

Kapitel 5

Renormierungskonstanten

In diesem Kapitel bestimmen wir die Renormierungskonstanten zusammengesetzter Operatoren. Prinzipiell können diese Konstanten in Gitter-Störungstheorie berechnet werden[49]; dabei werden sie nach Potenzen der Kopplungskonstante entwickelt. Wegen der großen Komplexität der Störungstheorie auf dem Gitter bleiben diese Rechnungen in der Regel auf Ein-Schleifen-Niveau beschränkt. Andererseits ist die Kopplungskonstante bei numerischen Gitterrechnungen in der Regel von der Größenordnung Eins, so daß es fraglich ist, ob eine Ein-Schleifen-Rechnung in Störungstheorie in diesem Bereich eine ausreichend gute Näherung darstellt. Daher ist es wünschenswert, die Renormierungskonstanten nichtstörungstheoretisch zu bestimmen.

In einigen Fällen ist die nichtstörungstheoretische Renormierung besonders einfach: Falls die Normierung eines Operators durch eine Wardidentität festgelegt ist, kann dies zur Bestimmung der Renormierungskonstanten genutzt werden, indem ein geeignetes Matrixelement zwischen Hadronzuständen berechnet wird.

Im allgemeinen Fall müssen ein Renormierungsschema und eine Renormierungsskala gewählt werden. Ein für Gitterrechnungen geeignetes Schema ist das RI'-Schema [50], das wir in dieser Arbeit verwenden.

Das in der Störungstheorie der Kontinuums-QCD am häufigsten benutzte Renormierungsschema ist das $\overline{\text{MS}}$ -Schema; um die Ergebnisse verschiedener Rechnungen vergleichen zu können, werden physikalische Ergebnisse in der Regel in diesem Schema angegeben. Wir werden daher unsere Ergebnisse in das $\overline{\text{MS}}$ -Schema umrechnen.

5.1 Umrechnung zwischen Schemen und Skalen

Die Abhängigkeit der renormierten Kopplungskonstanten $g^{\mathcal{S}}(\mu)$ bzw. eines renormierten Operators $O^{\mathcal{S}}(\mu)$ von der Renormierungsskala μ in einem Renormierungsschema \mathcal{S} wird durch die Funktionen

$$\beta^{\mathcal{S}}(g^{\mathcal{S}}) = \frac{\partial g^{\mathcal{S}}(\mu)}{\partial \ln \mu} \quad (5.1)$$

$$\gamma_O^{\mathcal{S}}(g^{\mathcal{S}}) = \frac{\partial Z_O^{\mathcal{S}}(\mu)}{\partial \ln \mu} \quad (5.2)$$

beschrieben, wobei bei den Ableitungen die „nackten“ Parameter konstant zu halten sind. Die Funktionen $\beta^{\mathcal{S}}(g^{\mathcal{S}})$ und $\gamma_O^{\mathcal{S}}(g^{\mathcal{S}})$ lassen sich in eine Störungsreihe in der Kopplungskonstanten entwickeln:

$$\beta^{\mathcal{S}}(g^{\mathcal{S}}) = -b_1 g^{\mathcal{S}3} - b_2 g^{\mathcal{S}5} - b_3^{\mathcal{S}} g^{\mathcal{S}7} \dots \quad (5.3)$$

$$\gamma_O^{\mathcal{S}}(g^{\mathcal{S}}) = d_{O,1} g^{\mathcal{S}2} + d_{O,2}^{\mathcal{S}} g^{\mathcal{S}4} + \dots \quad (5.4)$$

Die Koeffizienten b_1, b_2 und $d_{O,1}$ hängen nicht vom Renormierungsschema ab; die beiden ersten Koeffizienten der β -Funktion sind (im Fall von Null dynamischen Quarkflavours, was der Valenzquarknäherung entspricht)

$$b_1 = \frac{11}{(4\pi)^2} \quad (5.5)$$

$$b_2 = \frac{102}{(4\pi)^4}. \quad (5.6)$$

Sowohl im $\overline{\text{MS}}$ -Schema[51, 52, 53] als auch im RI'-Schema[54] sind die beiden nächsten Koeffizienten b_3, b_4 bekannt. Durch Integration von Gl. (5.1) läßt sich die Abhängigkeit der renormierten Kopplungskonstanten von der Skala bestimmen:

$$\mu = \Lambda^{\mathcal{S}} \left(b_1 g^{\mathcal{S}}(\mu)^2 \right)^{\frac{b_2}{2b_1^2}} e^{\frac{1}{2b_1 g^{\mathcal{S}}(\mu)^2} + \int_0^{g^{\mathcal{S}}(\mu)} d\xi \left(\frac{1}{\beta^{\mathcal{S}}(\xi)} + \frac{1}{b_1 \xi^3} - \frac{b_2}{b_1^2 \xi} \right)}. \quad (5.7)$$

Der Parameter $\Lambda^{\mathcal{S}}$ ist eine (schemenabhängige) Integrationskonstante. Wir werden den Wert $\Lambda^{\overline{\text{MS}}} = 243 \text{ MeV}$ verwenden, der von der QCDSF-UKQCD-Kollabaration für die Valenzquarknäherung der QCD bestimmt worden ist [55].

Die Abhängigkeit der renormierten Operatoren von der Skala ergibt sich durch Integration von Gl. (5.2):

$$O^{\mathcal{S}}(\mu) = Z_O^{\mathcal{S},\text{RGI}}(\mu) O^{\text{RGI}} \quad (5.8)$$

mit

$$Z_O^{\mathcal{S},\text{RGI}}(\mu) = \left(2b_1 g^{\mathcal{S}}(\mu)^2 \right)^{-\frac{d_{O,1}}{2b_1}} e^{\int_0^{g^{\mathcal{S}}(\mu)} d\xi \left(\frac{\gamma_O^{\mathcal{S}}(\xi)}{\beta^{\mathcal{S}}(\xi)} + \frac{d_{O,1}}{b_1 \xi} \right)} \quad (5.9)$$

mit einer Konstanten O^{RGI} (der Renormierungsgruppeninvarianten), die nicht vom Schema abhängt. Mit dieser Formel ist es möglich, die Renormierungskonstanten von einem Schema \mathcal{S} und einer Skala μ in ein Schema \mathcal{S}' bei der Skala μ' umzurechnen:

$$Z_O^{\mathcal{S}'}(\mu') = \frac{Z_O^{\mathcal{S}',\text{RGI}}(\mu')}{Z_O^{\mathcal{S},\text{RGI}}(\mu)} Z_O^{\mathcal{S}}(\mu). \quad (5.10)$$

5.2 Endliche Operatoren

Die nichtstörungstheoretische Bestimmung der Renormierungskonstanten ist besonders einfach, falls die Normierung des Operators O durch eine Wardidentität fixiert wird. In diesem Fall hängt die Renormierungskonstante Z_O weder vom Renormierungsschema noch von einer Skala ab. Zu diesen Operatoren zählen insbesondere der Axialvektorstrom und der Vektorstrom.

5.2.1 Axialvektorstrom

Aufgrund der exakten chiralen Symmetrie der Overlap-Fermionen gibt es einen Axialvektorstrom \hat{A}_μ^a , der für verschwindende Quarkmasse erhalten ist. Die Normierung dieses Stromes ist durch die Wardidentität (3.55) festgelegt, so daß dieser Strom nicht renormiert wird. Allerdings hängt \hat{A}_μ^a auf eine sehr komplizierte Art von den Feldern ab, so daß es praktischer ist, den lokalen Axialvektorstrom

$$A_\mu^a(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\tau^a\psi(x) \quad (5.11)$$

zu benutzen. Die Renormierungskonstante dieses Stromes ist im Allgemeinen von Eins verschieden; sie ergibt sich aus der Forderung, daß der renormierte Axialvektorstrom für $x \neq y$ die Wardidentität

$$Z_A \langle \partial_\mu A_\mu^a(x) O(y) \rangle = 2m_q \langle P^a(x) O(y) \rangle \quad (5.12)$$

bis auf Terme der Ordnung a^2 erfüllen soll (dabei ist $O(y)$ ein beliebiger Operator). Dabei nutzen wir aus, daß für Overlap-Fermionen die Renormierungskonstanten der Masse und der pseudoskalaren Dichte invers zueinander sind, so daß das Produkt $m_q P^a(x)$ nicht renormiert wird.

Um aus (5.12) die Konstante Z_A zu bestimmen, setzen wir $O(y) = P^b(y)$ und summieren über Zeitschichten (für $t \neq 0$):

$$Z_A \partial_t \left(\sum_{\vec{x}=(t,\vec{x})} \sum_{\vec{y}=(0,\vec{y})} \langle A_4^a(x) P^b(y) \rangle \right) = 2m_q \sum_{\vec{x}=(t,\vec{x})} \sum_{\vec{y}=(0,\vec{y})} \langle P^a(x) P^b(y) \rangle \quad (5.13)$$

und erhalten daraus (mit den in Abschnitt 4.1 eingeführten Bezeichnungen)

$$Z_A \partial_t C_{M_2}(\gamma_4\gamma_5, \gamma_5, \vec{p} = 0, t) = 2m_q C_{M_2}(\gamma_5, \gamma_5, \vec{p} = 0, t). \quad (5.14)$$

Folglich erhalten wir Z_A als Quotient

$$Z_A = \frac{2m_q C_{M_2}(\gamma_4\gamma_5, \gamma_5, \vec{p} = 0, t)}{m_\pi C_{M_2}(\gamma_5, \gamma_5, \vec{p} = 0, t)}, \quad (5.15)$$

bzw. unter Beachtung des asymptotischen Verhaltens für $0 \ll t \ll N_T$

$$C_{M_2}(\gamma_4\gamma_5, \gamma_5, t) = 2A_{M_2}(\gamma_4\gamma_5, \gamma_5) e^{-m_\pi N_T/2} \sinh\left(\frac{N_T}{2} - t\right) \quad (5.16)$$

$$C_{M_2}(\gamma_5, \gamma_5, t) = 2A_{M_2}(\gamma_5, \gamma_5) e^{-m_\pi N_T/2} \cosh\left(\frac{N_T}{2} - t\right) \quad (5.17)$$

als Quotient der entsprechenden Amplituden

Um diese Amplituden zu bestimmen, haben wir einen simultanen Fit an Gl. (5.16) und Gl. (5.17) mit der Pionmasse sowie den beiden Amplituden als freien Parametern durchgeführt; ein Beispiel (bei $am_q = 0.028$) ist in Abb. 5.1 dargestellt.

Schließlich muß das Ergebnis noch zu $m_q = 0$ extrapoliert werden; dies ist in Abb. 5.2 dargestellt. Wir erhalten bei $\beta = 8.45$ $Z_A = 1.412(5)$.

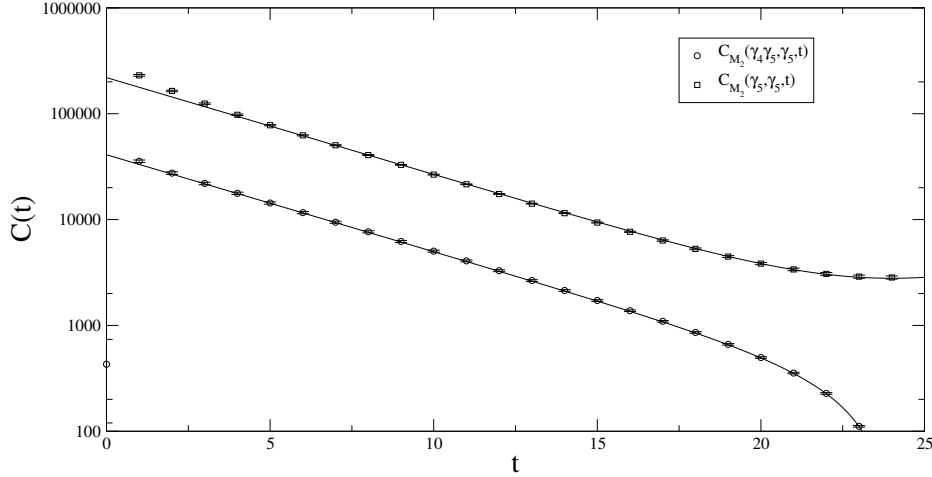


Abbildung 5.1: Simultaner Fit an Gl. (5.16), (5.17) ($am_q=0.028$, $\beta = 8.45$).

5.2.2 Vektorstrom

Auch die Renormierungskonstante des lokalen Vektorstromes

$$V_\mu^a(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\tau^a\psi(x) \quad (5.18)$$

kann aus einer Wardidentität bestimmt werden; wir folgen dazu der in [56] (für Wilson-Fermionen) entwickelten Methode.

Zunächst stellen wir fest, daß der erhaltene Vektorstrom \hat{V}_μ (Gl. (3.46)) folgende Wardidentität erfüllt:

$$\langle \delta O \rangle = \epsilon \langle O \partial_\mu \hat{V}_\mu^a(x) \rangle, \quad (5.19)$$

wobei O ein beliebiger Operator und δO dessen Variation unter der Transformation

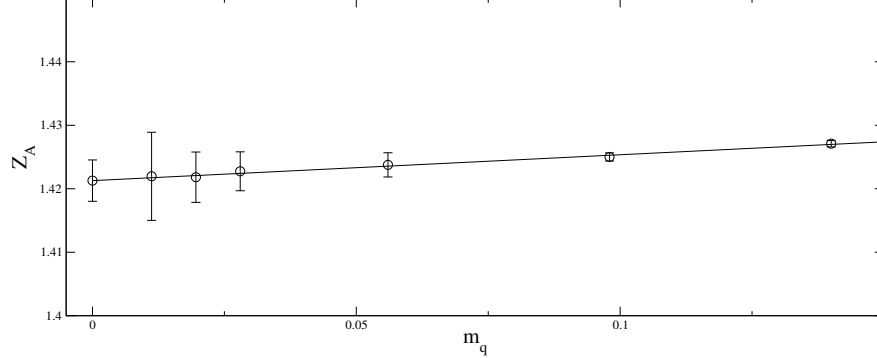
$$\delta\psi(x) = \epsilon\tau^a\psi(x), \quad \delta\bar{\psi}(x) = -\epsilon\tau^a\bar{\psi}(x) \quad (5.20)$$

ist. Wir wählen den Operator

$$O = \Gamma_{4,\alpha\beta} B_\beta(t) \bar{B}_\alpha(0) \quad (5.21)$$

mit den in Abschnitt 4.1.2 definierten Protonoperatoren B, \bar{B} und mit $\Gamma_4 = \frac{1}{2}(1 + \gamma_4)$. Weiterhin betrachten wir folgendes Verhältnis von Drei- und Zweipunktfunktionen:

$$\hat{R}(t, \tau) = \frac{C_{B_3}(\hat{V}_4, \Gamma_4, \vec{p} = 0, \tau, t)}{C_{B_2}(\Gamma_4, \vec{p} = 0, t)} \quad (5.22)$$

Abbildung 5.2: Chirale Extrapolation von Z_A bei $\beta = 8.45$.

Aus der Wardidentität (5.19) folgt, daß $\hat{R}(t, \tau)$ die Gleichung

$$\hat{R}(t, \tau) - \hat{R}(t-1, \tau) = -(\delta_{t,\tau} - \delta_{t,0}) \quad (5.23)$$

erfüllt, d.h. $\hat{R}(t, \tau)$ ist bezüglich t konstant bis auf einen „Sprung“ der Höhe Eins bei $t = \tau$. Der lokale Strom (5.18) ist nicht erhalten, seine Renormierungskonstante ist daher von Eins verschieden. Wir bestimmen sie aus der Forderung, daß der renormierte lokale Vektorstrom die Wardidentität

$$\langle \delta O \rangle = \epsilon \langle O \partial_\mu Z_V V_\mu^a(x) \rangle \quad (5.24)$$

bis auf Terme der Ordnung a^2 erfüllt. Dazu bilden wir das Verhältnis

$$R(t, \tau) = \frac{C_{B_3}(V_4, \Gamma_4, \vec{p} = 0, \tau, t)}{C_{B_2}(\Gamma_4, \vec{p} = 0, t)} \quad (5.25)$$

und bestimmen die Konstante Z_V so, daß der „Sprung“ bei $t = \tau$ wieder die Höhe Eins hat.

In Abb. 5.3 haben wir das Verhältnis $R(t, \tau)$ für verschiedene Werte der Quarkmasse in Abhängigkeit von τ dargestellt (für $t = 13$ und $\beta = 8.45$).

In Abb. 5.4 ist schließlich die chirale Extrapolation von Z_V abgebildet. Eine lineare Extrapolation zu $m_q = 0$ ergibt $Z_V = 1.39(2)$ bei $\beta = 8.45$.

5.3 Logarithmisch divergente Operatoren

Die Renormierungskonstanten logarithmisch divergenter Operatoren werden wir nach der in [50] entwickelten Methode im RI'-Schema berechnen. Dabei werden die Renormierungsbedingungen durch Quark-Greensfunktionen in der Landau-Eichung ausgedrückt. Der Quarkpropagator ist durch

$$S(p) = \frac{1}{V} \sum_{x,y} e^{-ip(x-y)} \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle \quad (5.26)$$

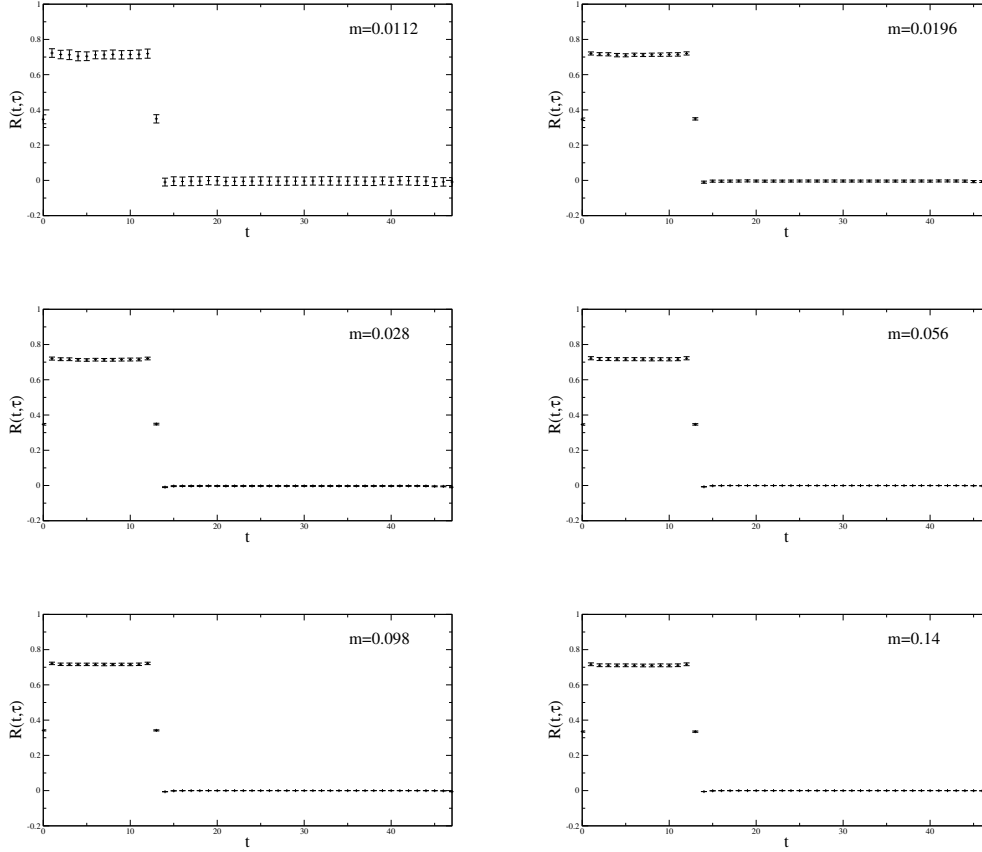


Abbildung 5.3: Das Verhältnis $R(t = 13, \tau)$ (Gl. (5.25)) für verschiedene Werte der Quarkmasse bei $\beta = 8.45$.

definiert.

Für einen Flavour-Nichtsingulett-Operator O ist die Quark-Greensfunktion mit einer Einsetzung des Operators O durch

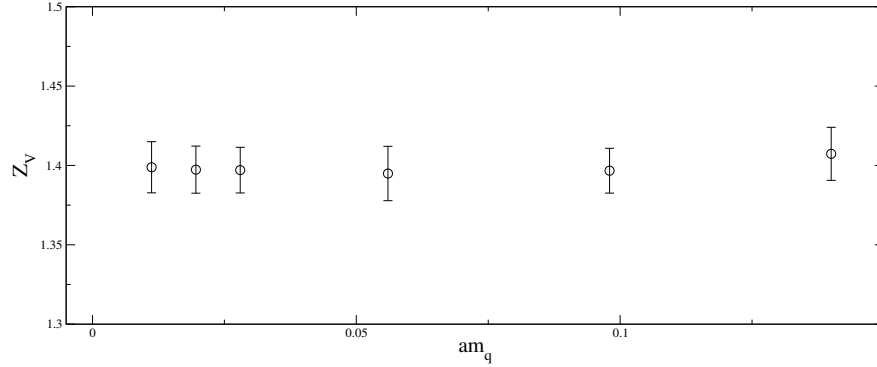
$$G_O(p) = \frac{1}{V} \sum_{x,y} e^{-ip(x-y)} \langle \psi(x) O \bar{\psi}(y) \rangle \quad (5.27)$$

gegeben; die amputierte Vertexfunktion des Operators ist

$$\Gamma_O(p) = S(p)^{-1} G_O(p) S(p)^{-1}. \quad (5.28)$$

Um die RI'-Renormierungsbedingung zu formulieren, benötigen wir die Projektion

$$\Lambda_O(p) = \frac{1}{12} \text{tr} \left(\Gamma(p) \Gamma_{\text{Born}}^{-1}(p) \right) \quad (5.29)$$

Abbildung 5.4: Chirale Extrapolation von Z_V bei $\beta = 8.45$.

der amputierten Vertexfunktion auf den Bornterm. Die RI'-Renormierungsbedingung bei der Skala μ lautet dann

$$\lim_{m_q \rightarrow 0} \Lambda_O(p)|_{p^2=\mu^2} = 1. \quad (5.30)$$

Im Kontinuum ist die Landau-Eichung durch die Bedingung

$$\partial_\mu A_\mu^a = 0 \quad (5.31)$$

definiert (dabei bezeichnet A_μ^a das Eichfeld). Eine diskretisierte Form der Landau-Eichung erhalten wir, indem wir die Funktion

$$F(U) = \sum_{x,\mu} \text{re tr } U_\mu(x) \quad (5.32)$$

unter lokalen Eichtransformationen maximieren; im Kontinuumslimit entspricht dies der durch Gl. (5.31) definierten Landau-Eichung. Zur numerischen Maximierung von (5.32) wird für jeden Gitterpunkt x die $SU(3)$ -Eichtransformation $g(x)$ bestimmt, die $F(U)$ lokal maximiert; dieses Verfahren wird so lange iteriert, bis es im Rahmen der Rechengenauigkeit konvergiert

Die Funktion $F(U)$ hat im Allgemeinen viele lokale Maxima; diese Eichkonfigurationen werden als Gribov-Kopien bezeichnet. Mit dem hier benutzten Algorithmus findet man eines dieser Maxima, aber in der Regel nicht das globale Maximum. Welches dieser Maxima der Algorithmus findet, hängt unter anderem von den Anfangsbedingungen und von der Reihenfolge, in der die Gitterpunkte aufgesucht werden, ab; dies ist als Gribov-Problem bekannt. Wir haben die Auswirkungen dieses Effektes auf die Renormierungskonstanten nicht systematisch untersucht (siehe dazu [57, 58]).

Im Folgenden müssen der Quark-Propagator und Vertexfunktionen auf den eichfixierten Konfigurationen berechnet werden; dazu wenden wir die Impulsquellen-Methode [1]

an. Mit dieser Methode lassen sich bereits mit einer geringen Zahl von Eichfeldkonfigurationen relativ kleine statistische Fehler erreichen. Die Simulationsparameter sind in Tabelle 5.1 zusammengefaßt.

Wir betrachten hier nur Flavour-Nichtsingulett-Operatoren der Form

$$O = \sum_{u,v} \bar{u}(u) O(u, v) d(v), \quad (5.33)$$

so daß bei der Wick-Kontraktion kein unzusammenhängender Beitrag auftritt. In diesem Fall gilt

$$G_O(p) = \sum_{u,v} \langle \gamma_5 G_p^\dagger(u) \gamma_5 O(u, v) G_p(v) \rangle, \quad (5.34)$$

wobei $G_p(x)$ Lösung der Dirac-Gleichung mit einer Impulsquelle ist:

$$\sum_y D(x, y) G_p(y) = e^{ipx}. \quad (5.35)$$

Diese Gleichung lösen wir mit dem in Abschnitt 4.2 dargestellten Verfahren. Aus der Lösung $G_p(x)$ erhalten wir anschließend den Quarkpropagator

$$S(p) = \sum_x e^{-ipx} G_p(x) \quad (5.36)$$

sowie die amputierten Vertexfunktionen. Der renormierte Propagator ist durch

$$S^R(p) = Z_\psi S(p) \quad (5.37)$$

gegeben; die renormierte amputierte Vertexfunktion ist

$$\Gamma_O^R(p) = Z_\psi^{-1} Z_O \Gamma_O(p). \quad (5.38)$$

Die Renormierungskonstante Z_O ist durch die Bedingung (5.30) festgelegt. Daraus ergibt sich

$$Z_O(\mu) = \frac{Z_\psi(\mu)}{\Lambda_O(\mu)}. \quad (5.39)$$

Die Wellenfunktionsrenormierungskonstante Z_ψ bestimmen wir aus der im vorherigen Abschnitt ermittelten Renormierungskonstante des Vektorstromes:

$$Z_\psi(\mu) = Z_V \Lambda_V(\mu). \quad (5.40)$$

In Abb. 5.5 ist $Z_\psi(\mu)$ dargestellt.

Volumen	am_q	Anzahl Konfigurationen
$16^3 32$	0.028, 0.056, 0.098, 0.14, 0.168, 0.196, 0.224	5

Tabelle 5.1: Parameter der zur Bestimmung der Renormierungskonstanten im RI' -Schema verwendeten Konfigurationen.

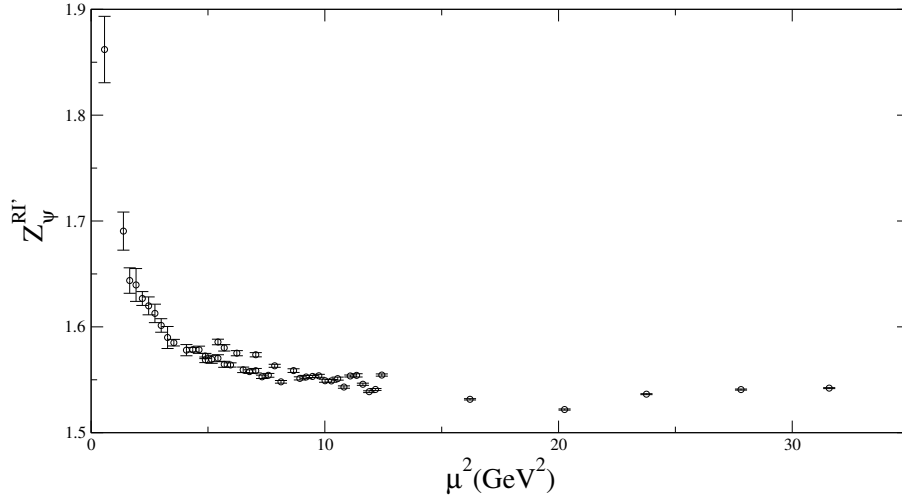


Abbildung 5.5: Die Feldstärkenrenormierungskonstante $Z_\psi^{\text{RI}'}(\mu)$ bei $\beta = 8.45$.

5.3.1 Skalare und Pseudoskalare Dichte

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Renormierungskonstanten der skalaren Dichte

$$S(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (5.41)$$

und der pseudoskalaren Dichte

$$P(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x). \quad (5.42)$$

Die Bornterme der amputierten Vertexfunktionen sind

$$\Gamma_{S,\text{Born}} = 1 \quad (5.43)$$

$$\Gamma_{P,\text{Born}} = \gamma_5. \quad (5.44)$$

Bei der Auswertung der Bedingung (5.61) für diese Operatoren tritt das Problem auf, daß die Extrapolation zu $m_q = 0$ strenggenommen nicht möglich ist: Aufgrund der Nullmoden des Diracoperators divergieren sowohl $\Lambda_S(p, m)$ als auch $\Lambda_P(p, m)$ für $m \rightarrow 0$ wie $1/m^2$. Dies ist ein Artefakt der Valenzquarknäherung: In der Theorie mit dynamischen Quarks werden die Nullmoden des Diracoperators für $m \rightarrow 0$ durch die Fermiondeterminante unterdrückt.

Zusätzlich enthält $\Lambda_P(p, m)$ einen Term der Form

$$\frac{c}{mp^2} \quad (5.45)$$

mit einer Konstante c , die proportional zum chiralen Kondensat ist; dieser Term hat seine Ursache in der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie [59].

Die Massenabhängigkeit von Λ_S und Λ_P kann also durch

$$\Lambda_S(p, m_q) = \frac{c_{S,1}(p)}{m_q^2} + c_{S,2}(p) + c_{S,3}(p)m_q \quad (5.46)$$

$$\Lambda_P(p, m_q) = \frac{c_{P,1}(p)}{m_q^2} + \frac{c_{P,2}}{m_q} + c_{P,3}(p) + c_{P,4}(p)m_q \quad (5.47)$$

parametrisiert werden. Wir fitten die gemessene Massenabhängigkeit an die Formeln (5.46) bzw. (5.47) und setzen

$$\Lambda_S(p) = c_{S,2}, \quad \Lambda_P(p) = c_{P,3}. \quad (5.48)$$

Für drei verschiedene Impulse haben wir $\Lambda_S(p, m_q)$ und $\Lambda_P(p, m_q)$ zusammen mit einem Fit an Gl. (5.46) bzw. (5.47) in Abb. 5.6 und Abb. 5.7 dargestellt.

In Abb. 5.8 haben wir die Renormierungskonstante $Z_S^{\text{RI}'}$ in Abhängigkeit von der Skala μ dargestellt. Um die Skalenabhängigkeit mit der störungstheoretisch berechneten Abhängigkeit zu vergleichen, haben wir in Abb. 5.9 das Produkt

$$\left(Z_S^{\text{RI}', \text{RGI}}(\mu)\right)^{-1} Z_S^{\text{RI}'}(\mu) \quad (5.49)$$

dargestellt. (Die dafür benötigten Koeffizienten der γ -Funktion der skalaren Dichte haben wir [60] entnommen.) Der Bereich zwischen 5 GeV² und 15 GeV² ist in Abb. 5.10 vergrößert dargestellt. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, daß der durch die Brechung der Rotationsinvarianz auf dem Gitter verursachte systematische Fehler weit größer ist als der statistische Fehler. Wir lesen aus der Abbildung den Wert $Z_S^{\text{RGI}} = 0.935(10)$ ab, wobei der Fehler systematischer Art ist (der statistische Fehler kann demgegenüber vernachlässigt werden). Die Umrechnung in das $\overline{\text{MS}}$ -Schema gemäß

$$Z_S^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = Z_S^{\overline{\text{MS}}, \text{RGI}}(2 \text{ GeV}) Z_S^{\text{RGI}} \quad (5.50)$$

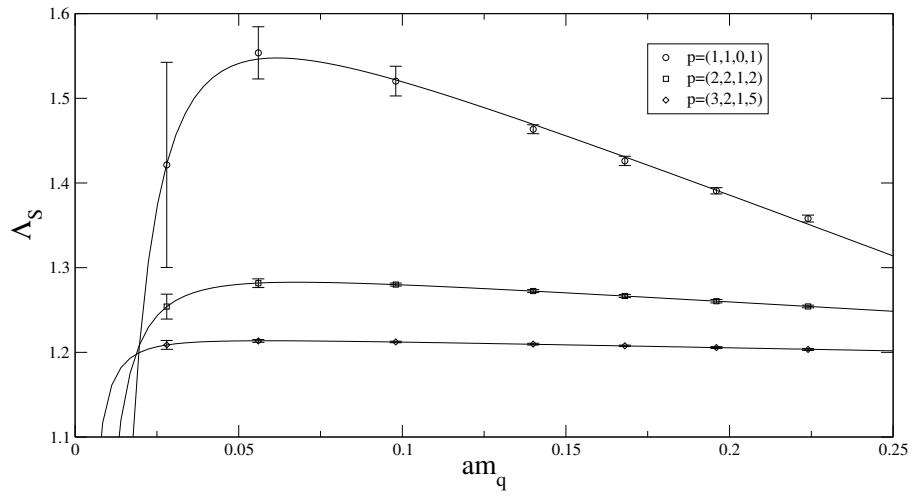
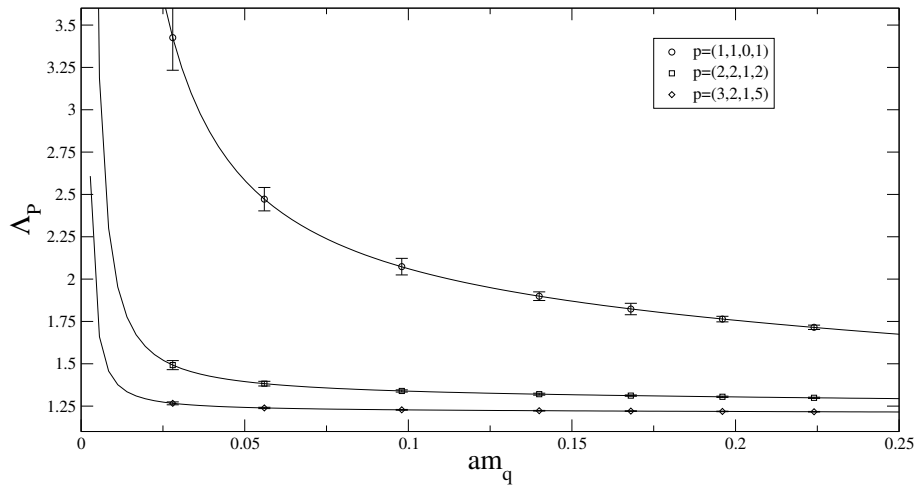
ergibt (mit $Z_S^{\overline{\text{MS}}, \text{RGI}}(2 \text{ GeV}) = 1.381$ [60])

$$Z_S^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 1.29(1). \quad (5.51)$$

Aufgrund der chiralen Symmetrie der Overlap-Fermionen muß die Renormierungskonstante der pseudoskalaren Dichte mit der Renormierungskonstante der skalaren Dichte übereinstimmen. Um zu überprüfen, ob dies numerisch erfüllt ist, haben wir in Abb. 5.11 das Verhältnis

$$\frac{\Lambda_S(p)}{\Lambda_P(p)} \quad (5.52)$$

der projizierten amputierten Vertexfunktionen dargestellt. Bei allen betrachteten Impulsen stimmen $\Lambda_S(p)$ und $\Lambda_P(p)$ mit großer Genauigkeit überein, so daß die Beziehung $Z_S = Z_P$ erfüllt ist.

Abbildung 5.6: Λ_S in Abhängigkeit von der Quarkmasse bei $\beta = 8.45$.Abbildung 5.7: Λ_P in Abhängigkeit von der Quarkmasse bei $\beta = 8.45$.

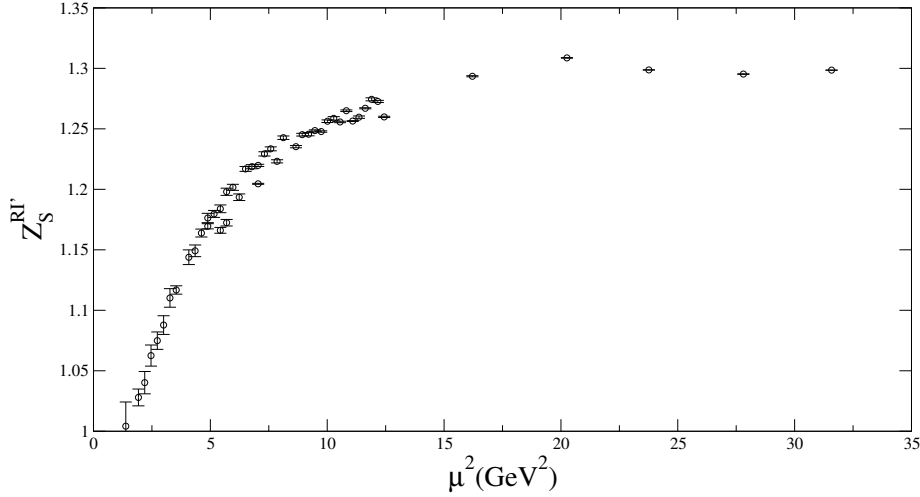


Abbildung 5.8: Renormierungskonstante $Z_S^{\text{RI}'}$ (μ) bei $\beta = 8.45$.

5.3.2 Operatoren mit einer Ableitung

Bei der Berechnung der Momente der Proton-Strukturfunktionen treten Operatoren der Art

$$O^{\mu_1 \dots \mu_n} = \bar{\psi} \gamma^{\mu_1} \overleftrightarrow{D}^{\mu_2} \dots \overleftrightarrow{D}^{\mu_n} \psi \quad (5.53)$$

auf, wobei $\overleftrightarrow{D}^\nu$ die antisymmetrische kovariante Ableitung

$$\overleftrightarrow{D}^\mu = \frac{1}{2} (\overleftarrow{D}^\mu - \overrightarrow{D}^\mu) \quad (5.54)$$

bezeichnet (für die Definition der diskretisierten kovarianten Ableitung siehe [42]). Wir betrachten in dieser Arbeit nur den Fall $n = 2$ und die Operatoren

$$O^{\mu\nu} = \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}^\nu \psi. \quad (5.55)$$

Der Operator $O^{\mu\nu}$ transformiert unter der Gruppe $SO(4)$ wie ein Tensor zweiter Stufe; diese Darstellung von $SO(4)$ ist nicht irreduzibel, sondern zerfällt in folgende Darstellungen:

$$D_9 = \{c^{\alpha\beta} O^{\alpha\beta} | c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}, c_{\alpha\alpha} = 0\} \quad (5.56)$$

$$D_1 = \{c^{\alpha\beta} O^{\alpha\beta} | c_{\alpha\beta} \propto \delta_{\alpha\beta}\} \quad (5.57)$$

$$D_6 = \{c^{\alpha\beta} O^{\alpha\beta} | c_{\alpha\beta} = -c_{\beta\alpha}\}. \quad (5.58)$$

Die Operatoren der Darstellung D_9 (die symmetrischen, spurlosen Rang-2 Tensoren) werden für die Berechnung des ersten Momentes der Nukleon-Strukturfunktion benötigt; wir

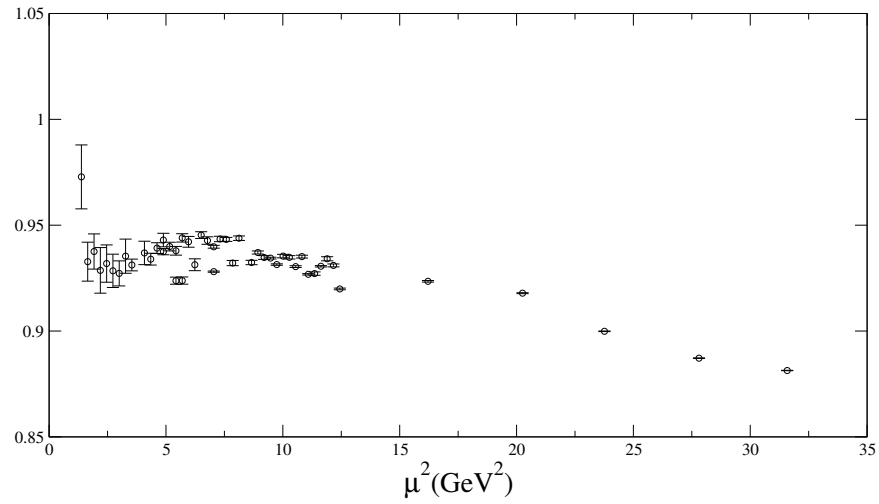


Abbildung 5.9: Das Produkt (5.49) aus der Renormierungskonstante $Z_S^{\text{RI}'}$ und den inversen Renormierungsgruppenfaktor bei $\beta = 8.45$.

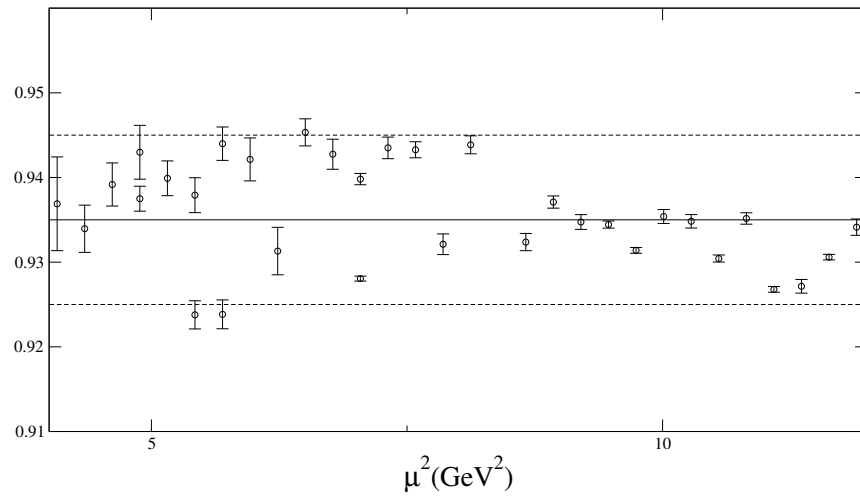


Abbildung 5.10: Der Impulsbereich von 4 GeV^2 - 12 GeV^2 , der zur Bestimmung von Z_S^{RGI} genutzt wird.

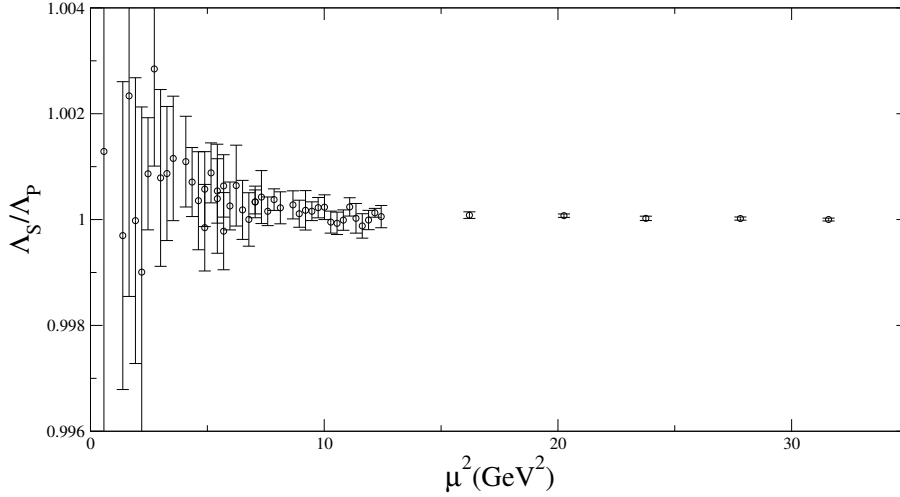


Abbildung 5.11: Das Verhältnis (5.52) der projizierten amputierten Vertexfunktionen bei $\beta = 8.45$.

werden uns auf diese Operatoren beschränken.

Die Gitterregularisierung bricht die Euklidische $SO(4)$ -Symmetrie zur *hyperkubischen Gruppe* $H(4)$. Im Allgemeinen zerfallen irreduzible Darstellungen von $SO(4)$ in mehrere irreduzible Darstellungen von $H(4)$ [61]. Die Darstellung D_9 zerfällt in die beiden Darstellungen

$$D_a = \{c^{\alpha\beta} O^{\alpha\beta} | c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}, c_{\alpha\alpha} = 0, c_{\alpha\beta} = 0 \text{ für } \alpha = \beta\} \quad (5.59)$$

$$D_b = \{c^{\alpha\beta} O^{\alpha\beta} | c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}, c_{\alpha\alpha} = 0, c_{\alpha\beta} = 0 \text{ für } \alpha \neq \beta\}. \quad (5.60)$$

In Tabelle 5.2 haben wir die Operatoren, die wir verwendet haben, angegeben.

D_a	D_b
$O_{a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (O^{12} + O^{21})$	$O_{b_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (O^{11} - O^{22})$
$O_{a_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (O^{13} + O^{31})$	$O_{b_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (O^{33} - O^{44})$
$O_{a_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (O^{14} + O^{41})$	$O_{b_3} = \frac{1}{2} (O^{11} + O^{22} - O^{33} - O^{44})$
$O_{a_4} = \frac{1}{\sqrt{2}} (O^{23} + O^{32})$	
$O_{a_5} = \frac{1}{\sqrt{2}} (O^{24} + O^{42})$	
$O_{a_6} = \frac{1}{\sqrt{2}} (O^{34} + O^{43})$	

Tabelle 5.2: Basen der Operatoren der Darstellungen D_a und D_b .

Auch für diese Operatoren wird die Renormierungskonstante bei der Skala μ aus der

Bedingung

$$\lim_{m_q \rightarrow 0} \Lambda_O(p)|_{p^2=\mu^2} = 1 \quad (5.61)$$

bestimmt; der Bornterm des Operators $O^{\mu\nu}$ ist

$$\Gamma_{O,\text{Born}} = \gamma_\mu \sin p_\nu. \quad (5.62)$$

Bei diesen Operatoren tritt das Problem auf, daß $\Lambda_O(p)$ nicht nur von p^2 , sondern auch von der Richtung von p abhängt.

In Abb. 5.12 ist ein Beispiel für die lineare Extrapolation in der Quarkmasse abgebildet; die Abhängigkeit von der Quarkmasse ist sehr gering.

In Abb. 5.13 und Abb. 5.14 ist die Renormierungskonstante im RI'-Schema für die sechs Operatoren der Darstellung D_a bzw. für die drei Operatoren der Darstellung D_b abgebildet. Insbesondere bei den Operatoren der Darstellung D_b ist zu erkennen, daß die Renormierungskonstante nicht allein vom Betrag der Renormierungsskala abhängt, sondern auch von der Richtung des zur Definition der Skala benutzten Impulses: Die einzelnen Datenpunkte fallen nicht auf eine glatte Kurve, sondern streuen ziemlich stark. Auch die Unterschiede zwischen den einzelnen Operatoren einer Darstellung sind im Falle von D_b sehr ausgeprägt.

Um die Renormierungskonstanten in das $\overline{\text{MS}}$ -Schema umzurechnen, haben wir für die einzelnen Operatoren jeweils das Produkt

$$\left(Z_O^{\text{RI}',\text{RGI}}(\mu)\right)^{-1} Z_O^{\text{RI}'}(\mu) \quad (5.63)$$

berechnet (die Koeffizienten der γ -Funktion haben wir [54] entnommen). Auch der Umrechnungsfaktor $Z_O^{\text{RI}',\text{RGI}}(\mu)$ hängt von der Impulsrichtung ab. Wie aus den Abbildungen 5.15 bzw. 5.16 hervorgeht, wird die Richtungsabhängigkeit der RI'-Renormierungskonstanten durch den (störungstheoretischen) Umrechnungsfaktor allerdings nicht vollständig kompensiert.

Um den Einfluß dieser Richtungsabhängigkeit zu minimieren, haben wir für jeden Impuls den Mittelwert

$$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \left(Z_{O_{a_i}}^{\text{RI}',\text{RGI}}(\mu)\right)^{-1} Z_{O_{a_i}}^{\text{RI}'}(\mu) \quad (5.64)$$

über die sechs Operatoren der Darstellung D_a bzw. den entsprechenden Mittelwert

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(Z_{O_{b_i}}^{\text{RI}',\text{RGI}}(\mu)\right)^{-1} Z_{O_{b_i}}^{\text{RI}'}(\mu) \quad (5.65)$$

über die Operatoren der D_b -Darstellung gebildet. Auch in diesen Größen ist die Richtungsabhängigkeit nicht völlig verschwunden, wie in Abb. 5.17 bzw. Abb. 5.18 zu erkennen ist. Um die Renormierungsgruppeninvarianten zu bestimmen, haben wir uns auf den Impulsbereich $10 \text{ GeV}^2 < p^2 < 15 \text{ GeV}^2$ eingeschränkt (Abb. 5.19). Die systematische Fehler, die durch die gebrochene Rotationsinvarianz verursacht sind, sind in diesem Bereich von

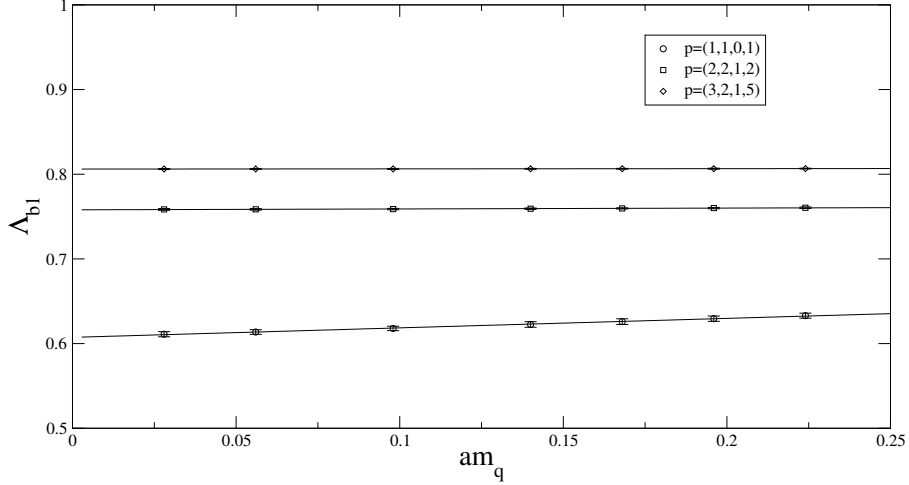


Abbildung 5.12: $\Lambda_{O_{b_1}}$ in Abhängigkeit von der Quarkmasse bei $\beta = 8.45$.

der Größenordnung 1% und damit deutlich größer als die statistischen Fehler. Aus den Abbildungen lesen wir ab

$$Z_{O_a}^{\text{RGI}} = 2.68(3) \quad (5.66)$$

$$Z_{O_b}^{\text{RGI}} = 2.58(3). \quad (5.67)$$

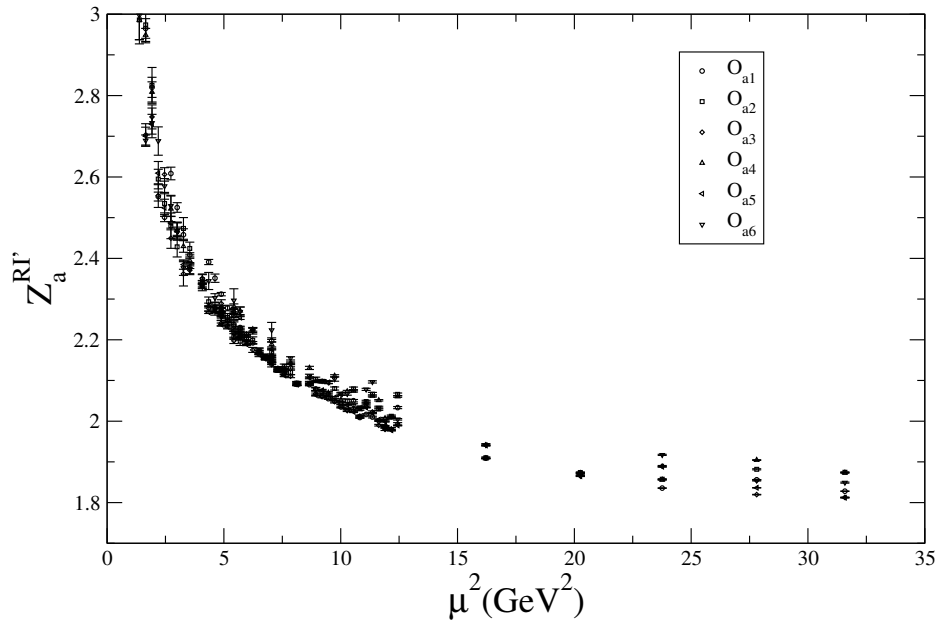
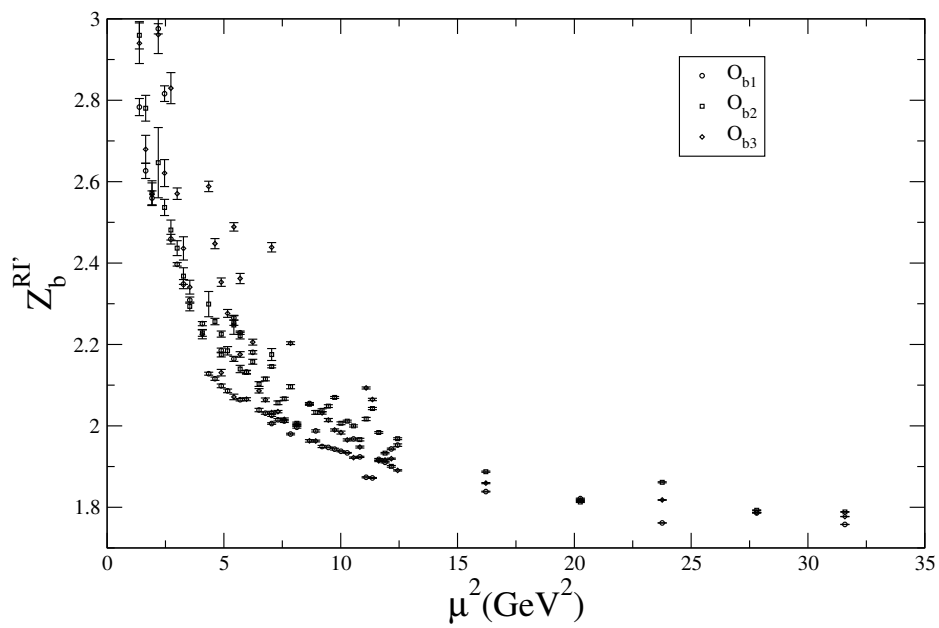
Die Umrechnung in das $\overline{\text{MS}}$ -Schema ergibt (mit $Z_{O_a}^{\overline{\text{MS}},\text{RGI}}(2 \text{ GeV}) = Z_{O_b}^{\overline{\text{MS}},\text{RGI}}(2 \text{ GeV}) = 0.737[54]$)

$$Z_{O_a}^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 1.98(3) \quad (5.68)$$

$$Z_{O_b}^{\overline{\text{MS}}}(2 \text{ GeV}) = 1.90(3). \quad (5.69)$$

5.4 Vergleich mit Gitterstörungstheorie

Die Renormierungskonstanten für die hier betrachteten Operatoren sind in Gitterstörungstheorie in der Ein-Schleifen-Näherung berechnet worden [62, 63]. In Tabelle 5.3 vergleichen wir die Ergebnisse der Gitterstörungstheorie mit unseren nichtstörungstheoretischen Werten. Insbesondere für die Operatoren mit einer Ableitung unterscheiden sich die Werte deutlich voneinander.

Abbildung 5.13: $Z_a^{\text{RI}'}$ in Abhängigkeit von μ^2 bei $\beta = 8.45$.Abbildung 5.14: $Z_b^{\text{RI}'}$ in Abhängigkeit von μ^2 bei $\beta = 8.45$.

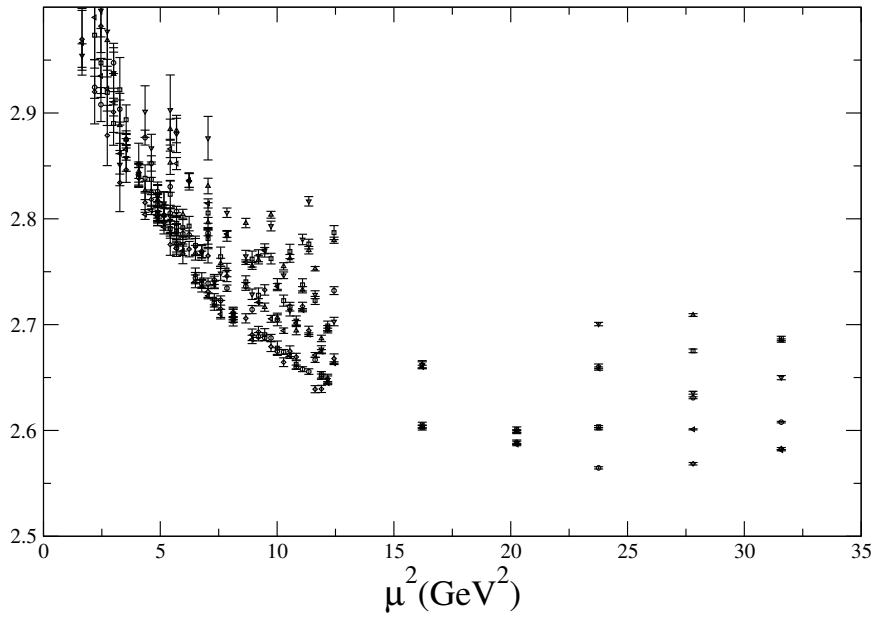


Abbildung 5.15: Das Produkt (5.63) in Abhängigkeit von μ^2 für die Operatoren der Darstellung D_a bei $\beta = 8.45$.

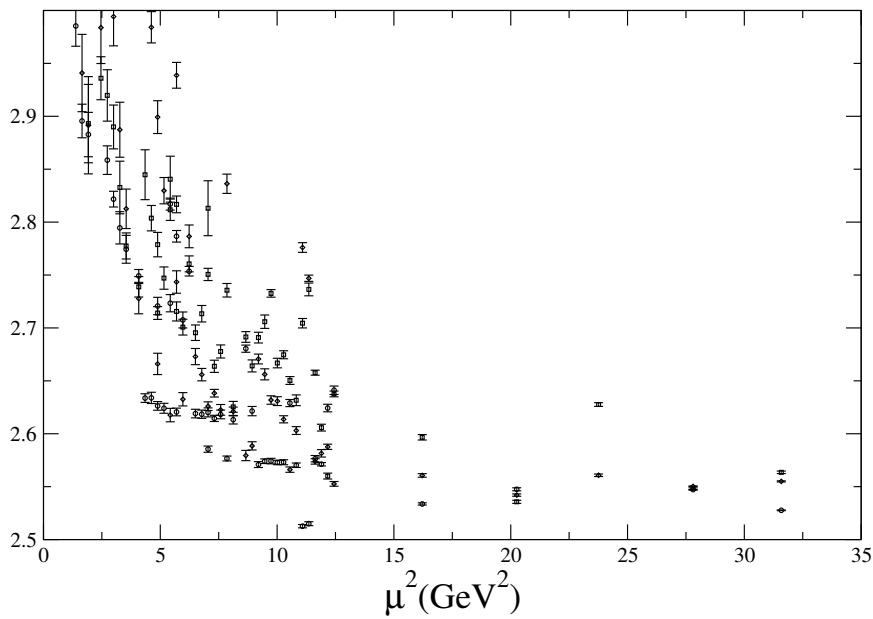


Abbildung 5.16: Wie Abb. 5.15, aber für die Darstellung D_b .

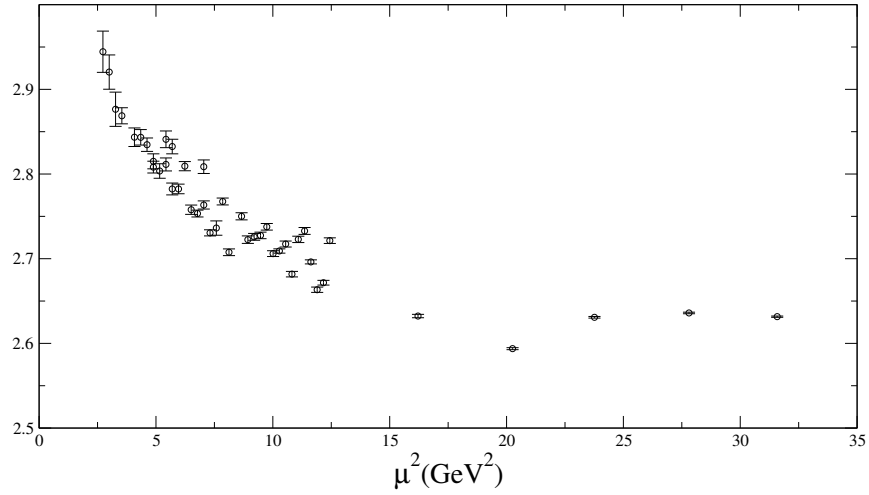


Abbildung 5.17: Der Mittelwert der mit dem Umrechnungsfaktor $(Z^{\text{RI}',\text{RGI}})^{-1}$ multiplizierten Renormierungskonstanten für die Darstellung D_a (Gl. (5.64)) bei $\beta = 8.45$.

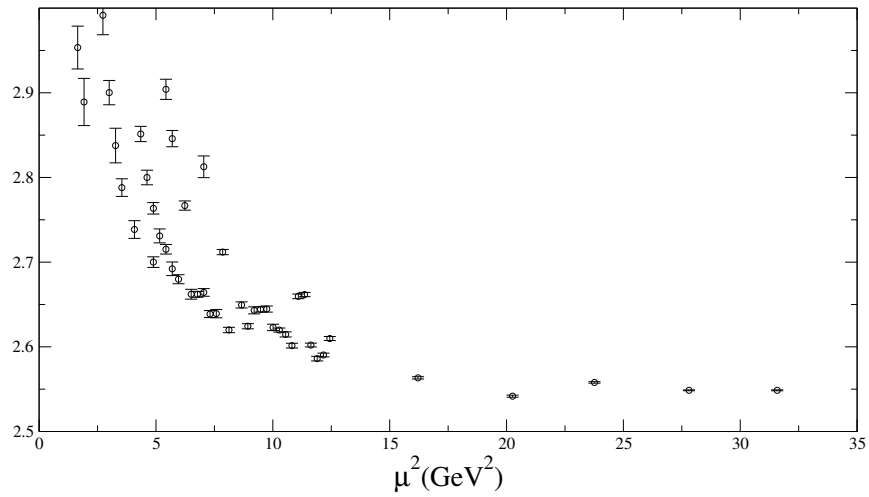


Abbildung 5.18: Wie Abb. 5.17, aber für die Darstellung D_b .

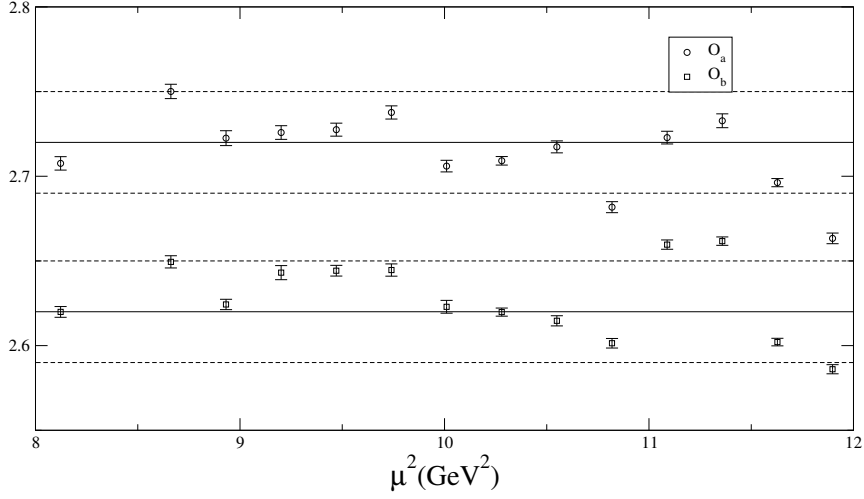


Abbildung 5.19: Der Impulsbereich, aus dem wir die Renormierungsgruppeninvarianten $Z_{O_a}^{\text{RGI}}$ und $Z_{O_b}^{\text{RGI}}$ bestimmt haben.

Operator	$Z_O^{\overline{\text{MS}}}$ in Gitterstörungstheorie	$Z_O^{\overline{\text{MS}}}$ nichtstörungstheoretisch
S, P	1.359	1.29(1)
A_μ	1.303	1.421(5)
V_μ	1.303	1.39(2)
O_a	1.413	1.98(3)
O_b	1.403	1.90(3)

Tabelle 5.3: Vergleich der hier berechneten Renormierungskonstanten mit den in Störungstheorie auf dem Gitter berechneten Werten bei $\beta = 8.45$.