi = \frac{2m_q}{m_\pi^2} \langle 0 | P^3 | \pi^3 \rangle. \quad (6.10)$$

Die Konstante f , die in der Lagrangedichte \mathcal{L} der chiralen Störungstheorie in niedrigster Ordnung vorkommt, ist identisch mit der Pion-Zerfallskonstante im chiralen Limes $m_q \rightarrow 0$. In nächster Ordnung sagt die chirale Störungstheorie einen linearen Zusammenhang zwischen f_π und m_q^2 voraus:

$$f_\pi(m_q) = f + Lm_q, \quad (6.11)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor L eine Kombination aus den in der nächsten Ordnung (p^4) der chiralen Störungstheorie auftretenden Kopplungskonstanten ist. Für die Valenzquarknäherung bleibt (6.11) gültig, d. h. es treten keine chiralen Logarithmen auf.

In Abb. 6.4 haben wir die gemessene Pionzerfallskonstante in Abhängigkeit von der Quarkmasse dargestellt; ein Fit an Gl. (6.11) liefert $af = 0.0494(7)$. Da f_π im chiralen Limes

kein nichtanalytisches Verhalten aufweist (im Gegensatz zu den Massen des Vektormesons und des Nukleons), eignet sich diese Größe gut dazu, den physikalischen Gitterabstand zu bestimmen. Aus obigem Wert erhalten wir $a = 0.1055(15)$ fm.

6.2 Vektormeson

Die nächstleichteren Teilchen nach den pseudoskalaren Mesonen sind die Vektormesonen mit den Quantenzahlen $J^{PC} = 1^{--}$. Wir beschäftigen uns hier nur mit dem Isospintriplett der aus Up- und Down-Quarks zusammengesetzten ρ -Mesonen, deren experimentell gemessene Masse 770 MeV beträgt.

Auf dem Gitter erhalten wir die Vektormesonmasse aus der Korrelationsfunktion

$$C_{M_2}(\gamma_i, \gamma_i, \vec{p}, t). \quad (6.12)$$

Im Kontinuum ist der leichteste Zustand mit den Quantenzahlen des ρ -Mesons ein zwei-Pionen-Zustand. Um einen Zustand mit $J = 1$ bilden zu können, müssen die Pionen dabei einen nichtverschwindenden Impuls haben. Auf dem Gitter endlichen Volumens der linearen Ausdehnung L ist der minimale nichtverschwindende Impuls $p_{\min} = \frac{2\pi}{L}$; die Energie eines Pions mit Impuls p_{\min} ist $E_{\pi, p_{\min}} \approx \sqrt{m_\pi^2 + p_{\min}^2}$. Für das hier von uns betrachtete Gitter ist bei allen betrachteten Quarkmassen $2E_{\pi, p_{\min}}$ deutlich größer als die unten bestimmte Masse des leichtesten Zustandes mit den Quantenzahlen des ρ -Mesons, so daß wir davon ausgehen können, daß wir mit der Korrelationsfunktion (6.12) die Masse des ρ -Mesons bestimmen.

Die effektiven Massen, die sich aus dieser Korrelationsfunktion ergeben, sind in Abb. 6.5 dargestellt; die Qualität des Signals ist wesentlich schlechter als bei den pseudoskalaren Mesonen; insbesondere bei den kleineren Quarkmassen erhalten wir nur im Bereich $10 \leq t \leq 15$ ein gutes Signal.

Chirale Störungstheorie für die Valenzquarknäherung liefert die folgende Formel für die Abhängigkeit der Masse des Vektormesons von der Pionmasse:

$$m_\rho = c_0^\rho + c_1^\rho m_\pi + c_2^\rho m_\pi^2 + c_3^\rho m_\pi^3 + \dots \quad (6.13)$$

mit Konstanten c_i^ρ , wobei $c_1^\rho < 0$ ist. Der Term $c_1^\rho m_\pi$, der nichtanalytisch von der Quarkmasse abhängt, tritt in der Theorie mit dynamischen Fermionen nicht auf. In der Valenzquarknäherung sorgt dieser Term dafür, daß die Vektormesonmasse nichtmonoton von der Quarkmasse abhängt: Bei einer bestimmten Quarkmasse $m_{q, \min}$ (entsprechend einer Pionmasse $m_{\pi, \min}$) nimmt die Vektormesonmasse ein Minimum an. In diesem Bereich kann die Valenzquarknäherung nicht mehr als eine sinnvolle Näherung der QCD angesehen werden. In Abb. 6.6 ist die Masse des ρ -Mesons gegen die Pionmasse aufgetragen; der physikalische Punkt ist ebenfalls eingezeichnet. Die Kurve verläuft oberhalb des experimentellen Wertes, was eine Konsequenz der oben beschriebenen Besonderheit der Valenzquarknäherung ist.

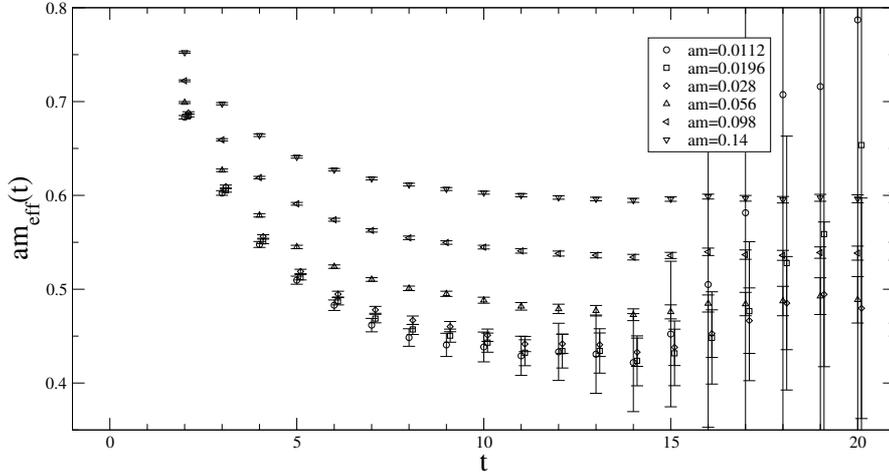


Abbildung 6.5: Effektive Vektormesonmasse bei $\beta = 8.45$.

6.3 Nukleon

Die leichtesten Teilchen mit Baryonzahl 1 sind die Nukleonen. Wir haben die Nukleonmasse aus Zweipunktfunktionen der Operatoren (4.25) bestimmt; in Abb. 6.7 ist die effektive Nukleonmasse dargestellt.

Die Vorhersage der chiralen Störungstheorie für die Nukleonmasse[66] hat dieselbe Form wie die entsprechende Formel für die Vektormesonen:

$$m_N = c_0^N + c_1^N m_\pi + c_2^N m_\pi^2 + c_3^N m_\pi^3 + \dots, \quad (6.14)$$

wobei auch hier $c_1^N < 0$ ist. In Abb. 6.8 haben wir die gemessene Nukleonmasse gegen die Pionmasse zusammen mit einem Fit an Gl. (6.14) dargestellt; der physikalische Wert ist durch ein Kreuz dargestellt. Wie im Fall des Vektormesons sorgt auch hier der Term, der linear in der Pionmasse ist, dafür, daß sich die Nukleonmasse in der Valenzquarknäherung bei kleinen Quarkmassen anders verhält als in der vollen Theorie mit dynamischen Fermionen, so daß die an die Daten gefittete Kurve oberhalb des physikalischen Wertes verläuft.

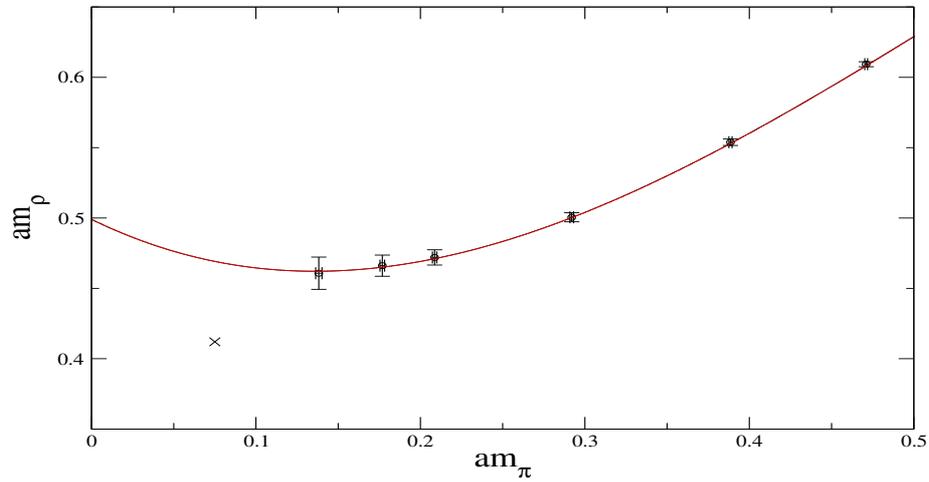


Abbildung 6.6: Vektormesonmasse in Abhängigkeit von der Pionmasse bei $\beta = 8.45$; der experimentelle Wert (bei dem wir für a den Gitterabstand bei $\beta = 8.45$ eingesetzt haben) ist durch ein Kreuz gekennzeichnet.

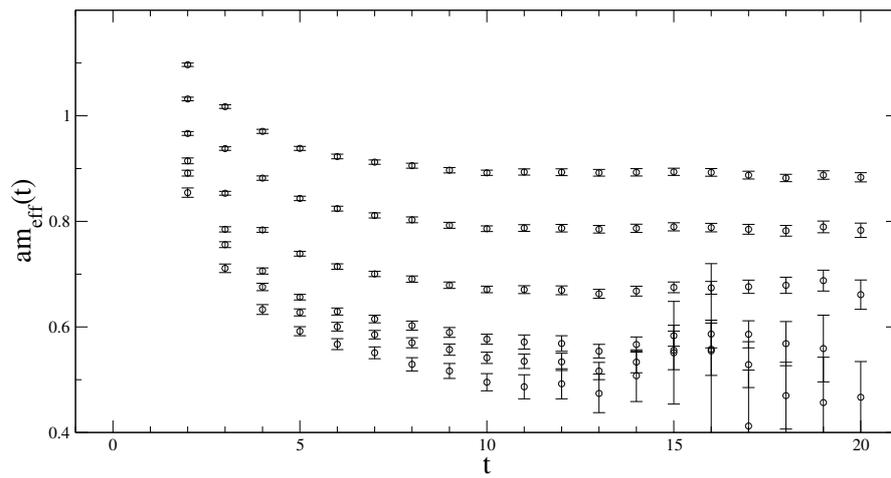


Abbildung 6.7: Effektive Nukleonmasse bei $\beta = 8.45$.

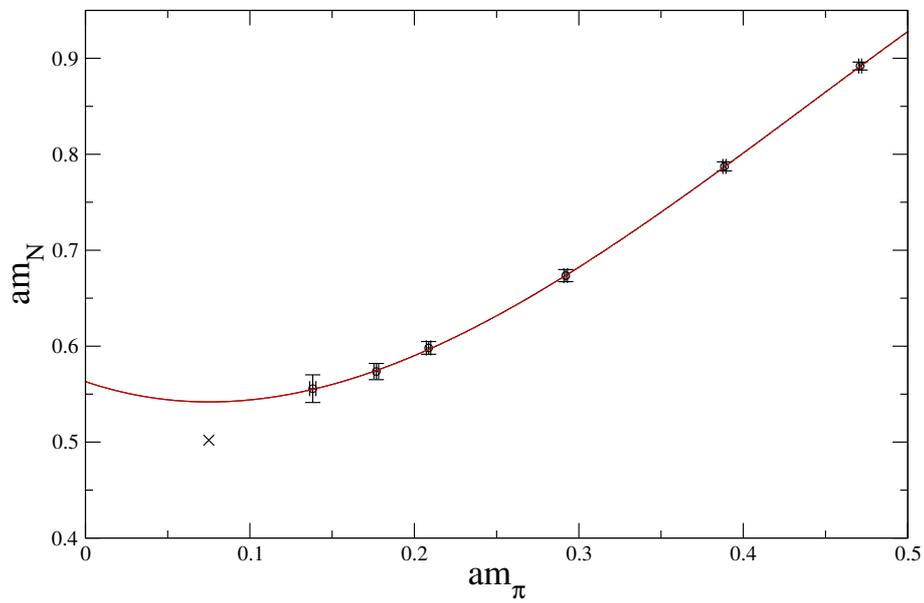


Abbildung 6.8: Nukleonmasse in Abhängigkeit von der Pionmasse bei $\beta = 8.45$; der experimentelle Wert (bei dem wir für a den Gitterabstand bei $\beta = 8.45$ eingesetzt haben) ist durch ein Kreuz gekennzeichnet.