Ricci Fluss auf einer Klasse nichtkompakter warped product Mannigfaltigkeiten und Gaußsche Abschätzungen

Dissertation

des Fachbereiches Mathematik und Informatik
der Freien Universität Berlin
zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften

von
Tobias Marxen

August 2012

Erstgutachter: Prof. Dr. Klaus Ecker
Zweitgutachter: Prof. Dr. Miles Simon

Tag der Disputation: 24. Januar 2013

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen und ist noch nicht veröffentlicht.

Berlin, den 16. August 2012 Tobias Marxen

Zusammenfassung

Wir untersuchen zuerst die Evolution der Mannigfaltigkeit $M = \mathbf{R} \times N$ mit warped product Metrik $h = f_0^2 dx^2 + g_0^2 g_N$ unter Ricci Fluss, wobei (N, g_N) eine flache, vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$ ist und $f_0, g_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv sind (dx^2 bezeichnet die Standardmetrik auf $\mathbf{R}$) und so gewählt werden, dass (M, h) vollständig ist und beschränkte Krümmung hat. Wir zeigen das Erhaltenbleiben der warped product Struktur, Langzeitexistenz und dass die Lösung vom Typ III ist.

Falls g_0 beschränkt ist und die Metrik so reskaliert wird, dass eine feste Faser $\{y\} \times N$ für alle Zeiten isometrisch zu (N, g_N) ist, zeigen wir die Konvergenz der Menge aller Punkte, deren Abstand zu $\{y\} \times N \leq r$ ist, gegen einen flachen Zylinder $[-r, r] \times N$, für jedes feste $r > 0$. Außerdem zeigen wir, dass, falls zusätzlich $\lim_{x \to \pm\infty} g_0(x) = 0$ gilt, $(M, h(0))$ endliches Volumen hat und (N, g_N) homogen ist, die Lösung kollabiert, d. h. dass der Injektivitätsradius gleichmäßig gegen 0 konvergiert, während die Krümmungen beschränkt bleiben. Dieses Resultat gilt auch für den normalisierten (=volumenerhaltenden) Ricci Fluss.

Als Nächstes betrachten wir den Ricci Fluss auf allgemeinen vollständigen nichtkompakten Mannigfaltigkeiten. Unter geeigneten Krümmungsannahmen zeigen wir obere Gaußsche Abschätzungen für die geometrischen Größen $|\operatorname{Rm}|^2$, $|\nabla \operatorname{Rm}|^2$ und $|T|^2$ (T bezeichnet den spurlosen Ricci Tensor), falls diese zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ kompakten Träger haben.

Die Anwendung der Gaußschen Abschätzungen auf die warped product Mannigfaltigkeit $\mathbf{R} \times N$ liefert, falls die Enden zum Zeitpunkt $t = 0$ hyperbolisch (alle Schnittkrümmungen $= k < 0$) sind und N kompakt ist, dass die Enden zu jedem festen positiven Zeitpunkt $t > 0$ asymptotisch konstante Krümmung $-\frac{1}{2nt - \frac{1}{k}}$ haben, und eine quantitative Abschätzung, wie stark die Krümmungen von dieser Konstante abweichen. Ferner ist $-\frac{1}{2nt - \frac{1}{k}}$ genau die Rate, mit der die Krümmungen auf dem hyperbolischen Raum H^{n+1} unter Ricci Fluss abfallen.

Schließlich zeigen wir, unter Verwendung des Verhaltens der Nullstellen von Lösungen linearer parabolischer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf $\mathbf{R}$ und unter geeigneten Zusatzannahmen, dass die Enden der warped product Mannigfaltigkeit $\mathbf{R} \times N$ zu jedem positiven Zeitpunkt $t > 0$ negative Krümmung haben, falls sie für $t = 0$ hyperbolisch sind.

Abstract

We first examine the evolution of the manifold $M = \mathbf{R}\times N$ with warped product metric $h = f_0^2 dx^2 + g_0^2 g_N$ under Ricci flow, where (N, g_N) is a flat, complete, connected Riemannian manifold of dimension $n \geq 2$ and $f_0, g_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are C^∞ and positive (dx^2 denotes the standard metric on $\mathbf{R}$) and are chosen such that (M, h) is complete and has bounded curvature. We show preservation of the warped product structure, longtime existence and that the solution is of type III.

If g_0 is bounded and the metrics are rescaled in such a way that a fixed fiber $\{y\} \times N$ is isometric to (N, g_N) for all times, we show convergence of the set of all points, whose distance to $\{y\}\times N$ is $\leq r$, to a flat cylinder $[-r, r]\times N$, for each fixed $r > 0$. Furthermore, we show, if additionally $\lim_{x\to\pm\infty} g_0(x) = 0$ holds, if $(M, h(0))$ has finite volume and if (N, g_N) is homogeneous, that the solution collapses, i.e. the injectivity radius goes to 0 uniformly while the curvatures stay bounded. This result also holds for the normalized (= volume preserving) Ricci flow.

Next we consider Ricci flow on general complete, noncompact manifolds. Under appropriate curvature assumptions we show upper Gaussian estimates for the geometric quantities $|\operatorname{Rm}|^2$, $|\nabla \operatorname{Rm}|^2$ and $|T|^2$ (T denotes the traceless Ricci tensor), if these have compact support at the initial time $t = 0$.

Applying the Gaussian estimates to the warped product manifold $\mathbf{R}\times N$ yields, if the ends are hyperbolic (all sectional curvatures $= k < 0$) at $t = 0$ and if N is compact, that the ends have asymptotically constant curvature $-\frac{1}{2nt-\frac{1}{k}}$ at each fixed positive time $t > 0$, and a quantitative estimate that measures, how much the curvatures deviate from this constant. Moreover, $-\frac{1}{2nt-\frac{1}{k}}$ is exactly the rate, at which the curvatures go to 0 on hyperbolic space H^{n+1} under Ricci flow.

Finally we show, using the behaviour of zeros of solutions of linear parabolic PDE's of second order on $\mathbf{R}$ and under appropriate additional assumptions, that the ends of the warped product manifold $\mathbf{R} \times N$ have negative curvature at each positive time $t > 0$, if they are hyperbolic at $t = 0$.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Arbeit handelt vom Ricci Fluss, einer Evolutionsgleichung für Riemannsche Metriken, die 1982 in [29] von R. Hamilton eingeführt wurde. Dort zeigte er, dass eine Metrik mit positiver Ricci Krümmung auf einer geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit unter dem (normalisierten) Ricci Fluss gegen eine Metrik mit konstanter positiver Krümmung konvergiert. 2002-2003 gelang es G. Perelman in [45], [46], [47], mit Hilfe des Ricci Flusses die Geometrisierungsvermutung von Thurston zu beweisen, und als Korollar die Poincaré-Vermutung.

Wir untersuchen den Ricci Fluss auf einer speziellen Klasse von warped product Mannigfaltigkeiten und auf nichtkompakten Mannigfaltigkeiten mit geometrischen (d. h. flachen, Einstein oder lokal symmetrischen) Enden.

Der Ricci Fluss auf Mannigfaltigkeiten mit Symmetrien ähnlich denen einer warped product Mannigfaltigkeit wurde schon vorher untersucht:

M. Carfora, J. Isenberg und M. Jackson sowie R. Hamilton betrachteten in [10] und [30], Section 11 jeweils den Ricci Fluss auf einer speziellen Klasse von Geometrien auf dem dreidimensionalen Torus T^3, die insbesondere invariant unter einer freien, isometrischen T^2 Operation sind, und zeigten Konvergenz gegen eine flache Metrik. Demgegenüber analysierten R. Hamilton und J. Isenberg, sowie D. Knopf den Ricci Fluss auf getwisteten T^2 Bündeln über S^1 ([32] und [37]). J. Lott und N. Sesum untersuchten den Ricci Fluss auf geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten mit einer lokal isometrischen T^2 Operation und auf warped products mit einer S^1 Faser über einer zweidimensionalen geschlossenen Fläche ([43]). Beispielsweise zeigten sie in verschiedenen Fällen Konvergenz des Ricci Flusses oder dass die Lösung vom Typ III (s. u.) ist. [1]

In [52] betrachtete M. Simon eine bestimmte Klasse von warped product Mannigfaltigkeiten $\mathbf{R} \times N$, wobei N eine geschlossene Einstein Mannigfaltigkeit mit positiver Einstein Konstante ist, und zeigte, dass unter Ricci Fluss nichttriviale (pinching) Singularitäten in endlicher Zeit entstehen können, ohne dass gleichzeitig die ganze Mannigfaltigkeit verschwindet. Dass neckpinch Singularitäten auch bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten auftreten können, zeigten S. Angenent und D. Knopf in [4], indem sie den Ricci Fluss auf einer Klasse von warped product Mannigfaltigkeiten $\mathbf{R} \times S^n$, die rotationssymmetrischen Metriken auf der $n+1$-dimensionalen Sphäre S^{n+1} entsprechen, untersuchten. Des Weiteren zeigten sie in [5] präzise Asymptotiken für nichtdegenerierte Ricci Fluss neckpinches. H.-L. Gu und X.-P. Zhu zeigten das Auftreten eines degenerierten neckpinches für rotationssymmetrische Metriken auf der S^{n+1}, präzise Asymptotiken für degenerier-

[1] Vergleiche diesen Abschnitt auch mit der Einleitung aus [43] von J. Lott und N. Sesum.

te Ricci Fluss neckpinches wurden später von S. Angenent, D. Knopf und J. Isenberg bewiesen ([3]).

Wir beginnen mit der Evolution der Mannigfaltigkeit $M = \mathbf{R} \times N$ mit warped product Metrik $h = f_0^2 dx^2 + g_0^2 g_N$ unter Ricci Fluss, wobei (N, g_N) eine flache, vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$ ist und $f_0, g_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv sind und so gewählt werden, dass (M, h) vollständig ist und beschränkte Krümmung hat.

Der Ricci Fluss hat unter diesen Voraussetzungen genau eine Lösung $h(t), t \in [0, T)$, $0 < T \leq \infty$, auf einem maximalen Zeitintervall in der Klasse der C^∞ Familien von vollständigen Riemannschen Metriken mit beschränkter Krümmung auf kompakten Zeitintervallen und mit $h(0) = h$ (siehe dazu [16], Theorem D.5). Wir zeigen zuerst, dass die warped product Struktur erhalten bleibt, d. h. dass $f, g : \mathbf{R} \times [0, T) \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv existieren mit $h(t) = f^2(\cdot, t) dx^2 + g^2(\cdot, t) g_N$, $t \in [0, T)$ (Satz 8.3); siehe auch [30], Section 11, wo R. Hamilton das Erhaltenbleiben der warped product Struktur mit dem Erhalten von Symmetrien unter Ricci Fluss begründet. In [52] gibt M. Simon einen alternativen Beweis, um in seinem Setting das Erhaltenbleiben der warped product Struktur zu zeigen.

Um das zu beweisen zeigen wir, dass eine C^∞ Riemannsche Metrik auf dem $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ genau dann eine warped product Metrik der Form $f^2 dx^2 + g^2 g_{\mathbf{R}^n}$ ist (wobei $g_{\mathbf{R}^n}$ die Standardmetrik auf dem $\mathbf{R}^n$ bezeichnet), wenn sie gewisse Isometrien hat (Satz 6.1). Da in unserer Klasse von Lösungen des Ricci Flusses Isometrien erhalten bleiben, bleibt im Fall $N = \mathbf{R}^n$ versehen mit $g_{\mathbf{R}^n}$ auch die warped product Struktur erhalten. Mit Hilfe der Abbildung

$$\mathrm{id} \times \psi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \times N, (x, q) \to (x, \psi(q))$$

, wobei $\psi : \mathbf{R}^n \to N$ die universelle lokal isometrische Überlagerung von N ist, können wir anschließend das Ergebnis auf den Fall eines allgemeinen N übertragen.

In der Klasse der C^∞ Familien von Riemannschen Metriken der Form $h(t) = f^2(\cdot, t) dx^2 + g^2(\cdot, t) g_N$, $t \in [0, T)$ ist die Bedingung an $h(t), t \in [0, T)$, Ricci Fluss zu erfüllen, äquivalent dazu, dass f und g Lösungen eines speziellen Systems partieller Differentialgleichungen sind (Satz 8.5); der Beweis des allgemeinen n-dimensionalen Falles ist hierbei analog zum Fall $n = 2$, der in [30], Section 11 steht, siehe auch [4] für den ebenfalls analogen Fall $\mathbf{R} \times S^n$.

Die warped product Struktur der Metrik $h(t)$, $t \in [0, T)$ fest, impliziert die Existenz von Hauptschnittkrümmungen K_V und K_H (V steht für "vertikal", H für "horizontal"): K_V (K_H) ist die Schnittkrümmung einer zweidimensionalen Ebene tangential an die (orthogonal zu der) Faser $\{x\} \times N$ ($x \in \mathbf{R}$) (Definition 5.4). Krümmungsabschätzungen folgen aus Abschätzungen für K_V und K_H, da sich die Norm des Riemanntensors $|\operatorname{Rm}|$ durch K_V und K_H kontrollieren lässt: Es gilt

$$|\operatorname{Rm}|^2 = a(n)K_V^2 + b(n)K_H^2 \tag{1}$$

wobei $a(n), b(n)$ nur von n abhängige Konstanten sind (Satz 5.10). Ferner lassen sich K_V und K_H durch die Funktionen f und g ausdrücken:

$$K_V = -\frac{1}{g^2}(\frac{\partial g}{\partial s})^2, K_H = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}$$

, wobei $\frac{\partial}{\partial s} := \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}$ gilt. Wir können somit Evolutionsgleichungen für K_V, K_H und andere verwandte geometrische Größen berechnen (Satz 10.1). Dies ist wiederum analog zu den Fällen $n = 2$ in [30], Section 11 und $\mathbf{R} \times S^n$ in [4]. Eine Anwendung einer Erweiterung eines Maximumprinzips auf nichtkompakten Mannigfaltigkeiten (Theorem 9.3) liefert dann die Abschätzungen

$$|K_V| \leq \frac{C_1}{t+a}, |K_H| \leq \frac{C_2}{t+a}$$

(Sätze 10.6, 10.8) und wegen (1) somit

$$|\operatorname{Rm}| \leq \frac{C_3}{t+a}$$

für alle $t \in [0, T)$, wobei $C_1, C_2, C_3 > 0$ und $a > 0$ nur von $h(0)$ abhängen (Satz 10.10), und damit Langzeitexistenz ($T = \infty$, Korollar 10.5) und dass die Lösung des Ricci Flusses vom Typ III ist, d. h. dass $|\operatorname{Rm}| \leq \frac{C}{t}$ für ein $C > 0$ und für alle $t \in (0, \infty)$ gilt. Aus didaktischen Gründen beweisen wir die Langzeitexistenz, die leichter zu zeigen ist, vor den obigen Abschätzungen.

Langzeitexistierende Lösungen des normalisierten (d. h. volumenerhaltenden) Ricci Flusses mit gleichmäßig beschränkter Krümmung, sogenannte nicht-singuläre Lösungen, wurden in [31] von R. Hamilton für geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeiten klassifiziert. Der n-dimensionale Fall wurde von F. Fang, Y. Zhang und Z. Zhang in [20] untersucht für geschlossene und in [21] für nichtkompakte, vollständige Mannigfaltigkeiten mit endlichem Volumen.

Das Langzeitverhalten von Typ III Lösungen des Ricci Flusses wird von J. Lott in [41] und [42] beschrieben; siehe auch die Arbeit von D. Knopf [38]. Außerdem gibt es Resultate, dass bestimmte Lösungen vom Typ III sind: Beispielsweise zeigte R. H. Bamler dies unter topologischen Annahmen an eine geschlossene dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit für den Ricci Fluss mit Chirurgie ([8]). C. Hilaire zeigte in [33], dass bei Lösungen auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten, die für alle positiven Zeiten existieren, unter geeigneten Annahmen an die Krümmungen und den Durchmesser der Ricci Tensor nach 0 geht und die Lösungen im Fall, dass M dreidimensional ist, vom Typ III sind.

Die Krümmungsabschätzungen verwenden wir, um unter der Voraussetzung $\sup_{x \in \mathbf{R}} g_0(x) < \infty$ und wenn die Metrik so reskaliert wird, dass eine feste Faser $\{y\} \times N$ für alle Zeiten isometrisch zu (N, g_N) ist, die Konvergenz der Menge aller Punkte, deren Abstand zu $\{y\} \times N \leq r$ ist, gegen einen flachen Zylinder $[-r, r] \times N$ (mit Produktmetrik $dx^2 + g_N$) zu zeigen, für jedes feste $r > 0$ (Korollar 10.17).

Außerdem zeigen wir, falls zusätzlich $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g_0(x) = 0$ gilt, $(M, h(0))$ endliches Volumen hat und (N, g_N) homogen ist, mittels der Krümmungsabschätzungen, dass die Lösung kollabiert, d. h. dass der Injektivitätsradius gleichmäßig gegen 0 konvergiert (während die Krümmungen, wie schon gezeigt, beschränkt bleiben) (Satz 10.22). Dieses Resultat gilt auch für den normalisierten (=volumenerhaltenden) Ricci Fluss (Satz 10.25). Vergleiche dazu auch das Ergebnis in [21], wo gezeigt wird, dass vollständige, nicht-singuläre Lösungen des normalisierten Ricci Flusses auf nichtkompakten n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten entlang einer Teilfolge kollabieren oder entlang einer Teilfolge gegen eine vollständige Einsteinmetrik mit negativer Einstein Konstante konvergieren.

Als Nächstes betrachten wir n-dimensionale, nichtkompakte Mannigfaltigkeiten mit einer Familie von Riemannschen Metriken $h(t), t \in [0, \infty)$ und beginnen mit oberen Gaußschen Abschätzungen für den heat kernel der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta_{h(t)} u - Qu \tag{2}$$

(Theorem 12.30), wobei $\Delta_{h(t)}$ den Laplace Operator bzgl. der Metrik $h(t)$ bezeichnet und $Q : M \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ eine Funktion ist (das genaue Setting steht am Anfang von Kapitel 12, weitere Voraussetzungen stehen in den entsprechenden Sätzen des Kapitels). Mit „heat kernel" ist die minimale positive Lösung der Gleichung (2) gemeint, die mit einem Diracmaß δ_y im Punkt $y \in M$ zum Zeitpunkt $t = 0$ startet.

Gaußsche Abschätzungen sind hierbei solche, die einen Faktor der Form $e^{-\frac{d^2_{h(t)}(x,y)}{C(t)}}$ enthalten, wobei $d_{h(t)}$ die durch $h(t)$ induzierte Metrik bezeichnet, $C(t)$ eine von t abhängige Konstante ist und $x, y \in M$ sind. Die erfolgreiche Suche (s. u.) nach Gaußschen Abschätzungen für heat kernel parabolischer Gleichungen (im $\mathbf{R}^n$, auf Mannigfaltigkeiten mit fester Metrik oder einer Familie von Metriken) zeigt, dass sich diese in gewisser Weise ähnlich zum heat kernel der (Standard)Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$ im $\mathbf{R}^n$ verhalten, der explizit durch

$$H(x, t, y, 0) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}}$$

gegeben ist.

Die ersten beidseitigen (d. h. oberen und unteren) Gaußschen Abschätzungen für heat kernel gleichmäßig parabolischer Gleichungen im $\mathbf{R}^n$ stammen von D. G. Aronson ([6]); auf vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit beschränkter Krümmung wurden sie zuerst von S. Y. Cheng, P. Li und S.-T. Yau bewiesen ([14]). Scharfe beidseitige Gaußsche Abschätzungen im Falle von Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativer Riccikrümmung stammen von P. Li und S.-T. Yau ([40]). Unsere oberen Gaußschen Abschätzungen basieren auf [11] von A. Chau, L.-F. Tam und C. Yu; deren Gaußsche Abschätzungen wiederum fußen auf [23] von A. Grigor'yan. Wir haben hier nur ein paar Resultate genannt, es gibt noch viele weitere, siehe z. B. die Referenzen in [26] und in [24]. [2]

Aufbauend auf den oberen Gaußschen Abschätzungen für den heat kernel beweisen wir anschließend solche für Sublösungen $v : M \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ derselben Gleichung (2) (für das Setting siehe Kapitel 13) insbesondere unter der Voraussetzung, dass $v(\cdot, 0)$ kompakten Träger hat (Satz 13.1). Der entscheidende (Gaußsche) Term ist diesmal von der Form $e^{-\frac{d^2_{h(t)}(x,S)}{C(t)}}$, wobei $S := \operatorname{supp} v(\cdot, 0)$ der Träger von $v(\cdot, 0)$ ist.

Wenn nun $h(t), t \in [0, \infty)$ eine Lösung des Ricci Flusses auf M ist, sind die geometrischen Größen $|\operatorname{Rm}|^2, |\nabla \operatorname{Rm}|^2$ und $|T|^2$ (T bezeichne den spurlosen Ricci Tensor) Sublösungen der Gleichung (2) mit jeweils geeignetem Q; für $|T|^2$ zeigen wir dies, wobei die Berechnung der Evolutionsgleichung für $|T|^2$ analog zu der für den normalisierten Ricci Fluss in [54] ist, die ersten beiden Fälle stehen in [19]. Deshalb erhalten wir separat für jede dieser Größen obere Gaußsche Abschätzungen, falls sie zum Zeitpunkt $t = 0$ kompakten Träger hat (Korollar 14.4, für das Setting siehe Kapitel 14).

Falls $h(t) = f^2(\cdot, t)dx^2 + g^2(\cdot, t)g_N$, $t \in [0, \infty)$ eine warped product Metrik auf $M = \mathbf{R} \times N$ ist, wobei wir hier N zusätzlich als kompakt annehmen, erhalten wir die Gaußschen Abschätzungen in einer der warped product Geometrie angepassten Form für Sublösungen v mit kompakten Träger zum Zeitpunkt $t = 0$ und mit $v(x, p, t) = v(x, q, t)$ für alle $x \in \mathbf{R}, p, q \in N, t \in [0, \infty)$ oder für $|\operatorname{Rm}|^2, |\nabla \operatorname{Rm}|^2$ und $|T|^2$, falls $h(t)$ Ricci Fluss erfüllt und die jeweilige Größe bei $t = 0$ kompakten Träger hat (für das Setting und die Sätze siehe jeweils die Kapitel 13 und 14).

Zudem erhalten wir, falls $h(t) = f^2(\cdot, t)dx^2 + g^2(\cdot, t)g_N$, $t \in [0, \infty)$ Ricci Fluss erfüllt und die Enden der Mannigfaltigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ hyperbolisch sind (alle Schnittkrümmungen dort $= k < 0$) durch Integration Gaußähnliche Abschätzugen für die

[2] Vergleiche diesen Abschnitt auch mit der Einleitung aus [23] von A. Grigor'yan.

Hauptschnittkrümmungen K_V und K_H, die insbesondere

$$\lim_{x\to\pm\infty} K_V(x,t) = \lim_{x\to\pm\infty} K_H(x,t) = -\frac{1}{2nt - \frac{1}{k}}$$

für jedes feste $t \geq 0$ liefern (Satz 14.12). Beachte, dass $-\frac{1}{2nt-\frac{1}{k}}$ genau die Rate ist, mit der die Krümmungen auf dem hyperbolischen Raum H^{n+1} unter Ricci Fluss abfallen. Schließlich zeigen wir Gaußähnliche Abschätzungen für alle weiteren Schnittkrümmungen (Korollar 14.20). Damit zeigt der Ricci Fluss pseudolokales Verhalten: Die Schnittkrümmungen verhalten sich im räumlichen Grenzwert $x \to \pm\infty$ so, als wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ die ganze Mannigfaltigkeit (und nicht nur die Enden) hyperbolisch gewesen wäre! In [36] wird gezeigt, dass vollständige asymptotisch hyperbolische Mannigfaltigkeiten unter einem krümmungs-normalisierten Ricci Fluss für kurze Zeit asymptotisch hyperbolisch bleiben. Daraus folgt ebenfalls die Konvergenz der Schnittkrümmungen gegen eine Konstante (für $x \to \pm\infty$) sowie die obige Abfallrate der Schnittkrümmungen in unserem warped product Setting. Vergleiche auch die Arbeiten [7] und [49] in Bezug auf das Erhalten von konform kompakten asymptotisch hyperbolischen Metriken unter Ricci Fluss und die lokalen Abschätzungen in [50] bezüglich Nähe einer Lösung des krümmungs-normalisierten Ricci-de Turck Flusses zur hyperbolischen Metrik.

Als Letztes zeigen wir, unter Verwendung des Verhaltens der Nullstellen von Lösungen linearer parabolischer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf $\mathbf{R}$ und unter geeigneten Zusatzannahmen (siehe Kapitel 15), dass die Enden der warped product Mannigfaltigkeit $\mathbf{R} \times N$ zu jedem positiven Zeitpunkt $t > 0$ negative Krümmung haben, falls sie für $t = 0$ hyperbolisch sind (Satz 15.3).

Ich möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich bei meinem Betreuer Klaus Ecker bedanken! Außerdem vielen Dank an Gerhard Huisken, Theodora Bourni, Brian Smith, Oliver Schnürer, Felix Schulze, Richard Bamler, Adrian Hammerschmidt, Bernold Fiedler, Tom Ilmanen, Dan Knopf, Ananda Lahiri, Felix Jachan, Bernhard Brehm und Ahmad Afuni!

Zum Schluss noch: Viel Spaß beim Lesen!

Berlin,

Tobias Marxen

1 Grundlagen und Notation

In diesem ersten Kapitel sind grundlegende Definitionen und Notation zusammengestellt.

Sei M eine n-dimensionale C^∞ Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen das Tangentialbündel von M mit

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

, das Kotangentialbündel mit

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$$

und das (r,s)-Tensorbündel mit

$$T_s^r M = \bigcup_{p \in M} (T_s^r)_p M$$

für ganze Zahlen $r, s \geq 0$. Dabei ist

$$(T_s^r)_p M = \{A : \underbrace{T_p^* M \times \cdots \times T_p^* M}_{r \text{ Faktoren}} \times \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{s \text{ Faktoren}} \to \mathbf{R} \text{ multilinear}\}$$

Ein $(0,2)$-Tensor ist also eine Abbildung $g : M \to T_2^0 M$ mit $g(p) \in (T_2^0)_p M$ für alle $p \in M$.

Die Menge aller C^∞ Vektorfelder auf M bezeichnen wir mit $X(M)$, die Menge aller C^∞ 1-Formen mit $X^*(M)$ und allgemein die Menge aller C^∞ (r,s)-Tensoren mit $X_s^r(M)$. Ist A ein C^∞ (r,s)-Tensor, bezeichnen wir seine kovariante Ableitung mit ∇A (ein $(r, s+1)$-Tensor), und die k-fache kovariante Ableitung von A mit

$$\nabla^k A := \underbrace{\nabla(\nabla(\cdots \nabla}_{k \text{ mal}} A) \cdots)) \, , k \in \mathbf{N}$$

(d. h. z. B. $\nabla^2 A = \nabla(\nabla A)$). Die Komponenten von $\nabla^k A$ bezeichnen wir auch mit

$$\nabla_{i_k} \cdots \nabla_{i_1} A_{l_1 \cdots l_s}^{j_1 \cdots j_r} := (\nabla^k A)_{l_1 \cdots l_s i_1 \cdots i_k}^{j_1 \cdots j_r}$$

(ist A z. B. ein $(1,2)$-Tensor, so schreiben wir $\nabla_i \nabla_j A_{lm}^r$ für $(\nabla^2 A)_{lmji}^r = (\nabla(\nabla A))_{lmji}^r$). Dabei nehmen alle Indizes Werte zwischen 1 und n an.

Ist auf M eine C^∞ Riemannsche Metrik g gegeben, so schreiben wir dafür auch $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Skalarprodukt von Tensoren
Seien $U \subset M$ offen, $V \subset \mathbf{R}^n$ offen und $\phi : U \to V$ eine Karte von M. Wir definieren das Skalarprodukt $\langle A, B\rangle$ von zwei (r,s)-Tensoren A und B durch

$$\langle A, B\rangle := g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_s j_s} g_{k_1 l_1} \cdots g_{k_r l_r} A^{k_1 \cdots k_r}_{i_1 \cdots i_s} B^{l_1 \cdots l_r}_{j_1 \cdots j_s} \qquad \text{in } U$$

(Wir verwenden die Einsteinsche Summenkonvention und summieren über obere und untere Indizes.)

Ist ϕ zusätzlich ein normales Koordinatensystem bei $p \in U$, so gilt

$$\langle A, B\rangle(p) = \sum_{i_1,\ldots,i_s,k_1,\ldots,k_r} A^{k_1 \cdots k_r}_{i_1 \cdots i_s}(p) B^{k_1 \cdots k_r}_{i_1 \cdots i_s}(p)$$

Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ eine Orthonormalbasis (ONB) von T_pM und $\{e^{1*}, ..., e^{n*}\}$ die duale Basis (von T_p^*M). Dann gilt: Das Skalarprodukt von A und B ist am Punkt $p \in M$ auch gegeben durch

$$\langle A, B\rangle(p) = \sum_{i_1,\ldots,i_s,k_1,\ldots,k_r} A(p)(e^{k_1*}, ..., e^{k_r*}, e_{i_1}, ..., e_{i_s}) B(p)(e^{k_1*}, ..., e^{k_r*}, e_{i_1}, ..., e_{i_s})$$

denn es gibt ein normales Koordinatensystem bei p, so dass gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(p) = e_1, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}(p) = e_n$$

Norm eines Tensors
Sei $U \subset M$ offen, $V \subset \mathbf{R}^n$ offen und $\phi : U \to V$ eine Karte von M. Wir definieren die Norm $|A|$ von A durch

$$|A|^2 := \langle A, A\rangle = g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_s j_s} g_{k_1 l_1} \cdots g_{k_r l_r} A^{k_1 \cdots k_r}_{i_1 \cdots i_s} A^{l_1 \cdots l_r}_{j_1 \cdots j_s} \qquad \text{in } U$$

Ist ϕ zusätzlich ein normales Koordinatensystem bei $p \in U$, so gilt

$$|A|^2(p) = \sum_{i_1,\ldots,i_s,k_1,\ldots,k_r} (A^{k_1 \cdots k_r}_{i_1 \cdots i_s}(p))^2$$

d. h. in diesem Fall ist die Norm von A die euklidische Norm der Komponentenfunktionen bei p. Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ eine Orthonormalbasis (ONB) von T_pM und $\{e^{1*}, ..., e^{n*}\}$ die duale Basis (von T_p^*M). Dann gilt: Die Norm von A (zum Quadrat) ist auch gegeben durch

$$|A|^2(p) = \sum_{i_1,\ldots,i_s,k_1,\ldots,k_r} (A(p)(e^{k_1*}, ..., e^{k_r*}, e_{i_1}, ..., e_{i_s}))^2$$

(siehe den vorigen Abschnitt „Skalarprodukt von Tensoren")

Riemannscher Krümmungstensor
Wir verwenden folgende Definition für den Riemannschen Krümmungstensor:

$$\mathrm{Rm}(X,Y)Z = -\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]}Z$$
$$\mathrm{Rm}(X,Y,Z,W) = \langle \mathrm{Rm}(X,Y)Z, W\rangle$$

für alle $X, Y, Z, W \in X(M)$.
In lokalen Koordinaten bekommen wir

$$R_{ijkl} = g_{ml}R_{ijk}^m$$

Schnittkrümmungen, Ricci Tensor, Skalarkrümmung
Die Schnittkrümmung eines 2-dimensionalen Unterraums $U \subset T_pM$ mit $U = \mathrm{span}\{v, w\}$, $v, w \in T_pM$ linear unabhängig ist damit gegeben durch

$$\sec U = \sec(v,w) = \frac{\mathrm{Rm}(p)(v,w,v,w)}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

Damit ist der Ricci Tensor gegeben durch

$$\mathrm{Ric}(p)(v,w) = \sum_i \mathrm{Rm}(p)(v,e_i,w,e_i)$$

mit $p \in M, v, w \in T_pM$ und $\{e_1, ..., e_n\}$ eine ONB von T_pM.
In lokalen Koordinaten heißt das

$$R_{ij} = g^{kl}R_{ikjl} = R_{ikj}^k$$

Die Skalarkrümmung R ist gegeben durch $R = g^{ij}R_{ij}$.

Krümmungsoperator
Als Referenz siehe auch [48].
Sei

$$\Lambda_p^2 M = \{A : T_p^*M \times T_p^*M \to \mathbf{R} | A \text{ bilinear und } A(\omega,\eta) = -A(\eta,\omega)\ \forall \omega,\eta \in T_p^*M\}$$

Es gilt $\Lambda_p^2 M = \mathrm{span}\{v \wedge w | v, w \in T_p^*M\}$. Elemente der Form $v \wedge w$ heißen zerlegbar.
Definiere den Krümmungsoperator

$$\mathcal{R}(p) : \Lambda_p^2 M \times \Lambda_p^2 M \to \mathbf{R}$$

auf zerlegbaren Elementen durch

$$\mathcal{R}(p)(v \wedge w, y \wedge z) := \mathrm{Rm}(p)(v,w,y,z) = \langle \mathrm{Rm}(p)(v,w)y, z\rangle$$

für alle $v, w, z, y \in T_pM$. Definiere auf $\Lambda^2_p M$ ein Skalarprodukt so, dass wenn $\{e_i, i = 1, ..., n\}$ eine Orthonormalbasis von T_pM ist, $\{e_i \wedge e_j, 1 \leq i < j \leq n\}$ eine Orthonormalbasis von $\Lambda^2_p M$ ist. Definiere dann den Krümmungsoperator „als $(1,1)$-Tensor"

$$\mathcal{R}(p) : \Lambda^2_p M \to \Lambda^2_p M$$

durch

$$\langle \mathcal{R}(p)(V), W\rangle = \mathcal{R}(p)(V, W)$$

für alle $V, W \in \Lambda^2_p M$. Für zerlegbare Elemente ergibt das

$$\langle \mathcal{R}(p)(v \wedge w), y \wedge z\rangle = \mathcal{R}(p)(v \wedge w, y \wedge z) = \mathrm{Rm}(v, w, y, z) = \langle \mathrm{Rm}(v, w)y, z\rangle$$

Ableitung, Gradient, Hessesche und Laplace für (reellwertige) Abbildungen
Sei N eine C^∞ Mannigfaltigkeit. Ist $u : M \to N$ C^∞, so bezeichnen wir die Ableitung von u mit $Du : TM \to TN$. Die Einschränkung von Du als eine (lineare) Abbildung von T_pM nach $T_{u(p)}N$ bezeichnen wir auch mit $Du_p := Du|_{T_pM}$.
Ist g eine C^∞ Riemannsche Metrik auf M und $u : M \to \mathbf{R}$ C^∞, so bezeichnen wir das Gradientenvektorfeld von u mit $\operatorname{grad} u$, die Hessesche von u mit H^u (ein $(0,2)$-Tensor) und den Laplace von u mit Δu. Dabei ist $H^u(X, Y) = Y(Xu) - (\nabla_Y X)u$ für alle $X, Y \in X(M)$ und $\Delta u = \mathcal{C}H^u$, wobei $\mathcal{C}$ eine Kontraktion bezeichnet, d. h. $\Delta u = g^{ij} H_{ij}$ in lokalen Koordinaten mit $H_{ij} = H^u(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$.

Familien von Tensoren
Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein Intervall. Sei $A(t), t \in I$ eine Familie von (r, s)-Tensoren auf M. Wir sagen, $A(t), t \in I$ ist eine stetige Familie von C^∞ (r, s)-Tensoren auf M, wenn $A(t)$ C^∞ ist für alle $t \in I$ und die Abbildung $\widetilde{A} : M \times I \to T^r_s M$, $(p, t) \to \widetilde{A}(p, t) := A(t)(p)$ stetig ist. Wir sagen, $A(t), t \in I$ ist eine C^∞ Familie von C^∞ (r, s)-Tensoren auf M, wenn die Abbildung $\widetilde{A} : M \times I \to T^r_s M$, $(p, t) \to \widetilde{A}(p, t) = A(t)(p)$ C^∞ ist. Wir bezeichnen die Abbildung $\widetilde{A}$ im Folgenden auch mit A.

Sei $g(t), t \in I$ eine C^∞ Familie von C^∞ Riemannschen Metriken. Sei $A(t), t \in I$ eine C^∞ Familie von C^∞ (r, s)-Tensoren auf M. Seien $X(t), t \in I$ und $Y(t), t \in I$ C^∞ Familien von C^∞ Vektorfeldern auf M.Sei $f : M \times I \to \mathbf{R}$ C^∞. Wir nennen A auch ein zeitabhängiges C^∞ Tensorfeld, X, Y zeitabhängige C^∞ Vektorfelder und f eine zeitabhängige C^∞ Funktion (wenn man sich den Parameter $t \in I \subset \mathbf{R}$ als Zeit vorstellt).
Definiere

$$(\Delta A)(p, t) := (\Delta(A(\cdot, t)))(p) := (\Delta_{g(t)}(A(\cdot, t)))(p)$$
$$(\operatorname{grad} f)(p, t) := (\operatorname{grad}(f(\cdot, t)))(p) := (\operatorname{grad}_{g(t)}(f(\cdot, t)))(p)$$
$$\langle X, Y\rangle(p, t) := \langle X(\cdot, t), Y(\cdot, t)\rangle(p) = g(t)(p)(X(p, t), Y(p, t))$$
$$|A|(p, t) := |A(\cdot, t)|(p) := |A(\cdot, t)|_{g(t)}(p)$$

usw. für alle $p \in M, t \in I$

2 Produkte und warped products

In diesem Kapitel stellen wir allgemeine Eigenschaften von warped product Mannigfaltigkeiten zusammen. Hierbei folgen wir dem Buch [44], Kapitel 1, S. 24 f. und Kapitel 7, S. 204 ff.

Seien in diesem Kapitel M, N C^∞ Mannigfaltigkeiten, $x \in M$, $q \in N$.

Wir haben die beiden Projektionen

$$\pi : M \times N \to M \text{ und } \sigma : M \times N \to N$$

Die Teilmengen $M \times \{q\} \subset M \times N$ und $\{x\} \times N \subset M \times N$ sind Untermannigfaltigkeiten, und

$$\pi|_{M\times\{q\}} : M \times \{q\} \to M, \sigma|_{\{x\}\times N} : \{x\} \times N \to N$$

sind Diffeomorphismen. Der Tangentialraum von $M \times N$ im Punkt (x, q) ist die direkte Summe des Tangentialraums von $M \times \{q\}$ am Punkt (x, q) und des Tangentialraums von $\{x\} \times N$ am Punkt (x, q):

$$T_{(x,q)}(M \times N) = T_{(x,q)}(M \times \{q\}) + T_{(x,q)}(\{x\} \times N)$$

und

$$T_{(x,q)}(M \times \{q\}) \cap T_{(x,q)}(\{x\} \times N) = 0$$

Dabei haben wir folgende allgemeine Identifikation benutzt: Ist $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit, $i : M \hookrightarrow N$, $x \to x$ die Inklusion und $x \in M$, so identifizieren wir T_xM mit dem Unterraum $Di_x(T_xM) \subset T_xN$.

Hochheben/Liften
Wir können Tangentialvektoren an M oder N mittels π bzw. σ hochheben (liften): Ist $v \in T_xM$, so ist der Lift von v an $(x, q) \in M \times N$ der eindeutig bestimmte Vektor $\widetilde{v} \in T_{(x,q)}(M \times \{q\})$ mit $D\pi(\widetilde{v}) = v$. Ebenso für N.

Auf diese Weise lassen sich Vektorfelder hochheben (liften): Ist $X \in X(M)$, so ist $\widetilde{X}(x, q) \in T_{(x,q)}(M \times N)$ der Lift von $X(x)$ an (x, q). Das ergibt ein Vektorfeld $\widetilde{X} \in X(M \times N)$.

Problemlos lassen sich $(0, s)$-Tensoren hochheben: Ist $A \in X^0_s(M)$, so ist

$$\widetilde{A} := \pi^*A \in X^0_s(M \times N)$$

Der Lift von $(1, s)$ Tensoren geht folgendermaßen: Ist $A \in X^1_s(M)$ und sind $v_1, ..., v_s \in T_{(x,q)}(M \times N)$, so ist $\widetilde{A}(x, q)(v_1, ..., v_s)$ der Lift von $A(x)(D\pi(v_1), ..., D\pi(v_s))$ an (x, q).

Insbesondere ist der Lift einer Funktion $f : M \to \mathbf{R}$ gegeben durch $\widetilde{f} := f \circ \pi$.

Alles eben gesagte geht genauso für N.

Wir nennen Lifts von Vektorfeldern/Tensoren auf M auch horizontale Vektorfelder/Tensoren, und Lifts von Vektorfeldern/Tensoren auf N auch vertikale Vektorfelder/Tensoren. An dieser Stelle sind die Begriffe aber völlig austauschbar.

Die direkte Summenzerlegung von $T_{(x,q)}(M \times N)$ lässt sich durch Lifte beschreiben: Für $v \in T_xM$ ist $\widetilde{v} \in T_{(x,q)}(M \times N)$ das Bild unter der Abbildung

$$T_xM \to T_{(x,q)}(M \times \{q\}) \to Di_{(x,q)}(T_{(x,q)}(M \times \{q\}) \subset T_{(x,q)}(M \times N)$$

Entsprechend für $w \in T_qN$ und $\widetilde{w} \in T_{(x,q)}(M \times N)$. Folglich gilt:

Satz 2.1. *Zu jedem $z \in T_{(x,q)}(M \times N)$ gibt es eindeutig bestimmte $v \in T_xM, w \in T_qN$ mit $z = \widetilde{v} + \widetilde{w}$.*

Warped product Metriken
Sei k eine C^∞ Riemannsche Metrik auf M, l eine C^∞ Riemannsche Metrik auf N, und $g : M \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv. Dann ist

$$h := \pi^*k + (\pi^*g)^2\sigma^*l = \pi^*k + (g^2 \circ \pi)\sigma^*l$$

eine C^∞ Riemannsche Metrik auf $M \times N$. Wir schreiben im Folgenden auch kürzer $h = k + g^2l$. Diese (abstrakte) Schreibweise enthält alle Informationen über h: die Riemannschen Metrik des 1. Faktors k, die Riemannsche Metrik des 2. Faktors l und die warping function g.

Setzen wir Tangentialvektoren ein:

Seien $v_1, v_2 \in T_xM$, $w_1, w_2 \in T_qN$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h(x,q)(\widetilde{v_1} + \widetilde{w_1}, \widetilde{v_2} + \widetilde{w_2}) &= (\pi^*k + (g^2 \circ \pi)\sigma^*l)(x,q)(\widetilde{v_1} + \widetilde{w_1}, \widetilde{v_2} + \widetilde{w_2}) \\ &= k(x)(v_1, v_2) + g^2(x)l(q)(w_1, w_2) \end{aligned}$$

Damit wird $\pi|_{M\times\{q\}} : M \times \{q\} \to M$ eine Isometrie für alle $q \in N$!

Satz 2.2. *Seien $X \in X(M)$ und $g : M \to \boldsymbol{R}$ C^∞. Dann gilt*

$$\widetilde{X}(\widetilde{g}) = \widetilde{X}(g \circ \pi) = \widetilde{Xg} = (Xg) \circ \pi$$

Ebenso für N.

Beweis. Der Beweis ist dem Leser überlassen! $\square$

Satz 2.3. *Ist $u : M \to \boldsymbol{R}$ C^∞, so ist der Lift des Gradientenvektorfeldes von u das Gradientenvektorfeld von $u \circ \pi$.*

Beweis. [44], S. 206 $\square$

Satz 2.4. *Seien $X \in X(M), V \in X(N)$ und bezeichne die Lifte mit $\widetilde{X}$ und $\widetilde{V}$. Es gilt*

(1) $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \widetilde{\nabla_X Y}$, *d. h.* $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ *ist der Lift von* $\nabla_X Y$.

(2) $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X} = (\frac{Xg}{g} \circ \pi)\widetilde{V}$

Beweis. [44], S. 206 $\square$

Satz 2.5. *Seien $Y, Z, A \in X(M), U, V, W \in X(N)$ und bezeichne die Lifte mit $\widetilde{Y}$ etc. Es gilt*

(1) $\mathrm{Rm}(\widetilde{A}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = \mathrm{Rm}\widetilde{(A, Y)}Z$

(2) $\mathrm{Rm}(\widetilde{V}, \widetilde{A})\widetilde{Y} = (\frac{H^g(A,Y)}{g} \circ \pi)\widetilde{V}$

(3) $\mathrm{Rm}(\widetilde{A}, \widetilde{Y})\widetilde{V} = \mathrm{Rm}(\widetilde{V}, \widetilde{W})\widetilde{A} = 0$

(4) $\mathrm{Rm}(\widetilde{A}, \widetilde{V})\widetilde{W} = \frac{h(\widetilde{V},\widetilde{W})}{g\circ\pi}\widetilde{\nabla_A \operatorname{grad} g}$

(5) $\mathrm{Rm}(\widetilde{V}, \widetilde{W})\widetilde{U} =^F \mathrm{Rm}(\widetilde{V}, \widetilde{W})\widetilde{U} - (\frac{|\operatorname{grad} g|^2}{g^2} \circ \pi)(h(\widetilde{V}, \widetilde{U})\widetilde{W} - h(\widetilde{W}, \widetilde{U})\widetilde{V})$

Dabei sei ${}^F\,\mathrm{Rm}$ der Lift von Rm auf N. Das sind alle Kombinationsmöglichkeiten von horizontalen und vertikalen Komponenten des Krümmungstensors genau bis auf Vertauschung der ersten beiden Komponenten.

Beweis. [44], S. 210 $\square$

Die punktweise Version sieht so aus:

Korollar 2.6. *Seien $y, z, a \in T_xM, u, v, w \in T_qN$ und bezeichne die Lifte mit $\widetilde{y}$ etc. Es gilt*

(1) $\mathrm{Rm}(x, q)(\widetilde{a}, \widetilde{y})\widetilde{z} = \mathrm{Rm}\widetilde{(x)(a}, y)z$

(2) $\mathrm{Rm}(x, q)(\widetilde{v}, \widetilde{z})\widetilde{y} = \frac{H^g(x)(z,y)}{g(x)}\widetilde{v}$

(3) $\mathrm{Rm}(x, q)(\widetilde{z}, \widetilde{y})\widetilde{v} = \mathrm{Rm}(x, q)(\widetilde{v}, \widetilde{w})\widetilde{z} = 0$

(4) $\mathrm{Rm}(x,q)(\widetilde{z},\widetilde{v})\widetilde{w} = \frac{h(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w})}{g(x)}\widetilde{\nabla_z \operatorname{grad} g}$

(5) $\mathrm{Rm}(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w})\widetilde{u} = ({}^F\mathrm{Rm})(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w})\widetilde{u} - (\frac{|\operatorname{grad} g|^2}{g^2})(x)(h(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{u})\widetilde{w} - h(x,q)(\widetilde{w},\widetilde{u})\widetilde{v})$

Damit lässt sich der Riemannsche Krümmungstensor als $(0,4)$-Tensor berechnen:

Korollar 2.7. *Seien $y, z, a, b \in T_xM, u, v, w, r \in T_qN$ und bezeichne die Lifte mit $\widetilde{y}$ etc. Es gilt*

(1) $h(x,q)(\mathrm{Rm}(x,q)(\widetilde{a},\widetilde{y})\widetilde{z},\widetilde{b}) = k(x)(\mathrm{Rm}(x)(a,y)z,b)$

(2) $h(x,q)(\mathrm{Rm}(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{z})\widetilde{y},\widetilde{w}) = \frac{H^g(x)(z,y)}{g(x)}h(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w})$

(3) $h(x,q)(\mathrm{Rm}(x,q)(\widetilde{z},\widetilde{v})\widetilde{w},\widetilde{y}) = \frac{h(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w})}{g(x)}k(x)(\nabla_z \operatorname{grad} g, y)$

(4) $h(x,q)(\mathrm{Rm}(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w})\widetilde{u},\widetilde{r}) = h(x,q)(({}^F\mathrm{Rm})(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w})\widetilde{u},\widetilde{r})$
$-(\frac{|\operatorname{grad} g|^2}{g^2})(x)(h(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{u})h(x,q)(\widetilde{w},\widetilde{r}) - h(x,q)(\widetilde{w},\widetilde{u})h(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{r}))$

Beachte außerdem die Gleichheit der 2. und 3. Zeile wegen der Symmetrien des Krümmungstensors. Bis auf Vertauschung der ersten beiden Komponenten des Krümmungstensors sind alle anderen Kombinationsmöglichkeiten von horizontalen und vertikalen Komponenten $= 0$.

Der Ricci Tensor berechnet sich nun folgendermaßen:

Satz 2.8. *Seien $y, z \in T_xM, v, w \in T_qN$ und bezeichne die Lifte mit $\widetilde{y}$ etc. Sei $n := \dim N > 1$. Es gilt*

(1) $\mathrm{Ric}(x,q)(\widetilde{z},\widetilde{y}) = ({}^B\mathrm{Ric})(x,q)(\widetilde{z},\widetilde{y}) - \frac{n}{g(x)}H^g(x)(z,y)$

(2) $\mathrm{Ric}(x,q)(\widetilde{z},\widetilde{v}) = 0$

(3) $\mathrm{Ric}(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w}) = ({}^F\mathrm{Ric})(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w}) - h(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w})(\frac{\Delta g}{g} + (n-1)\frac{|\operatorname{grad} g|^2}{g^2})(x)$

Dabei seien ${}^B\mathrm{Ric} = \pi^*\mathrm{Ric}$ und ${}^F\mathrm{Ric} = \sigma^*\mathrm{Ric}$ die Lifte der Ricci Tensoren von M und N.

Beweis. [44], S. 211 □

3 Exkurs: $\mathbf{R}^n$

In diesem kurzen Kapitel geht es um das Tangentialbündel, Ableitungen und Riemannsche Metriken, alles auf dem $\mathbf{R}^n$.

Allgemein lässt sich das Tangentialbündel TM einer C^∞ Mannigfaltigkeit M folgendermaßen definieren:

Definiere auf der Menge aller Tripel (p, φ, v) mit $\varphi : U \to V$ eine Karte von M, $p \in U$ und $v \in \mathbf{R}^n$ folgende Äquivalenzrelation:

$$(p, \varphi, v) \sim (q, \chi, w) :\Longleftrightarrow p = q \text{ und } \partial(\chi\varphi^{-1})(\varphi(p))(v) = w$$

wobei $\partial(\chi\varphi^{-1})(\varphi(p)) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ die gewöhnliche totale Ableitung von $\chi\varphi^{-1}$ im Punkt $\varphi(p)$ ist.

Dann ist das Tangentialbündel TM von M genau die Menge aller Äquivalenzklassen:

$$TM = \{[p, \varphi, v]\}$$

Auf $M = \mathbf{R}^n$ kann man jeden Tangentialvektor durch die Identität $\mathrm{id} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, p \to p$ als globale Karte repräsentieren:

$$T\mathbf{R}^n = \{[p, \mathrm{id}, v]\}$$

Auf diese Weise erhält man auch eine globale Trivialisierung des Tangentialbündels:

$$T\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, [p, \mathrm{id}, v] \to (p, v)$$

Sei nun $\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ C^∞. Die Ableitung $D\phi : T\mathbf{R}^n \to T\mathbf{R}^n$ ist gegeben durch

$$D\phi([p, \mathrm{id}, v]) = [\phi(p), \mathrm{id}, \partial\phi(p)(v)]$$

wobei $\partial\phi(p) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ die gewöhnliche totale Ableitung von ϕ im Punkt p ist.

Benutzt man obige Trivialisierung, erhält man die Abbildung

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, (p, v) \to (\phi(p), \partial\phi(p)(v))$$

Sei h eine Riemannsche Metrik auf dem $\mathbf{R}^n$. Wir können h folgendermaßen repräsentieren: Definiere

$$\widetilde{h} : \mathbf{R}^n \to \mathrm{Bil}(\mathbf{R}^n), \widetilde{h}(p)(v, w) := h(p)([p, \mathrm{id}, v], [p, \mathrm{id}, w])$$

mit $\mathrm{Bil}(\mathbf{R}^n) := \{A : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \text{ bilinear }\}$

Der Pullback von h ist gegeben durch

$$(\phi^* h)(p)([p, \mathrm{id}, v], [p, \mathrm{id}, w]) = h(\phi(p))([\phi(p), \mathrm{id}, \partial\phi(p)(v)], [\phi(p), \mathrm{id}, \partial\phi(p)(w)]$$

Das ist äquivalent zu

$$\widetilde{\phi^* h}(p)(v, w) = \widetilde{h}(\phi(p))(\partial\phi(p)(v), \partial\phi(p)(w))$$

Sei $e_1, ..., e_n$ die Standardbasis des $\mathbf{R}^n$. Schreiben wir $v = \sum_i v^i e_i, w = \sum_j w^j e_j$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(p)(v, w) = h(p)([p, \mathrm{id}, v], [p, \mathrm{id}, w]) &= \sum_{i,j} v^i w^j h(p)([p, \mathrm{id}, e_i], [p, \mathrm{id}, e_j]) \\ &= \sum_{i,j} h_{ij}(p) v^i w^j\end{aligned}$$

Das bedeutet: Die darstellende Matrix der Bilinearform $\widetilde{h}(p)$ ist $(h_{ij}(p))_{1 \le i,j \le n}$.

4 Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathbf{R}, f^2dx^2)$

Wir betrachten in diesem Kapitel die Mannigfaltigkeit $\mathbf{R}$ mit einer allgemeinen Riemannschen Metrik f^2dx^2, wobei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv ist. (Jede C^∞ Riemannsche Metrik auf $\mathbf{R}$ ist von dieser Form.) Dabei haben wir die Arbeiten [4] und [30], Section 11 verwendet.

Seien $h, u, v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ C^∞ beliebige Funktionen auf $\mathbf{R}$.

Definiere das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial s}(x) := \frac{1}{f(x)}\frac{\partial}{\partial x}(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Damit ist

$$(\frac{\partial}{\partial s}u)(x) = \frac{1}{f(x)}(\frac{\partial}{\partial x}u)(x)$$

Wir schreiben $u_x := \frac{\partial}{\partial x}u$ und $u_s := \frac{\partial}{\partial s}u$.

Definiere außerdem die 1-Form $ds(x) := f(x)dx(x)$. Dann lässt sich die Metrik schreiben als

$$ds^2 := ds \otimes ds = (fdx) \otimes (fdx) = f^2dx^2$$

Wegen

$$ds^2(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}) = f^2dx^2(\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}) = dx^2(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}) = 1$$

ist $\frac{\partial}{\partial s}$ ein globaler orthonormaler Rahmen.

Lemma 4.1. *(Produktregel)* $(uv)_s = u_sv + uv_s$

Beweis. $(uv)_s = \frac{1}{f}(uv)_x = \frac{1}{f}(u_xv + uv_x) = u_sv + uv_s$ □

Lemma 4.2. *(Quotientenregel)* $(\frac{u}{v})_s = \frac{u_s}{v} - \frac{uv_s}{v^2}$

Beweis. $(\frac{u}{v})_s = \frac{1}{f}(\frac{u}{v})_x = \frac{1}{f}(\frac{u_x}{v} - \frac{uv_x}{v^2}) = \frac{u_s}{v} - \frac{uv_s}{v^2}$ □

Lemma 4.3. *(Kettenregel)* $(h \circ u)_s(x) = h'(u(x))u_s(x)$ *für alle* $x \in \boldsymbol{R}$.

Beweis. $(h \circ u)_s(x) = \frac{1}{f(x)}(h \circ u)_x(x) = \frac{1}{f(x)}h'(u(x))u_x(x) = h'(u(x))u_s(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}$. □

Lemma 4.4. *(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)*

$$\int_a^b u_s ds = u(b) - u(a) \text{ für alle } a, b \in \boldsymbol{R}$$

Beweis. $\int_a^b u_s ds = \int_a^b \frac{1}{f}u_x f dx = \int_a^b u_x dx = u(b) - u(a)$ □

Es gelten $u_s = \frac{u_x}{f}$ und $u_{ss} = \frac{u_{xx}}{f^2} - \frac{f_x u_x}{f^3}$.

Im Folgenden verwenden wir die Identität $\mathrm{id} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ als globales Koordinatensystem/ globale Karte.

Satz 4.5. *Metrik und inverse Metrik:*

$$g_{11} := (f^2 dx^2)(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1}) = f^2$$

$$g^{11} = \frac{1}{f^2}$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = 2ff_x$$

Beweis. Der Beweis ist dem Leser überlassen! □

Satz 4.6. *Christoffelsymbole:* $\Gamma^1_{11} = \frac{f_x}{f}$

Beweis.

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11} (\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}) = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} \frac{1}{f^2} 2ff_x = \frac{f_x}{f}$$

□

Satz 4.7. *Hessesche:* $H^u = H_{11} dx^2 = (u_{xx} - \frac{f_x}{f} u_x) dx^2 = u_{ss} ds^2$

Beweis. Es gilt $H_{11} = \frac{\partial^2 u}{(\partial x^1)^2} - \Gamma^1_{11} \frac{\partial u}{\partial x^1} = u_{xx} - \frac{f_x}{f} u_x$ □

Satz 4.8. *Laplace:* $\Delta u = u_{ss}$

Beweis. $\Delta u = g^{11} H_{11} = \frac{1}{f^2}(u_{xx} - \frac{f_x u_x}{f}) = u_{ss}$ □

Satz 4.9. *Gradient:* $\operatorname{grad} u = u_s \frac{\partial}{\partial s}$

Beweis. $\operatorname{grad} u = g^{11} \frac{\partial u}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{1}{f^2} u_x \frac{\partial}{\partial x} = u_s \frac{\partial}{\partial s}$. □

Satz 4.10. *Volumenmaß:* $d\mu = ds = f dx$

Beweis. Beachte, dass $\mathbf{R}$ orientierbar ist. Also gilt $d\mu = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n = f dx = ds$ □

Satz 4.11. $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial s} = 0$

Beweis.
$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s} &= \nabla_{\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}}(\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{1}{f}(-\frac{f_x}{f^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{f}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}}\frac{\partial}{\partial x})\\ &= \frac{1}{f}(-\frac{f_x}{f^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{f}\Gamma^1_{11}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{f}(-\frac{f_x}{f^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{f}\frac{f_x}{f}\frac{\partial}{\partial x}) = 0\end{aligned}$$
□

Definition 4.12. *Sei $y \in \boldsymbol{R}$ fest aber beliebig. Definiere $s_y : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $s_y(x) := \int_y^x f(\xi)d\xi$*

Bemerkung 4.13. Beachte, dass s_y eine Stammfunktion zu f ist!

Satz 4.14. *$s_y : (\boldsymbol{R}, f^2dx^2) \to (I, dz^2)$ ist eine Isometrie, wobei $I \subset \boldsymbol{R}$ ein offenes Intervall ist und dz^2 die Standardmetrik auf $\boldsymbol{R}$ bezeichnet.*

Beweis. Es gilt $s_y' = f > 0$. Außerdem gilt für alle $x, v, w \in \mathbf{R}$ (siehe auch Kapitel 3)
$$\begin{aligned}s_y^*(dz^2)(x)((x,v),(x,w)) &= dz^2(s_y(x))((s_y(x), \partial s_y(x)(v)), (s_y(x), \partial s_y(x)(w)))\\ &= dz^2(s_y(x))((s_y(x), s_y'(x)v), (s_y(x), s_y'(x)w))\\ &= f^2(x)vw\end{aligned}$$
Ferner gilt
$$(f^2dx^2)(x)((x,v),(x,w)) = f^2(x)dx^2(x)((x,v),(x,w)) = f^2(x)vw$$
□

Korollar 4.15. *$(\boldsymbol{R}, f^2dx^2)$ ist genau dann vollständig, wenn $I := s_y(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}$ gilt.*

Korollar 4.16. *$s_y(x) = d(x,y)$, falls $x \geq y$ und $s_y(x) = -d(x,y)$, falls $x < y$, wobei d die durch die Riemannsche Metrik f^2dx^2 induzierte Metrik sei.*

Beweis. $d(x,y) = |s_y(x) - s_y(y)| = |s_y(x)|$, da s_y nach Satz 4.14 eine Isometrie ist und $s_y(y) = 0$ gilt. □

Korollar 4.17. *$\int_a^b f(\xi)d\xi = s_y(b) - s_y(a)$ für alle $-\infty < a < b < \infty$ und alle $y \in \boldsymbol{R}$.*

Beweis. Das folgt aus $\int_a^b f(\xi)d\xi = \int_a^b d\mu$ (nach Satz 4.10) und Satz 4.14. □

Das Ganze zeitabhängig

Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein Intervall. Seien $f : \mathbf{R} \times I \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv und $u, v : \mathbf{R} \times I \to \mathbf{R}$ C^∞.
Dann ist für jedes feste $t \in I$ $f^2(\cdot, t)dx^2$ eine C^∞ Riemannsche Metrik auf $\mathbf{R}$.
Damit ist z. B. $\frac{\partial}{\partial s}(x,t) = \frac{1}{f(x,t)}\frac{\partial}{\partial x}$, $x \in \mathbf{R}, t \in I$ definiert und damit $u_s(x,t) = \frac{1}{f(x,t)}u_x(x,t)$.
Es gelten

Satz 4.18. $(\Delta u)(x,t) = u_{ss}(x,t), (\operatorname{grad} u)(x,t) = u_s(x,t)\frac{\partial}{\partial s}(x,t)$

Außerdem gelten die zeitabhängigen Versionen obiger Sätze, z. B.
$(uv)_s = u_s v + u v_s$ oder $\int_a^b u_s(x,t)ds(x,t) = \int_a^b u_x(x,t)dx = u(b,t) - u(a,t)$.
Außerdem gilt die Kettenregel in t:

$$(h \circ u)_t(x,t) = h'(u(x,t))u_t(x,t)$$

Ferner haben wir den Kommutator

Satz 4.19. $[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}] = -\frac{f_t}{f}\frac{\partial}{\partial s}$, *d. h.* $u_{st} - u_{ts} = -\frac{f_t}{f}u_s$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}] &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}) - \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} \\
&= -\frac{f_t}{f^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{f_t}{f^2}\frac{\partial}{\partial x} \\
&= -\frac{f_t}{f}\frac{\partial}{\partial s}
\end{aligned}$$

□

5 Die warped product Mannigfaltigkeit $(\mathbf{R} \times N, f^2dx^2 + g^2g_N)$

Dieses Kapitel handelt von Eigenschaften einer warped product Mannigfaltigkeit aus $(\mathbf{R}, f^2dx^2)$ und (N, g_N), wobei f^2dx^2 eine allgemeine (vollständige) Riemannsche Metrik auf $\mathbf{R}$ und g_N eine flache, vollständige Riemannsche Metrik auf N ist.

Sei also (N, g_N) eine zusammenhängende, vollständige, flache C^∞ Riemannsche Mannigfaltigkeit, falls nichts Anderes gesagt ist. Gelte $\dim N =: n \geq 2$. Seien $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv. Dann ist $k := f^2dx^2$ eine C^∞ Riemannsche Metrik auf $\mathbf{R}$; wir nehmen an, dass k vollständig ist (siehe dazu Korollar 4.15). Wir versehen nun $\mathbf{R} \times N$ mit der warped product Metrik

$$h := k + g^2g_N = f^2dx^2 + g^2g_N$$

Aus der Vollständigkeit von k und g_N folgt die Vollständigkeit von h (siehe [44], S.209).

Sei ferner $\psi : (\mathbf{R}^n, g_{\mathbf{R}^n}) \to (N, g_N)$ die lokal isometrische universelle Überlagerung von N, wobei $g_{\mathbf{R}^n}$ die Standardmetrik auf dem $\mathbf{R}^n$ bezeichnet (siehe [22], S. 131, Theorem 3.82). Zudem ist im Folgenden mit $\mathrm{id} \times \psi$ die Abbildung $\mathrm{id} \times \psi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \times N, (x, q) \to (x, \psi(q))$ gemeint.

Dieses Kapitel kann ab der Berechnung des Ricci Tensors (Korollar 5.7) als Referenzkapitel für spätere Kapitel verwendet werden! Dabei ist in späteren Kapiteln meist eine Familie von vollständigen Metriken $h(t) = f(\cdot, t)dx^2 + g^2(\cdot, t)g_N$ gegeben; für jedes feste t ist somit $h(t)$ eine vollständige warped product Metrik von obiger Form, auf die die Resultate dieses Kapitels angewendet werden können!

Bemerkung 5.1. f und g sind eindeutig bestimmt.

Wir erhalten dann für den Riemannschen Krümmungstensor:

Korollar 5.2. *Seien $y, z, a, b \in T_x\boldsymbol{R}, u, v, w, r \in T_qN$ und bezeichne die Lifte (siehe Kapitel 2) mit $\widetilde{y}$ etc. Es gilt*

(1) $h(x,q)(\mathrm{Rm}(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{z})\widetilde{y},\widetilde{w}) = \frac{g_{ss}}{g}(x)ds^2(x)(z,y)h(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w})$
$= \frac{g_{ss}}{g}(x)h(x,q)(\widetilde{z},\widetilde{y})h(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w})$

(2) $h(x,q)(\mathrm{Rm}(x,q)(\widetilde{z},\widetilde{v})\widetilde{w},\widetilde{y}) = \frac{h(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w})}{g(x)}k(x)(\nabla_z \operatorname{grad} g, y)$

(3) $h(x,q)(\mathrm{Rm}(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w})\widetilde{u},\widetilde{r}) = -(\frac{g_s^2}{g^2})(x)(h(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{u})h(x,q)(\widetilde{w},\widetilde{r})$
$-h(x,q)(\widetilde{w},\widetilde{u})h(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{r}))$

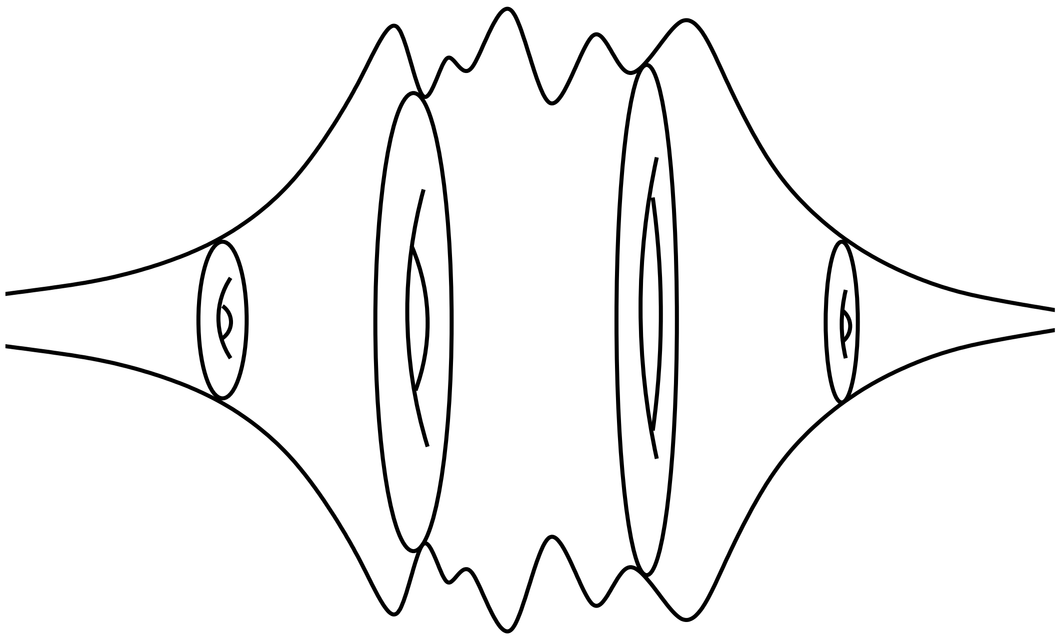

Abbildung 1: Ein intuitives Bild der warped product Mannigfaltigkeit mit $N = T^2$ ein flacher Torus

Beachte außerdem die Gleichheit der 1. und 2. Zeile wegen der Symmetrien des Krümmungstensors. Bis auf Vertauschung der ersten beiden Komponenten des Krümmungstensors sind alle anderen Kombinationsmöglichkeiten von horizontalen und vertikalen Komponenten $= 0$.

Beweis. Das folgt aus Korollar 2.7 und Kapitel 4. □

Korollar 5.3. *Seien* $z, v, w \in T_{(x,q)}(\boldsymbol{R} \times N)$ *mit* z *horizontal und* v, w *vertikal und seien* z, v, w *linear unabhängig. Seien* $U := \operatorname{span}\{v, w\}, V := \operatorname{span}\{z, v\}$. *Dann gelten* $\sec U = \sec(v, w) = -\frac{g_s^2}{g^2}(x)$ *und* $\sec V = \sec(z, v) = -\frac{g_{ss}}{g}(x)$

Definition 5.4. *Aufgrund des vorigen Korollars definieren wir:*

$$\hat{K_V} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, x \to \hat{K_V}(x) := -\frac{g_s^2}{g^2}(x)$$

$$\hat{K_H} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, x \to \hat{K_H}(x) := -\frac{g_{ss}}{g}(x)$$

und

$$K_V, K_H : \boldsymbol{R} \times N \to \boldsymbol{R}, K_V(x, q) := \hat{K_V}(x), K_H(x, q) := \hat{K_H}(x, q)$$

sind die Hauptschnittkrümmungen auf $\boldsymbol{R} \times N$.

Bemerkung 5.5. Das sind dieselben Formeln wie im Fall $S^1 \times T^2$ in [30], Section 11, siehe auch [4] für den Fall der Hauptschnittkrümmungen im Fall der warped product Mannigfaltigkeit $\mathbf{R} \times S^n$, $n \geq 2$.

Bemerkung 5.6. Statt $\hat{K_V}$ und $\hat{K_H}$ schreiben wir im Folgenden manchmal auch einfach K_V und K_H.

Beispiel: $N = \mathbf{R}^n$ mit der Standardmetrik $g_{\mathbf{R}^n}$:
Sei $e_0, ..., e_n$ die Standardbasis des $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Dann ist $((x,q), e_0)$ horizontal, $((x,q), e_1)$, ..., $((x,q), e_n)$ sind vertikal, $x \in \mathbf{R}, q \in N$. Also ist $\sec(((x,q),e_0),((x,q),e_i)) = -\frac{g_{ss}}{g}(x) = \hat{K_H}(x)$ und $\sec(((x,q),e_i),((x,q),e_j)) = -\frac{g_s^2}{g^2}(x) = \hat{K_V}(x)$, $i,j = 1, ..., n$.

Der Ricci Tensor berechnet sich nun folgendermaßen:

Korollar 5.7. *Seien $y, z \in T_x\boldsymbol{R}, v, w \in T_qN$ und bezeichne die Lifte mit $\widetilde{y}$ etc. Sei $n = \dim N > 1$. Es gilt*

(1) $\mathrm{Ric}(x,q)(\widetilde{z},\widetilde{y}) = -n\frac{g_{ss}}{g}(x)ds^2(x)(z,y)$

(2) $\mathrm{Ric}(x,q)(\widetilde{z},\widetilde{v}) = 0$

(3) $\mathrm{Ric}(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w}) = -h(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w})(\frac{g_{ss}}{g} + (n-1)\frac{g_s^2}{g^2})(x)$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}(x,q)(\widetilde{y}+\widetilde{v},\widetilde{z}+\widetilde{w}) \\
=& - n(\frac{g_{xx}}{g} - \frac{f_x g_x}{fg})(x)dx^2(x)(y,z) + (-\frac{g_{xx}g}{f^2} + \frac{f_x g_x g}{f^3} - (n-1)\frac{g_x^2}{f^2})(x)g_N(q)(v,w)
\end{aligned}$$

Beweis. Das folgt aus Satz 2.8, Kapitel 4 und

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}(x,q)(\widetilde{y}+\widetilde{v},\widetilde{z}+\widetilde{w}) \\
&= \mathrm{Ric}(x,q)(\widetilde{y},\widetilde{z}) + \mathrm{Ric}(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w}) + \mathrm{Ric}(x,q)(\widetilde{y},\widetilde{w}) + \mathrm{Ric}(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{z}) \\
&= -n\frac{g_{ss}}{g}(x)ds^2(x)(y,z) - h(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{w})(\frac{g_{ss}}{g} + (n-1)\frac{g_s^2}{g^2})(x) \\
&= -n\frac{g_{ss}}{g}(x)f^2(x)dx^2(x)(y,z) + (-\frac{g_{ss}}{g} - (n-1)\frac{g_s^2}{g^2})(x)g^2(x)g_N(q)(v,w) \\
&= -n(\frac{g_{xx}}{f^2 g} - \frac{f_x g_x}{f^3 g})(x)f^2(x)dx^2(x)(y,z) + (-\frac{g_{xx}g}{f^2} + \frac{f_x g_x g}{f^3} - (n-1)\frac{g_x^2}{f^2})(x)g_N(q)(v,w) \\
&= -n(\frac{g_{xx}}{g} - \frac{f_x g_x}{fg})(x)dx^2(x)(y,z) + (-\frac{g_{xx}g}{f^2} + \frac{f_x g_x g}{f^3} - (n-1)\frac{g_x^2}{f^2})(x)g_N(q)(v,w)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbf{R}, q \in N, y, z \in T_x\mathbf{R}, v, w \in T_qN$ □

Als Nächstes betrachten wir den Krümmungsoperator unserer warped product Mannigfaltigkeit:

Satz 5.8. *Sei $(x,q) \in \boldsymbol{R} \times N$ beliebig und $\{e_0, ..., e_n\}$ eine Orthonormalbasis von $T_{(x,q)}(\boldsymbol{R} \times N)$, wobei e_0 horizontal sei und damit $e_1, ..., e_n$ vertikal sind. Dann ist $\{e_i \wedge e_j, 0 \leq i < j \leq n\}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren des Krümmungsoperators $\mathcal{R}(x,q)$ mit (genau) den Eigenwerten $K_H(x,q)$ und $K_V(x,q)$.*

Beweis. Seien $a, b, i, j, k, l = 1, ..., n$ mit $i < j$ und $k < l$. Aus Korollar 5.2 folgt

$$\langle \mathcal{R}(x,q)(e_0 \wedge e_a), e_0 \wedge e_b \rangle = -\frac{g_{ss}}{g}(x)\delta_{ab}$$

$$\langle \mathcal{R}(x,q)(e_0 \wedge e_a), e_k \wedge e_l \rangle = 0$$

$$\langle \mathcal{R}(x,q)(e_i \wedge e_j), e_0 \wedge e_a \rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{R}(x,q)(e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l \rangle &= -\frac{g_s^2}{g^2}(x)(\langle e_i, e_k \rangle \langle e_j, e_l \rangle - \langle e_j, e_k \rangle \langle e_i, e_l \rangle) \\
&= -\frac{g_s^2}{g^2}(x)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}) \\
&= -\frac{g_s^2}{g^2}(x)\delta_{ik}\delta_{jl}
\end{aligned}$$

denn $\delta_{il}\delta_{jk}$ ist immer $= 0$ wegen $i < j$ und $k < l$.

Daraus folgt

$$\mathcal{R}(x,q)(e_0 \wedge e_a) = -\frac{g_{ss}}{g}(x)e_0 \wedge e_a$$

$$\mathcal{R}(x,q)(e_i \wedge e_j) = -\frac{g_s^2}{g^2}(x)e_i \wedge e_j$$

□

Satz 5.9. *Gelte dasselbe Setting wie in Satz 5.8. Sei λ_{ij} der Eigenwert des Krümmungsoperators $\mathcal{R}(x,q)$ zum Basiselement $e_i \wedge e_j$, $0 \leq i < j \leq n$. Sei $\overline{\lambda} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij}$ das arithmetische Mittel der Eigenwerte. Sei $U \subset T_{(x,q)}(\boldsymbol{R} \times N)$ ein beliebiger zweidimensionaler Unterraum. Dann folgt $|\sec U - \overline{\lambda}| \leq |K_H(x,q) - K_V(x,q)|$*

Beweis. Sei $U = \operatorname{span}\{v, w\}$ mit v, w orthonormal. Das impliziert

$$|v \wedge w| = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2 = 1$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\sec U = \sec(v,w) &= \frac{\langle \mathcal{R}(x,q)(v\wedge w), v\wedge w\rangle}{\langle v\wedge w, v\wedge w\rangle}\\ &= \langle \mathcal{R}(x,q)(v\wedge w), v\wedge w\rangle = \langle \mathcal{R}(x,q)(V), V\rangle\end{aligned}$$

mit $V := v\wedge w \in \Lambda^2_{(x,q)}(\mathbf{R}\times N)$. Außerdem gilt $\mathcal{R}(x,q)(e_i\wedge e_j) = \lambda_{ij} e_i \wedge e_j$, $0 \le i < j \le n$. Schreibe $V = \sum\limits_{1\le i<j\le n} v_{ij} e_i \wedge e_j$. Es folgt

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{R}(x,q)(V), V\rangle &= \langle R(x,q)(\sum_{0\le i<j\le n} v_{ij} e_i\wedge e_j), \sum_{0\le k<l\le n} v_{kl} e_k \wedge e_l\rangle\\ &= \sum_{i<j}\sum_{k<l} \lambda_{ij} v_{ij} v_{kl} \langle e_i\wedge e_j, e_k\wedge e_l\rangle\\ &= \sum_{i<j}\sum_{k<l} \lambda_{ij} v_{ij} v_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl}\\ &= \sum_{i<j}\lambda_{ij} v_{ij}^2 = \sum_{i<j}(\lambda_{ij} - \overline{\lambda} + \overline{\lambda}) v_{ij}^2\\ &= \overline{\lambda}\langle V, V\rangle + \sum_{i<j}(\lambda_{ij}-\overline{\lambda})v_{ij}^2\\ &= \overline{\lambda} + \sum_{i<j}(\lambda_{ij}-\overline{\lambda})v_{ij}^2\end{aligned}$$

da $\langle V,V\rangle = |V|^2 = |v\wedge w|^2 = 1$ gilt und $|V|^2 = \sum\limits_{i<j} v_{ij}^2$, da $\{e_i\wedge e_j, 0\le i<j\le n\}$ eine Orthonormalbasis bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist.

Daraus folgt nach Satz 5.8

$$|\sec U - \overline{\lambda}| = |\sum_{i<j}(\lambda_{ij}-\overline{\lambda})v_{ij}^2| \le \max_{i<j}|\lambda_{ij}-\overline{\lambda}| \le |K_H(x,q) - K_V(x,q)|$$

falls $\overline{\lambda}$ das arithmetische Mittel der λ_{ij} ist. □

Nun zeigen wir, dass sich $|\operatorname{Rm}|$ durch K_H und K_V kontrollieren lässt (und umgekehrt), und dass sich die Ableitungen von K_V und K_H nach s durch die Normen der Ableitungen von Rm kontrollieren lassen:

Satz 5.10. $|\operatorname{Rm}|^2 = aK_V^2 + bK_H^2$ *für nichtnegative ganze Zahlen* $a = a(n), b = b(n)$ *mit* $n := \dim N$.

Beweis. Sei $\{e_i, i = 0, ..., n\}$ eine Orthonormalbasis von $T_{(x,q)}(\mathbf{R} \times N)$, so dass e_0 horizontal und damit $e_1, ..., e_n$ vertikal sind. Dann gilt

$$|\operatorname{Rm}|^2(x,q) = \sum_{i,j,k,l} (\operatorname{Rm}(x,q)(e_i, e_j, e_k, e_l))^2$$

Nach Korollar 5.2 ist $\operatorname{Rm}(x,q)(e_i, e_j, e_k, e_l) = \pm \frac{g_{ss}}{g}(x)$ oder $= \pm \frac{g_s^2}{g^2}(x)$ oder $= 0$. Beachte hierfür, dass für orthonormale vertikale Vektoren $u, v, w, r \in T_{(x,q)}(\mathbf{R} \times N)$ (wobei wir hier erlauben, dass mehrere von ihnen gleich sind) nur dann gleichzeitig $h(x,q)(\widetilde{v}, \widetilde{u})h(x,q)(\widetilde{w}, \widetilde{r}) \neq 0$ als auch $h(x,q)(\widetilde{w}, \widetilde{u})h(x,q)(\widetilde{v}, \widetilde{r}) \neq 0$ ist, falls $u = v = w = r$ gilt (siehe Korollar 5.2), und damit ist

$$h(x,q)(\operatorname{Rm}(x,q)(\widetilde{v}, \widetilde{w})\widetilde{u}, \widetilde{r}) = 0$$

□

Korollar 5.11. $|K_V| \leq |\operatorname{Rm}|$ *und* $|K_H| \leq |\operatorname{Rm}|$

Beweis. Sei $\{e_i, i = 0, ..., n\}$ eine Orthonormalbasis von $T_{(x,q)}(\mathbf{R} \times N)$, so dass e_0 horizontal und damit $e_1, ..., e_n$ vertikal sind. Dann gilt

$$\operatorname{Rm}(x,q)(e_1, e_2, e_1, e_2) = -\frac{g_s^2}{g^2}(x) = K_V(x,q)$$

und

$$\operatorname{Rm}(x,q)(e_0, e_1, e_0, e_1) = -\frac{g_{ss}}{g}(x) = K_H(x,q)$$

Also folgt

$$\begin{aligned} K_V^2(x,q) &= (\operatorname{Rm}(x,q)(e_1, e_2, e_1, e_2))^2 \leq \sum_{i,j,k,l} (\operatorname{Rm}(x,q)(e_i, e_j, e_k, e_l))^2 \\ &= |\operatorname{Rm}|^2(x,q) \end{aligned}$$

Ebenso für K_H. □

Satz 5.12. *Es gilt* $|\frac{\partial^k}{\partial s^k}\hat{K_H}|(x) \leq |\nabla^k \operatorname{Rm}|(x,q)$ *und* $|\frac{\partial^k}{\partial s^k}\hat{K_V}|(x) \leq |\nabla^k \operatorname{Rm}|(x,q)$ *für alle* $k \geq 0$, *für alle* $x \in \boldsymbol{R}, q \in N$. *Dabei sei* $\frac{\partial^k}{\partial s^k} := \underbrace{\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial}{\partial s}(\cdots(\frac{\partial}{\partial s})\cdots))}_{k\ mal}$.

Beweis. Der Fall $k = 0$ wurde bereits gezeigt (Korollar 5.11). Zuerst zu K_V: Wir zeigen per vollständiger Induktion:

$$(\nabla^k \operatorname{Rm})(U, V, W, C, \underbrace{X, ..., X}_{k \text{ mal}}) = X^k(K_V)(\langle U, W\rangle\langle V, C\rangle - \langle U, C\rangle\langle V, W\rangle)$$

für alle $k \geq 1$. Dabei seien U, V, W, C vertikale Vektorfelder und X sei ein horizontales Vektorfeld. Im Fall $k \geq 2$ setzen wir zusätzlich $\nabla_X X = 0$ voraus. Außerdem bedeutet $X^k(K_V) := \underbrace{X(X(\cdots X}_{k \text{ mal}}(K_V)\cdots)$

Induktionsanfang $k = 1$:

$$\begin{aligned}
&(\nabla \operatorname{Rm})(U, V, W, C, X) \\
&= (\nabla_X \operatorname{Rm})(U, V, W, C) \\
&= X(\operatorname{Rm}(U, V, W, C)) - \operatorname{Rm}(\nabla_X U, V, W, C) - \operatorname{Rm}(U, \nabla_X V, W, C) - \\
&- \operatorname{Rm}(U, V, \nabla_X W, C) - \operatorname{Rm}(U, V, W, \nabla_X C) \\
&= X(\operatorname{Rm}(U, V, W, C)) - 4\frac{X\widetilde{g}}{\widetilde{g}} \operatorname{Rm}(U, V, W, C)
\end{aligned}$$

mit $\widetilde{g} := g \circ \pi$ und $\pi : \mathbf{R} \times N \to \mathbf{R}, (x, q) \to x$ nach Satz 2.4 und Satz 2.2.
Es gilt

$$\operatorname{Rm}(U, V, W, C) = K_V(\langle U, W\rangle\langle V, C\rangle - \langle U, C\rangle\langle V, W\rangle)$$

nach Korollar 5.2. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&X(\operatorname{Rm}(U, V, W, C)) \\
&= X(K_V)(\langle U, W\rangle\langle V, C\rangle - \langle U, C\rangle\langle V, W\rangle) + \\
&+ K_V((\langle \nabla_X U, W\rangle + \langle U, \nabla_X W\rangle)\langle V, C\rangle + \langle U, W\rangle(\langle \nabla_X V, C\rangle + \langle V, \nabla_X C\rangle)) - \\
&- K_V((\langle \nabla_X U, C\rangle + \langle U, \nabla_X C\rangle)\langle V, W\rangle + \langle U, C\rangle(\langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle)) \\
&= X(K_V)(\langle U, W\rangle\langle V, C\rangle - \langle U, C\rangle\langle V, W\rangle) + 4K_V\frac{X\widetilde{g}}{\widetilde{g}}(\langle U, W\rangle\langle V, C\rangle - \langle U, C\rangle\langle V, W\rangle)
\end{aligned}$$

und

$$-4\frac{X\widetilde{g}}{\widetilde{g}} \operatorname{Rm}(U, V, W, C) = -4\frac{X\widetilde{g}}{\widetilde{g}} K_V(\langle U, W\rangle\langle V, C\rangle - \langle U, C\rangle\langle V, W\rangle)$$

Also folgt

$$(\nabla \operatorname{Rm})(U, V, W, C, X) = X(K_V)(\langle U, W\rangle\langle V, C\rangle - \langle U, C\rangle\langle V, W\rangle)$$

Induktionsschritt $k \to k+1$:

$$\begin{aligned}
&(\nabla^{k+1} \operatorname{Rm})(U, V, W, C, \underbrace{X, ..., X}_{k \text{ mal}}, X) \\
&= (\nabla_X(\nabla^k \operatorname{Rm}))(U, V, W, C, X, ..., X) \\
&= X((\nabla^k \operatorname{Rm})(U, V, W, C, X, ..., X)) - (\nabla^k \operatorname{Rm})(\nabla_X U, V, W, C, X, ..., X) - \\
&- (\nabla^k \operatorname{Rm})(U, \nabla_X V, W, C, X, ..., X) - (\nabla^k \operatorname{Rm})(U, V, \nabla_X W, C, X, ..., X) - \\
&- (\nabla^k \operatorname{Rm})(U, V, W, \nabla_X C, X, ..., X) \\
&= X((\nabla^k \operatorname{Rm})(U, V, W, C, X, ..., X)) - 4\frac{X\widetilde{g}}{\widetilde{g}}(\nabla^k \operatorname{Rm})(U, V, W, C, X, ..., X)
\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$(\nabla^k \operatorname{Rm})(U,V,W,C,X,...,X) = X^k(K_V)(\langle U,W\rangle\langle V,C\rangle - \langle U,C\rangle\langle V,W\rangle)$$

und damit folgt

$$\begin{aligned}
&X((\nabla^k \operatorname{Rm})(U,V,W,C,X,...,X))\\
&= X^{k+1}(K_V)(\langle U,W\rangle\langle V,C\rangle - \langle U,C\rangle\langle V,W\rangle)+\\
&+ X^k(K_V)(((\langle\nabla_X U,W\rangle + \langle U,\nabla_X W\rangle)\langle V,C\rangle) + \langle U,W\rangle(\langle\nabla_X V,C\rangle + \langle V,\nabla_X C\rangle))-\\
&- X^k(K_V)(((\langle\nabla_X U,C\rangle + \langle U,\nabla_X C\rangle)\langle V,W\rangle) + \langle U,C\rangle(\langle\nabla_X V,W\rangle + \langle V,\nabla_X W\rangle))\\
&= X^{k+1}(K_V)(\langle U,W\rangle\langle V,C\rangle - \langle U,C\rangle\langle V,W\rangle) + 4X^k(K_V)\frac{X\widetilde{g}}{\widetilde{g}}(\langle U,W\rangle\langle V,C\rangle - \langle U,C\rangle\langle V,W\rangle)
\end{aligned}$$

und

$$-4\frac{X\widetilde{g}}{\widetilde{g}}(\nabla^k \operatorname{Rm})(U,V,W,C,X,...,X) = -4\frac{X\widetilde{g}}{\widetilde{g}}X^k(K_V)(\langle U,W\rangle\langle V,C\rangle - \langle U,C\rangle\langle V,W\rangle)$$

Das ergibt

$$(\nabla^{k+1} \operatorname{Rm})(U,V,W,C,X,...,X,X) = X^{k+1}(K_V)(\langle U,W\rangle\langle V,C\rangle - \langle U,C\rangle\langle V,W\rangle)$$

und damit die Behauptung.
Wir wählen jetzt $X = \widetilde{\frac{\partial}{\partial s}} = \widetilde{\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}}$ als den Lift des Vektorfeldes $\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x} \in X(\mathbf{R})$. Nach Satz 2.4 und wegen $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s} = 0$ (siehe Satz 4.11) gilt

$$\nabla_X X = \nabla_{\widetilde{\frac{\partial}{\partial s}}}\widetilde{\frac{\partial}{\partial s}} = \widetilde{\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}} = 0$$

Dann gilt nach Satz 2.2 $X(K_V) = \widetilde{\frac{\partial}{\partial s}}(K_V) = \widetilde{\frac{\partial}{\partial s}\hat{K}_V}$, somit

$$X^2(K_V) = \widetilde{\frac{\partial}{\partial s}}(\widetilde{\frac{\partial}{\partial s}}(K_V)) = \widetilde{\frac{\partial}{\partial s}}(\widetilde{\frac{\partial}{\partial s}\hat{K}_V}) = \widetilde{\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial}{\partial s}\hat{K}_V)}$$

und schließlich

$$X^k(K_V) = \widetilde{\frac{\partial}{\partial s}}^k K_V = \widetilde{(\frac{\partial}{\partial s})^k\hat{K}_V} = \widetilde{\frac{\partial^k}{\partial s^k}\hat{K}_V}$$

Sei jetzt $\{e_0,...,e_n\}$ eine Orthonormalbasis von $T_{(x,q)}(\mathbf{R}\times N)$ mit $e_0 = X(x,q) = \widetilde{\frac{\partial}{\partial s}(x)}$, also horizontal, und $e_1,...,e_n$ damit vertikal. Wähle $U(x,q) = W(x,q) = e_1$, $V(x,q) = C(x,q) = e_2$. Dann folgt

$$(\nabla^k \operatorname{Rm})(x,q)(e_1,e_2,e_1,e_2,e_0,...,e_0) = (X^k(K_V))(x,q) = (\frac{\partial^k}{\partial s^k}\hat{K_V})(x)$$

Daraus folgt

$$|\frac{\partial^k}{\partial s^k}\hat{K_V}|(x) \leq |\nabla^k \operatorname{Rm}|(x,q)$$

für alle $x \in \mathbf{R}, q \in N$.

Nun zu K_H:
Wir zeigen mittels vollständiger Induktion

$$(\nabla^k \operatorname{Rm})(Y,V,Z,W,\underbrace{X,...,X}_{k \text{ mal}}) = X^k(K_H)\langle Y,Z\rangle\langle V,W\rangle$$

für alle $k \geq 1$, für alle vertikalen Vektorfelder V, W und alle horizontalen Vektorfelder X, Y, Z. Im Fall $k \geq 2$ setzen wir zusätzlich $\nabla_X X = 0$ voraus.

Induktionsanfang $k = 1$:
Es gilt nach Korollar 5.2

$$\operatorname{Rm}(Y,V,Z,W) = K_H\langle Y,Z\rangle\langle V,W\rangle$$

für alle horizontalen Vektorfelder Y, Z und alle vertikalen Vektorfelder V, W
Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&(\nabla \operatorname{Rm})(Y,V,Z,W,X) = (\nabla_X \operatorname{Rm})(Y,V,Z,W)\\
&= X(\operatorname{Rm}(Y,V,Z,W)) - \operatorname{Rm}(\nabla_X Y,V,Z,W) - \operatorname{Rm}(Y,\nabla_X V,Z,W) -\\
&- \operatorname{Rm}(Y,V,\nabla_X Z,W) - \operatorname{Rm}(Y,V,Z,\nabla_X W)\\
&= X(\operatorname{Rm}(Y,V,Z,W)) - K_H\langle\nabla_X Y,Z\rangle\langle V,W\rangle - K_H\langle Y,\nabla_X Z\rangle\langle V,W\rangle -\\
&- 2\frac{X\widetilde{g}}{\widetilde{g}}\operatorname{Rm}(Y,V,Z,W)
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
&X(\operatorname{Rm}(Y,V,Z,W)\\
&= X(K_H)\langle Y,Z\rangle\langle V,W\rangle +\\
&+ K_H((\langle\nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle)\langle V,W\rangle + \langle Y,Z\rangle(\langle\nabla_X V,W\rangle + \langle V,\nabla_X W\rangle))\\
&= X(K_H)\langle Y,Z\rangle\langle V,W\rangle +\\
&+ K_H(\langle\nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle)\langle V,W\rangle + 2K_H\frac{X\widetilde{g}}{\widetilde{g}}\langle Y,Z\rangle\langle V,W\rangle
\end{aligned}$$

und
$$-2\frac{X\widetilde{g}}{\widetilde{g}}\operatorname{Rm}(Y,V,Z,W) = -2\frac{X\widetilde{g}}{\widetilde{g}}K_H\langle Y,Z\rangle\langle V,W\rangle$$
Daraus folgt
$$(\nabla\operatorname{Rm})(Y,V,Z,W,X) = X(K_H)\langle Y,Z\rangle\langle V,W\rangle$$
Induktionsschritt $k\to k+1$:
$$\begin{aligned}
&(\nabla^{k+1}\operatorname{Rm})(Y,V,Z,W,X,...,X,X) = (\nabla_X(\nabla^k\operatorname{Rm}))(Y,V,Z,W,X,...,X)\\
&= X((\nabla^k\operatorname{Rm})(Y,V,Z,W,X,...,X)) - (\nabla^k\operatorname{Rm})(\nabla_X Y,V,Z,W,X,...,X)-\\
&- (\nabla^k\operatorname{Rm})(Y,\nabla_X V,Z,W,X,...,X) - (\nabla^k\operatorname{Rm})(Y,V,\nabla_X Z,W,X,...,X)-\\
&- (\nabla^k\operatorname{Rm})(Y,V,Z,\nabla_X W,X,...,X)\\
&= X((\nabla^k\operatorname{Rm})(Y,V,Z,W,X,...,X)) - X^k(K_H)\langle\nabla_X Y,Z\rangle\langle V,W\rangle-\\
&- X^k(K_H)\langle Y,\nabla_X Z\rangle\langle V,W\rangle - 2\frac{X\widetilde{g}}{\widetilde{g}}X^k(K_H)\langle Y,Z\rangle\langle V,W\rangle
\end{aligned}$$
Es gilt
$$\begin{aligned}
&X((\nabla^k\operatorname{Rm})(Y,V,Z,W,X,...,X))\\
&= X^{k+1}(K_H)\langle Y,Z\rangle\langle V,W\rangle+\\
&+ X^k(K_H)((\langle\nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle)\langle V,W\rangle + \langle Y,Z\rangle(\langle\nabla_X V,W\rangle + \langle V,\nabla_X W\rangle))\\
&= X^{k+1}(K_H)\langle Y,Z\rangle\langle V,W\rangle+\\
&+ X^k(K_H)(\langle\nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle)\langle V,W\rangle + 2X^k(K_H)\frac{X\widetilde{g}}{\widetilde{g}}\langle Y,Z\rangle\langle V,W\rangle
\end{aligned}$$
Daraus folgt
$$(\nabla^{k+1}\operatorname{Rm})(Y,V,Z,W,X,...,X,X) = X^{k+1}(K_H)\langle Y,Z\rangle\langle V,W\rangle$$
Wir wählen jetzt X und $\{e_0,...,e_n\}$ wie oben. Wähle $Y(x,q)=Z(x,q)=e_0$, $V(x,q)=W(x,q)=e_1$. Dann folgt wie oben
$$(\nabla^k\operatorname{Rm})(x,q)(e_0,e_1,e_0,e_1,e_0,...,e_0) = (\frac{\partial^k}{\partial s^k}\hat{K_H})(x)$$
Daraus folgt
$$|\frac{\partial^k}{\partial s^k}\hat{K_H}|(x) \le |\nabla^k\operatorname{Rm}|(x,q)$$
für alle $x\in\mathbf{R}, q\in N$. $\square$

Jetzt zur Berechnung von $|\operatorname{Ric}|$,R und $|T|$ (T ist der spurlose Ricci Tensor):

Satz 5.13. $|\operatorname{Ric}|^2 = n(n+1)K_H^2 + 2n(n-1)K_HK_V + n(n-1)^2K_V^2$

Beweis. Sei $\{e_0, ..., e_n\}$ eine ONB von $T_{(x,q)}M$, e_0 horizontal, $e_1, ..., e_n$ damit vertikal. Wähle Normalkoordinaten um (x, q), so dass

$$\frac{\partial}{\partial x^0}(x,q) = e_0, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}(x,q) = e_n$$

Dann folgt nach Korollar 5.7

$$R_{00}(x,q) = \operatorname{Ric}(x,q)(e_0,e_0) = -n\frac{g_{ss}}{g}(x)$$

$$R_{ii}(x,q) = \operatorname{Ric}(x,q)(e_i,e_i) = -\frac{g_{ss}}{g}(x) - (n-1)\frac{g_s^2}{g^2}(x)$$

für alle $i = 1, ..., n$, und alle anderen Komponenten sind $= 0$.
Daraus folgt

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Ric}|^2(x,q) &= \sum_{k=0}^{n}(\operatorname{Ric}(x,q)(e_k,e_k))^2 = \sum_{k=0}^{n}(R_{kk}(x,q))^2 \\
&= n^2(\frac{g_{ss}}{g})^2(x) + n(\frac{g_{ss}}{g}(x) + (n-1)\frac{g_s^2}{g^2})^2(x) \\
&= n^2(\frac{g_{ss}}{g})^2(x) + n((\frac{g_{ss}}{g})^2(x) + 2(n-1)\frac{g_{ss}}{g}\frac{g_s^2}{g^2} + (n-1)^2\frac{g_s^4}{g^4}) \\
&= (n(n+1)K_H^2 + 2n(n-1)K_HK_V + n(n-1)^2K_V^2)(x,q)
\end{aligned}$$

□

Korollar 5.14. $R = 2nK_H + n(n-1)K_V$

Beweis. Aus obigem Beweis folgt

$$\begin{aligned}
R(x,q) &= R_{00}(x,q) + ... + R_{nn}(x,q) \\
&= -n\frac{g_{ss}}{g}(x) + n(-\frac{g_{ss}}{g}(x) - (n-1)\frac{g_s^2}{g^2}(x)) \\
&= -2n\frac{g_{ss}}{g}(x) - n(n-1)\frac{g_s^2}{g^2}(x) \\
&= (2nK_H + n(n-1)K_V)(x,q)
\end{aligned}$$

□

Satz 5.15. $|T|^2 = \frac{2}{3}(K_V - K_H)^2$, *falls* $n = 2$. *Dabei ist* T *der spurlose Ricci Tensor.*

Beweis. Das folgt aus den obigen Formeln für $|\operatorname{Ric}|^2$ und R und aus $|T|^2 = |\operatorname{Ric}|^2 - \frac{R^2}{3}$ (siehe dazu den Beweis des Satzes 14.1). □

Weiter mit Beziehungen zwischen der von der Riemannschen Metrik $h = f^2dx^2 + g^2g_N$ induzierten Metrik d_h und der von der Riemannschen Metrik f^2dx^2 induzierten Metrik d; dazwischen ein Satz über den Träger einer „rotationssymmetrischen"Funktion:

Satz 5.16. *Es gilt $d_h((x,q),(y,q)) = d(x,y)$ für alle $x, y \in \boldsymbol{R}, q \in N$, wobei d_h die von der Riemannschen Metrik $h = f^2dx^2 + g^2g_N$ induzierte Metrik (auf $\boldsymbol{R} \times N$) und d die von der Riemannschen Metrik f^2dx^2 induzierte Metrik (auf $\boldsymbol{R}$) bezeichnet.*

Beweis. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R} \times N$ eine (stückweise) C^∞ Kurve mit $\gamma(a) = (x,q), \gamma(b) = (y,q)$. Es gilt $\gamma(s) = (u(s), v(s)), s \in [a,b]$ für geeignete Funktionen $u : [a,b] \to \mathbf{R}$, $v : [a,b] \to N$. Dann hat $\eta(s) := (u(s), q)$ nicht größere Länge als γ, denn

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{h(\gamma(s))(\gamma'(s),\gamma'(s))}ds \\
&= \int_a^b \sqrt{f^2(u(s))(u'(s))^2 + g^2(u(s))g_N(v(s))(v'(s),v'(s))}ds \\
&\geq \int_a^b \sqrt{f^2(u(s))(u'(s))^2}ds = L(\eta)
\end{aligned}$$

und $\eta(a) = (x,q), \eta(b) = (y,q)$. Außerdem gilt

$$L(\eta) = \int_a^b \sqrt{f^2(u(s))(u'(s))^2}ds = \int_a^b f(u(s))|u'(s)|ds = L(u)$$

bzw. gilt allgemein: Die Länge einer Kurve $u(s)$ in $\mathbf{R}$ ist gleich der Länge der Kurve $(u(s), a)$ für beliebiges $a \in N$. Somit folgt die Behauptung. □

Satz 5.17. *Sei N kompakt. Seien $u : \boldsymbol{R} \times N \to \boldsymbol{R}$, $\widetilde{u} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ C^∞ Funktionen mit $u(x,c) = \widetilde{u}(x)$ für alle $(x,c) \in \boldsymbol{R} \times N$. Dann gilt: $\widetilde{u}$ hat kompakten Träger $\Leftrightarrow$ u hat kompakten Träger. Habe $\widetilde{u}$ kompakten Träger. Dann gilt* $\operatorname{supp} u = \operatorname{supp} \widetilde{u} \times N$.

Beweis. Sei $(x,c) \in \operatorname{supp} u$. Dann gibt es eine Folge (x_n, c_n) mit $\widetilde{u}(x_n) = u(x_n, c_n) \neq 0$ und $(x_n, c_n) \to (x,c)$, also auch $x_n \to x$. Also ist $x \in \operatorname{supp} \widetilde{u}$ und damit $(x,c) \in \operatorname{supp} \widetilde{u} \times N$. Sei andererseits $(x,c) \in \operatorname{supp} \widetilde{u} \times N$, also $x \in \operatorname{supp} \widetilde{u}$. Dann gibt es eine Folge x_n mit $u(x_n, c) = \widetilde{u}(x_n) \neq 0$ und $x_n \to x$. Also auch $(x_n, c) \to (x,c)$. Damit ist $(x,c) \in \operatorname{supp} u$. □

Lemma 5.18. $d_h((x,q),(z,c)) \geq d_h((x,q),(z,q))$ *für alle $x, z \in \boldsymbol{R}, q, c \in N$.*

Beweis. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R} \times N$ eine (stückweise) C^∞ Kurve mit $\gamma(a) = (x,q), \gamma(b) = (z,c)$. Es gilt $\gamma(s) = (u(s), v(s)), s \in [a,b]$ für geeignete Funktionen $u : [a,b] \to \mathbf{R}$, $v : [a,b] \to N$. Dann hat $\eta(s) := (u(s), q)$ nicht größere Länge als γ (der Beweis ist analog zum Vorgehen im Beweis von Satz 5.16) und es gilt $\eta(a) = (x,q), \eta(b) = (z,q)$. Daraus folgt $d_h((x,q),(z,q)) \leq L(\gamma)$ und daraus $d_h((x,q),(z,q)) \leq d_h((x,q),(z,c))$. □

Satz 5.19. *Sei $\emptyset \neq A \subset \boldsymbol{R}$ kompakt. Dann gilt $d_h((x,q), A \times N) = d(x,A)$ für alle $x \in \boldsymbol{R}, q \in N$, wobei d_h die von der Riemannschen Metrik $h = f^2dx^2 + g^2g_N$ induzierte Metrik (auf $\boldsymbol{R} \times N$) und d die von der Riemannschen Metrik f^2dx^2 induzierte Metrik (auf $\boldsymbol{R}$) bezeichnet.*

Beweis. Da A kompakt ist, gibt es ein $y \in A$ mit $d(x,A) = d(x,y)$. Nach Satz 5.16 gilt $d(x,y) = d_h((x,q),(y,q)) \geq d_h((x,q), A \times N)$. Das ergibt zusammen $d(x,A) \geq d_h((x,q), A \times N)$. Andererseits gilt für alle $(z,c) \in A \times N$

$$d_h((x,q),(z,c)) \geq d_h((x,q),(z,q)) = d(x,z) \geq d(x,y)$$

nach Lemma 5.18 und Satz 5.16. Daraus folgt $d_h((x,q), A \times N) \geq d(x,A)$ und damit die Behauptung. □

Eine mögliche Wahl für N ist $N = \mathbf{R}^n$ mit der Standardmetrik, die wir mit $g_{\mathbf{R}^n}$ bezeichnen.

Für allgemeines N gilt stets: N hat eine lokal isometrische universelle Überlagerung $\psi : \mathbf{R}^n \to N$, wobei $\mathbf{R}^n$ mit der Standardmetrik versehen sei (siehe [22], S. 131, Theorem 3.82). Mit Hilfe der Abbildung

$$\operatorname{id} \times \psi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \times N, (x,q) \to (x, \psi(q))$$

lassen sich auf diese Weise Resultate für $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ auf den Fall $\mathbf{R} \times N$ übertragen, was wir weiter unten tun werden:

Lemma 5.20. $\operatorname{id} \times \psi : \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \times N, (x,q) \to (x, \psi(q))$ *ist ein surjektiver lokaler Diffeomorphismus.*

Beweis. ψ ist eine C^∞ Überlagerung und damit ein surjektiver lokaler Diffeomorphismus. Also gibt es zu jedem $q \in \mathbf{R}^n$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbf{R}^n$ und eine offene Menge $V \subset N$, so dass $\psi(U) = V$ gilt und $\psi|_U : U \to V$ ein C^∞ Diffeomorphismus ist. Zu $(x,q) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ wähle dann die offenen Mengen $\mathbf{R} \times U \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ und $\mathbf{R} \times V \subset \mathbf{R} \times N$. Dann gilt $\operatorname{id} \times \psi(\mathbf{R} \times U) = \mathbf{R} \times V$, und $\operatorname{id} \times \psi|_{\mathbf{R} \times U} : \mathbf{R} \times U \to \mathbf{R} \times V$ ist ein C^∞ Diffeomorphismus. Damit ist $\operatorname{id} \times \psi$ ein lokaler Diffeomorphismus. Da ψ surjektiv ist, ist auch $\operatorname{id} \times \psi$ surjektiv. □

Als Nächstes eine Beziehung zwischen warped product Metriken auf $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ und $\mathbf{R} \times N$:

Satz 5.21. *Es gilt* $(\mathrm{id} \times \psi)^*(f^2dx^2 + g^2g_N) = f^2dx^2 + g^2g_{\boldsymbol{R}^n}$.

Beweis. Seien $x \in \mathbf{R}, q \in \mathbf{R}^n, y, z \in T_x\mathbf{R}, v, w \in T_q\mathbf{R}^n$ und bezeichne die Lifte mit $\widetilde{y}$ etc. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id} \times \psi)^*(f^2dx^2 + g^2g_N)(x,q)(\widetilde{y} + \widetilde{v}, \widetilde{z} + \widetilde{w}) \\
&= (f^2dx^2 + g^2g_N)(x, \psi(q))(D(\mathrm{id} \times \psi)_{(x,q)}(\widetilde{y} + \widetilde{v}), D(\mathrm{id} \times \psi)_{(x,q)}(\widetilde{z} + \widetilde{w})) \\
&= (f^2dx^2 + g^2g_N)(x, \psi(q))(\widetilde{y} + \widetilde{D\psi_q(v)}, \widetilde{z} + \widetilde{D\psi_q(w)}) \\
&= (f^2dx^2)(x)(y,z) + g^2(x)g_N(\psi(q))(D\psi_q(v), D\psi_q(w)) \\
&= (f^2dx^2)(x)(y,z) + g^2(x)(\psi^*g_N)(q)(v,w) \\
&= (f^2dx^2)(x)(y,z) + g^2(x)g_{\mathbf{R}^n}(q)(v,w) \\
&= (f^2dx^2 + g^2g_{\mathbf{R}^n})(x,q)(\widetilde{y} + \widetilde{v}, \widetilde{z} + \widetilde{w})
\end{aligned}$$

wobei wir $\psi^*g_N = g_{\mathbf{R}^n}$ verwendet haben. $\square$

Korollar 5.22. $\mathrm{id} \times \psi : (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n, f^2dx^2 + g^2g_{\boldsymbol{R}^n}) \to (\boldsymbol{R} \times N, f^2dx^2 + g^2g_N)$ *ist eine surjektive lokale Isometrie.*

Beweis. Das folgt aus Satz 5.21 und Lemma 5.20. $\square$

Satz 5.23. *Seien M, N C^∞ Mannigfaltigkeiten und $\pi : M \to N$ ein surjektiver lokaler Diffeomorphismus. Dann ist die Abbildung $\pi^* : X_2^0(N) \to X_2^0(M), g \to \pi^*g$ injektiv.*

Beweis. Gilt $h = \pi^*g$, heißt das $h(p)(v,w) = g(\pi(p))(D\pi_p(v), D\pi_p(w))$ für alle $p \in M, v, w \in T_pM$. Da $D\pi_p$ nach Voraussetzung ein Isomorphismus und π surjektiv ist, ist g durch obige Formel eindeutig bestimmt. $\square$

Bemerkung 5.24. Die Injektivität bedeutet, dass es zu gegebener Metrik h auf M höchstens eine Metrik g auf N mit $h = \pi^*g$ gibt.

Jetzt Ergebnisse für $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ und die induzierten auf $\mathbf{R} \times N$:

Satz 5.25. *Sei $\boldsymbol{R}^{n+1} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n$ mit der warped product Metrik $h = f^2dx^2 + g^2g_{\boldsymbol{R}^n}$ versehen. Sei $s : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ein Diffeomorphismus und eine Stammfunktion zu f und $\phi : \boldsymbol{R}^{n+1} \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ gegeben durch $\phi(x_0, ..., x_n) = (s(x_0), x_1, ..., x_n)$. Sei $k := dx^2 + (g^2 \circ s^{-1})g_{\boldsymbol{R}^n}$ ebenfalls eine warped product Metrik auf dem $\boldsymbol{R}^{n+1}$. Dann gilt $\phi^*k = h$.*

Bemerkung 5.26. Die Stammfunktionen von f sind genau die Funktionen $s_y(x) = \int_y^x f(\xi)d\xi$, $y \in \mathbf{R}$ aus Definition 4.12. Ein (und damit alle) s_y ist genau dann ein Diffeomorphismus $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, wenn $s_y(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ ($\iff f^2dx^2$ ist vollständig, nach Korollar 4.15) gilt.

Beweis. Sei $p \in \mathbf{R}^{n+1}$ fest aber beliebig. Die warped product Metriken sind gegeben durch $h_{00}(p) = f^2 \circ \pi(p), h_{ii}(p) = g^2 \circ \pi(p)$, $i = 1, ..., n$ mit $\pi(x_0, ..., x_n) = x_0$, und $h_{jl}(p) = 0$ für alle $j, l = 0, ..., n$, $j \neq l$. $k_{00}(p) = 1, k_{ii}(p) = g^2(s^{-1}(\pi(p)))$, $k_{jl} = 0$. Es gilt $\partial\phi(p)(v) = (s'(\pi(p))v_0, v_1, ..., v_n)$, $v = (v_0, ..., v_n) \in \mathbf{R}^n$ ($\partial\phi(p) : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ ist die (gewöhnliche) totale Ableitung von ϕ im Punkt p).
Ferner gilt (siehe auch Kapitel 3 für die $\sim$-Notation)

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi^* k}(p)(v, w) &= \widetilde{k}(\phi(p))(\partial\phi(p)(v), \partial\phi(p)(w)) \\
&= \widetilde{k}((s(x_0), x_1, ..., x_n))((s'(x_0)v_0, v_1, ..., v_n), (s'(x_0)w_0, w_1, ..., w_n)) \\
&= (s'(x_0))^2 v_0 w_0 + g^2(x_0) \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \\
&= f^2(x_0) v_0 w_0 + g^2(x_0) \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = \widetilde{h}(p)(v, w)
\end{aligned}$$

□

Satz 5.27. *Seien M, N C^∞ Mannigfaltigkeiten. Seien g, g' Riemannsche Metriken auf M, h, h' Riemannsche Metriken auf N. Sei $f : M \to M$ ein Diffeomorphismus. Sei $\pi : M \to N$ ein surjektiver lokaler Diffeomorphismus. Existiere eine Abbildung $\widetilde{f} : N \to N$ mit $\widetilde{f} \circ \pi = \pi \circ f$. Dann ist $\widetilde{f}$ ein Diffeomorphismus. Ist außerdem $f : (M, g) \to (M, g')$ eine Isometrie und $\pi : (M, g) \to (N, h)$ sowie $\pi : (M, g') \to (N, h')$ jeweils eine lokale Isometrie, so ist $f' : (N, h) \to (N, h')$ eine Isometrie.*

Beweis. Der Beweis ist dem Leser überlassen! □

Korollar 5.28. *Sei $\boldsymbol{R} \times N$ mit der warped product Metrik $h = f^2 dx^2 + g^2 g_N$ versehen. Sei $s : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ein Diffeomorphismus und eine Stammfuktion zu f und $\phi : \boldsymbol{R} \times N \to \boldsymbol{R} \times N$ gegeben durch $\phi(x, q) = (s(x), q)$. Sei $k := dz^2 + (g^2 \circ s^{-1})g_N$, wobei $dz^2 (= dx^2)$ die Standardmetrik auf $\boldsymbol{R}$ bezeichnet, ebenfalls eine warped product Metrik auf $\boldsymbol{R} \times N$. Dann gilt $\phi^* k = h$. (Zur Existenz von s siehe Bemerkung 5.26.)*

Beweis. Das folgt aus den vorigen beiden Sätzen. □

Satz 5.29. *Sei $\boldsymbol{R}^{n+1} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n$ mit der warped product Metrik $h = f^2 dx^2 + g^2 g_{\boldsymbol{R}^n}$ versehen. Dann gilt $|\operatorname{Rm}|(x, q) = \widetilde{|\operatorname{Rm}|}(x)$, $|\nabla \operatorname{Rm}|(x, q) = \widetilde{|\nabla \operatorname{Rm}|}(x)$, $|\operatorname{Ric}|(x, q) = \widetilde{|\operatorname{Ric}|}(x)$, $|T|(x, q) = \widetilde{|T|}(x)$ (T bezeichnet den spurlosen Ricci Tensor), $R(x, q) = \widetilde{R}(x)$ für alle $x \in \boldsymbol{R}, q \in \boldsymbol{R}^n$ für geeignete Funktionen $\widetilde{|\operatorname{Rm}|}, \widetilde{|\nabla \operatorname{Rm}|}, \widetilde{|\operatorname{Ric}|}, \widetilde{|T|}, \widetilde{R} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, d. h. $|\operatorname{Rm}|, |\nabla \operatorname{Rm}|, ...$ hängen nur von $x \in \boldsymbol{R}$ ab.*

Beweis. Auf $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ gilt bzgl. der Identität als Karte: Die Komponentenfunktionen der Metrik h_{ij} hängen nur von $x \in \mathbf{R}$ ab, $0 \leq i, j \leq n$ (siehe die Äquivalenz von (1) und (2) in Satz 6.1). Somit hängen auch die Γ_{ij}^k nach Definition nur von x ab. Demzufolge auch die R_{ijk}^l, R_{ijkl}, $R_{ik} = g^{jk}R_{ijkl}$, $R = g^{ik}R_{ik}$, $T_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n+1}g_{ij}$. Wegen der allgemeinen Beziehung (auf dieser warped product Mannigfaltigkeit): A_{ij}^k hängt nur von x ab $\Rightarrow \nabla_l A_{ij}^k$ hängt nur von x ab, für einen beliebigen Tensor A (da die Γ_{ij}^k nur von x abhängen, siehe [44], S. 93) hängen damit die Komponenten aller kovarianten Ableitungen von Rm auch nur von x ab. Aus der Definition der Norm von Tensoren folgt damit die Behauptung. $\square$

Satz 5.30. *Seien $(M,g),(N,h)$ C^∞ Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f:(M,g)\to(N,h)$ eine lokale Isometrie. Dann folgt*

$$|\operatorname{Rm}_M| = |\operatorname{Rm}_N|\circ f, |\nabla\operatorname{Rm}_M| = |\nabla\operatorname{Rm}_N|\circ f, |\operatorname{Ric}_M| = |\operatorname{Ric}_N|\circ f$$

$$R_M = R_N\circ f, |T_M| = |T_N|\circ f$$

Dabei bezeichne Rm_M den Riemannschen Krümmungstensor auf M, Ric_M den Ricci Tensor auf M usw.

Beweis. Sei A ein beliebiger (r,s)-Tensor auf N. Dann ist f^*A wohldefiniert, da f ein lokaler Diffeomorphismus ist. Es lassen sich also beliebige Tensoren unter f zurückziehen. Da für jede offene Teilmenge $U\subset M$ gilt $(f|_U)^*A = (f^*A)|_U$ und da f eine lokale Isometrie ist, folgt

$$|\operatorname{Rm}_N|\circ f = f^*(|\operatorname{Rm}_N|) = |\operatorname{Rm}_M|, |\nabla\operatorname{Rm}_N|\circ f = f^*(|\nabla\operatorname{Rm}_N|) = |\nabla\operatorname{Rm}_M|$$

usw., siehe [44], S. 91. $\square$

Korollar 5.31. *Sei $\boldsymbol{R}\times N$ mit der warped product Metrik $h = f^2dx^2+g^2g_N$ versehen. Dann gilt $|\operatorname{Rm}|(x,q) = \widetilde{|\operatorname{Rm}|}(x)$, $|\nabla\operatorname{Rm}|(x,q) = \widetilde{|\nabla\operatorname{Rm}|}(x)$, $|\operatorname{Ric}|(x,q) = \widetilde{|\operatorname{Ric}|}(x)$, $|T|(x,q) = \widetilde{|T|}(x)$ (T bezeichnet den spurlosen Ricci Tensor), $R(x,q) = \widetilde{R}(x)$ für alle $x\in\boldsymbol{R}, q\in N$ für geeignete Funktionen $\widetilde{|\operatorname{Rm}|}, \widetilde{|\nabla\operatorname{Rm}|}, \widetilde{|\operatorname{Ric}|}, \widetilde{|T|}, \widetilde{R}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, d. h. $|\operatorname{Rm}|, |\nabla\operatorname{Rm}|, \ldots$ hängen nur von $x\in\boldsymbol{R}$ ab.*

Beweis. Das folgt aus den vorigen beiden Sätzen: Wir wählen $\mathrm{id}\times\psi$ als lokalen Diffeomorphismus, wobei $\psi:\mathbf{R}^n\to N$ die universelle lokal isometrische Überlagerung von (N,g_N) ist ($\mathbf{R}^n$ trägt die Standardmetrik $g_{\mathbf{R}^n}$). Aus $|\operatorname{Rm}_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n}| = |\operatorname{Rm}_{\mathbf{R}\times N}|\circ(\mathrm{id}\times\psi)$ folgt

$$\widetilde{|\operatorname{Rm}_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n}|}(x) = |\operatorname{Rm}_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n}|(x,q) = |\operatorname{Rm}_{\mathbf{R}\times N}|(x,\psi(q))$$

und da ψ surjektiv ist die Behauptung (die anderen Fälle sind analog). $\square$

Bemerkung 5.32. Im folgenden schreiben wir auch $|\operatorname{Rm}|$ für $\widetilde{|\operatorname{Rm}|}$, $|\nabla\operatorname{Rm}|$ für $\widetilde{|\nabla\operatorname{Rm}|}$ usw., d. h. wir lassen manchmal die Tilde weg.

Satz 5.33. *Sei $\boldsymbol{R}^{n+1} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n$ mit der warped product Metrik $h = f^2 dx^2 + g^2 g_{\boldsymbol{R}^n}$ versehen. Dann sind (bzg. der Identität als Karte) die Christoffelsymbole gegeben durch:*

$$\Gamma^0_{00} = \frac{f_x}{f}, \Gamma^0_{ii} = -\frac{g g_x}{f^2}, \Gamma^i_{0i} = \Gamma^i_{i0} = \frac{g_x}{g}$$

wobei $i = 1, ..., n$ gilt, alle anderen Christoffelsymbole sind $= 0$.

Beweis. Der Beweis ist dem Leser überlassen! □

Satz 5.34. *Sei $\boldsymbol{R}^{n+1} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n$ mit der warped product Metrik $h = f^2 dx^2 + g^2 g_{\boldsymbol{R}^n}$ versehen. Sei $u : \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ C^∞ mit $u(x,q) = \widetilde{u}(x)$ für eine Funktion $\widetilde{u} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ und für alle $x \in \boldsymbol{R}, q \in \boldsymbol{R}^n$. Dann gilt*

$$(\Delta u)(x,q) = (\widetilde{u}_{ss} + n \frac{g_s}{g} \widetilde{u}_s)(x)$$

für alle $x \in \boldsymbol{R}, q \in \boldsymbol{R}^n$.

Beweis. Wir schreiben $(x,q) = (x^0, x^1, ..., x^n)$. Griechische Indizes laufen im Folgenden von 0 bis n. Nach Satz 5.33 gilt

$$\begin{aligned}
&(\Delta u)(x,q) = (h^{\alpha\beta} H^u_{\alpha\beta})(x,q) = (\sum_\alpha h^{\alpha\alpha} H^u_{\alpha\alpha})(x,q) \\
&= (\sum_\alpha g^{\alpha\alpha} (\frac{\partial^2 u}{\partial (x^\alpha)^2} - \sum_\beta \Gamma^\beta_{\alpha\alpha} \frac{\partial u}{\partial x^\beta})(x,q) = (g^{00} \frac{\partial^2 u}{\partial (x^0)^2} - \sum_\alpha g^{\alpha\alpha} \Gamma^0_{\alpha\alpha} \frac{\partial u}{\partial x^0})(x,q) \\
&= (\frac{\widetilde{u}_{xx}}{f^2} - \frac{1}{f^2} \frac{f_x}{f} \widetilde{u}_x - n \frac{1}{g^2} (-\frac{g g_x}{f^2}) \widetilde{u}_x)(x) = (\frac{\widetilde{u}_{xx}}{f^2} - \frac{f_x \widetilde{u}_x}{f^3} + n \frac{g_x \widetilde{u}_x}{g f^2})(x) \\
&= (\widetilde{u}_{ss} + n \frac{g_s}{g} \widetilde{u}_s)(x)
\end{aligned}$$

□

Korollar 5.35. *Sei $\boldsymbol{R} \times N$ mit der warped product Metrik $h = f^2 dx^2 + g^2 g_N$ versehen. Sei $u : \boldsymbol{R} \times N \to \boldsymbol{R}$ C^∞ mit $u(x,q) = \widetilde{u}(x)$ für eine Funktion $\widetilde{u} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ und für alle $x \in \boldsymbol{R}, q \in N$. Dann gilt*

$$(\Delta u)(x,q) = (\widetilde{u}_{ss} + n \frac{g_s}{g} \widetilde{u}_s)(x)$$

für alle $x \in \boldsymbol{R}, q \in N$.

Beweis. Sei $v : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ gegeben durch $v(x,p) := u(x, \psi(p))$. Aus Korollar 5.22 folgt $(\Delta v)(x,p) = (\Delta u)(x, \psi(p))$ und wegen $v(x,p) = u(x, \psi(p)) = \widetilde{u}(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}, p \in \mathbf{R}^n$ folgt nach Satz 5.34

$$(\Delta u)(x, \psi(p)) = (\Delta v)(x,p) = (\widetilde{u}_{ss} + n \frac{g_s}{g} \widetilde{u}_s)(x)$$

für alle $x \in \mathbf{R}, p \in \mathbf{R}^n$. Da ψ surjektiv ist, folgt die Behauptung. □

Als Nächstes zu $\mathbf{R} \times N$ mit lokal symmetrischen Enden:

Satz 5.36. *Sei $\boldsymbol{R} \times N$ mit der warped product Metrik $h = f^2dx^2 + g^2g_N$ versehen. Gilt $|\nabla \operatorname{Rm}|(x) = 0$ für alle $x \in (-\infty, a_0]$ für ein $a_0 \in \boldsymbol{R}$, so gibt es ein $C \geq 0$ mit $K_H(x) = K_V(x) = -C$ für alle $x \in (-\infty, a_0]$. Falls $f(x) = 1$ gilt für alle $x \in \boldsymbol{R}$, folgt $g(x) = Ae^{\pm\sqrt{C}x}$ für ein $A > 0$ für alle $x \in (-\infty, a_0]$. Analoges gilt für $[b_0, \infty)$ statt $(-\infty, a_0]$.*

Beweis. Wir können oBdA $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbf{R}$ annehmen (siehe Korollar 5.28). Dann gilt $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}$. Es gilt also $|(\frac{g_x^2}{g^2})_x|(x) = |(\frac{g_s^2}{g^2})_s|(x) \leq |\nabla \operatorname{Rm}|(x) = 0$ für alle $x \in (-\infty, a_0]$ nach Satz 5.12. Es folgt $\frac{g_x^2}{g^2} = C$ auf $(-\infty, a_0]$. Im Folgenden schränken wir uns auf den Bereich $(-\infty, a_0]$ ein.

Fall 1: $C = 0$
Daraus folgt $g_x^2 = 0$, woraus $g_x = 0$ und somit $g = const.$ und $K_V = K_H = 0$ folgt.

Fall 2: $C > 0$
Es folgt $g_x^2 = Cg^2$, was immer $\neq 0$ ist.
Fall A: $g_x > 0$
Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&g_x = \sqrt{C}g \\
&\Rightarrow (\log g)_x = \frac{g_x}{g} = \sqrt{C} \\
&\Rightarrow \log g(a_0) - \log g(x) = \sqrt{C}(a_0 - x) \\
&\Rightarrow \frac{g(a_0)}{g(x)} = e^{\sqrt{C}(a_0-x)}
\end{aligned}$$

für alle $-\infty < x \leq a_0$, also

$$g(x) = g(a_0)e^{-\sqrt{C}a_0}e^{\sqrt{C}x}$$

$-\infty < x \leq a_0$.Daraus folgt

$$\frac{g_x^2}{g^2} = C = \frac{g_{xx}}{g}$$

und somit $K_V = K_H = -C$ auf $(-\infty, a_0]$.

Fall B: $g_x < 0$
Es folgt

$$g_x = -\sqrt{C}g \Rightarrow \log g(a_0) - \log g(x) = -\sqrt{C}(a_0 - x) \Rightarrow \frac{g(a_0)}{g(x)} = e^{-\sqrt{C}(a_0-x)}$$

also

$$g(x) = g(a_0)e^{\sqrt{C}a_0}e^{-\sqrt{C}x}$$

$-\infty < x \leq a_0$. Das ergibt $\frac{g_x}{g} = -\sqrt{C}$ und somit $\frac{g_x^2}{g^2} = C = \frac{g_{xx}}{g}$ und damit wieder $K_V = K_H = -C$ auf $(-\infty, a_0]$.
Der Fall $[b_0, \infty)$ geht analog. $\square$

Weiter zeigen wir, dass Isometrien Bälle auf solche gleichen Volumens abbilden. Das wenden wir auf unsere warped product Mannigfaltigkeit an für den Fall, dass N homogen ist:

Satz 5.37. *Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : (M, g) \to (M, g)$ eine Isometrie mit $f(x) = y$, so folgt $V_g(x, r) = V_g(y, r)$ für alle $r > 0$. Dabei ist $V_g(x, r) = \operatorname{Vol} B_g(x, r)$ das Volumen des Balles $B_g(x, r)$.*

Beweis. Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : (M, g) \to (M, g)$ eine Isometrie mit $f(x) = y$, so folgt $f(B(x, r)) = B(y, r)$. Sind ferner $A, B \subset M$ messbar bzgl. des Volumenmaßes mit $f(A) = B$, so folgt $\operatorname{Vol} A = \int_A 1 d\mu = \int_{f(A)} 1 d\mu = \operatorname{Vol} B$. Für $A = B_g(x, r), B = B_g(y, r)$ erhalten wir also $\operatorname{Vol} B_g(x, r) = \operatorname{Vol} B_g(y, r)$. $\square$

Satz 5.38. *Ist $\psi : (N, g_N) \to (N, g_N)$ eine Isometrie, dann ist $\mathrm{id} \times \psi : (\boldsymbol{R} \times N, f^2dx^2 + g^2g_N) \to (\boldsymbol{R} \times N, f^2dx^2 + g^2g_N)$ ebenfalls eine Isometrie.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 5.21. $\square$

Korollar 5.39. *Sei $\boldsymbol{R} \times N$ mit der warped product Metrik $h = f^2dx^2 + g^2g_N$ versehen. Dann gilt $V_h((x, b), r) = V_h((x, c), r)$ für alle $r > 0, x \in \boldsymbol{R}, b, c \in N$, falls N homogen ist. Dabei bezeichnet allgemein $V_g(x, r)$ das Volumen des Balles $B_g(x, r)$ mit Mittelpunkt $x \in M$ und Radius $r > 0$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g).*

Beweis. Das folgt aus den Sätzen 5.37 und 5.38. $\square$

Wir berechnen nun das Volumen von $(\mathbf{R} \times N, f^2dx^2 + g^2g_N)$, falls (N, g_N) Volumen 1 hat:

Satz 5.40. *Das Volumen von $(\boldsymbol{R} \times N, f^2dx^2 + g^2g_N)$ ist gegeben durch $V = \int_{\boldsymbol{R}} g^n(x)f(x)dx$, falls (N, g_N) Volumen 1 hat.*

Beweis. Hier eine Beweisidee: $d\mu = \sqrt{\det(h_{ij})}dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^n = \sqrt{f^2g^{2n}}dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^n = fg^ndx^0 \wedge \cdots \wedge dx^n$ und somit $V = \int_M d\mu = \int_{\mathbf{R}} \int_N f(x, t)g^n(x, t)dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_{\mathbf{R}} f(x, t)g^n(x, t)dx.$ $\square$

Als Nächstes zeigen wir, dass unter Zusatzvoraussetzungen die mittlere Skalarkrümmung stets positiv ist:

Satz 5.41. *Sei $M = \boldsymbol{R} \times N$ mit der warped product Metrik $h = f^2 dx^2 + g^2 g_N$ versehen. Gelten $\sup_{p\in M} |\operatorname{Rm}|(p) < \infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ und habe (M, h) endliches Volumen. Dann folgt $\int_M R d\mu \geq 0$.*

Beweis. Aus Korollar 5.14 entnehmen wir $R = 2nK_H + n(n-1)K_V = -2n\frac{g_{ss}}{g} - n(n-1)\frac{g_s^2}{g^2}$. Außerdem gilt $|g_s g^{n-1}| = |\frac{g_s}{g}|g^n = \sqrt{|K_V|}g^n \to 0$ $(x \to \pm\infty)$ (Korollar 5.11). Daraus und aus Satz 5.40 folgt

$$\begin{aligned}
\int_M R d\mu &= \int_{\mathbf{R}} (-2n\frac{g_{ss}}{g} - n(n-1)\frac{g_s^2}{g^2})g^n ds \\
&= \int_{\mathbf{R}} (-2ng_{ss}g^{n-1} - n(n-1)g_s^2 g^{n-2})ds \\
&= \int_{\mathbf{R}} (2n(n-1)g^{n-2}g_s^2 - n(n-1)g_s^2 g^{n-2})ds - \int_{\mathbf{R}} 2n(g_s g^{n-1})_s ds \\
&= \int_{\mathbf{R}} n(n-1)g^{n-2}g_s^2 ds - \int_{\mathbf{R}} 2n(g_s g^{n-1})_x dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} n(n-1)g^{n-2}g_s^2 ds \geq 0
\end{aligned}$$

$\square$

Als Letztes zeigen wir unter bestimmten Zusatzvoraussetzungen eine Abschätzung für den Injektivitätsradius. Dazu brauchen wir ein paar Vorbereitungen:

Definition 5.42. *Sei $(X, \mathcal{G})$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in X$. Eine stetige Kurve $c : [0,1] \to X$ mit $c(0) = c(1) = p$ nennen wir eine Schleife mit Basispunkt p. Ist c zusätzlich eine Geodäte, sprechen wir von einer geodätischen Schleife (hierbei brauchen Anfangs- und Endgeschwindigkeit nicht übereinzustimmen!).*

Sei auch im Folgenden $(X, \mathcal{G})$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Definition 5.43. *Sei $p \in X$. Zwei Schleifen $c, c' : [0,1] \to X$ mit Basispunkt p heißen kurz homotop, falls es eine Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ gibt mit*

$$H(\cdot, 0) = c, H(\cdot, 1) = c', H(0, \cdot) \equiv H(1, \cdot) \equiv p$$

und

$$\max_{t\in[0,1]} L(H(\cdot, t)) \leq \max\{L(c), L(c')\}$$

wobei L die Länge einer Kurve angibt.

Definition 5.44. *Sei $p \in X$. Sei $R_p := \sup\{r > 0 : D(\exp_p)_v$ ist injektiv $\forall v \in B_r(0)\}$ der Konjugationsradius an p, und sei $i_p := \sup\{r > 0 : \exp_p(B_r(0))$ ist offen in M und $\exp_p : B_r(0) \to \exp_p(B_r(0))$ ist ein Diffeomorphismus$\}$ der Injektivitätsradius an p.*

Lemma 5.45. *Sei $(X, \mathcal{G})$ vollständig. Sei c eine Schleife mit Basispunkt $p \in X$ mit $L(c) < R_p$. Dann gibt es genau eine geodätische Schleife s mit Basispunkt p mit*

- *$L(s) \leq L(c)$*
- *c ist zu s kurz homotop*

Beweis. siehe [12] □

Lemma 5.46. *Sei $\dim X =: m \geq 2$. Sei $p \in X$ und $U \subset T_pX$ ein zweidimensionaler Unterraum. Dann gilt $|\sec U| \leq |\operatorname{Rm}|(p)$.*

Beweis. Wähle $v, w \in T_pX$ orthonormal (d. h. $\langle v, w\rangle = 0, \langle v, v\rangle = \langle w, w\rangle = 1$) mit $U = \operatorname{span}\{v, w\}$. Ergänze v, w zu einer Orthonormalbasis $e_1 := v, e_2 := w, e_3, ..., e_m$ von T_pX. Dann folgt

$$(\sec U)^2 = (\langle \operatorname{Rm}(p)(v, w)v, w\rangle)^2 = (R_{1212}(p))^2 \leq \sum_{i,j,k,l} (R_{ijkl}(p))^2 = (|\operatorname{Rm}|(p))^2$$

□

Theorem 5.47. *Falls $\sec \leq K$ gilt (d. h. alle Schnittkrümmungen sind $\leq K$) für eine Konstante $K > 0$, hat für alle $p \in X$ $\exp_p : B_{\pi/\sqrt{K}}(0) \to X$ keine kritischen Punkte.*

Beweis. siehe [48] □

Korollar 5.48. *Falls $|\operatorname{Rm}| \leq K$ gilt für eine Konstante $K > 0$, folgt $R_p \geq \pi/\sqrt{K}$ für alle $p \in X$.*

Beweis. Das folgt aus Lemma 5.46, der Definition von R_p und Theorem 5.47. □

Lemma 5.49. *Hat $(\boldsymbol{R} \times N, f^2dx^2 + g^2g_N)$ endliches Volumen, dann auch (N, g_N).*

Beweis. Schreibe wie oben $k := f^2dx^2$, $h := f^2dx^2 + g^2g_N$ und sei $A \subset \mathbf{R}$ eine kompakte Teilmenge mit positivem Volumen. Also hat $g|_A$ ein positives Minimum $m > 0$. Bezeichne allgemein mit $\operatorname{Vol}(Y, \mathcal{G})$ das Volumen einer messbaren Teilmenge $Y \subset X$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{G})$. Es gilt

$$\begin{aligned}\infty > \operatorname{Vol}(\mathbf{R} \times N, h) &\geq \operatorname{Vol}(A \times N, h) \geq \operatorname{Vol}(A \times N, k + m^2g_N)\\ &= \operatorname{Vol}(A, k) \cdot \operatorname{Vol}(N, m^2g_N) = m^n \operatorname{Vol}(A, k) \cdot \operatorname{Vol}(N, g_N)\end{aligned}$$

Da $\operatorname{Vol}(A, k) > 0$ gilt, folgt die Behauptung. □

Jetzt kommt die Injektivitätsradiusabschätzung:

Satz 5.50. *Gelte* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g_0(x) = 0$, *habe* $(\boldsymbol{R} \times N, h)$ *endliches Volumen und sei* (N, g_N) *homogen. Gelte für den Riemannschen Krümmungstensor auf* $\boldsymbol{R} \times N$ $|\operatorname{Rm}| \leq K$ *für ein* $K > 0$. *Dann existiert eine Konstante* $C > 0$, *die nur von* (N, g_N) *abhängt, so dass gilt*

$$\sup_{q\in N} i_{(x,q)} \leq Cg(x)$$

für alle $x \in \boldsymbol{R}$ *mit* $Cg(x) < \pi/\sqrt{K}$, *wobei* $i_{(x,q)}$ *den Injektivitätsradius am Punkt* (x, q) *bezeichnet.*

Beweis. Im folgenden Beweis verwenden wir alle Resultate ab Definition 5.42. Da nach Voraussetzung $(\mathbf{R}\times N, f^2dx^2+g^2g_N)$ endliches Volumen hat, ist das Volumen von (N, g_N) nach Lemma 5.49 ebenfalls endlich. Daraus folgt, dass N nicht einfach zusammenhängend ist (da (N, g_N) ansonsten isometrisch zu $\mathbf{R}^n$ mit Standardmetrik $g_{\mathbf{R}^n}$ wäre) und somit die Fundamentalgruppe $\pi_1(N)$ von N nichttrivial ist. Sei $q \in N$ fest aber beliebig. Da $\pi_1(N, q) \neq \{1\}$ gilt, gibt es eine geschlossene stetige (sogar stetig differenzierbare) Kurve $c : [0, 1] \to N$ mit $c(0) = c(1) = q$, die nicht homotop zur konstanten Kurve $\equiv q$ ist. Sei $C := L(c) > 0$ (um den Wert C eindeutig festzulegen, kann man als c eine nichtkonstante geodätische Schleife minimaler Länge wählen). Sei $x \in \mathbf{R}$ mit $Cg(x) < \pi/\sqrt{K}$. Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R} \times N, \gamma(s) := (x, c(s))$. Es gilt $L(\gamma) = g(x)L(c) = Cg(x) < \pi/\sqrt{K} \leq R_{(x,q)}$ nach Korollar 5.48. Wegen Lemma 5.45 ist somit γ kurz homotop in $\mathbf{R} \times N$ zu einer geodätischen Schleife s (mit demselben Basispunkt) nichtgrößerer Länge, also mit $L(s) \leq L(\gamma)$. Da der Injektivitätsradius an einem Punkt einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ganz allgemein durch die Länge jeder nichtkonstanten geodätischen Schleife an diesem Punkt beschränkt wird, folgt $i_{(x,q)} \leq L(s) \leq L(\gamma) = g(x)L(c) = Cg(x)$. Lassen wir nun $q \in N$ variieren: Da N homogen ist, gibt es an jedem Punkt von N eine geschlossene C^1 Kurve, die nicht homotop zur konstanten Kurve ist und die gleiche Länge wie c hat. Daraus folgt $\sup_{q\in N} i_{x,q} \leq Cg(x)$. Damit folgt die Behauptung. □

6 Charakterisierung von $f^2dx^2 + g^2g_{\mathbf{R}^n}$ durch Isometrien

In diesem Kapitel beweisen wir, dass sich die warped product Metrik $f^2dx^2 + g^2g_{\mathbf{R}^n}$ auf dem $\mathbf{R}^{n+1}$ durch Isometrien charakterisieren lässt. Für in diesem Abschnitt verwendete Notation siehe die Kapitel 3 und 2.

Satz 6.1. *Sei h eine C^∞ Riemannsche Metrik auf dem $\boldsymbol{R}^{n+1} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n$. Dann sind äquivalent:*

(1) Es existieren $f, g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ C^∞ und positiv mit $h = f^2dx^2 + g^2g_{\boldsymbol{R}^n}$

(2) Es existieren $f, g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ C^∞ und positiv mit $h_{ij}(x, q) = 0$, $h_{00}(x, q) = f^2(x)$, $h_{kk}(x, q) = g^2(x)$ für alle $(x, q) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n, i, j = 0, ..., n, i \neq j, k = 1, ..., n$

(3) Es existieren $f, g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ C^∞ und positiv mit $h = (f^2 \circ \pi)dx_0^2 + (g^2 \circ \pi)(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$ mit $\pi : \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}, (x, q) \to x$

(4) Folgende Abbildungen sind Isometrien $(\boldsymbol{R}^{n+1}, h) \to (\boldsymbol{R}^{n+1}, h)$:

$$\psi_a(p_0, ..., p_n) = (p_0, p_1 + a_1, ..., p_n + a_n), a = (0, a_1, ..., a_n) \in \boldsymbol{R}^n$$

$$\phi_i(p_0, ..., p_n) = (p_0, ..., p_{i-1}, -p_i, p_{i+1}, ..., p_n), i = 1, ..., n$$

$$\eta_{i,\varphi}(p_0, ..., p_n) = (p_0, ..., p_{i-1}, p_i \cos\varphi - p_{i+1} \sin\varphi, p_i \sin\varphi + p_{i+1} \cos\varphi, p_{i+2}, ..., p_n)$$
$$, i = 1, ..., n-1, \varphi \in \boldsymbol{R}$$

Beweis. „(1) $\Rightarrow$ (2)": Seien $(x, y), (x, z) \in T_x\mathbf{R}, (q, v), (q, w) \in T_q\mathbf{R}^n$. Wir haben die beiden Projektionen $\pi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \sigma : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Der Lift von (x, y) an (x, q) ist gegeben durch $\widetilde{(x, y)} = ((x, q), (y, 0))$ und der Lift von (q, v) an (x, q) ist gegeben durch $\widetilde{(q, v)} = ((x, q), (0, v))$. Damit folgt $\widetilde{(x, y)} + \widetilde{(q, v)} = ((x, q), (y, v))$. Also gilt

$$\begin{aligned}
&(f^2dx^2 + g^2g_{\mathbf{R}^n})(x, q)(((x, q), (y, v)), ((x, q), (z, w)) \\
&= (f^2dx^2 + g^2g_{\mathbf{R}^n})(x, q)(\widetilde{(x, y)} + \widetilde{(q, v)}, \widetilde{(x, z)} + \widetilde{(q, w)}) \\
&= f^2dx^2(x)((x, y), (x, z)) + g^2(x)g_{\mathbf{R}^n}(q)((q, v), (q, w)) \\
&= f^2(x)yz + g^2(x)\langle v, w\rangle
\end{aligned}$$

wobei hier $\langle\cdot, \cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbf{R}^n$ bezeichnet. Daraus folgt $h_{ij}(x, q) = 0$, $h_{00}(x, q) = f^2(x), h_{kk}(x, q) = g^2(x)$ für alle $(x, q) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}, i, j = 0, ..., n, i \neq j, k = 1, ..., n$.

„(3) ⇒ (2)”:

$$\begin{aligned}&((f^2\circ\pi)dx_0^2+(g^2\circ\pi)(dx_1^2+\cdots+dx_n^2))(x,q)(((x,q),e_\alpha),((x,q),e_\beta))\\&=f^2(x)\delta_{0\alpha}\delta_{0\beta}+g^2(x)\sum_{l=1}^n\delta_{l\alpha}\delta_{l\beta}\end{aligned}$$

$\alpha,\beta=0,...,n$. Daraus folgt $h_{ij}(x,q)=0$, $h_{00}(x,q)=f^2(x), h_{kk}(x,q)=g^2(x)$ für alle $(x,q)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n, i,j=0,...,n, i\neq j, k=1,...,n$.

„(2) ⇒ (1)”: Da eine Riemannsche Metrik durch ihre Komponentenfunktionen bestimmt ist und die Metrik $f^2dx^2+g^2g_{\mathbf{R}^n}$ die angegebenen Komponentenfunktionen hat (siehe „(1) ⇒ (2)”), folgt die Behauptung. Genauso für „(2) ⇒ (3)”

Damit sind also (1) − (3) äquivalent.

„(2) ⇔ (4)”:
Es gilt (mit $p=(p_0,...,p_n)$) $\psi_a(p_0,..,p_n)=(p_0,p_1+a_1,...,p_n+a_n)$, also $\partial\psi_a(p)=\mathrm{id}$ und somit $\widetilde{\psi_a^*h}(p)(v,w)=\widetilde{h}(\psi_a(p))(v,w)$ für alle $p,v,w\in\mathbf{R}^{n+1}$. Also folgt

$$\begin{aligned}\psi_a^*h=h&\Leftrightarrow\widetilde{\psi_a^*h}=\widetilde{h}\\&\Leftrightarrow\widetilde{h}(\psi_a(p))(v,w)=\widetilde{h}(p)(v,w)\ \forall p,v,w\in\mathbf{R}^{n+1}\\&\Leftrightarrow h_{ij}(\psi_a(p))=h_{ij}(p)\ \forall 0\leq i,j\leq n\ \forall p\in\mathbf{R}^{n+1}\end{aligned}$$

Damit ist die Bedingung, dass die Abbildungen

$$\psi_a(p_0,...,p_n)=(p_0,p_1+a_1,...,p_n+a_n), a=(0,a_1,...,a_n)\in\mathbf{R}^{n+1}$$

Isometrien $(\mathbf{R}^{n+1},h)\to(\mathbf{R}^{n+1},h)$ sind, äquivalent dazu, dass

$$h_{ij}(p)=\hat{h_{ij}}(\pi(p))\ \forall 0\leq i,j\leq n\ \forall p\in\mathbf{R}^{n+1}$$

gilt mit geeigneten Funktionen $\hat{h_{ij}}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, d. h. dass die Komponentenfunktionen nur von der ersten Variablen abhängen (oder äquivalent, dass $\widetilde{h}$ nur von der ersten Variablen abhängt).

Diese Bedingung ist erfüllt, falls (2) gilt.

Wir nehmen im Folgenden an, dass $h_{ij}(p)=\hat{h_{ij}}(\pi(p))\ \forall 0\leq i,j\leq n, \forall p\in\mathbf{R}^{n+1}$ gilt.

Es gilt $\phi_i(p_0,...,p_n) = (p_0,...,p_{i-1},-p_i,p_{i+1},...,p_n)$, $i = 1,...,n$; somit ist ϕ_i linear. Daraus folgt $\partial\phi_i(p) = \phi_i$ und somit $\widetilde{\phi_i^* h}(p)(v,w) = \widetilde{h}(\phi_i(p))(\phi_i(v),\phi_i(w))$ für alle $p,v,w \in \mathbf{R}^{n+1}$. Also folgt mit $v = (v_0,...,v_n)$, $w = (w_0,...,w_n)$

$$\begin{aligned}
\phi_i^* h = h &\Leftrightarrow \widetilde{h}(\phi_i(p))(\phi_i(v),\phi_i(w)) = \widetilde{h}(p)(v,w)\ \forall p,v,w \in \mathbf{R}^{n+1} \\
&\Leftrightarrow \widetilde{h}(p)(\phi_i(v),\phi_i(w)) = \widetilde{h}(p)(v,w)\ \forall p,v,w \in \mathbf{R}^{n+1} \\
&\Leftrightarrow \widetilde{h}(p)((v_0,...,v_{i-1},-v_i,v_{i+1},...,v_n),(w_0,...,w_{i-1},-w_i,w_{i+1},...,w_n)) \\
&= \widetilde{h}(p)((v_0,...,v_n),(w_0,...,w_n))\ \forall p \in \mathbf{R}^{n+1}, v_0,...,v_n,w_0,...,w_n \in \mathbf{R}
\end{aligned}$$

Damit ist ϕ_i, $i = 1,...,n$ eine Isometrie, falls (2) gilt. Ist umgekehrt ϕ_i, $i = 1,...,n$, eine Isometrie, so folgt für $j \neq i$

$$h_{ij}(p) = \widetilde{h}(p)(e_i,e_j) = \widetilde{h}(p)(-e_i,e_j) = -h_{ij}(p)$$

für alle $p \in \mathbf{R}^{n+1}$, wobei $e_0,...,e_n$ die Standardbasis des $\mathbf{R}^{n+1}$ bezeichnet, und somit $h_{ij}(p) = 0$, d. h. die Matrix $(h_{ij}(p))_{0\le i,j\le n}$ ist diagonal.

Es gilt $\eta_{i,\varphi}(p_0,...,p_n) = (p_0,...,p_{i-1},p_i\cos\varphi - p_{i+1}\sin\varphi, p_i\sin\varphi + p_{i+1}\cos\varphi, p_{i+2},...,p_n)$, $i = 1,...,n-1$, $\varphi \in \mathbf{R}$, d. h. $\eta_{i,\varphi}$ ist linear. Außerdem ist $\eta_{i,\varphi}$ von der Form $\eta_{i,\varphi}(p_0,...,p_n) = (p_0,\xi_{i,\varphi}(p_1,...,p_n))$ mit $\xi_{i,\varphi} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linear. Also folgt

$$\begin{aligned}
&\eta_{i,\varphi}^* h = h \Leftrightarrow \\
&\widetilde{h}(p)((v_0,\xi_{i,\varphi}(v_1,...,v_n)),(w_0,\xi_{i,\varphi}(w_1,...,w_n))) = \widetilde{h}(p)((v_0,...,v_n),(w_0,...,w_n)) \\
&\ \forall p \in \mathbf{R}^{n+1}, v_0,...,v_n,w_0,...,w_n \in \mathbf{R}
\end{aligned}$$

Da $\xi_{i,\varphi}$ eine lineare Isometrie bzgl. des Standardskalarprodukts auf dem $\mathbf{R}^n$ ist, ist $\eta_{i,\varphi}$, $i = 1,...,n-1$, $\varphi \in \mathbf{R}$ eine Isometrie, falls (2) gilt. Ist umgekehrt $\eta_{i,\varphi}$, $i = 1,...,n-1$, $\varphi \in \mathbf{R}$ eine Isometrie, so folgt (indem wir $\varphi = \pi/2$, $v = w = e_i$ wählen)

$$h_{ii}(p) = \widetilde{h}(p)(e_i,e_i) = \widetilde{h}(p)(\eta_{i,\pi/2}(e_i),\eta_{i,\pi/2}(e_i)) = \widetilde{h}(p)(e_{i+1},e_{i+1}) = h_{i+1,i+1}(p)$$

für alle $p \in \mathbf{R}^{n+1}$, $i = 1,...,n-1$.

Insgesamt erhalten wir „(2) $\Leftrightarrow$ (4)". □

Bemerkung 6.2. Die Abbildung ϕ_a ist eine Translation um einen Vektor in der $x_1,...,x_n$ Hyperebene. Die Abbildung η_i ist die Spiegelung an der $x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n$ Hyperebene. Die Abbildung $\eta_{i,\varphi}$ ist eine "Drehung in der x_i,x_{i+1} Ebene um den Winkel φ".

7 Existenz, Eindeutigkeit und Erhaltung von Isometrien unter Ricci Fluss

Wir definieren in diesem Kapitel den Ricci Fluss und zeigen Existenz- und Eindeutigkeit in der Klasse der C^∞ Familien von vollständigen C^∞ Riemannschen Metriken mit beschränkter Krümmung auf kompakten Zeitintervallen. Anschließend zeigen wir, dass Isometrien in dieser Klasse von Familien von Metriken erhalten bleiben. Diese Resultate sind nicht neu und stehen z. B. in [15], Theorem A. 17, [16], Theorem D.5 und in [19], S. 175.

In diesem Kapitel seien M, N n-dimensionale C^∞ Mannigfaltigkeiten und $I \subset \mathbf{R}$ ein Intervall.

Definition 7.1. *Sei $h(t), t \in I$ eine C^∞ Familie von C^∞ Riemannschen Metriken auf M. $h(t), t \in I$ erfüllt Ricci Fluss, falls gilt*

$$\frac{d}{dt}h(p,t) = -2\operatorname{Ric}(p,t)$$

für alle $p \in M$ und alle $t \in I$. Ist $I = [a,b)$ oder $I = [a,b]$ oder $I = [a,\infty)$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und h eine C^∞ Riemannsche Metrik auf M, dann ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}h(p,t) = -2\operatorname{Ric}(p,t) \text{ für alle } p \in M, t \in I \\ h(a) = h \end{cases} \tag{3}$$

per Definition eine C^∞ Familie von C^∞ Riemannschen Metriken auf M, $h(t), t \in I$, die Ricci Fluss erfüllt und für die $h(a) = h$ gilt.

Bemerkung 7.2. Die Gleichung „$\frac{d}{dt}h(p,t) = -2\operatorname{Ric}(p,t)$ für alle $p \in M$ und alle $t \in I$“ ist so zu verstehen: Sei $p \in M$ fest aber beliebig. Dann ist $h(t)(p), t \in I$ eine C^∞ Kurve im n-dimensionalen $\mathbf{R}$-Vektorraum $(T_2^0)_pM$. Damit ist die Ableitung $\frac{d}{dt}h(t)(p), t \in I$ definiert. $h(t), t \in I$ erfüllt per Definition Ricci Fluss, falls $\frac{d}{dt}h(t)(p) = -2\operatorname{Ric}_{h(t)}(p)$ gilt für alle $t \in I$. Für $\operatorname{Ric}_{h(t)}(p)$ schreiben wir stattdessen $\operatorname{Ric}(p,t)$.

Bemerkung 7.3. Eine Lösung des Anfangswertproblems (3) (am Beispiel $I = [a,b)$) ist eigentlich eine stetige Abbildung $h : M \times [a,b) \to T_2^0M, h(p,t) = h(t)(p)$, die C^∞ auf $M \times (a,b)$ ist und so dass $h(t)$ eine C^∞ Riemannsche Metrik auf M ist für alle $t \in [a,b)$ mit

$$\frac{d}{dt}h(p,t) = -2\operatorname{Ric}(p,t)$$

für alle $p \in M$ und alle $t \in (a,b)$ und mit $h(a) = h$. Ist jedoch sogar $h : M \times [a,b) \to T_2^0M$ C^∞, so folgt

$$\frac{d}{dt}h(p,t) = -2\operatorname{Ric}(p,t)$$

für alle $p \in M$ und alle $t \in [a, b)$ (das ist dem Leser überlassen!), und das ergibt dann obige Definition.

Theorem 7.4. *Sei M nichtkompakt. Sei h eine C^∞ vollständige Riemannsche Metrik auf M mit beschränkter Krümmung*

$$|\operatorname{Rm}|^2 \leq k_0$$

für ein $0 < k_0 < +\infty$. Dann existiert $T = T(n, k_0) > 0$, so dass es eine Lösung des Ricci Flusses $h(t), t \in [0, T]$ gibt mit $h(0) = h$, und diese erfüllt die folgenden Abschätzungen: Für jede ganze Zahl $m \geq 0$ gibt es ein $C = C(m, n, k_0)$, so dass

$$\sup_{p \in M} |\nabla^m \operatorname{Rm}|^2(p, t) \leq \frac{C(m, n, k_0)}{t^m}$$

für alle $0 < t \leq T(n, k_0)$ ($0 \leq t \leq T(n, k_0)$ für $m = 0$ aus Stetigkeitsgründen) gilt.

Beweis. siehe [51] □

Theorem 7.5. *Sei M nichtkompakt. Sei $0 < T < \infty$ beliebig und seien $h(t), \widetilde{h}(t), t \in [0, T]$ Lösungen des Ricci Flusses mit $h(0) = \widetilde{h}(0)$ und jeweils beschränkter Krümmung $|\operatorname{Rm}_h| \leq C$ und $|\operatorname{Rm}_{\widetilde{h}}| \leq C$ auf $M \times [0, T]$ für eine Konstante $C > 0$. Seien außerdem $h(0), \widetilde{h}(0)$ vollständig (und damit auch $h(t), \widetilde{h}(t)$ für alle $t \in [0, T]$, siehe die Sätze B.8 und B.9). Dann folgt $h(t) = \widetilde{h}(t)$ für alle $t \in [0, T]$.*

Beweis. siehe [35] □

Definition 7.6. *Sei M nichtkompakt.*
Sei $B(M)$ die Menge aller vollständigen C^∞ Riemannschen Metriken auf M mit beschränkter Krümmung.
Sei $BK(M)$ die Menge aller C^∞ Familien von C^∞ Riemannschen Metriken $h(t), t \in I$ auf M, wobei $I = [0, a]$ oder $I = [0, a)$ für ein $0 < a \leq \infty$ gelten möge, $h(t)$ vollständig sei für alle $t \in I$ und $|\operatorname{Rm}|(p, t) \leq C$ für alle $p \in M$ und alle $t \in J$ gelte, wobei J ein kompaktes Teilintervall von I ist und C von J abhängen kann.

An dieser Stelle definieren wir kurz den normalisierten (=volumenerhaltenden) Ricci Fluss, welcher sich vom Ricci Fluss nur durch eine Reskalierung der Metrik und Reparametrisierung der Zeit unterscheidet.

Definition 7.7. *Sei $h(t), t \in I$ eine C^∞ Familie von C^∞ Riemannschen Metriken auf M aus $BK(M)$. Sei außerdem $\operatorname{Vol}(h(t)) < \infty$ für alle $t \in I$ (sei $\operatorname{Vol} h(t)$ per Definition das Volumen von M bzgl. $h(t)$). $h(t), t \in I$ erfüllt den normalisierten (=volumenerhaltenden) Ricci Fluss, falls gilt*

$$\frac{d}{dt} h(p, t) = -2 \operatorname{Ric}_{h(t)}(p) + \frac{2}{n} r(t) h(p, t)$$

für alle $p \in M$ und alle $t \in I$ mit $r(t) := \frac{\int_M R_{h(t)} d\mu_{h(t)}}{\mathrm{Vol}(h(t))}, t \in I$ ($R_{h(t)}$ und $d\mu_{h(t)}$ bezeichnen die Skalarkrümmung bzw. das Volumenmaß bzgl. der Metrik $h(t)$).

Satz 7.8. *Sei $h(t), t \in [0,T)$ eine Lösung des Ricci Flusses aus $BK(M)$ mit $\mathrm{Vol}(h(0)) < \infty$ (und damit $\mathrm{Vol}(h(t)) < \infty$ für alle $t \in [0,T)$). Dann ist $\widetilde{h}(\widetilde{t}) := c(t)h(t)$ mit*

$$c(t) := e^{\frac{2}{n}\int_0^t r(\tau)d\tau}, \widetilde{t}(t) := \int_0^t c(\tau)d\tau$$

eine Lösung des normalisierten Ricci Flusses mit $\widetilde{h}(0) = h(0)$.

Beweis. siehe [19], der Beweis von $\mathrm{Vol}(h(t)) < \infty$ für alle $t \in [0,T)$ ist dem Leser überlassen (siehe dazu auch Satz B.8)! □

Bemerkung 7.9. Umgekehrt kann man aus einer Lösung des normalisierten Ricci Flusses durch Reskalierung der Metrik und Reparametrisierung der Zeit eine Lösung des Ricci Flusses erhalten.

Jetzt weiter zum entscheidenden

Theorem 7.10. *Sei $h \in B(M)$ fest aber beliebig. Sei $I_{\max}$ die Vereinigung aller Intervalle I der Form $I = [0,a]$ oder $I = [0,a)$ für ein $0 < a \leq \infty$, so dass es eine Lösung des Ricci Fluss $h(t), t \in I$ aus $BK(M)$ mit $h(0) = h$ gibt. Dann ist $I_{\max}$ von der Form $I_{\max} = [0,T)$ für ein $0 < T \leq \infty$, und es gibt genau eine Lösung $h(t), t \in I_{\max}$ des Ricci Fluss auf $I_{\max}$ in $BK(M)$ mit $h(0) = h$. Außerdem ist jede Lösung des Ricci Fluss in $BK(M)$ mit Anfangsmetrik h Einschränkung der maximalen Lösung.*

Zuerst ein paar Lemmata und Korollare.

Lemma 7.11. *Ist $h(t), t \in I$ eine Lösung des Ricci Flusses, so auch $\widetilde{h}(t) := h(t+a), t \in I - a$ für jedes $a \in \boldsymbol{R}$. ($I - a := \{s - a | s \in I\}$).*

Beweis.

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{h}(t)(p)) = \frac{d}{dt}(h(t+a)(p)) = \frac{d}{dt}h(t+a)(p) = -2\,\mathrm{Ric}_{h(t+a)}(p) = -2\,\mathrm{Ric}_{\widetilde{h}(t)}(p)$$

□

Bemerkung 7.12. Wegen dieser Translationsinvarianz in der Zeit gelten das Existenztheorem 7.4 von Shi für jede Startzeit $a \in \mathbf{R}$, und die Eindeutigkeitsaussage Theorem 7.5 gilt auch für Lösungen auf Intervallen der Form $[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$!

Korollar 7.13. *Sind $g(t), a \leq t \leq b$ und $h(t), b \leq t \leq c$ mit $-\infty < a < b < c < \infty$ Lösungen des Ricci Flusses mit jeweils beschränkter Krümmung $|\mathrm{Rm}_g| \leq C$, $|\mathrm{Rm}_h| \leq C$ für ein $C > 0$ und gilt $g(b) = h(b)$, so ist die Zusammensetzung beider Lösungen wieder eine Lösung mit beschränkter Krümmung.*

Beweis. Sei $a_0 \in \mathbf{R}$ so gewählt, dass $a < a_0 < b$ und $b < a_0 + T(n,C)$ gilt mit $T(n,C)$ aus Theorem 7.4, und sei $k(t), t \in [a_0, a_0 + T(n,C)]$ eine Lösung des Ricci Flusses mit $k(a_0) = g(a_0)$ und beschränkter Krümmung nach dem Existenztheorem von Shi 7.4. Aus dem Eindeutigkeitsresultat Theorem 7.5 folgt $k(t) = g(t), t \in [a_0, b]$, damit $k(b) = g(b) = h(b)$ und damit $k(t) = h(t), t \in [b, \min\{a_0 + T(n,C), c\}]$. Somit ist die Zusammensetzung C^∞. □

Korollar 7.14. *Sei $g(t), a \leq t \leq b$ mit $-\infty < a < b < \infty$ eine Lösung des Ricci Fluss mit $|\operatorname{Rm}| \leq C$ für ein $C > 0$. Dann existiert $T = T(n,C) > 0$ und eine Lösung $h(t), a \leq t \leq b + T$ des Ricci Flusses mit $|\operatorname{Rm}| \leq \widetilde{C}$ und $h(t) = g(t)$ für alle $t \in [a,b]$.*

Jetzt zum Beweis des Theorems 7.10:

Beweis. Wäre $I_{\max}$ von der Form $I_{\max} = [0,b]$ für ein $b > 0$, so gäbe es eine Lösung des Ricci Fluss $h(t), t \in [0,b]$ mit beschränkter Krümmung. Diese ließe sich nach Korollar 7.14 über b hinaus fortsetzen. Widerspruch. Also gilt $I_{\max} = [0,T)$ für ein $0 < T \leq \infty$. Sei $0 \leq t_0 < T$ gegeben und sei $g(t), t \in I$ Lösung des Ricci Fluss aus $BK(M)$ mit $g(0) = h$ und $t_0 \in I$. Sei $h(t), t \in J$ ebenfalls Lösung des Ricci Fluss aus $BK(M)$ mit $h(0) = h$ und $t_0 \in J$. Da Einschränkungen von Lösungen wieder Lösungen sind, folgt aus dem Eindeutigkeitstheorem 7.5 $g(t_0) = h(t_0)$. Somit ist $g(t_0)$ wohldefiniert. Definiere $G(t_0) := g(t_0)$. Die auf diese Weise definierte Familie von Metriken $G(t), 0 \leq t < T$ ist eine Lösung des Ricci Fluss, C^∞ und aus $BK(M)$. □

Außerdem gilt:

Satz 7.15. *Gilt für die maximale Existenzzeit $T < \infty$, so folgt*

$$\lim_{a \nearrow T} \sup_{(x,t) \in M \times [0,a]} |\operatorname{Rm}(x,t)| = \infty$$

Beweis. Angenommen, das wäre falsch. Dann würde $|\operatorname{Rm}(x,t)| \leq C$ für alle $(x,t) \in M \times [0,T)$ gelten. Da die Größe der lokalen Existenzzeit $T(n,k_0)$ imTheorem von Shi 7.4 nur von n und k_0 abhängt, ließe sich der Ricci Fluss über T hinaus fortsetzen. Widerspruch. □

Andersherum gilt also:

Korollar 7.16. *Gilt $|\operatorname{Rm}(x,t)| \leq C$ für alle $(x,t) \in M \times [0,T)$, wobei $0 < T \leq \infty$ die maximale Existenzzeit sei, so folgt $T = \infty$.*

Man kann also Langzeitexistenz der Lösung durch Beschränktheit der Krümmung zeigen, oder: Lösungen mit beschränkter Krümmung sind unsterblich!

Wir zeigen als Nächstes, dass Isometrien in unserer Klasse von Familien von Metriken $BK(M)$ unter Ricci Fluss erhalten bleiben:

Satz 7.17. *Sei $\psi : M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus. Erfülle $h(t)$, $t \in I$ Ricci Fluss auf N. Dann erfüllt $\psi^*(h(t)), t \in I$, Ricci Fluss auf M.*

Beweis. Sei $h(t)$, $t \in I$, Lösung des Ricci Flusses auf N. Dann folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi^* h(t)(p)(v,w) &= \frac{d}{dt}h(t)(\psi(p))(D\psi_p(v), D\psi_p(w))\\ &= -2\operatorname{Ric}_{h(t)}(\psi(p))(D\psi_p(v), D\psi_p(w))\\ &= -2(\psi^*\operatorname{Ric}_{h(t)})(p)(v,w)\\ &= -2(\operatorname{Ric}_{\psi^* h(t)})(p)(v,w)\end{aligned}$$

für alle $p \in M$, $v, w \in T_pM$, $t \in I$. Dabei haben wir für die letzte Gleichheit Folgendes benutzt: Ist $\psi : M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus und damit $\psi : (M, \psi^* h) \to (N, h)$ eine lokale Isometrie, so gilt $\operatorname{Ric}_{\psi^* h} = \psi^* \operatorname{Ric}_h$ (siehe [44], S. 91). Wir wenden dies mit $h = h(t)$, t fest, an. □

Bemerkung 7.18. Als Spezialfall ergibt sich die Diffeomorphismeninvarianz des Ricci Flusses (nämlich wenn ψ ein Diffeomorphismus ist).

Lemma 7.19. *Sei $\psi : M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus. Ist $h(t), t \in I$ aus $BK(N)$, so ist $\psi^*(h(t)), t \in I$ aus $BK(M)$.*

Beweis. Das folgt aus

Satz 7.20. *Seien $(M,g), (N,h)$ C^∞ Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine C^∞ lokale Isometrie. Dann folgt*

$$|\operatorname{Rm}_N| \leq C \Rightarrow |\operatorname{Rm}_M| \leq C$$

Beweis. Nach Satz 5.30 gilt $|\operatorname{Rm}_M| = |\operatorname{Rm}_N| \circ f$. □

□

Satz 7.21. *Sei $0 < T \leq \infty$ und $h(t), t \in [0,T)$ Lösung des Ricci Fluss in $BK(M)$. Ist $\phi : (M, h(0)) \to (M, h(0))$ eine Isometrie, so ist $\phi : (M, h(t)) \to (M, h(t))$ auch eine Isometrie für alle $t \in [0,T)$.*

Beweis. $\phi : M \to M$ ist ein Diffeomorphismus. Aufgrund der (lokalen) Diffeomorphismeninvarianz Satz 7.17 des Ricci Flusses ist mit $h(t), t \in [0,T)$ auch $\phi^* h(t), t \in [0,T)$ eine Lösung des Ricci Flusses. Da $\phi : (M, h(0)) \to (M, h(0))$ eine Isometrie ist, gilt $\phi^* h(0) = h(0)$. Ferner gelten dieselben Kümmungsschranken für $\phi^* h(t)$ wie für $h(t)$ und $\phi^* h(t)$ ist ebenfalls vollständig für alle $t \in [0,T)$. Aus der Eindeutigkeit (Theorem 7.5) folgt damit $\phi^* h(t) = h(t)$, $t \in [0,T)$, somit ist $\phi : (M, h(t)) \to (M, h(t))$ auch eine Isometrie. □

8 Erhaltung der warped product Struktur und Äquivalenz des Ricci Flusses zum f, g System

Sei in diesem Kapitel (N, g_N) eine flache, vollständige, zusammenhängende C^∞ Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$.

Wir zeigen, dass die warped product Struktur $h = f_0^2 dx^2 + g_0^2 g_N$ auf $M = \mathbf{R} \times N$ mit $f_0, g_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv (siehe den Beginn von Kapitel 5) und $h \in B(M)$ unter Ricci Fluss in der Klasse $BK(M)$ (siehe Definition 7.6) erhalten bleibt, d. h. dass die maximale Lösung von der Form $h(t) = f^2(\cdot, t)dx^2 + g^2(\cdot, t)g_N, t \in [0, T)$ mit $f, g : \mathbf{R} \times [0, T) \to \mathbf{R}$ ist. Anschließend zeigen wir, dass der Ricci Fluss äquivalent zu einem System partieller Differentialgleichungen für f und g ist.

Erhaltung der warped product Struktur

Wir beginnen mit $N = \mathbf{R}^n$ versehen mit der Standardmetrik $g_{\mathbf{R}^n}$.

Satz 8.1. *Sei $h \in B(\boldsymbol{R}^{n+1})$ mit $h = f_0^2 dx^2 + g_0^2 g_{\boldsymbol{R}^n}$ mit $f_0, g_0 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ C^∞ und positiv. Sei $h(t), t \in [0, T)$ die maximale Lösung des Ricci Flusses in $BK(\boldsymbol{R}^{n+1})$ mit $h(0) = h$. Dann existieren $f, g : \boldsymbol{R} \times [0, T) \to \boldsymbol{R}$ positiv mit $h(t) = f^2(\cdot, t)dx^2 + g^2(\cdot, t)g_{\boldsymbol{R}^n}, t \in [0, T)$.*

Beweis. Nach Satz 6.1 ist die Bedingung $h = h(0) = f_0^2 dx^2 + g_0^2 g_{\mathbf{R}^n}$ äquivalent dazu, dass gewisse Abbildungen Isometrien $(\mathbf{R}^n, h(0)) \to (\mathbf{R}^n, h(0))$ sind. Nach Satz 7.21 sind es auch Isometrien $(\mathbf{R}^n, h(t)) \to (\mathbf{R}^n, h(t)), t \in [0, T)$. Also folgt wiederum nach Theorem 6.1 $h(t) = f^2(\cdot, t)dx^2 + g^2(\cdot, t)g_{\mathbf{R}^n}, t \in [0, T)$ mit $f, g : \mathbf{R} \times [0, T) \to \mathbf{R}$ positiv geeignet. $\square$

Bemerkung 8.2. Siehe auch [30], Section 11, wo R. Hamilton das Erhaltenbleiben der warped product Struktur mit dem Erhalten von Symmetrien unter Ricci Fluss begründet. In [52] gibt M. Simon einen alternativen Beweis, um in seinem Setting das Erhaltenbleiben der warped product Struktur zu zeigen.

Mithilfe dieses Satzes können wir nun zeigen, dass unsere warped product Struktur auf $\mathbf{R} \times N$ unter Ricci Fluss erhalten bleibt:

Satz 8.3. *Sei $h \in B(\boldsymbol{R} \times N)$ mit $h = f_0^2 dx^2 + g_0^2 g_N$ mit $f_0, g_0 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ C^∞ und positiv. Sei $h(t), 0 \leq t < T$ die maximale Lösung des Ricci Flusses in $BK(\boldsymbol{R} \times N)$ mit $h(0) = h$. Dann existieren $f, g : \boldsymbol{R} \times [0, T) \to \boldsymbol{R}$ positiv mit $h(t) = f^2(\cdot, t)dx^2 + g^2(\cdot, t)g_N, t \in [0, T)$. Ferner sind f und g eindeutig bestimmt, es gilt $f(\cdot, 0) = f_0$, $g(\cdot, 0) = g_0$ und f und g sind C^∞.*

Beweis. Die Abbildung $\pi := \mathrm{id} \times \psi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \times N$ ist nach Lemma 5.20 ein surjektiver lokaler Diffeomorphismus. Nach Satz 7.17 und Lemma 7.19 ist $\pi^*(h(t)), t \in [0, T)$ eine Lösung des Ricci Fluss auf $\mathbf{R}^{n+1}$ in $BK(\mathbf{R}^{n+1})$, und wegen Satz 5.21 gilt

$\pi^*(h(0)) = f_0^2 dx^2 + g_0^2 g_{\mathbf{R}^n}$. Nach Satz 8.1 folgt $\pi^*(h(t)) = f^2(\cdot,t)dx^2 + g^2(\cdot,t)g_{\mathbf{R}^n}, t \in [0,T)$. Nach Satz 5.23 folgt $h(t) = f^2(\cdot,t)dx^2 + g^2(\cdot,t)g_N, t \in [0,T)$, denn es gilt

$$\pi^*(f^2(\cdot,t)dx^2 + g^2(\cdot,t)g_N) = f^2(\cdot,t)dx^2 + g^2(\cdot,t)g_{\mathbf{R}^n}$$

nach Satz 5.21 und $\pi^* : X_2^0(N) \to X_2^0(M), g \to \pi^* g$ ist nach Satz 5.23 injektiv. Die Eindeutigkeit von f und g gilt wegen (für die Notation siehe Kapitel 2)

$$h(t)(x,q)(\widetilde{z},\widetilde{z}) = f^2(x,t)dx^2(x)(z,z)$$

und

$$h(t)(x,q)(\widetilde{v},\widetilde{v}) = g^2(x,t)g_N(q)(v,v)$$

für alle $(x,q) \in \mathbf{R} \times N, z \in T_x\mathbf{R}, v \in T_qN, t \in [0,T)$, und aus der Eindeutigkeit folgt $f(\cdot,0) = f_0$ und $g(\cdot,0) = g_0$. Außerdem sind $f,g : \mathbf{R} \times [0,T) \to \mathbf{R}$ C^∞, weil $h : \mathbf{R} \times N \times [0,T) \to T_2^0(\mathbf{R} \times N)$ C^∞ ist. $\square$

Korollar 8.4. *Ist $h(t) = f^2(\cdot,t)dx^2 + g^2(\cdot,t)g_N, t \in [0,T)$ eine Lösung des Ricci Flusses auf $\boldsymbol{R} \times N$ und $h(0)$ vollständig, dann können wir oBdA $f(x,0) = 1$ für alle $x \in \boldsymbol{R}$ annehmen.*

Beweis. Sei $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine Stammfunktion zu $f(\cdot,0)$. Dann folgt $s = s_y(\cdot,0)$ für ein $y \in \mathbf{R}$, und aus der Vollständigkeit von $h(0)$ folgt, dass s ein Diffeomorphismus ist (siehe Korollar 4.15). Dann ist nach Satz 5.28 $\phi : \mathbf{R} \times N \to \mathbf{R} \times N, (x,y) \to (s(x),y)$ ein Diffeomorphismus und $\phi^* k = h(0)$ mit $k := dz^2 + (g^2(\cdot,0) \circ s^{-1})g_N$. Nach den Sätzen 7.17 und 7.19 ist $(\phi^{-1})^* h(t), t \in [0,T)$ wieder eine Lösung des Ricci Flusses in $BK(\mathbf{R} \times N)$, und nach Obigem gilt $(\phi^{-1})^* h(0) = k$. Nach Satz 8.3 gilt $(\phi^{-1})^* h(t) = \widetilde{f}^2(\cdot,t)dx^2 + \widetilde{g}^2(\cdot,t)g_N$, $t \in [0,T)$ für geeignete $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ und mit $\widetilde{f}(x,0) = 1$ für alle $x \in \mathbf{R}$. $\square$

Beispiele für Metriken $h = f^2 dx^2 + g^2 g_N$ in $B(\mathbf{R} \times N)$ erhält man z. B. mit folgenden Wahlen von f und g:

(1) $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbf{R}$ und es mögen $a < b$ in $\mathbf{R}$ existieren mit $g(x) = e^x$ für alle $-\infty < x \leq a$ und $g(x) = e^{-x}$ für alle $b \leq x < \infty$.

(2) $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbf{R}$ und es mögen $a < b$ in $\mathbf{R}$ existieren mit $g(x) = C_1$ für alle $-\infty < x \leq a$ und $g(x) = C_2$ für alle $b \leq x < \infty$.

Im ersten Fall sind die Enden $(-\infty, a] \times N$ und $[b, \infty) \times N$ hyperbolisch (alle Schnittkrümmungen $= -1$), im zweiten Fall sind sie flach (alle Schnittkrümmungen $= 0$); Beides folgt aus $K_V = -\frac{g_s^2}{g^2}, K_H = -\frac{g_{ss}}{g}, \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}$ (Letzteres wegen $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbf{R}$) und Satz 5.9. Die Beschränktheit der Krümmungen folgt in beiden Fällen aus Satz 5.10, der Kompaktheit des mittleren Bereiches $[a,b] \times N$ (falls N kompakt ist) und der Stetigkeit von $|\operatorname{Rm}|$. Da Schranken an $|\operatorname{Rm}|$ aber nicht von der Wahl von N abhängen, folgt die Beschränktheit der Krümmungen für beliebiges N aus dem Fall, dass N kompakt ist!

Äquivalenz von Ricci Fluss zum f, g System

Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein Intervall.

Als Konsequenz aus dem Erhaltenbleiben der warped product Struktur erhalten wir: Die Ricci Fluss Gleichung ist äquivalent zu einem System partieller Differentialgleichungen in f und g:

Satz 8.5. *Seien $f, g : \boldsymbol{R} \times I \to \boldsymbol{R}$ C^∞ und positiv. Dann ist $h(t) := f^2(\cdot, t)dx^2 + g^2(\cdot, t)g_N, t \in I$ eine C^∞ Familie von C^∞ Riemannschen Metriken auf $\boldsymbol{R} \times N$. Außerdem sind äquivalent:*

(1) $h(t), t \in I$ erfüllt Ricci Fluss

(2) f und g erfüllen

$$\begin{cases} f_t = n(\frac{g_{xx}}{fg} - \frac{f_x g_x}{f^2 g}) \\ g_t = \frac{g_{xx}}{f^2} - \frac{f_x g_x}{f^3} + (n-1)\frac{g_x^2}{f^2 g} \end{cases} \tag{4}$$

auf $\boldsymbol{R} \times I$

Beweis. Es gilt (im Folgenden bezeichnet $\widetilde{y}$ den Lift von y usw., siehe Kapitel 2)

$$h(x, q, t)(\widetilde{y} + \widetilde{v}, \widetilde{z} + \widetilde{w}) = f^2(x, t)dx^2(x)(y, z) + g^2(x, t)g_N(q)(v, w)$$

für alle $x \in \mathbf{R}, q \in N, y, z \in T_x\mathbf{R}, v, w \in T_qN, t \in I$. Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}h(x, q, t)(\widetilde{y} + \widetilde{v}, \widetilde{z} + \widetilde{w}) = 2f(x, t)f_t(x, t)dx^2(x)(y, z) + 2g(x, t)g_t(x, t)g_N(q)(v, w)$$

„(2) $\Rightarrow$ (1)": Einsetzen von Gleichungssystem (4) und Korollar 5.7 liefern $\frac{d}{dt}h(x, q, t) = -2\operatorname{Ric}(x, q, t)$ für alle $x \in \mathbf{R}, q \in N, t \in I$.
„(1) $\Rightarrow$ (2)": Gilt andererseits $\frac{d}{dt}h(x, q, t) = -2\operatorname{Ric}(x, q, t)$ für alle $x \in \mathbf{R}, q \in N, t \in I$ folgt nach Korollar 5.7

$$\begin{aligned}&2f(x, t)f_t(x, t)dx^2(x)(y, z) + 2g(x, t)g_t(x, t)g_N(q)(v, w) = \\ &-2(-n(\frac{g_{xx}}{g} - \frac{f_x g_x}{fg}))(x, t)dx^2(x)(y, z) + (-\frac{g_{xx}g}{f^2} + \frac{f_x g_x g}{f^3} - (n-1)\frac{g_x^2}{f^2})(x, t)g_N(q)(v, w))\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$2f(x, t)f_t(x, t) = -2(-n(\frac{g_{xx}}{g} - \frac{f_x g_x}{fg}))(x, t)$$

und

$$2g(x, t)g_t(x, t) = -2(-\frac{g_{xx}g}{f^2} + \frac{f_x g_x g}{f^3} - (n-1)\frac{g_x^2}{f^2})(x, t)$$

Das ergibt

$$f_t(x,t) = n(\frac{g_{xx}}{fg} - \frac{f_x g_x}{f^2 g})(x,t)$$

und

$$g_t(x,t) = (\frac{g_{xx}}{f^2} - \frac{f_x g_x}{f^3} + (n-1)\frac{g_x^2}{f^2 g})(x,t)$$

□

Wir können das System (4) auch kürzer schreiben als

$$\begin{cases} f_t = n\dfrac{g_{ss}}{g} f \\ g_t = g_{ss} + (n-1)\dfrac{g_s^2}{g} \end{cases} \tag{5}$$

Wir erhalten damit den Kommutator (siehe Satz 4.19)

$$[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}] = -n\frac{g_{ss}}{g}\frac{\partial}{\partial s} \tag{6}$$

also

$$u_{st} - u_{ts} = -n\frac{g_{ss}}{g} u_s$$

für eine Funktion $u : \mathbf{R} \times I \to \mathbf{R}$ C^∞.

Bemerkung 8.6. Die Evolutionsgleichungen für $n = 2$ stehen in [30], Section 11. Siehe auch [4] für den Fall $\mathbf{R} \times S^n$.

Bemerkung 8.7. Bemerke, dass das System für f und g unabhängig von der Wahl von N ist!

Bemerkung 8.8. Um zu zeigen, dass der Ricci Fluss die warped product Struktur erhält, könnte man alternativ die Existenz einer Lösung des Systems (4) zeigen. Das ist jedoch schwierig, weil wegen des fehlenden f_{xx} Terms in der ersten Gleichung das System kein parabolisches System ist!

9 Maximumprinzip von Hsu mit Erweiterung

Wir beweisen in diesem Kapitel eine Erweiterung des nichtkompakten Maximumprinzips von Hsu [34].

Das Maximumprinzip von Hsu mit Erweiterung sieht so aus:

Theorem 9.1. *Sei M eine n-dimensionale, nichtkompakte C^∞ Mannigfaltigkeit. Sei $0 < S < \infty$ fest aber beliebig und $h(t), t \in [0, S)$ eine C^∞ Familie von C^∞ Riemannschen Metriken auf M. Bezeichne $d_{h(t)}$ die von $h(t)$ induzierte Metrik auf M. Sei $h(t)$ vollständig für alle $t \in [0, S)$.*

Sei $u : M \times [0, S) \to \boldsymbol{R}$ stetig und auf $M \times (0, S)$ C^∞. Gelten

(i) $\frac{d}{dt}u \leq \Delta u + \langle a, \operatorname{grad} u\rangle + bu + c$ *auf* $M \times (0, S)$*, wobei* $a : M \times [0, S) \to TM$ C^∞ *ein zeitabhängiges Vektorfeld sei mit* $|a| \leq \alpha_1 < \infty$*,* $b, c : M \times [0, T) \to \boldsymbol{R}$ C^∞ *seien zeitabhängige Funktionen mit* $|b| \leq \alpha_0 < \infty$ *und* $c(x, t) \leq 0$*, falls* $u(x, t) > 0$ *für alle* $x \in M, t \in [0, S)$*.*

(ii) $u(x, 0) \leq 0$ *für alle* $x \in M$

(iii) $\int_0^S (\int_M e^{-\lambda^2 d^2_{h(t)}(x,y)} u_+^2(x, t) d\mu_{h(t)}(x))dt < \infty$ *für ein* $\lambda > 0$ *und ein* $y \in M$ *(*$u_+ = \max\{u, 0\}$*)*

(iv) $-\alpha_3 h(t) \leq \frac{d}{dt}h(t) \leq \alpha_3 h(t)$ *für ein* $\alpha_3 > 0$ *und für alle* $t \in [0, S)$*.*

Dann folgt $u \leq 0$ auf $M \times [0, S)$.

Bemerkung 9.2. In [34] wird weniger Regularität angenommen, beispielsweise braucht dort $u : M \times (0, S) \to \mathbf{R}$ nur $C^{2,1}$ zu sein; obige Regularitätsforderungen können auch entsprechend abgeschwächt werden.

Beweis. Der Beweis geht im Wesentlichen genauso wie der Beweis des Maximumprinzips in [34] ohne den c-Term in der Evolutionsungleichung. Multiplizieren wir die Evolutionsungleichung mit u_+, erhalten wir

$$u_+ \frac{d}{dt} u \leq u_+ \Delta u + u_+ \langle a, \operatorname{grad} u\rangle + u_+ bu + u_+ c \leq u_+ \Delta u + u_+ \langle a, \operatorname{grad} u\rangle + u_+ bu$$

denn wenn $u(x, t) > 0$ ist, folgt $c(x, t) \leq 0$ nach Voraussetzung, und wenn $u(x, t) \leq 0$ gilt, folgt $u_+(x, t) = 0$. Das ist die eine Stelle, wo im Beweis aus [34] die Evolutionsungleichung benutzt wird. Die andere Stelle ist der induktive Schritt ganz am Ende des Beweises: Dort erhält man zunächst $u_+(x, t) = 0$ für alle $x \in M, 0 \leq t < \min(\eta, S)$ mit $\eta :=$

$\min(\frac{1}{8\lambda e^{\alpha_3 S}}, \frac{\log\frac{9}{8}}{\alpha_3})$. Angenommen, $0 < \eta < S$. Da u_+ stetig ist, folgt $u_+(x,t) = 0$ für alle $x \in M, 0 \leq t \leq \min(\eta, S)$. Definiere dann

$$\begin{aligned}
&\widetilde{h}(t) := h(t+\eta), \widetilde{u}(x,t) := u(x,t+\eta), \widetilde{a}(x,t) := a(x,t+\eta),\\
&\widetilde{b}(x,t) := b(x,t+\eta), \widetilde{c}(x,t) := c(x,t+\eta)
\end{aligned}$$

für $x \in M, 0 \leq t < S - \eta$. Es gilt $\widetilde{c}(x,t) = c(x,t+\eta) \leq 0$, falls $\widetilde{u}(x,t) = u(x,t+\eta) > 0$! Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\widetilde{u}(x,t) = \frac{d}{dt}u(x,t+\eta)\\
&\leq \Delta_{h(t+\eta)}u(x,t+\eta) + \langle a, \operatorname{grad} u\rangle_h(x,t+\eta) + (bu)(x,t+\eta) + c(x,t+\eta)\\
&= \Delta_{\widetilde{h}(t)}\widetilde{u}(x,t) + \langle \widetilde{a}, \operatorname{grad} \widetilde{u}\rangle_{\widetilde{h}}(x,t) + (\widetilde{b}\widetilde{u})(x,t) + \widetilde{c}(x,t)
\end{aligned}$$

Da also wieder alle Voraussetzungen erfüllt sind, erhält man $\widetilde{u}_+ = 0$ für alle $x \in M, 0 \leq t < \min(\eta', S - \eta)$ mit

$$\eta' := \min(\frac{1}{8\lambda e^{\alpha_3(S-\eta)}}, \frac{\log\frac{9}{8}}{\alpha_3}) \geq \eta$$

insgesamt $u_+(x,t) = 0$ für alle $x \in M, 0 \leq t < \min(2\eta, S)$. Fährt man so fort (beachte, dass wegen der Verkürzung des Zeitintervalls immer $\eta' \geq \eta$ gilt), erhält man $u_+ = 0$ auf $M \times [0, S)$. Ansonsten geht der Beweis in [34] unverändert durch. □

Sei nun (N, g_N) eine flache, vollständige, zusammenhängende C^∞ Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Sei $h \in B(\mathbf{R} \times N)$ mit $h = f_0^2 dx^2 + g_0^2 g_N$ und $f_0, g_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv und sei $h(t) = f^2(\cdot,t)dx^2 + g^2(\cdot,t)g_N, t \in [0,T)$ mit $f, g : \mathbf{R} \times [0,T) \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv und mit $f(\cdot,0) = f_0, g(\cdot,0) = g_0$ die maximale Lösung des Ricci Flusses in $BK(\mathbf{R} \times N)$ mit $h(0) = h$ (siehe Definition 7.6 und Satz 8.3).
Das Maximumprinzip sieht für $M = \mathbf{R}$ mit zeitabhängiger Metrik $f^2(\cdot,t)dx^2, t \in [0,S)$ und $0 < S < T$ fest aber beliebig folgendermaßen aus:

Theorem 9.3. *Sei u eine stetige Funktion auf $\mathbf{R} \times [0,S)$, die auf $\mathbf{R} \times (0,S)$ C^∞ ist. Bezeichne mit d_t die von der Riemannschen Metrik $f^2(\cdot,t)dx^2$ induzierte Metrik auf $\mathbf{R}$. Angenommen, es gelten*

(i) $\frac{d}{dt}u \leq u_{ss} + au_s + bu + c$ *auf* $\mathbf{R} \times (0,S)$, *wobei* $a, b, c : \mathbf{R} \times [0,S) \to \mathbf{R}$ C^∞ *zeitabhängige Funktionen sind mit* $|a| \leq \alpha_1 < \infty$ *und* $|b| \leq \alpha_0 < \infty$, *und* $c(x,t) \leq 0$, *falls* $u(x,t) > 0$ *für alle* $x \in \mathbf{R}, t \in [0,S)$.

(ii) $u(x,0) \leq 0$ *für alle* $x \in \mathbf{R}$

(iii) $\int_0^S (\int_{\mathbf{R}} e^{-\lambda^2 d_t^2(x,y)} u_+^2(x,t) f(x,t) dx) dt < \infty$ *für ein* $y \in \mathbf{R}$ *und ein* $\lambda > 0$

Dann gilt $u \leq 0$ auf $\boldsymbol{R} \times [0, S)$.

Bemerkungen 9.4. • Aus der Vollständigkeit von $h(t)$ folgt, dass $(\mathbf{R}, f^2(\cdot, t)dx^2)$ isometrisch zu $(\mathbf{R}, dz^2)$ und damit vollständig ist (siehe Satz 4.14, Korollar 4.15).

- Zu (i): Ist a ein zeitabhängiges Vektorfeld auf $\mathbf{R}$, so gibt es genau eine zeitabhängige Funktion $\widetilde{a}$ auf $\mathbf{R}$ mit $a = \widetilde{a}\frac{\partial}{\partial s}$. Wegen $|\frac{\partial}{\partial s}| = 1$ folgt $|a| = |\widetilde{a}\frac{\partial}{\partial s}| = |\widetilde{a}|$. Außerdem gilt $f^2dx^2(a, \operatorname{grad} u) = f^2dx^2(\widetilde{a}\frac{\partial}{\partial s}, u_s\frac{\partial}{\partial s}) = \widetilde{a}u_s$. Im obigen Theorem haben wir die Funktion $\widetilde{a}$ wieder mit a bezeichnet.

- Zu (iii): Bedingung (iii) ist erfüllt, falls $u_+^2 \leq C$ für ein $C > 0$ gilt: Es folgt dann nämlich

  $$\int_{\mathbf{R}} e^{-\alpha^2 d_t^2(x,y)} u_+^2(x,t) f(x,t)dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 s_y^2(x,t)} f(x,t)dx = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 z^2} dz$$

  wegen $d_t^2(x, y) = s_y^2(x, t)$ und weil $s_y(\cdot, t)$ eine Stammfunktion von $f(\cdot, t)$ ist (siehe Kapitel 4). Folglich gilt

  $$\int_0^S \int_{\mathbf{R}} e^{-\alpha^2 d_t^2(x,y)} u_+^2(x,t)d\mu_t(x))dt \leq CS \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 z^2} dz < \infty$$

- Unter Verwendung der Identität als Karte von $\mathbf{R}$ gilt (mit $g_{11}(\cdot, t) := (f^2(\cdot, t)dx^2)(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1}) = f^2(\cdot, t))$

  $$\begin{aligned} |\frac{d}{dt}(f^2(\cdot, t)dx^2)|^2 &= g^{ai}g^{bj}\frac{d}{dt}g_{ab}\frac{d}{dt}g_{ij} = \frac{1}{f^4}(2ff_t)^2 \\ &= 4n(\frac{g_{ss}}{g})^2 = 4n|K_H|^2 \leq 4n|\operatorname{Rm}|^2 \leq C \end{aligned}$$

  wegen $|\frac{g_{ss}}{g}| = |K_H| \leq |\operatorname{Rm}|$ auf $\mathbf{R} \times [0, S)$ (siehe Korollar 5.11). Somit ist Bedingung (iv) aus dem Maximumprinzip von Hsu bei uns stets erfüllt (siehe Satz B.8).

10 Evolutionsgleichungen, Krümmungsabschätzungen, Reskalieren und Kollaps

Sei in diesem Kapitel (N, g_N) eine flache, vollständige, zusammenhängende C^∞ Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Sei $M := \mathbf{R} \times N$. Sei $h \in B(\mathbf{R} \times N)$ mit $h = f_0^2 dx^2 + g_0^2 g_N$ und $f_0, g_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv und sei $h(t) = f^2(\cdot, t)dx^2 + g^2(\cdot, t)g_N, t \in [0, T)$ mit $f, g : \mathbf{R} \times [0, T) \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv und mit $f(\cdot, 0) = f_0, g(\cdot, 0) = g_0$ die maximale Lösung des Ricci Flusses in $BK(\mathbf{R} \times N)$ mit $h(0) = h$ (siehe Definition 7.6 und Satz 8.3).

Wir zeigen in diesem Kapitel zuerst, dass die maximale Lösung $h(t)$ für alle positiven Zeiten existiert (Langzeitexistenz: $T = \infty$) und anschließend die Abschätzung des Riemannschen Krümmungstensors $|\operatorname{Rm}| \leq \frac{C}{t+a}$ für ein $C > 0, a > 0$ geeignet und für alle $t \in [0, \infty)$; insbesondere ist die Lösung vom Typ III, d. h. es gilt $|\operatorname{Rm}| \leq \frac{C}{t}$ für ein $C > 0$ und für alle $0 < t < \infty$. Wegen $|\operatorname{Rm}|^2 = a(n)K_V^2 + b(n)K_H^2$ (Satz 5.10) reicht es dafür, $|K_V| \leq \frac{C}{t+a}$ und $|K_H| \leq \frac{C'}{t+a}$ für $C, C', a > 0$ geeignet und für alle $t \in [0, \infty)$ zu zeigen. Für den Beweis benutzen wir $K_V(x, q, t) = \hat{K_V}(x, t)$ und $K_H(x, q, t) = \hat{K_H}(x, t)$ mit $\hat{K_V}(x, t) = -\frac{g_s^2}{g^2}(x, t)$ und $\hat{K_H}(x, t) = -\frac{g_{ss}}{g}(x, t)$ für alle $x \in \mathbf{R}, q \in N, t \in [0, T)$ (siehe Definition 5.4), berechnen Evolutionsgleichungen für $\frac{g_s^2}{g^2}$ und $\frac{g_{ss}}{g}$ und geeignete andere geometrische Größen und zeigen Langzeitexistenz und die gewünschten Abschätzungen mittels des Maximumprinzips von Hsu mit Erweiterung 9.3.

Unter der Zusatzannahme $\sup_{x \in \mathbf{R}} g_0(x) < \infty$ zeigen wir des Weiteren, dass wenn man die Lösung so reskaliert, dass eine feste Faser $\{y\} \times N$ für alle Zeiten isometrisch zu (N, g_N) ist, die reskalierte Metrik, welche wir mit $\overline{h}(t)$ bezeichnen, eingeschränkt auf $\{(x, q) \in \mathbf{R} \times N | d_{\overline{h}(t)}((x, q), \{y\} \times N) \leq r\}$ ($d_{\overline{h}(t)}((x, q), \{y\} \times N)$ ist definitionsgemäß der Abstand des Punktes (x, q) zur Menge $\{y\} \times N$, gemessen in der durch $\overline{h}(t)$ induzierten Metrik $d_{\overline{h}(t)}$) für jedes feste $r > 0$ gegen einen flachen Zylinder $[-r, r] \times N$ mit Metrik $dz^2 + g_N$ konvergiert, wobei dz^2 die Standardmetrik auf $\mathbf{R}$ bezeichnet.

Ferner zeigen wir, dass unter den Zusatzvoraussetzungen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g_0(x) = 0$ und dass $(\mathbf{R} \times N, h(0))$ endliches Volumen hat, $g \to 0$ $(t \to \infty)$ gleichmäßig gilt. Falls außerdem (N, g_N) homogen ist, erhalten wir daraus, dass die Lösung kollabiert, d. h. dass der Injektivitätsradius gleichmäßig gegen 0 konvergiert, während die Krümmungen beschränkt bleiben. Das Gleiche zeigen wir für den normalisierten Ricci Fluss.

Satz 10.1. *Es gelten die folgenden Evolutionsgleichungen für geometrische Größen (mit $n := \dim N$):*

$$f_t = n\frac{g_{ss}}{g}f$$

$$g_t = g_{ss} + (n-1)\frac{g_s^2}{g}$$

$$(g^n)_t = (g^n)_{ss}$$

$$g_{st} = g_{sss} + (n-2)\frac{g_s g_{ss}}{g} - (n-1)\frac{g_s^3}{g^2}$$

$$(\frac{g_s}{g})_t = (\frac{g_s}{g})_{ss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s}{g})_s - n\frac{g_s^3}{g^3}$$

$$(\frac{g_s^2}{g^2})_t = (\frac{g_s^2}{g^2})_{ss} - 2((\frac{g_s}{g})_s)^2 + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s^2}{g^2})_s - 2n\frac{g_s^4}{g^4}$$

$$g_{sst} = g_{ssss} + (n-2)\frac{g_s g_{sss}}{g} - 2\frac{g_{ss}^2}{g} - (4n-5)\frac{g_s^2 g_{ss}}{g^2} + 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^3}$$

$$(\frac{g_{ss}}{g})_t = (\frac{g_{ss}}{g})_{ss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_{ss}}{g})_s - 4(n-1)\frac{g_s^2}{g^2}\frac{g_{ss}}{g} - 2\frac{g_{ss}^2}{g^2} + 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^4}$$

$$((\frac{g_{ss}}{g})^2)_t = ((\frac{g_{ss}}{g})^2)_{ss} - 2((\frac{g_{ss}}{g})_s)^2 + n\frac{g_s}{g}((\frac{g_{ss}}{g})^2)_s - 8(n-1)\frac{g_s^2}{g^2}\frac{g_{ss}^2}{g^2} - 4\frac{g_{ss}^3}{g^3} + 4(n-1)\frac{g_{ss}}{g}\frac{g_s^4}{g^4}$$

$$(\frac{g_s}{g})_{st} = (\frac{g_s}{g})_{sss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s}{g})_{ss} - 4n\frac{g_s^2}{g^2}(\frac{g_s}{g})_s$$

$$(((\frac{g_s}{g})_s)^2)_t = (((\frac{g_s}{g})_s)^2)_{ss} - 2((\frac{g_s}{g})_{ss})^2 + n\frac{g_s}{g}(((\frac{g_s}{g})_s)^2)_s - 8n\frac{g_s^2}{g^2}((\frac{g_s}{g})_s)^2$$

$$u := \frac{g_{ss}^2}{g^2}(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a))$$

$mit\ a > 0, \Lambda_0 > 0$

$$\begin{aligned}
u_t = {} & u_{ss} + n\frac{g_s}{g}u_s - 2(\frac{g_s^2}{g^2})_s(\frac{g_{ss}^2}{g^2})_s(t+a)^3 + \\
& + (-2((\frac{g_{ss}}{g})_s)^2 - 8(n-1)\frac{g_s^2}{g^2}\frac{g_{ss}^2}{g^2} - 4\frac{g_{ss}^3}{g^3} + 4(n-1)\frac{g_{ss}}{g}\frac{g_s^4}{g^4})(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) + \\
& + 2(t+a)\frac{g_{ss}^2}{g^2}(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) + \\
& + \frac{g_{ss}^2}{g^2}(t+a)^3(-2((\frac{g_s}{g})_s)^2 - 2n\frac{g_s^4}{g^4}) + \frac{g_{ss}^2}{g^2}\frac{g_s^2}{g^2}(t+a)^2
\end{aligned}$$

Bemerkung 10.2. In [30], Section 11 und [4] wurden dieselben bzw. ähnliche Evolutionsgleichungen hergeleitet.

Beweis. Die Gleichungen für f und g sowie der Kommutator $u_{st} = u_{ts} - n\frac{g_{ss}}{g}u_s$ für eine C^∞ Funktion $u : \mathbf{R}\times[0,T) \to \mathbf{R}$ wurden schon berechnet (siehe die Gleichungen (5) und (6) in Kapitel 8). Die Beweisidee ist bei allen Gleichungen dieselbe: Sei u die betrachtete Größe. Man berechnet zuerst u_t, dann u_s und u_{ss}. Dann bringt man den Ausdruck für u_t in die Form $u_t = u_{ss} + au_s + bu + c$ mit $a, b, c : \mathbf{R} \times [0, T) \to \mathbf{R}$ geeignet.
Es gilt

$$(g^n)_t = ng^{n-1}g_t = ng^{n-1}(g_{ss} + (n-1)\frac{g_s^2}{g})$$

$$(g^n)_s = ng^{n-1}g_s$$

$$(g^n)_{ss} = n(n-1)g^{n-2}g_s^2 + ng^{n-1}g_{ss}$$

$$\Rightarrow (g^n)_t = (g^n)_{ss} - n(n-1)g^{n-2}g_s^2 - ng^{n-1}g_{ss} + ng^{n-1}(g_{ss} + (n-1)\frac{g_s^2}{g}) = (g^n)_{ss}$$

$$\begin{aligned}
g_{st} &= g_{ts} - n\frac{g_{ss}}{g}g_s \\
&= (g_{ss} + (n-1)\frac{g_s^2}{g})_s - n\frac{g_{ss}g_s}{g} \\
&= g_{sss} + (n-1)(\frac{2g_sg_{ss}}{g} - \frac{g_s^3}{g^2}) - n\frac{g_{ss}g_s}{g} \\
&= g_{sss} + (n-2)\frac{g_{ss}g_s}{g} - (n-1)\frac{g_s^3}{g^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\frac{g_s}{g})_t &= \frac{g_{st}}{g} - \frac{g_sg_t}{g^2} \\
&= \frac{g_{sss}}{g} + (n-2)\frac{g_{ss}g_s}{g^2} - (n-1)\frac{g_s^3}{g^3} - \frac{g_s}{g^2}(g_{ss} + (n-1)\frac{g_s^2}{g}) \\
&= \frac{g_{sss}}{g} + (n-2)\frac{g_{ss}g_s}{g^2} - (n-1)\frac{g_s^3}{g^3} - \frac{g_sg_{ss}}{g^2} - (n-1)\frac{g_s^3}{g^3} \\
&= \frac{g_{sss}}{g} + (n-3)\frac{g_{ss}g_s}{g^2} - 2(n-1)\frac{g_s^3}{g^3}
\end{aligned}$$

$$(\frac{g_s}{g})_s = \frac{g_{ss}}{g} - \frac{g_s^2}{g^2}$$

$$(\frac{g_s}{g})_{ss} = \frac{g_{sss}}{g} - \frac{g_{ss}g_s}{g^2} - 2\frac{g_s}{g}(\frac{g_{ss}}{g} - \frac{g_s^2}{g^2}) = \frac{g_{sss}}{g} - 3\frac{g_{ss}g_s}{g^2} + 2\frac{g_s^3}{g^3}$$

$$
\begin{aligned}
(\frac{g_s}{g})_t &= (\frac{g_s}{g})_{ss} - \frac{g_{sss}}{g} + 3\frac{g_{ss}g_s}{g^2} - 2\frac{g_s^3}{g^3} + \frac{g_{sss}}{g} + (n-3)\frac{g_{ss}g_s}{g^2} - 2(n-1)\frac{g_s^3}{g^3} \\
&= (\frac{g_s}{g})_{ss} + n\frac{g_{ss}g_s}{g^2} - 2n\frac{g_s^3}{g^3} \\
&= (\frac{g_s}{g})_{ss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_{ss}}{g} - \frac{g_s^2}{g^2}) + n\frac{g_s^3}{g^3} - 2n\frac{g_s^3}{g^3} \\
&= (\frac{g_s}{g})_{ss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s}{g})_s - n\frac{g_s^3}{g^3}
\end{aligned}
$$

$$
(\frac{g_s^2}{g^2})_t = 2\frac{g_s}{g}((\frac{g_s}{g})_{ss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s}{g})_s - n\frac{g_s^3}{g^3})
$$

$$
(\frac{g_s^2}{g^2})_s = 2\frac{g_s}{g}(\frac{g_s}{g})_s
$$

$$
(\frac{g_s^2}{g^2})_{ss} = 2((\frac{g_s}{g})_s)^2 + 2\frac{g_s}{g}(\frac{g_s}{g})_{ss}
$$

$$
(\frac{g_s^2}{g^2})_t = (\frac{g_s^2}{g^2})_{ss} - 2((\frac{g_s}{g})_s)^2 + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s^2}{g^2})_s - 2n\frac{g_s^4}{g^4}
$$

$$
\begin{aligned}
(\frac{g_s}{g})_{st} &= (\frac{g_s}{g})_{ts} - n\frac{g_{ss}}{g}(\frac{g_s}{g})_s \\
&= ((\frac{g_s}{g})_{ss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s}{g})_s - n\frac{g_s^3}{g^3})_s - n\frac{g_{ss}}{g}(\frac{g_s}{g})_s \\
&= (\frac{g_s}{g})_{sss} + n(\frac{g_{ss}}{g} - \frac{g_s^2}{g^2})(\frac{g_s}{g})_s + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s}{g})_{ss} - 3n\frac{g_s^2}{g^2}(\frac{g_s}{g})_s - n\frac{g_{ss}}{g}(\frac{g_s}{g})_s \\
&= (\frac{g_s}{g})_{sss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s}{g})_{ss} - 4n\frac{g_s^2}{g^2}(\frac{g_s}{g})_s
\end{aligned}
$$

$$
(((\frac{g_s}{g})_s)^2)_t = 2(\frac{g_s}{g})_s(\frac{g_s}{g})_{st} = 2(\frac{g_s}{g})_s((\frac{g_s}{g})_{sss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s}{g})_{ss} - 4n\frac{g_s^2}{g^2}(\frac{g_s}{g})_s)
$$

$$
(((\frac{g_s}{g})_s)^2)_s = 2(\frac{g_s}{g})_s(\frac{g_s}{g})_{ss}
$$

$$
(((\frac{g_s}{g})_s)^2)_{ss} = 2((\frac{g_s}{g})_{ss})^2 + 2(\frac{g_s}{g})_s(\frac{g_s}{g})_{sss}
$$

$$
(((\frac{g_s}{g})_s)^2)_t = (((\frac{g_s}{g})_s)^2)_{ss} - 2((\frac{g_s}{g})_{ss})^2 + n\frac{g_s}{g}(((\frac{g_s}{g})_s)^2)_s - 8n\frac{g_s^2}{g^2}((\frac{g_s}{g})_s)^2
$$

$$
\begin{aligned}
g_{sst} &= g_{sts} - n\frac{g_{ss}}{g}g_{ss} \\
&= (g_{sss} + (n-2)\frac{g_{ss}g_s}{g} - (n-1)\frac{g_s^3}{g^2})_s - n\frac{g_{ss}^2}{g} \\
&= g_{ssss} + (n-2)(\frac{g_{sss}g_s + g_{ss}^2}{g} - \frac{g_{ss}g_s^2}{g^2}) - (n-1)(\frac{3g_s^2 g_{ss}}{g^2} - \frac{g_s^3 2gg_s}{g^4}) - n\frac{g_{ss}^2}{g} \\
&= g_{ssss} + (n-2)\frac{g_{sss}g_s}{g} + (n-2)\frac{g_{ss}^2}{g} - (n-2)\frac{g_{ss}g_s^2}{g^2} - 3(n-1)\frac{g_s^2 g_{ss}}{g^2} + \\
&+ 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^3} - n\frac{g_{ss}^2}{g} \\
&= g_{ssss} + (n-2)\frac{g_s}{g}g_{sss} - 2\frac{g_{ss}^2}{g} - (4n-5)\frac{g_{ss}g_s^2}{g^2} + 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\frac{g_{ss}}{g})_t &= \frac{g_{sst}}{g} - \frac{g_{ss}g_t}{g^2} \\
&= \frac{g_{ssss}}{g} + (n-2)\frac{g_{sss}g_s}{g^2} - 2\frac{g_{ss}^2}{g^2} - (4n-5)\frac{g_{ss}g_s^2}{g^3} + \\
&+ 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^4} - \frac{g_{ss}}{g^2}(g_{ss} + (n-1)\frac{g_s^2}{g}) \\
&= \frac{g_{ssss}}{g} + (n-2)\frac{g_{sss}g_s}{g^2} - 3\frac{g_{ss}^2}{g^2} - (5n-6)\frac{g_{ss}g_s^2}{g^3} + 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^4}
\end{aligned}
$$

$$
(\frac{g_{ss}}{g})_s = \frac{g_{sss}}{g} - \frac{g_{ss}g_s}{g^2}
$$

$$
\begin{aligned}
(\frac{g_{ss}}{g})_{ss} &= \frac{g_{ssss}}{g} - \frac{g_{sss}g_s}{g^2} - (\frac{g_{sss}g_s + g_{ss}^2}{g^2} - \frac{2g_{ss}g_s^2}{g^3}) \\
&= \frac{g_{ssss}}{g} - 2\frac{g_{sss}g_s}{g^2} - \frac{g_{ss}^2}{g^2} + \frac{2g_{ss}g_s^2}{g^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\frac{g_{ss}}{g})_t &= (\frac{g_{ss}}{g})_{ss} - \frac{g_{ssss}}{g} + 2\frac{g_{sss}g_s}{g^2} + \frac{g_{ss}^2}{g^2} - \frac{2g_{ss}g_s^2}{g^3} + \\
&+ \frac{g_{ssss}}{g} + (n-2)\frac{g_{sss}g_s}{g^2} - 3\frac{g_{ss}^2}{g^2} - (5n-6)\frac{g_{ss}g_s^2}{g^3} + 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^4} \\
&= (\frac{g_{ss}}{g})_{ss} + n\frac{g_{sss}g_s}{g^2} - 2\frac{g_{ss}^2}{g^2} - (5n-4)\frac{g_{ss}g_s^2}{g^3} + 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^4} \\
&= (\frac{g_{ss}}{g})_{ss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_{sss}}{g} - \frac{g_{ss}g_s}{g^2}) + n\frac{g_{ss}g_s^2}{g^3} - 2\frac{g_{ss}^2}{g^2} - (5n-4)\frac{g_{ss}g_s^2}{g^3} + 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^4} \\
&= (\frac{g_{ss}}{g})_{ss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_{ss}}{g})_s - (4n-4)\frac{g_{ss}g_s^2}{g^3} - 2\frac{g_{ss}^2}{g^2} + 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^4} \\
&= (\frac{g_{ss}}{g})_{ss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_{ss}}{g})_s - 4(n-1)\frac{g_s^2}{g^2}\frac{g_{ss}}{g} - 2\frac{g_{ss}^2}{g^2} + 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&((\frac{g_{ss}}{g})^2)_t \\
&= 2\frac{g_{ss}}{g}((\frac{g_{ss}}{g})_{ss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_{ss}}{g})_s - 4(n-1)\frac{g_s^2}{g^2}\frac{g_{ss}}{g} - 2\frac{g_{ss}^2}{g^2} + 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^4})
\end{aligned}
$$

$$((\frac{g_{ss}}{g})^2)_s = 2\frac{g_{ss}}{g}(\frac{g_{ss}}{g})_s$$

$$((\frac{g_{ss}}{g})^2)_{ss} = 2((\frac{g_{ss}}{g})_s)^2 + 2\frac{g_{ss}}{g}(\frac{g_{ss}}{g})_{ss}$$

$$
\begin{aligned}
&((\frac{g_{ss}}{g})^2)_t \\
&= ((\frac{g_{ss}}{g})^2)_{ss} - 2((\frac{g_{ss}}{g})_s)^2 + n\frac{g_s}{g}((\frac{g_{ss}}{g})^2)_s - 8(n-1)\frac{g_s^2}{g^2}\frac{g_{ss}^2}{g^2} - 4\frac{g_{ss}^3}{g^3} + 4(n-1)\frac{g_{ss}}{g}\frac{g_s^4}{g^4}
\end{aligned}
$$

$$u := \frac{g_{ss}^2}{g^2}(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a))$$

mit $a > 0, \Lambda_0 > 0$

$$
\begin{aligned}
u_t = &((\frac{g_{ss}^2}{g^2})_{ss} - 2((\frac{g_{ss}}{g})_s)^2 + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_{ss}^2}{g^2})_s - 8(n-1)\frac{g_s^2}{g^2}\frac{g_{ss}^2}{g^2} - 4\frac{g_{ss}^3}{g^3} + 4(n-1)\frac{g_{ss}}{g}\frac{g_s^4}{g^4})\times \\
&\times (t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a))+ \\
&+ \frac{g_{ss}^2}{g^2}2(t+a)(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a))+ \\
&+ \frac{g_{ss}^2}{g^2}(t+a)^3((\frac{g_s^2}{g^2})_{ss} - 2((\frac{g_s}{g})_s)^2 + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s^2}{g^2})_s - 2n\frac{g_s^4}{g^4})+ \\
&+ \frac{g_{ss}^2}{g^2}\frac{g_s^2}{g^2}(t+a)^2
\end{aligned}
$$

$$
u_s = (\frac{g_{ss}^2}{g^2})_s(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) + \frac{g_{ss}^2}{g^2}(t+a)^3(\frac{g_s^2}{g^2})_s
$$

$$
u_{ss} = (\frac{g_{ss}^2}{g^2})_{ss}(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) + 2(\frac{g_{ss}^2}{g^2})_s(t+a)^3(\frac{g_s^2}{g^2})_s + \frac{g_{ss}^2}{g^2}(t+a)^3(\frac{g_s^2}{g^2})_{ss}
$$

$$
\begin{aligned}
u_t = &u_{ss} + n\frac{g_s}{g}u_s - 2(\frac{g_s^2}{g^2})_s(\frac{g_{ss}^2}{g^2})_s(t+a)^3+ \\
&+ (-2((\frac{g_{ss}}{g})_s)^2 - 8(n-1)\frac{g_s^2}{g^2}\frac{g_{ss}^2}{g^2} - 4\frac{g_{ss}^3}{g^3} + 4(n-1)\frac{g_{ss}}{g}\frac{g_s^4}{g^4})(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a))+ \\
&+ 2(t+a)\frac{g_{ss}^2}{g^2}(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a))+ \\
&+ \frac{g_{ss}^2}{g^2}(t+a)^3(-2((\frac{g_s}{g})_s)^2 - 2n\frac{g_s^4}{g^4}) + \frac{g_{ss}^2}{g^2}\frac{g_s^2}{g^2}(t+a)^2
\end{aligned}
$$

□

Satz 10.3. *Gilt* $\frac{g_s^2}{g^2}(x,0) \le C$ *für alle* $x \in \boldsymbol{R}$, *so folgt* $\frac{g_s^2}{g^2}(x,t) \le C$ *für alle* $x \in \boldsymbol{R}, t \in [0,T)$.

Beweis. Wir wenden das Maximumprinzip Theorem 9.3 auf $u := \frac{g_s^2}{g^2} - C$ auf dem Zeitintervall $[0,S)$ an, wobei $0 < S < T$ fest aber beliebig ist. Die Anfangsbedingung (ii) ist offenbar erfüllt. Die Evolutionsungleichung (i) ist erfüllt wegen

$$\begin{aligned}
u_t = (\frac{g_s^2}{g^2})_t &\leq (\frac{g_s^2}{g^2})_{ss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s^2}{g^2})_s - 2n\frac{g_s^4}{g^4} \\
&\leq (\frac{g_s^2}{g^2})_{ss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s^2}{g^2})_s \\
&= (\frac{g_s^2}{g^2} - C)_{ss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s^2}{g^2} - C)_s \\
&= u_{ss} + n\frac{g_s}{g}u_s
\end{aligned}$$

mit $a := n\frac{g_s}{g}$. Dabei ist $a^2 = n^2|K_V|$ und somit auch a auf $\mathbf{R} \times [0, S)$ beschränkt (wegen Korollar 5.11). Da $|\frac{g_s^2}{g^2}| = |K_V|$ auf $\mathbf{R} \times [0, S)$ beschränkt ist, ist es auch u_+^2, d. h. nach Bemerkung 9.4 ist die Integralbedingung (iii) erfüllt. Dass alle Größen C^∞ sind, folgt aus Satz 8.3. Das Maximumprinzip lässt sich also anwenden und liefert $u \leq 0$ auf $\mathbf{R} \times [0, S)$. Da $0 < S < T$ beliebig war, folgt $u \leq 0$ auf $\mathbf{R} \times [0, T)$ und damit die Behauptung. $\square$

Satz 10.4. *Gilt* $((\frac{g_s}{g})_s)^2(x, 0) \leq C$ *für alle* $x \in \boldsymbol{R}$, *so folgt* $((\frac{g_s}{g})_s)^2(x, t) \leq C$ *für alle* $x \in \boldsymbol{R}, t \in [0, T)$.

Beweis. Wir wenden das Maximumprinzip 9.3 auf $u := ((\frac{g_s}{g})_s)^2 - C$ auf dem Zeitintervall $[0, S)$ an, wobei $0 < S < T$ fest aber beliebig ist. Beachte, dass

$$((\frac{g_s}{g})_s)^2 = (\frac{g_{ss}}{g} - \frac{g_s^2}{g^2})^2 = (K_V - K_H)^2$$

das Quadrat der Differenz der (Haupt)schnittkrümmungen ist. Somit ist u_+^2 auf $\mathbf{R} \times [0, S)$ beschränkt. Somit ist Bedingung (iii) erfüllt. Ebenfalls ist offenbar (ii) erfüllt. Es bleibt also nur die Evolutionsungleichung zu zeigen. Diese gilt wegen

$$\begin{aligned}
u_t &= (((\frac{g_s}{g})_s)^2)_t \leq (((\frac{g_s}{g})_s)^2)_{ss} + n\frac{g_s}{g}(((\frac{g_s}{g})_s)^2)_s - 8n\frac{g_s^2}{g^2}((\frac{g_s}{g})_s)^2 \\
&\leq (((\frac{g_s}{g})_s)^2)_{ss} + n\frac{g_s}{g}(((\frac{g_s}{g})_s)^2)_s = (((\frac{g_s}{g})_s)^2 - C)_{ss} + n\frac{g_s}{g}(((\frac{g_s}{g})_s)^2 - C)_s \\
&= u_{ss} + n\frac{g_s}{g}u_s
\end{aligned}$$

mit $a := n\frac{g_s}{g}$. Das Maximumprinzip lässt sich also anwenden und liefert $u \leq 0$ auf $\mathbf{R} \times [0, S)$. Da $0 < S < T$ beliebig war, folgt $u \leq 0$ auf $\mathbf{R} \times [0, T)$. $\square$

Korollar 10.5. $\sup\limits_{\boldsymbol{R} \times [0,T)} |\operatorname{Rm}| < \infty$ *und damit* $T = \infty$.

Beweis. Nach Korollar 5.31 hängt $|\operatorname{Rm}|$ nur von x (und t) ab. Wegen $\sup_{x\in\mathbf{R}}|\operatorname{Rm}|(x,0) < \infty$ sind die Voraussetzungen der Sätze 10.3 und 10.4 erfüllt für ein $C > 0$ groß genug (siehe Korollar 5.11 und die Tatsache $((\frac{g_s}{g})_s)^2 = (K_V - K_H)^2$). Deswegen folgt aus eben den Sätzen 10.3 und 10.4

$$|\frac{g_{ss}}{g}| \leq |(\frac{g_s}{g})_s| + \frac{g_s^2}{g^2} \leq C_1$$

für ein $0 < C_1 < \infty$ auf ganz $\mathbf{R} \times [0,T)$. Wegen der Sätze 10.3 und 5.10 folgt daraus, dass $|\operatorname{Rm}|$ auf $\mathbf{R} \times [0,T)$ beschränkt ist. Nach Korollar 7.16 liefert das aber $T = \infty$, d. h. die Lösung existiert für alle (positiven) Zeiten! $\square$

Satz 10.6. *Es gilt* $\sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{g_s^2}{g^2}(x,t) \leq \frac{1}{2nt+\frac{1}{\sup_{x\in\mathbf{R}}\frac{g_s^2}{g^2}(x,0)}} = \frac{C}{t+a}$ *für alle* $t \in [0,\infty)$ *mit* $C := \frac{1}{2n}$ *und* $a := \frac{1}{2n\sup_{x\in\mathbf{R}}\frac{g_s^2}{g^2}(x,0)}$.

Bemerkung 10.7. Diese Abschätzung ist scharf: Im Fall $f(x,0) = 1$ und $g(x,0) = e^{kx}$ ($k \neq 0$) für alle $x \in \mathbf{R}$ ist $\mathbf{R} \times N$ hyperbolisch (alle Schnittkrümmungen $= -k^2 < 0$, das folgt aus $K_V = -\frac{g_s^2}{g^2}$, $K_H = -\frac{g_{ss}}{g}$, $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}$ (wegen $f(x,0) = 1\ \forall x$) und Satz 5.9), man hat also eine "globale hyperbolische cusp". In diesem Fall gilt $K_V(x,t) = -\frac{1}{2nt+\frac{1}{k^2}}$ für alle $x \in \mathbf{R}, t \in [0,\infty)$. Das sieht man folgendermaßen (die folgende Darstellung stammt aus [53]): Hat die m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g_0) konstante Krümmung $K_0 \in \mathbf{R}$, so folgt $\operatorname{Ric}_{g_0} = (m-1)K_0 g_0$, d. h. (M, g_0) ist eine Einstein Mannigfaltigkeit mit Einstein Konstante $(m-1)K_0$. Dann ist $g(t) := (1 - 2(m-1)K_0 t)g_0$ eine Lösung des Ricci Flusses. $g(t)$ hat ebenfalls konstante Krümmung

$$K(t) = \frac{K_0}{1 - 2(m-1)K_0 t} = -\frac{1}{2(m-1)t - \frac{1}{K_0}}$$

Die Anwendung dieses allgemeinen Resultats auf unsere warped product Mannigfaltigkeit liefert die Behauptung.

Beweis. Sei $u := \frac{g_s^2}{g^2}(t+a)$, wobei $a > 0$ später gewählt wird. Es gilt

$$u_s = (\frac{g_s^2}{g^2})_s(t+a), u_{ss} = (\frac{g_s^2}{g^2})_{ss}(t+a)$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
u_t &= (\frac{g_s^2}{g^2})_t(t+a) + \frac{g_s^2}{g^2} \\
&\le ((\frac{g_s^2}{g^2})_{ss} + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s^2}{g^2})_s - 2n\frac{g_s^4}{g^4})(t+a) + \frac{g_s^2}{g^2} \\
&= u_{ss} + n\frac{g_s}{g}u_s - 2n\frac{g_s^4}{g^4}(t+a) + \frac{g_s^2}{g^2} \\
&= u_{ss} + n\frac{g_s}{g}u_s + c
\end{aligned}$$

mit $c := -2n\frac{g_s^4}{g^4}(t+a) + \frac{g_s^2}{g^2} = \frac{g_s^2}{g^2}(1 - 2n\frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) = \frac{g_s^2}{g^2}(1-2nu)$
Es gilt $c \le 0$, falls $u \ge \frac{1}{2n}$.
Sei

$$L := \max\{\sup_{x\in\mathbf{R}} u(x,0), \frac{1}{2n}\}$$

Wir behaupten $u \le L$. Betrachte dazu $\widetilde{u} := u - L$. Es gilt $\widetilde{u}(x,0) \le 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$. Außerdem ist

$$\widetilde{u}_t = u_t \le u_{ss} + n\frac{g_s}{g}u_s + c = \widetilde{u}_{ss} + n\frac{g_s}{g}\widetilde{u}_s + c$$

und es gilt $\widetilde{u} > 0 \iff u > L \Rightarrow u > \frac{1}{2n} \Rightarrow c \le 0$. Aus dem erweiterten Maximumprinzip von Hsu 9.3 folgt damit $\widetilde{u} \le 0$ auf $\mathbf{R} \times [0,S)$ für jedes $0 < S < \infty$ und damit $\widetilde{u} \le 0 (\Leftrightarrow u \le L)$ auf $\mathbf{R} \times [0,\infty)$. Wähle nun $a = \frac{1}{2n \sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{g_s^2}{g^2}(x,0)}$. Dann folgt

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} u(x,0) = a \sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{g_s^2}{g^2}(x,0) = \frac{1}{2n}$$

und daraus folgt $L = \frac{1}{2n}$.

Wir erhalten also aus $u \le L$ durch Einsetzen

$$\frac{g_s^2}{g^2}(x,t) \le \frac{1}{2n(t+a)} = \frac{1}{2nt + \frac{1}{\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} \frac{g_s^2}{g^2}(x,0)}}$$

und damit die Behauptung. $\square$

Satz 10.8. *Es gilt* $|\frac{g_{ss}}{g}|(x,t) \le \frac{C}{t+a}$ *für alle* $x \in \boldsymbol{R}, t \in [0,\infty)$*, mit* $a := \frac{1}{2n \sup\limits_{x\in\boldsymbol{R}} \frac{g_s^2}{g^2}(x,0)}$ *und* $C = C(n, \sup\limits_{x\in\boldsymbol{R}} |\frac{g_{ss}}{g}|(x,0), \sup\limits_{x\in\boldsymbol{R}} |\frac{g_s^2}{g^2}|(x,0))$.

Beweis. Betrachte

$$u := (\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a))$$

mit $a = \frac{1}{2n\sup_{x\in\mathbf{R}}\frac{g_s^2}{g^2}(x,0)}$ (aus Satz 10.6) und noch zu wählendem $\Lambda_0 > 0$. Außerdem definieren wir $C_V := \frac{1}{2n}$. Aufgrund von Satz 10.6 gilt damit $\frac{g_s^2}{g^2}(x,t) \leq \frac{C_V}{t+a}$ für alle $x \in \mathbf{R}, t \in [0,\infty)$.

u erfüllt nach Satz 10.1 folgende Evolutionsgleichung:

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{ss} + n\frac{g_s}{g}u_s - 2(\frac{g_s^2}{g^2})_s(\frac{g_{ss}^2}{g^2})_s(t+a)^3 + \\
&+ (-2((\frac{g_{ss}}{g})_s)^2 - 8(n-1)\frac{g_s^2}{g^2}\frac{g_{ss}^2}{g^2} - 4\frac{g_{ss}^3}{g^3} + 4(n-1)\frac{g_{ss}}{g}\frac{g_s^4}{g^4})(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) + \\
&+ 2(t+a)\frac{g_{ss}^2}{g^2}(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) + \\
&+ \frac{g_{ss}^2}{g^2}(t+a)^3(-2((\frac{g_s}{g})_s)^2 - 2n\frac{g_s^4}{g^4}) + \frac{g_{ss}^2}{g^2}\frac{g_s^2}{g^2}(t+a)^2 \\
&= u_{ss} + n\frac{g_s}{g}u_s + (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) + (9) \\
&= u_{ss} + n\frac{g_s}{g}u_s + c
\end{aligned}$$

mit
$(1) = -2(\frac{g_s^2}{g^2})_s(\frac{g_{ss}^2}{g^2})_s(t+a)^3$
$(2) = -2((\frac{g_{ss}}{g})_s)^2(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a))$
$(3) = -8(n-1)\frac{g_s^2}{g^2}\frac{g_{ss}^2}{g^2}(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a))$
$(4) = -4\frac{g_{ss}^3}{g^3}(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a))$
$(5) = 4(n-1)\frac{g_{ss}}{g}\frac{g_s^4}{g^4}(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a))$
$(6) = 2(t+a)\frac{g_{ss}^2}{g^2}(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a))$
$(7) = -2((\frac{g_s}{g})_s)^2\frac{g_{ss}^2}{g^2}(t+a)^3$
$(8) = -2n\frac{g_s^4}{g^4}\frac{g_{ss}^2}{g^2}(t+a)^3$
$(9) = \frac{g_{ss}^2}{g^2}\frac{g_s^2}{g^2}(t+a)^2$

und $c = (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) + (9)$

Wir zeigen zunächst folgende Zwischenbehauptung:

Wird $\Lambda_0 \geq \frac{4}{n}$ gewählt (und deswegen wählen wir jetzt $\Lambda_0 := \frac{4}{n}$), so folgt $c(x,t) \leq 0$ für alle Punkte (x,t) mit $u(x,t) > K$ mit
$K := \max\{16(\frac{n-1}{n})^2(\Lambda_0 + C_V)^3, 144(\Lambda_0 + C_V)^3, 6(\Lambda_0 + C_V)^2\}$. (Somit gilt $K = K(n)$.)
Kurz: $c \leq 0$, falls $u > K$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
(1) &= -2((\frac{g_{ss}}{g})^2)_s(t+a)^3(\frac{g_s^2}{g^2})_s \\
&= -8\frac{g_{ss}}{g}(\frac{g_{ss}}{g})_s\frac{g_s}{g}(\frac{g_s}{g})_s(t+a)^3 \\
&\leq (((\frac{g_s}{g})_s)^2(\frac{g_{ss}}{g})^2 + 16((\frac{g_{ss}}{g})_s)^2\frac{g_s^2}{g^2})(t+a)^3 \\
&\leq ((\frac{g_s}{g})_s)^2(\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^3 + 16C_V((\frac{g_{ss}}{g})_s)^2(t+a)^2 \\
&\leq ((\frac{g_s}{g})_s)^2(\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^3 + 2\Lambda_0((\frac{g_{ss}}{g})_s)^2(t+a)^2 \\
&\leq \frac{1}{2}|(7)| + |(2)|
\end{aligned}$$

da $8C_V \leq \Lambda_0$ gilt. Dabei haben wir bei der ersten Ungleichung die Peter-Paul-Ungleichung $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2$ mit 8 multipliziert und $\varepsilon = \frac{1}{8}$ gewählt; bei der zweiten Ungleichung haben wir $\frac{g_s^2}{g^2}(t+a) \leq C_V$ angewendet.

Nächster Term:

$$(9) = \frac{g_s^2}{g^2}(\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^2 \leq 8(n-1)\Lambda_0\frac{g_s^2}{g^2}(\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^2 \leq |(3)|$$

da $\Lambda_0 \geq \frac{1}{8(n-1)}$.

Nächster Term:

$$\begin{aligned}
(5) &= 4(n-1)\frac{g_s^4}{g^4}\frac{g_{ss}}{g}(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) \\
&\leq 4(n-1)\frac{g_s^4}{g^4}|\frac{g_{ss}}{g}|(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) \\
&\leq 4(n-1)\frac{g_s^4}{g^4}|\frac{g_{ss}}{g}|(t+a)^2(\Lambda_0 + C_V)
\end{aligned}$$

Falls (x,t) ein Punkt ist mit

$$4(n-1)\frac{g_s^4}{g^4}|\frac{g_{ss}}{g}|(t+a)^2(\Lambda_0 + C_V) > n\frac{g_s^4}{g^4}(\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^3$$

so sind dort $\frac{g_s^4}{g^4}$ und $\frac{g_{ss}}{g}$ ungleich 0, und es gilt

$$|\frac{g_{ss}}{g}| < 4\frac{n-1}{n}\frac{\Lambda_0 + C_V}{t+a}$$

Es folgt

$$u = (\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) \leq (\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^2(\Lambda_0 + C_V) < 16(\frac{n-1}{n})^2(\Lambda_0 + C_V)^3$$

wobei die erste Ungleichung immer gilt. Das heißt für alle Punkte (x,t) mit $u(x,t) \geq 16(\frac{n-1}{n})^2(\Lambda_0 + C_V)^3$ gilt

$$4(n-1)\frac{g_s^4}{g^4}|\frac{g_{ss}}{g}|(t+a)^2(\Lambda_0 + C_V) \leq n\frac{g_s^4}{g^4}(\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^3 = \frac{1}{2}|(8)|$$

Die verbliebenen guten Terme (d. h. die negativen) lassen sich so abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(7) + \frac{1}{2}(8) \\
&= (-((\frac{g_s}{g})_s)^2 - n\frac{g_s^4}{g^4})(\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^3 \\
&\leq (-((\frac{g_s}{g})_s)^2 - 2\frac{g_s^4}{g^4})(\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^3 \\
&= (-(\frac{g_{ss}}{g} - \frac{g_s^2}{g^2})^2 - 2\frac{g_s^4}{g^4})(\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^3 \\
&= (-(\frac{g_{ss}}{g})^2 + 2\frac{g_{ss}}{g}\frac{g_s^2}{g^2} - 3\frac{g_s^4}{g^4})(\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^3 \\
&\leq (-(\frac{g_{ss}}{g})^2 - 3\frac{g_s^4}{g^4} + 2\varepsilon(\frac{g_{ss}}{g})^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\frac{g_s^4}{g^4})(\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^3 \\
&= -\frac{2}{3}(\frac{g_{ss}}{g})^4(t+a)^3 \\
&= (10)
\end{aligned}$$

mit $(10) = -\frac{2}{3}(\frac{g_{ss}}{g})^4(t+a)^3$, wobei wir zu Anfang $n \geq 2$ benutzt haben und beim letzten Gleichheitszeichen $\varepsilon = 1/6$ gesetzt wurde.

Nächster Term:

$$\begin{aligned}
(4) &= -4(\frac{g_{ss}}{g})^3(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) \\
&\leq 4|\frac{g_{ss}}{g}|^3(t+a)^2(\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) \\
&\leq 4|\frac{g_{ss}}{g}|^3(t+a)^2(\Lambda_0 + C_V)
\end{aligned}$$

Falls (x,t) ein Punkt ist mit

$$4|\frac{g_{ss}}{g}|^3(t+a)^2(\Lambda_0+C_V) > \frac{1}{3}(\frac{g_{ss}}{g})^4(t+a)^3$$

so folgt $\frac{g_{ss}}{g} \neq 0$ und

$$|\frac{g_{ss}}{g}| < \frac{12(\Lambda_0+C_V)}{t+a}$$

Es folgt

$$u = (\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^2(\Lambda_0+\frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) \leq (\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^2(\Lambda_0+C_V) < 144(\Lambda_0+C_V)^3$$

Das heißt für alle Punkte (x,t) mit $u(x,t) \geq 144(\Lambda_0+C_V)^3$ gilt

$$4|\frac{g_{ss}}{g}|^3(t+a)^2(\Lambda_0+C_V) \leq \frac{1}{3}(\frac{g_{ss}}{g})^4(t+a)^3 = \frac{1}{2}|(10)|$$

Nächster Term:

$$(6) = (\frac{g_{ss}}{g})^2 2(t+a)(\Lambda_0+\frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) \leq (\frac{g_{ss}}{g})^2 2(t+a)(\Lambda_0+C_V)$$

Falls (x,t) ein Punkt ist mit

$$(\frac{g_{ss}}{g})^2 2(t+a)(\Lambda_0+C_V) > \frac{1}{3}(\frac{g_{ss}}{g})^4(t+a)^3$$

so folgt $\frac{g_{ss}}{g} \neq 0$ und $(\frac{g_{ss}}{g})^2 < \frac{6(\Lambda_0+C_V)}{(t+a)^2}$. Es folgt

$$u = (\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^2(\Lambda_0+\frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) \leq (\frac{g_{ss}}{g})^2(t+a)^2(\Lambda_0+C_V) < 6(\Lambda_0+C_V)^2$$

Das heißt für alle Punkte (x,t) mit $u(x,t) \geq 6(\Lambda_0+C_V)^2$ gilt

$$(\frac{g_{ss}}{g})^2 2(t+a)(\Lambda_0+C_V) \leq \frac{1}{3}(\frac{g_{ss}}{g})^4(t+a)^3 = \frac{1}{2}|(10)|$$

Damit ist die Zwischenbehauptung gezeigt.

Als Nächstes zeigen wir, dass $u \leq L := \{\sup_x u(x,0), K\}$ gilt.

Definiere $\widetilde{u} = u - L$. Dann gilt $\widetilde{u}_t = u_t = u_{ss} + n\frac{g_s}{g}u_s + c = \widetilde{u}_{ss} + n\frac{g_s}{g}\widetilde{u}_s + c$ mit $c \leq 0$, falls $\widetilde{u} > 0$, denn $\widetilde{u} > 0 \Leftrightarrow u > L \Rightarrow u > K \Rightarrow c \leq 0$. Zudem gilt $\widetilde{u}(x,0) \leq 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$ nach Wahl von L. Außerdem ist $\widetilde{u}$ auf $\mathbf{R} \times [0,S)$ für jedes $0 < S < \infty$ beschränkt, da dort $|K_V|$ und $|K_H|$ beschränkt sind.

Aus dem erweiterten Maximumprinzip von Hsu 9.3 folgt damit $\widetilde{u} \leq 0$ auf $\mathbf{R} \times [0, S)$ und damit $\widetilde{u} \leq 0$ auf $\mathbf{R} \times [0, \infty)$, d. h. $u \leq L$.

Also gilt
$$(\frac{g_{ss}}{g})^2 (t+a)^2 \Lambda_0 \leq (\frac{g_{ss}}{g})^2 (t+a)^2 (\Lambda_0 + \frac{g_s^2}{g^2}(t+a)) = u \leq L$$
und somit
$$(\frac{g_{ss}}{g})^2 \leq \frac{L}{\Lambda_0 (t+a)^2}$$
, also schließlich
$$|\frac{g_{ss}}{g}| \leq \sqrt{\frac{L}{\Lambda_0}} \frac{1}{t+a}$$
Beachte noch $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}} u(x,0) \leq \sup\limits_{x \in \mathbf{R}} (\frac{g_{ss}}{g})^2 (x,0) a^2 (\Lambda_0 + \sup\limits_{x \in \mathbf{R}} \frac{g_s^2}{g^2}(x,0) a)$, sowie die Definitionen von a, Λ_0 und L. Daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 10.9. Diese Abschätzungen wurden inspiriert durch Shi's derivative estimates in [51] und die Anwendung des Maximumprinzips in [40].

Satz 10.10. *$|\operatorname{Ric}|(x,t) \leq \frac{C_{\mathrm{Ric}}}{t+a}$ und $|\operatorname{Rm}|(x,t) \leq \frac{C_{\mathrm{Rm}}}{t+a}$ für alle $x \in \boldsymbol{R}, t \geq 0$ mit $a = \frac{1}{2n \sup_{x \in \boldsymbol{R}} \frac{g_s^2}{g^2}(x,0)}$ und $C_{\mathrm{Ric}} = C_{\mathrm{Ric}}(n, \sup\limits_{x \in \boldsymbol{R}} |\frac{g_{ss}}{g}|(x,0), \sup\limits_{x \in \boldsymbol{R}} |\frac{g_s^2}{g^2}|(x,0))$ und*
$C_{\mathrm{Rm}} = C_{\mathrm{Rm}}(n, \sup\limits_{x \in \boldsymbol{R}} |\frac{g_{ss}}{g}|(x,0), \sup\limits_{x \in \boldsymbol{R}} |\frac{g_s^2}{g^2}|(x,0))$.

Beweis. Das folgt aus den Sätzen 10.6, 10.8, 5.13, 5.10. □

Korollar 10.11. *Die maximale Lösung $h(t)$ ist vom Typ III.*

Als Nächstes eine kleine Zwischenbemerkung:
Sei eine C^∞ Funktion $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gegeben auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathbf{R}, f^2 dx^2)$ mit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv. Um geometrische Aussagen über u treffen zu können, wählen wir ein $y \in \mathbf{R}$ und definieren $\hat{u} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\hat{u}(b) := u(s_y^{-1}(b))$, d. h. $\hat{u} = u \circ s_y^{-1}$ ist der Pullback von u unter der Isometrie $s_y^{-1} : (\mathbf{R}, dz^2) \to (\mathbf{R}, f^2 dx^2)$ (siehe Kapitel 4). Somit enthält $\hat{u}$ die gleichen geometrischen Informationen wie u, ist jedoch auf $\mathbf{R}$ mit der Standardmetrik dz^2 definiert! Hier haben Aussagen wie z. B. $\hat{u}(b) = e^b$ geometrische Bedeutung, während $u(x) = e^x$ ohne Kenntnis der Metrik $f^2 dx^2$ nur wenig sagt.
Wir können das Ganze (wie immer) auch zeitabhängig machen, falls $u : \mathbf{R} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ C^∞ und eine Familie von Riemannschen Metriken $f^2(\cdot, t) dx^2, t \in [0, \infty)$ mit $f : \mathbf{R} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv gegeben sind: In diesem Fall ist $\hat{u} : \mathbf{R} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$,

$\hat{u}(b,t) := u(s_y^{-1}(b,t),t)$, d. h. für jedes feste $t \geq 0$ ziehen wir $u(\cdot,t)$ mittels $s_y^{-1}(\cdot,t)$ zurück. (Hierbei ist $s_y^{-1}(b,t) := (s_y(\cdot,t))^{-1}(b)$)

Wir zeigen als Nächstes, dass eine obere Schranke für g zum Zeitpunkt $t = 0$ für alle Zeiten $t \geq 0$ erhalten bleibt. Weiterhin zeigen wir, dass die Oszillation (also Supremum minus Infimum) von $\hat{g}$ auf jedem beschränkten Intervall gleichmäßig gegen 0 geht (für $t \to \infty$), falls g zum Zeitpunkt $t = 0$ beschränkt ist. Unter derselben Voraussetzung zeigen wir anschließend, dass wenn man die Metriken $h(t)$ auf $M = \mathbf{R} \times N$ mit einem Faktor $a(t)$ so reskaliert (sei $a(t)h(t) =: \overline{h}(t) = \overline{f}^2(\cdot,t)dx^2 + \overline{g}(\cdot,t)g_N$ die reskalierte Metrik), dass $\overline{g}(y,t) = 1$ für alle $t \in [0,\infty)$ gilt, $\hat{\overline{g}}$ auf jedem Ball (Intervall) mit Mittelpunkt 0 gleichmäßig gegen 1 konvergiert. Das ist die zu Beginn des Kapitels beschriebene Konvergenz gegen einen flachen Zylinder.

Lemma 10.12. *Es gilt $g(x,t) \leq g(x,0)e^{Ct}$ für ein $C > 0$ und für alle $x \in \boldsymbol{R}, t \in [0,\infty)$.*

Beweis. Aus der Evolutionsgleichung $g_t = g_{ss} + (n-1)\frac{g_s^2}{g} = (\frac{g_{ss}}{g} + (n-1)\frac{g_s^2}{g^2})g$ folgt $(\log g)_t = -K_H - (n-1)K_V$, daraus

$$\log g(x,t) - \log g(x,0) = \int_0^t (-K_H - (n-1)K_V)(x,\tau)d\tau$$

und damit folgt

$$g(x,t) = g(x,0)e^{\int_0^t (-K_H-(n-1)K_V)(x,\tau)d\tau} \leq g(x,0)e^{Ct}$$

für alle $x \in \mathbf{R}, t \geq 0$ und ein $C > 0$, da die Krümmungen uniform beschränkt sind (Korollar 10.5). □

Lemma 10.13. *Ist $g^n(x,0) \leq C$ für alle $x \in \boldsymbol{R}$, so folgt $g^n(x,t) \leq C$ für alle $x \in \boldsymbol{R}, t \in [0,\infty)$.*

Beweis. Betrachte $u := g^n - C$. Dann gilt $u_t = (g^n)_t = (g^n)_{ss} = (g^n - C)_{ss} = u_{ss}$ und $u(x,0) \leq 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$. Aus Lemma 10.12 und der Voraussetzung $g^n(x,0) \leq C$ für alle $x \in \mathbf{R}$ folgt, dass g^n auf $\mathbf{R} \times [0,S)$ beschränkt ist für jedes $0 < S < \infty$. Aus dem Maximumprinzip von Hsu Theorem 9.3 folgt damit $u \leq 0$, also $g^n \leq C$. □

Korollar 10.14. *Ist $g(x,0) \leq C$ für alle $x \in \boldsymbol{R}$, so folgt $g(x,t) \leq C$ für alle $x \in \boldsymbol{R}, t \in [0,\infty)$.*

Satz 10.15. *Sei $\sup\limits_{x\in\boldsymbol{R}} g(x,0) < \infty$ und sei $y \in \boldsymbol{R}$ fest aber beliebig. Dann gilt*

$$|\hat{g}(c,t) - \hat{g}(b,t)| \leq \frac{\sup\limits_{x\in\boldsymbol{R}} g(x,0)}{\sqrt{2nt + \frac{1}{\sup\limits_{x\in\boldsymbol{R}} \frac{g_s^2}{g^2}(x,0)}}}(c-b)$$

für alle $-\infty < b < c < \infty, t \geq 0$ mit $\hat{g}(b,t) := g(s_y^{-1}(b,t),t)$.

Beweis. Setze $P := \sup_{x\in\mathbf{R}} g(x,0)$ und $Q := \frac{1}{\sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{g_s^2}{g^2}(x,0)}$. Nach Satz 10.6 gilt dann

$$\frac{g_s^2}{g^2}(x,t) \leq \frac{1}{2nt+Q}$$

für alle $x \in \mathbf{R}, t \geq 0$. Wegen Korollar 10.14 gilt $g(x,t) \leq P$ für alle $x \in \mathbf{R}, t \geq 0$.

Es folgt

$$|g_s|(x,t) \leq \frac{g(x,t)}{\sqrt{2nt+Q}} \leq \frac{P}{\sqrt{2nt+Q}}$$

für alle $x \in \mathbf{R}, t \geq 0$. Das ergibt

$$\begin{aligned}
&|\hat{g}(c,t) - \hat{g}(b,t)| = |g(s_y^{-1}(c,t),t) - g(s_y^{-1}(b,t),t)| \\
&\leq \int\limits_{s_y^{-1}(b,t)}^{s_y^{-1}(c,t)} |g_s|(\xi,t) f(\xi,t) d\xi \leq \frac{P}{\sqrt{2nt+Q}} \int\limits_{s_y^{-1}(b,t)}^{s_y^{-1}(c,t)} f(\xi,t) d\xi = (c-b)\frac{P}{\sqrt{2nt+Q}}
\end{aligned}$$

für alle $-\infty < b < c < \infty, t \geq 0$ nach Lemma 4.4 und Korollar 4.17. □

Satz 10.16. *Sei $\sup_{x\in\boldsymbol{R}} g(x,0) < \infty$ und sei $y \in \boldsymbol{R}$ fest aber beliebig. Sei $a(t) := \frac{1}{g^2(y,t)}, t \in [0,\infty)$. Sei $\overline{h}(t) := a(t)h(t)$. Seien $\overline{f}, \overline{g} : \boldsymbol{R} \times [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ C^∞ und positiv die eindeutig bestimmten Abbildungen mit $\overline{h}(t) = \overline{f}^2(\cdot,t)dx^2 + \overline{g}^2(\cdot,t)g_N, t \in [0,\infty)$. Dann gilt*

$$|\hat{\overline{g}}(c,t) - 1| \leq |c| \frac{\sup_{x\in\boldsymbol{R}} g(x,0)}{\sqrt{2nt + \frac{1}{\sup_{x\in\boldsymbol{R}} \frac{g_s^2}{g^2}(x,0)}}}$$

für alle $c \in \boldsymbol{R}, t \in [0,\infty)$ (mit $\hat{\overline{g}}(c,t) := \overline{g}(\overline{s}_y^{-1}(c,t),t)$ und $\overline{s}_y(x,t) := \int_y^x \overline{f}(\xi)d\xi$).

Beweis. Es gelten $\frac{\partial}{\partial \overline{s}} = \frac{1}{\overline{f}} \frac{\partial}{\partial x}$ und $\overline{g}_{\overline{s}}(x,t) = \frac{\overline{g}_x}{\overline{f}}(x,t) = \frac{g_x}{f}(x,t) = g_s(x,t)$ für alle $x \in \mathbf{R}, t \in [0,\infty)$. Daraus folgt $\frac{\overline{g}_{\overline{s}}^2}{\overline{g}^2}(x,t) = \frac{1}{a(t)} \frac{g_s^2}{g^2}(x,t)$. Damit erhalten wir mittels Lemma 4.4 und Korollar 4.17

$$\begin{aligned}
&|\hat{\overline{g}}(c,t) - 1| = |\overline{g}(\overline{s}_y^{-1}(c,t),t) - 1| \\
&= |\overline{g}(\overline{s}_y^{-1}(c,t),t) - \overline{g}(y,t)| \\
&\leq |\int\limits_{y}^{\overline{s}_y^{-1}(c,t)} |\overline{g}_{\overline{s}}|(\xi,t)\overline{f}(\xi,t)d\xi| = |\int\limits_{y}^{\overline{s}_y^{-1}(c,t)} |g_s|(\xi,t)\overline{f}(\xi,t)d\xi| \\
&\leq \frac{P}{\sqrt{2nt+Q}} |\int\limits_{y}^{\overline{s}_y^{-1}(c,t)} \overline{f}(\xi,t)d\xi| = |c|\frac{P}{\sqrt{2nt+Q}}
\end{aligned}$$

, wobei die Abschätzung von $|g_s|$ in der letzten Ungleichung aus dem Beweis des Satzes 10.15 stammt. $\square$

Korollar 10.17. *Gelte dasselbe Setting wie in Satz 10.16. Sei $r > 0$ und*

$$B(y,r,t) := B_{\overline{h}(t)}(\{y\} \times N, r) := \{(x,q) \in \boldsymbol{R} \times N | d_{\overline{h}(t)}((x,q),\{y\} \times N) \leq r\}$$

Dann gilt

$$(B(y,r,t), \overline{h}(t)|_{B(y,r,t)}) \to ([-r,r] \times N, dz^2 + g_N)(t \to \infty)$$

wobei dz^2 die Standardmetrik auf $\boldsymbol{R}$ bezeichnet und die Konvergenz in C^0 modulo Pullback durch eine C^∞ Familie ψ_t von Diffeomorphismen ist.

Beweis. Nach Korollar 5.28 ist $\phi_t : (\mathbf{R} \times N, \overline{f}^2(\cdot,t)dx^2 + \overline{g}^2(\cdot,t)g_N) \to (\mathbf{R} \times N, dz^2 + (\overline{g}^2(\cdot,t) \circ (\overline{s}_y(\cdot,t))^{-1})g_N), (x,q) \to \phi_t(x,q) := (\overline{s}_y(x,t),q)$ eine Isometrie für alle $t \in [0,\infty)$. Da ϕ_t Distanzen erhält, Fasern $\{x\} \times N$ auf Fasern $\{\overline{s}_y(x,t)\} \times N$ abbildet und mittels Satz 5.19 folgt

$$\phi_t(B(y,r,t)) = [-r,r] \times N$$

Nach obiger Definition gilt

$$\overline{g}^2(\cdot,t) \circ (\overline{s}_y(\cdot,t))^{-1} = \hat{\overline{g}}^2(\cdot,t)$$

Nach Satz 10.16 gilt

$$\hat{\overline{g}}(\cdot,t)|_{[-r,r]} \to 1 \text{ gleichmäßig } (t \to \infty)$$

Somit konvergiert

$$(\phi_t^{-1})^*(h(t)|_{B(y,r,t)}) = (dz^2 + \hat{\overline{g}}^2(\cdot,t)g_N)|_{[-r,r]\times N}$$

gleichmäßig gegen $(dz^2 + g_N)|_{[-r,r]\times N}$. Mit der Definition $\psi_t := \phi_t^{-1}$ erhalten wir die Behauptung. $\square$

Jetzt zeigen wir den in der Einleitung zu diesem Kapitel angekündigten Kollaps der Lösung unter Ricci und normalisiertem (=volumenerhaltenden) Ricci Fluss unter Zusatzvoraussetzungen. Zuvor ein paar Vorbereitungen:

Lemma 10.18. *Gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x,0) = 0$, so folgt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x,t) = 0$ für alle $t \geq 0$.*

Beweis. Das folgt aus Lemma 10.12. $\square$

Satz 10.19. *Gelte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x,0) = 0$ und habe $(\boldsymbol{R} \times N, h(0))$ endliches Volumen. Sei $V(t) := \mathrm{Vol}(h(t))$, wobei $\mathrm{Vol}(h(t))$ das Volumen der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\boldsymbol{R} \times N, h(t))$ bezeichnet. Dann folgt $V'(t) \leq 0$ für alle $t \in [0,\infty)$. Außerdem gilt $(\int_M Rd\mu)(t) \geq 0$ für alle $t \in [0,\infty)$.*

Beweis. Es gilt $V(t) = \int_{\mathbf{R}} g^n ds = \int_{\mathbf{R}} g^n f dx$ (falls (N, g_N) Volumen 1 hat, was wir oBdA annehmen können, siehe auch Satz 5.40). Daraus folgt

$$\begin{aligned}
V'(t) &= \int_{\mathbf{R}} (ng^{n-1} g_t f + g^n f_t) dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} (ng^{n-1}(g_{ss} + (n-1)\frac{g_s^2}{g}) + g^n n \frac{g_{ss}}{g}) f dx \\
&= n \int_{\mathbf{R}} (2g^{n-1} g_{ss} + (n-1) g^{n-2} g_s^2) ds \\
&= n \int_{\mathbf{R}} (2(g^{n-1} g_s)_s - 2(n-1) g^{n-2} g_s^2 + (n-1) g^{n-2} g_s^2) ds \\
&= 2n \int_{\mathbf{R}} (g^{n-1} g_s)_s ds - n(n-1) \int_{\mathbf{R}} g^{n-2} g_s^2 ds \\
&= -n(n-1) \int_{\mathbf{R}} g^{n-2} g_s^2 ds < 0
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $(g^{n-1} g_s)_s = (n-1) g^{n-2} g_s^2 + g^{n-1} g_{ss}$ und $\lim_{x \to \pm\infty} (g^{n-1} g_s)(x) = 0$ benutzt. Letzteres folgt aus dem vorigen Lemma, $g^{n-1}|g_s| = g^n |\frac{g_s}{g}| = g^n \sqrt{|K_V|}$ und Satz 10.3. Ferner gilt unter Ricci Fluss ganz allgemein $\frac{d}{dt} d\mu = -R d\mu$ (siehe z. B. [18]) und damit $\frac{d}{dt} V(t) = -\int_M R d\mu$.

Alternativ folgen beide Behauptungen aus Letzterem zusammen mit Satz 5.41. $\square$

Bemerkung 10.20. siehe [30], Section 11 für den Beweis des obigen Satzes im Fall $S^1 \times T^2$.

Satz 10.21. *Gelte* $\lim_{x \to \pm\infty} g(x, 0) = 0$ *und habe* $(M, h(0))$ *endliches Volumen. Dann folgt* $\sup_{x \in \boldsymbol{R}} g^n(x, t) \leq n \sqrt{\frac{1}{2nt + \frac{1}{\sup_{x \in \boldsymbol{R}} \frac{g_s^2}{g^2}(x,0)}}} V(0)$ *für alle* $t \in [0, \infty)$. *Insbesondere gilt* $g(\cdot, t) \to 0$ $(t \to \infty)$ *gleichmäßig.*

Beweis. Es gilt für alle $-\infty < b < x < \infty, t \geq 0$

$$\begin{aligned}
g^n(x,t) - g^n(b,t) &= \int_b^x (ng^{n-1} g_s f)(\xi, t) d\xi \\
&\leq n \int_b^x |\frac{g_s}{g}| g^n ds \leq n \sqrt{\frac{1}{2nt + \frac{1}{\sup_{x \in \mathbf{R}} \frac{g_s^2}{g^2}(x,0)}}} V(t) \\
&\leq n \sqrt{\frac{1}{2nt + \frac{1}{\sup_{x \in \mathbf{R}} \frac{g_s^2}{g^2}(x,0)}}} V(0)
\end{aligned}$$

nach den Sätzen 5.40 und 10.6 und den Lemmata 10.18 und 4.4 und da nach obigem Satz $V(t)$ fallend ist. Lassen wir $b \to -\infty$ gehen und nehmen das Supremum über alle $x \in R$, erhalten wir die Behauptung. $\square$

Als Konsequenz erhalten wir, dass die Lösung kollabiert, falls zusätzlich (N, g_N) homogen (d. h. für alle $p, q \in N$ gibt es eine Isometrie $I : (N, g_N) \to (N, g_N)$ mit $I(p) = q$) ist:

Satz 10.22. *Gelte* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x, 0) = 0$, *habe* $(M, h(0))$ *endliches Volumen und sei* (N, g_N) *homogen. Dann kollabiert die Lösung, d. h. der Injektivitätsradius geht gleichmäßig gegen* 0 *(für* $t \to \infty$*), während die Krümmungen beschränkt bleiben.*

Beweis. Nach Korollar 10.5 gilt $\sup_{(x,q,t)\in\mathbf{R}\times N\times[0,\infty)} |\operatorname{Rm}| =: K < \infty$ und nach Satz 10.21 gilt $g(\cdot, t) \to 0$ $(t \to \infty)$ gleichmäßig. Damit folgt die Behauptung aus Satz 5.50. $\square$

Normalisierter Ricci Fluss:
Wir betrachten im Folgenden die durch Satz 7.8 gegebene Lösung $\widetilde{h}(\widetilde{t})$ des normalisierten Ricci Flusses (mit denselben Anfangsdaten $\widetilde{h}(0) = h(0)$). Wie in diesem Satz vermerkt nehmen wir zusätzlich an, dass $(M, h(0))$ endliches Volumen hat. (Aus der Eindeutigkeit des Ricci Flusses in der Klasse $BK(M)$ (Theorem 7.5) und Bemerkung 7.9 folgt die Eindeutigkeit des normalisierten Ricci Flusses, so dass $\widetilde{h}(\widetilde{t})$ *die* Lösung in $BK(M)$ mit $\widetilde{h}(0) = h(0)$ ist.) Im Folgenden versehen wir Größen des normalisierten Ricci Flusses mit einer $\widetilde{\ }$.

Satz 10.23. *Es gelten* $\widetilde{T} = \infty$ *und* $\sup\limits_{x\in\boldsymbol{R}} |\widetilde{\operatorname{Rm}}|(x, \widetilde{t}) \to 0$ $(\widetilde{t} \to \infty)$.

Beweis. Mit der Notation aus Definition 7.7 und Satz 7.8 gilt wegen Satz 5.41

$$r(t) = \frac{\int_M R_{h(t)} d\mu_{h(t)}}{\operatorname{Vol}(h(t))} \geq 0$$

und damit $c(t) = e^{\frac{2}{n}\int_0^t r(\tau)d\tau} \geq 1$. Daraus folgt $\widetilde{t}(t) = \int_0^t c(\tau)d\tau \geq t$. Somit gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \widetilde{t}(t) = \infty$ und damit $\widetilde{T} = \infty$. Wegen $c(t) \geq 1$ folgt $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |\operatorname{Rm}|_{H(t)}(x, t) \to 0$ $(t \to \infty)$ für die reskalierte Metrik $H(t) := c(t)h(t)$. Wegen Satz 7.8 gilt $\widetilde{h}(\widetilde{t}) = H(t)$, d. h. der normalisierte Ricci Fluss $\widetilde{h}(\widetilde{t})$ mit $\widetilde{h}(0) = h(0)$ unterscheidet sich von $H(t)$ nur durch eine Reparametrisierung der Zeit. Daraus folgt die Behauptung.

$\square$

Satz 10.24. *Gelte* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \widetilde{g}(x, 0) = 0$. *Dann gilt* $\widetilde{g}(\cdot, \widetilde{t}) \to 0$ $(\widetilde{t} \to \infty)$ *gleichmäßig.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 10.21. Beachte hier, dass wegen Satz 10.23 ebenfalls $|\frac{\widetilde{g}_{\widetilde{s}}}{\widetilde{g}}| \to 0$ gleichmäßig $(\widetilde{t} \to \infty)$, und dass $\widetilde{V}(t) = \widetilde{V}(0) = V(0)$ gilt für alle $\widetilde{t} \geq 0$. $\square$

Satz 10.25. *Gelte* $\lim_{x \to \pm\infty} \widetilde{g}(x,0) = 0$*, habe* $(M, \widetilde{h}(0))$ *endliches Volumen und sei* (N, g_N) *homogen. Dann kollabiert die Lösung, d. h. der Injektivitätsradius geht gleichmäßig gegen* 0 *(für* $\widetilde{t} \to \infty$*), während die Krümmungen beschränkt bleiben.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 10.22. □

Bemerkung 10.26. In [21] wird gezeigt, dass vollständige, nicht-singuläre Lösungen des normalisierten Ricci Flusses auf nichtkompakten n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten entlang einer Teilfolge kollabieren oder entlang einer Teilfolge gegen eine vollständige Einsteinmetrik mit negativer Einstein Konstante konvergieren.

11 Regularität für f, Krümmungsschranken

Sei in diesem Kapitel (N, g_N) eine flache, vollständige, zusammenhängende C^∞ Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Sei $h \in B(\mathbf{R} \times N)$ mit $h = f_0^2 dx^2 + g_0^2 g_N$ und $f_0, g_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv und sei $h(t) = f^2(\cdot, t)dx^2 + g^2(\cdot, t)g_N, t \in [0, \infty)$ mit $f, g : \mathbf{R} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv und mit $f(\cdot, 0) = f_0, g(\cdot, 0) = g_0$ die maximale Lösung des Ricci Flusses in $BK(\mathbf{R} \times N)$ mit $h(0) = h$ (siehe Definition 7.6, Satz 8.3 und Korollar 10.5). Sei $0 < T < \infty$ fest aber beliebig.

Wir zeigen, dass $|\frac{\partial^k}{\partial s^k} \hat{K_H}|$ und $|\frac{\partial^k}{\partial s^k} \hat{K_V}|$ für $k \geq 0$ auf $\mathbf{R} \times [0, T]$ beschränkt sind. Daraus folgt die Regularität von f.

Theorem 11.1. *Für alle ganzen Zahlen $l \geq 0, n \geq 2, m \geq 1$ und alle positiven Zahlen α, K, K_l, r gibt es ein $C = C(\alpha, K, K_l, r, l, m, n) < \infty$, so dass gilt: Ist M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $h(t), t \in [0, \tau]$, wobei $0 < \tau \leq \frac{\alpha}{K}$ gelte, eine Lösung des Ricci Flusses auf einer offenen Umgebung U von p, die $\overline{B}_{h(0)}(p, r)$ als kompakte Teilmenge enthält, und falls $|\operatorname{Rm}|(x, t) \leq K$ für alle $x \in B_{h(0)}(p, r)$ und $t \in [0, \tau]$ gilt und $|\nabla^\beta \operatorname{Rm}|(x, 0) \leq K_l$ für alle $x \in B_{h(0)}(p, r)$ und $\beta \leq l$, dann folgt*

$$|\nabla^m \operatorname{Rm}(y, t)| \leq \frac{C}{t^{\frac{(m-l)_+}{2}}}$$

für alle $y \in \overline{B}_{h(0)}(p, r/2)$ und $t \in (0, \tau]$. (Dabei sei $a_+ = \max\{a, 0\}$ für $a \in \boldsymbol{R}$.) Insbesondere gilt: Falls $m \leq l$, so gilt die uniforme Schranke $|\nabla^m \operatorname{Rm}(y, t)| \leq C$ auf $\overline{B}_{h(0)}(p, r/2) \times [0, \tau]$.

Beweis. siehe [16], S. 244, Theorem 14.16 □

Korollar 11.2. $|\nabla^k \operatorname{Rm}|(p, t) \leq C$ *für alle* $p \in \boldsymbol{R} \times N, t \in [0, T], k \geq 0$.

Korollar 11.3. $|\frac{\partial^k}{\partial s^k} \hat{K_H}| \leq C$ *und* $|\frac{\partial^k}{\partial s^k} \hat{K_V}| \leq C$ *auf* $\boldsymbol{R} \times [0, T]$, $k \geq 0$.

Beweis. $|\frac{\partial^k}{\partial s^k} \hat{K_H}|(x, t) \leq |\nabla^k \operatorname{Rm}|(x, q, t)$ und $|\frac{\partial^k}{\partial s^k} \hat{K_H}|(x, t) \leq |\nabla^k \operatorname{Rm}|(x, q, t)$ für alle $x \in \mathbf{R}, q \in N, t \in [0, T), k = 0, 1, ...$ (siehe Satz 5.12). □

Korollar 11.4. $|\frac{\partial^k}{\partial s^k} \frac{g_s}{g}| \leq C$ *auf* $\boldsymbol{R} \times [0, T]$, $k \geq 0$.

Beweis. $|\frac{g_s}{g}| = \sqrt{|\hat{K_V}|}$ und $(\frac{g_s}{g})_s = \hat{K_V} - \hat{K_H}$. □

Korollar 11.5. *Alle partiellen Ableitungen nach x und t von f^α sind auf $\boldsymbol{R} \times [0, T]$ beschränkt für alle $\alpha \in \boldsymbol{R}$, falls $f(x, 0) = 1$ gilt für alle $x \in \boldsymbol{R}$.*

Beweis. Aus der Evolutionsgleichung $f_t = n\frac{g_{ss}}{g}f$ folgt $(\log f)_t = n\frac{g_{ss}}{g}$, daraus

$$\log f(x,t) - \log f(x,0) = \int_0^t n\frac{g_{ss}}{g}(x,\tau)d\tau$$

für alle $x \in \mathbf{R}, t \in [0,\infty)$, und wegen $f(x,0) = 1$ folgt

$$f(x,t) = e^{\int_0^t n\frac{g_{ss}}{g}(x,\tau)d\tau}$$

für alle $x \in \mathbf{R}, t \geq 0$. Damit folgt

$$f_t(x,t) = e^{\int_0^t n\frac{g_{ss}}{g}(x,\tau)d\tau} n\frac{g_{ss}}{g}(x,t) = nf(x,t)\frac{g_{ss}}{g}(x,t)$$

und

$$\begin{aligned} f_x(x,t) &= e^{\int_0^t n\frac{g_{ss}}{g}(x,\tau)d\tau} \int_0^t n(\frac{g_{ss}}{g})_x(x,\tau)d\tau \\ &= e^{\int_0^t n\frac{g_{ss}}{g}(x,\tau)d\tau} \int_0^t nf(x,\tau)(\frac{g_{ss}}{g})_s(x,\tau)d\tau \\ &= nf(x,t)\int_0^t f(x,\tau)(\frac{g_{ss}}{g})_s(x,\tau)d\tau \end{aligned}$$

Somit sind f_t und f_x beschränkt. Aus den Evolutionsgleichungen für $\frac{g_{ss}}{g}, \frac{g_s^2}{g^2}, \frac{g_s}{g}$, dem Kommutator

$$[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}] = -n\frac{g_{ss}}{g}$$

, $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}$ und den obigen Korollaren folgt induktiv die Beschränktheit aller höheren partiellen Ableitungen. Wegen

$$f^\alpha(x,t) = e^{\alpha\int_0^t n\frac{g_{ss}}{g}(x,\tau)d\tau}, \alpha \in \mathbf{R}$$

sind auch alle partiellen Ableitungen nach x und t von f^α auf $\mathbf{R} \times [0,T]$ beschränkt. $\square$

12 Gaußsche Abschätzungen für den heat kernel

In diesem Kapitel haben wir folgendes Setting:

Sei M eine n-dimensionale zusammenhängende C^∞ Mannigfaltigkeit. Wir unterscheiden 2 Fälle: Entweder ist M nichtkompakt ohne Rand, oder M ist kompakt mit nichtleerem Rand.

Der 2. Fall tritt in folgendem Zusammenhang auf:
Sei $U \subset M$, wobei M nichtkompakt ist und keinen Rand hat, eine echte offene zusammenhängende Teilmenge mit glattem Rand, so dass $\Omega := \overline{U}$ kompakt ist. Ω ist dann eine C^∞, kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand.

Sei $h(t), t \in [0, \infty)$ eine C^∞ Familie von C^∞ Riemannschen Metriken auf M.
Definiere $\frac{d}{dt}h = 2\mathfrak{R}$, d. h. $\mathfrak{R}$ ist ein zeitabhängiger symmetrischer $(0,2)$-Tensor. Definiere $\mathcal{R} = \operatorname{tr}\mathfrak{R}$. (Das bedeutet in lokalen Koordinaten: $\frac{d}{dt}h_{ij} = 2\mathfrak{R}_{ij}$ und $\mathcal{R} = h^{ij}\mathfrak{R}_{ij}$)

Sei $C : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion mit $|\frac{d}{dt}h|(x,t) = 2|\mathfrak{R}|(x,t) \leq C(t)$ für alle $x \in M, t \in [0, \infty)$.

Sei $Q : M \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ C^∞.

Sei $0 < T < \infty$ fest aber beliebig. Wir betrachten dann manchmal die Einschränkung der Größen auf $[0, T]$, also z. B. $h(t), t \in [0, T]$ oder $Q : M \times [0, T] \to \mathbf{R}$, ohne das zu sagen.

Sei außerdem $h(0)$ vollständig. (Aus $\sup\limits_{M\times[0,T]} |\mathfrak{R}| < \infty$ folgt damit die Vollständigkeit von $h(t)$ für alle $t \in [0, \infty)$, siehe die Sätze B.8, B.9)

Sei $B := \inf\limits_{i\in\mathbf{N}_0} \frac{\gamma^{i+1}}{(i+3)^4(i+2)(\gamma-1)}$ mit $\gamma := 4$, und damit eine universelle Konstante.

Außerdem verwenden wir folgende Notation:
Ist allgemein (M, h) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann bezeichnen wir mit $V_h(p, r)$ das Volumen des (offenen) Balles $B_h(p, r)$ mit Zentrum $p \in M$ und Radius $r > 0$. d_h bezeichnet die durch die Riemannsche Metrik h induzierte Metrik.

Wir zeigen in diesem Kapitel Gaußsche obere Abschätzungen für den heat kernel der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \Delta_{h(t)}u - Qu$$

d. h. für die minimale, positive Lösung, die zum Zeitpunkt 0 (oder allgemeiner s) mit einem Diracmaß bei $y \in M$ startet (siehe Defintion 12.1). Dabei geht es darum, die Abhängigkeit der Konstanten C_3 und C_4 von T aus Theorem 26.25, S. 355 in [17] zu verfolgen. Praktisch im gesamten Kapitel folgen wir somit [17] (auch bei obigem Setting sind wir schon [17] gefolgt), insbesondere den Kapiteln 24, 25 und 26 (und hierbei vor allem Kapitel 26). Ursprünglich stammen die Gaußschen Abschätzungen aus [11]. Das Ziel dieses Kapitels sind die Theoreme 12.30 und 12.31 ganz am Ende.

Definiere den Operator

$$Lu = \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta_{h(t)} u + Qu$$

wobei $u : M \times [0,T] \to \mathbf{R}$ C^∞ sei. Definiere den zu L adjungierten Operator

$$L^* u = -\frac{\partial}{\partial t} u - \Delta_{h(t)} u + (Q - \mathcal{R})u$$

Definition 12.1. *Definiere* $\boldsymbol{R}_T^2 = \{(t,s) \in \boldsymbol{R}^2 | 0 \le s < t \le T\}$.
Wir sagen

$$H : M \times M \times \boldsymbol{R}_T^2 \to \boldsymbol{R}$$

ist eine Fundamentallösung von L, falls Folgendes gilt:

- *H ist stetig, C^2 in den ersten beiden Raumvariablen und C^1 in den letzten beiden Zeitvariablen*
- *Definiere $H(x,t,y,s) := H(x,y,t,s)$. Es gilt $L(H(\cdot,\cdot,y,s)) = 0$ für alle $y \in M$, $0 \le s < T$*
- *$\lim\limits_{t \searrow s} H(\cdot,t,y,s) = \delta_y$ für alle $y \in M$, $0 \le s < t \le T$ (ist $\partial M \neq \emptyset$, so soll das nur für alle $y \in \operatorname{int} M$ gelten)*

  Im Fall $\partial M \neq \emptyset$ fordern wir Dirichlet Randwerte
- *$H(x,t,y,s) = 0$ für alle $x \in \partial M, y \in \operatorname{int} M, 0 \le s < t \le T$*

  und nennen H eine Dirichlet Fundamentallösung

Ist H zusätzlich positiv und minimal (Letzteres heißt per Definition: Ist $\widetilde{H}$ eine beliebige positive Fundamentallösung, so folgt $\widetilde{H} \ge H$), so heißt H heat kernel von L.

Bemerkung 12.2. Die Bedingung $\lim\limits_{t \searrow s} H(\cdot,t,y,s) = \delta_y$ bedeutet per Definition:

$$\lim_{t \searrow s} \int_M H(x,t,y,s)\phi(x) d\mu_{h(t)}(x) = \phi(y) \text{ für alle } \phi \in C_c^\infty(M)$$

Bemerkung 12.3. Die Definition von $\mathbf{R}^2_T$ weicht von der aus [17], S. 266 ab!

Bemerkung 12.4. Wegen der Minimalitätsforderung ist der heat kernel eindeutig bestimmt.

Definition 12.5. *Definiere $\boldsymbol{R}^{2*}_T = \{(s,t) \in \boldsymbol{R}^2 | 0 \leq s < t \leq T\}$.*
Wir sagen

$$H^* : M \times M \times \boldsymbol{R}^{2*}_T \to \boldsymbol{R}$$

ist eine Fundamentallösung von L^*, falls Folgendes gilt:

- *H^* ist stetig, C^2 in den ersten beiden Raumvariablen und C^1 in den letzten beiden Zeitvariablen*
- *Definiere $H^*(x,s,y,t) := H^*(x,y,s,t)$. Dann gilt $L^*(H^*(\cdot,\cdot,y,t)) = 0$ für alle $y \in M$, $0 < t \leq T$*
- $\lim_{s \nearrow t} H^*(\cdot, s, y, t) = \delta_y$ *für alle $y \in M$, $0 \leq s < t \leq T$ (ist $\partial M \neq \emptyset$, so soll das nur für alle $y \in \operatorname{int} M$ gelten)*

  Im Fall $\partial M \neq \emptyset$ fordern wir Dirichlet Randwerte
- *$H^*(x,s,y,t) = 0$ für $x \in \partial M, y \in \operatorname{int} M, 0 \leq s < t \leq T$*

  und nennen H^* eine Dirichlet Fundamentallösung

Ist H^* zusätzlich positiv und minimal (Letzteres heißt per Definition: Ist $\widetilde{H^*}$ eine beliebige positive Fundamentallösung, so folgt $\widetilde{H^*} \geq H^*$), so heißt H^* heat kernel von L^*.

Bemerkung 12.6. Die Bedingung $\lim_{s \nearrow t} H^*(\cdot, s, y, t) = \delta_y$ bedeutet per Definition:

$$\lim_{s \nearrow t} \int_M H^*(x,s,y,t)\phi(x) d\mu_{h(s)}(x) = \phi(y) \text{ für alle } \phi \in C^\infty_c(M)$$

Satz 12.7. *Die Transformation $\boldsymbol{R}^2_T \to \boldsymbol{R}^{2*}_T, (t,s) \to (T-t, T-s)$ induziert eine Bijektion zwischen Fundamentallösungen von L und L^*, genauer: Sei per Definition*

$$h'(t) := h(T-t), Q'(x,t) := Q(x, T-t), \mathcal{R}'(x,t) := \mathcal{R}(x, T-t)$$

für alle $x \in M, 0 \leq t \leq T$. Eine Fundamentallösung H von $L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{h(t)} + Q$ wird abgebildet auf eine Fundamentallösung von $L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{h'(t)} + ((Q' + \mathcal{R}') - \mathcal{R}')$ Eine Fundamentallösung H von $L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{h'(t)} + (Q - \mathcal{R})$ wird abgebildet auf eine Fundamentallösung von $L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{h(t)} + (Q' - \mathcal{R}')$. Diese beiden Abbildungen sind zueinander invers. Außerdem respektieren sie Positivität, Minimalität und Dirichlet Randwerte, falls vorhanden.

Beweis. Sei H eine Fundamentallösung von L. Definiere $H'(x,s,y,t) := H(x,T-s,y,T-t)$. Dann ist H' ebenfalls C^2 in den ersten beiden Raumvariablen und C^1 in den letzten beiden Zeitvariablen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s}H'(x,s,y,t) = -(\frac{\partial}{\partial t}H)(x,T-s,y,T-t)\\
&= -(\Delta_{h(T-s)}H)(x,T-s,y,T-t) + Q(x,T-s)H(x,T-s,y,T-t)\\
&= -(\Delta_{h'(s)}H')(x,s,y,t) + Q'(x,s)H'(x,s,y,t)
\end{aligned}$$

mit $h'(s) := h(T-s), Q'(x,s) := Q(x,T-s)$.

Ferner gilt $\lim\limits_{s\nearrow t} H'(x,s,y,t) = \lim\limits_{s\nearrow t} H(x,T-s,y,T-t) = \delta_y$, genauer:

Sei $\phi \in C_c^\infty(M)$ beliebig.

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\nearrow t}\int_M H'(x,s,y,t)\phi(x)d\mu_{h'(s)}(x)\\
&= \lim_{s\nearrow t}\int_M H(x,T-s,y,T-t)\phi(x)d\mu_{h(T-s)}(x) = \phi(y)
\end{aligned}$$

Außerdem werden Dirichlet Randwerte auf Dirichlet Randwerte abgebildet: $H'(x,s,y,t) = H(x,T-s,y,T-t) = 0$ für $x \in \partial M, y \in \operatorname{int} M, 0 \le s < t \le T$. Des Weiteren ist H' positiv, wenn H positiv ist. Ist H eine minimale positive Fundamentallösung, so auch H'.

Sei umgekehrt H^* eine Fundamentallösung von L^* (bzgl. der Familie von Metriken h'!). Definiere $H'(x,t,y,s) := H^*(x,T-t,y,T-s)$. Dann ist H' ebenfalls C^2 in den ersten beiden Raumvariablen und C^1 in den letzten beiden Zeitvariablen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}H'(x,t,y,s) = -(\frac{\partial}{\partial s}H^*)(x,T-t,y,T-s)\\
&= (\Delta_{h(T-t)}H^*)(x,T-t,y,T-s) - (Q-\mathcal{R})(x,T-t)H^*(x,T-t,y,T-s)\\
&= (\Delta_{h'(t)}H')(x,t,y,s) - (Q'-\mathcal{R}')(x,t)H'(x,t,y,s)
\end{aligned}$$

mit $h'(t) := h(T-t), Q'(x,t) := Q(x,T-t), \mathcal{R}'(x,t) := \mathcal{R}(x,T-t)$.

Ferner gilt $\lim\limits_{t\searrow s} H'(x,t,y,s) = \lim\limits_{t\searrow s} H^*(x,T-t,y,T-s) = \delta_y$, genauer:

Sei $\phi \in C_c^\infty(M)$ beliebig.

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\searrow s}\int_M H'(x,t,y,s)\phi(x)d\mu_{h(t)}(x)\\
&= \lim_{t\searrow s}\int_M H^*(x,T-t,y,T-s)\phi(x)d\mu_{h'(T-t)}(x) = \phi(y)
\end{aligned}$$

Außerdem werden Dirichlet Randwerte auf Dirichlet Randwerte abgebildet: $H'(x,t,y,s) = H^*(x,T-t,y,T-s) = 0$ für $x \in \partial M, y \in \operatorname{int} M, 0 \leq s < t \leq T$. Des Weiteren ist H' positiv, wenn H^* positiv ist. Ist H^* eine minimale positive Fundamentallösung, so auch H'.

Durch Hintereinanderausführen kann man sehen, dass die Abbildungen zueinander invers sind. □

Nun zur Existenz von Fundamentallösungen bzw. heat kerneln:

Satz 12.8. *Sei M kompakt mit nichtleerem Rand. Dann existiert genau eine positive, C^∞ im Inneren, Dirichlet Fundamentallösung H von L. Also ist H der Dirichlet heat kernel.*

Beweis. siehe [17], Theorem 24.32, S. 292 □

Satz 12.9. *Sei M nichtkompakt ohne Rand. Sei Q beschränkt. Dann existiert genau eine C^∞ positive minimale Fundamentallösung H von L. Somit ist H ein C^∞ heat kernel.*

Beweis. siehe [17], Theorem 24.40, S. 302 □

Bemerkung 12.10. Wegen der Bijektion zwischen Fundamentallösungen von L und L^*, die Dirichlet Randwerte respektiert, erhält man somit die gleichen Existenzresultate für Fundamentallösungen H^* von L^*.

Satz 12.11. *Sei M kompakt mit Rand. Seien H eine beliebige Fundamentallösung von L und H^* eine beliebige Fundamentallösung von L^*. Dann gilt*

$$H(x,t,y,s) = H^*(y,s,x,t)$$

für alle $x, y \in M, 0 \leq s < t \leq T$. Insbesondere sind in diesem Fall H und H^* eindeutig bestimmt.

Sei andererseits M nichtkompakt ohne Rand. Seien H die minimale positive Fundamentallösung von L und H^* die minimale positive Fundamentallösung von L^*. Dann folgt ebenfalls

$$H(x,t,y,s) = H^*(y,s,x,t)$$

für alle $x, y \in M, 0 \leq s < t \leq T$.

Beweis. siehe [17], Lemma 26.9, S. 338 und Lemma 26.13, S. 342 □

Das heißt die Transformation $M \times M \times \mathbf{R}^2_T \to M \times M \times \mathbf{R}^{2*}_T, (x,t,y,s) \to (y,s,x,t)$ bildet Fundamentallösungen von $L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{h(t)} + Q$ auf Fundamentallösungen von $L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{h(t)} + (Q - \mathcal{R})$ ab, und ist eine Bijektion zwischen diesen. Insbesondere gilt

Satz 12.12. *Sei M kompakt mit Rand oder nichtkompakt ohne Rand. Sei H der heat kernel von L. Dann gilt*

$$(\frac{\partial}{\partial s}H + \Delta_{y,h(s)}H)(x,t,y,s) + (\mathcal{R} - Q)(y,s)H(x,t,y,s) = 0$$
$$\lim_{s \nearrow t} H(x,t,\cdot,s) = \delta_x$$

Beweis. siehe [17], Lemma 26.9, S. 338 und Lemma 26.13, S. 342 □

Außerdem gilt die Halbgruppeneigenschaft:

Satz 12.13. *Sei M kompakt mit Rand oder nichtkompakt ohne Rand und vollständig bzgl. $h(t)$ für alle $0 \le t \le T$. Sei H der heat kernel von L. Dann gilt*

$$H(x,t,y,s) = \int_M H(x,t,z,\rho)H(z,\rho,y,s)d\mu_{h(\rho)}(z)$$

für alle $x, y \in M, 0 \le s < \rho < t \le T$.

Beweis. siehe [17], Lemma 26.12, S. 341 und Lemma 26.16, S. 344 □

Als Nächstes eine **Übersicht über einige Konstanten**, die **in diesem Kapitel** auftreten:

$\hat{C}_1 = \sup\limits_{\Omega\times[0,T]} |\mathcal{R} - Q|$ oder $\hat{C}_1 = \sup\limits_{M\times[0,T]} |\mathcal{R} - Q|$
$\hat{C}_2 = \sup\limits_{\Omega\times[0,T]} |Q|$ oder $\hat{C}_2 = \sup\limits_{M\times[0,T]} |Q|$
$\widetilde{C}_0 := e^{2\Lambda T}$ mit $\Lambda := \sup\limits_{M\times[0,T]} |\mathfrak{R}|$
$\widetilde{C}_1 = \widetilde{C}_0^{\frac{(n+3)n}{2}} C(n)$
$\widetilde{C}_2 = \widetilde{C}_2(\sup\limits_{\Omega\times[0,T]} |Q|, \sup\limits_{\Omega\times[0,T]} |\mathcal{R}|)$
$\widetilde{C}_3 = \widetilde{C}_3(n)$
$B = \inf\limits_{i\in\mathbf{N}_0} \frac{\gamma^{i+1}}{(i+3)^4(i+2)(\gamma-1)}$ mit $\gamma = 4$
$K > 0$ erfüllt $\mathrm{Ric}_{h(0)} \ge -(n-1)Kh(0)$

Jetzt eine allgemeine Bemerkung über die Abhängigkeit der Konstanten:

Bemerkung 12.14. Die folgenden Abschätzungen sind meistens so, dass wenn man eine Konstante nach oben abschätzt, die Abschätzung immer noch richtig ist. Fiktives Beispiel: Wir haben $u \le e^{\sup_{\Omega\times[0,T]}|\mathcal{R}-Q|}$ gezeigt, und können das auch als $u \le e^C$ mit der Konstanten $C := \sup_{\Omega\times[0,T]} |\mathcal{R} - Q|$ schreiben. Ferner gilt $C \le \sup_{\Omega\times[0,T]} |\mathcal{R}| +$

$\sup_{\Omega\times[0,T]}|Q|$, und außerdem ist die Abschätzung $u \leq e^C$ so, dass wenn man C vergrößert, sie immer noch stimmt! Folglich erhalten wir $u \leq e^{\widetilde{C}}$ mit der Konstanten $\widetilde{C} = \widetilde{C}(\sup_{\Omega\times[0,T]}|\mathcal{R}|, \sup_{\Omega\times[0,T]}|Q|)$.

Im Fall $\Omega \subset M$ eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand bezeichnen wir den heat kernel von Ω auch mit H_Ω.

Lemma 12.15. *Es gilt* $\int_\Omega H_\Omega(x,t,y,s)d\mu_{h(t)}(x) \leq e^{\hat{C}_1(t-s)}$ *für alle* $y \in \operatorname{int}\Omega$ *und* $0 \leq s < t \leq T$, *wobei* $\hat{C}_1 = \sup\limits_{\Omega\times[0,T]}|\mathcal{R}-Q|$.

Beweis. siehe [17], Lemma 26.10, S. 339 □

Lemma 12.16. *Es gilt* $\int_\Omega H_\Omega(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y) \leq e^{\hat{C}_2(t-s)}$ *für alle* $x \in \operatorname{int}\Omega$ *und* $0 \leq s < t \leq T$, *wobei* $\hat{C}_2 = \sup\limits_{\Omega\times[0,T]}|Q|$.

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis des vorigen Lemmas in [17], Lemma 26.10, S. 339: Es gilt $\frac{d}{dt}d\mu_{h(t)} = \mathcal{R}d\mu_{h(t)}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\int_\Omega H_\Omega(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y)\\
&= \int_\Omega (-(\Delta_{y,h(s)}H_\Omega)(x,t,y,s) - (\mathcal{R}-Q)(y,s)H_\Omega(x,t,y,s)+\\
&+\mathcal{R}(y,s)H_\Omega(x,t,y,s))d\mu_{h(s)}(y)\\
&= -\int_\Omega (\Delta_{y,h(s)}H_\Omega)(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y) + \int_\Omega Q(y,s)H_\Omega(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y)\\
&= -\int_{\partial\Omega}\frac{\partial H_\Omega}{\partial\nu_y}(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y) + \int_\Omega Q(y,s)H_\Omega(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y)\\
&\geq \int_\Omega Q(y,s)H_\Omega(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y)\\
&\geq -\hat{C}_2\int_\Omega H_\Omega(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y)
\end{aligned}$$

mit

$$\hat{C}_2 := \sup_{\Omega\times[0,T]}|Q|$$

Dabei bezeichnet $\frac{\partial}{\partial\nu_y}$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen (bzgl. der Variablen y). Dabei haben wir benutzt: $H_\Omega(x,t,y,s) = H^*_\Omega(y,s,x,t)$ für alle $x, y \in \Omega$ und $0 \leq s < t \leq T$ (Satz 12.11), dass $H^*_\Omega(y,s,x,t) = 0$ ist für $x \in \operatorname{int}\Omega$ und $y \in \partial\Omega$, dass $H^* \geq 0$ ist und dass deswegen $\frac{\partial H_\Omega}{\partial\nu_y}(x,t,y,s) = \frac{\partial H^*_\Omega}{\partial\nu_y}(y,s,x,t) \leq 0$ für $x \in \operatorname{int}\Omega$ und $y \in \partial\Omega$ gilt.

Setze

$$f(s) := \int_\Omega H_\Omega(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y), 0 \leq s < t$$

und $0 \leq \varepsilon \leq \sigma < t$. Offenbar gilt

$$\frac{d}{ds} f(s) \geq -\hat{C}_2 f(s)$$

Daraus folgt

$$\int_\varepsilon^\sigma \frac{d}{ds} \log f(s) ds \geq -\hat{C}_2(\sigma - \varepsilon)$$

Somit

$$\log f(\sigma) - \log f(\varepsilon) \geq -\hat{C}_2(\sigma - \varepsilon)$$

und damit

$$f(\varepsilon) \leq f(\sigma) e^{\hat{C}_2(\sigma-\varepsilon)}$$

Wegen $\lim\limits_{\sigma \nearrow t} f(\sigma) = 1$ (das folgt aus $\lim\limits_{s \nearrow t} H_\Omega(x,t,\cdot,s) = \delta_x$, was dem Leser überlassen ist!) folgt

$$f(\varepsilon) \leq e^{\hat{C}_2(t-\varepsilon)}, 0 \leq \varepsilon < t$$

d. h.

$$\int_\Omega H_\Omega(x,t,y,\varepsilon) d\mu_{h(\varepsilon)}(y) \leq e^{\hat{C}_2(t-\varepsilon)}$$

Setzen wir $s = \varepsilon$, erhalten wir die Behauptung. □

Satz 12.17. *Sei M nichtkompakt ohne Rand. Seien* $\sup\limits_M |\sec_{h(0)}|$, $\sup\limits_{M \times [0,T]} |\mathfrak{R}|$, $\sup\limits_{M \times [0,T]} |\nabla \mathfrak{R}| < \infty$. *Dann gilt*

$$e^{-\hat{C}_1(t-s)} \leq \int_M H(x,t,y,s) d\mu_{h(t)}(x) \leq e^{\hat{C}_1(t-s)}$$

für alle $x, y \in M$, $0 \leq s < t \leq T$ und $\hat{C}_1 = \sup\limits_{M \times [0,T]} |Q - \mathcal{R}|$.

Beweis. siehe [17], S. 342, Lemma 26.14 □

Satz 12.18. *Sei M nichtkompakt ohne Rand. Seien* $\sup\limits_M |\sec_{h(0)}|$, $\sup\limits_{M \times [0,T]} |\mathfrak{R}|$, $\sup\limits_{M \times [0,T]} |\nabla \mathfrak{R}| < \infty$. *Dann gilt*

$$e^{-\hat{C}_2(t-s)} \leq \int_M H(x,t,y,s) d\mu_{h(s)}(y) \leq e^{\hat{C}_2(t-s)}$$

für alle $x, y \in M$, $0 \leq s < t \leq T$ und $\hat{C}_2 = \sup\limits_{M \times [0,T]} |Q|$.

Beweis. Sei im Folgenden $\Omega_i, i \in \mathbf{N}$ eine Ausschöpfung von M durch kompakte, zusammenhängende C^∞ Mannigfaltigkeiten mit Rand, d. h. $\Omega_i \subset \operatorname{int}\Omega_{i+1}, i \in \mathbf{N}$ und $\bigcup_i \Omega_i = M$. Siehe auch den ähnlichen Beweis in [17], Lemma 26.14, S. 342.

Die obere Schranke: Es gilt, wenn wir H_{Ω_i} auf ganz M durch 0 fortsetzen, $H_{\Omega_i} \leq H_{\Omega_{i+1}}$ (siehe [17], der Beweis zu Theorem 24.40, S. 302) und $\lim\limits_{i\to\infty} H_{\Omega_i}(x,t,y,s) = H(x,t,y,s)$. Wegen $\int_\Omega H_\Omega(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y) \leq e^{\hat{C}_2(t-s)}$ für alle $x \in \operatorname{int}\Omega$ und $0 \leq s < t \leq T$ (Lemma 12.16) folgt aus dem Satz über die monotone Konvergenz $\int_M H(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y) \leq e^{\hat{C}_2(t-s)}$ für alle $x \in M$ und $0 \leq s < t \leq T$ mit $\hat{C}_2 := \sup\limits_{M\times[0,T]} |Q|$.

Die untere Schranke: Sei ϕ dieselbe cutoff-Funktion wie im Beweis von Lemma 26.14 [17], S.343. Dort wurde bewiesen $|\Delta_{h(s)}\phi| \leq \frac{C_n}{R}$ für alle $0 < s < T$ (und wegen der Stetigkeit auch für $0 \leq s \leq T$). Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
&|\frac{d}{ds}\int_M \phi(y)H(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y)| \\
&= |\int_M \phi(y)\frac{\partial}{\partial s}H(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y) + \int_M \phi(y)H(x,t,y,s)\mathcal{R}(y,s)d\mu_{h(s)}(y)| \\
&= |\int_M \phi(y)(-\Delta_{y,h(s)}H(x,t,y,s) - (\mathcal{R}-Q)(y,s)H(x,t,y,s))d\mu_{h(s)}(y)+ \\
&+ \int_M \phi(y)H(x,t,y,s)\mathcal{R}(y,s)d\mu_{h(s)}(y)| \\
&= |-\int_M \phi(y)\Delta_{y,h(s)}H(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y) + \int_M \phi(y)Q(y,s)H(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y)| \\
&= |\int_M \Delta_{y,h(s)}\phi(y)H(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y) + \int_M \phi(y)Q(y,s)H(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y)| \\
&\leq \frac{C_n}{R}e^{\hat{C}_2(t-s)} + \hat{C}_2\int_M \phi(y)H(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y)
\end{aligned}
$$

wobei wir die obere Schranke $\int_M H(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y) \leq e^{\hat{C}_2(t-s)}$ benutzt haben.

Das ergibt für $0 \leq s_1 < s_2 < t$

$$
\begin{aligned}
&e^{\hat{C}_2(t-s_2)}\int_M \phi(y)H(x,t,y,s_2)d\mu_{h(s_2)}(y) - e^{\hat{C}_2(t-s_1)}\int_M \phi(y)H(x,t,y,s_1)d\mu_{h(s_1)}(y)\\
&=\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial}{\partial s}(e^{\hat{C}_2(t-s)}\int_M \phi(y)H(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y))ds\\
&\leq \int_{s_1}^{s_2}(-\hat{C}_2 e^{\hat{C}_2(t-s)}\int_M \phi(y)H(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y) + e^{\hat{C}_2(t-s)}(\frac{C_n}{R}e^{\hat{C}_2(t-s)}+\\
&+\hat{C}_2\int_M \phi(y)H(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y)))ds\\
&=\int_{s_1}^{s_2}\frac{C_n}{R}e^{2\hat{C}_2(t-s)}ds
\end{aligned}
$$

Lässt man $R \to \infty$ gehen, erhält man

$$\int_M H(x,t,y,s_2)d\mu_{h(s_2)}(y) \leq e^{\hat{C}_2(s_2-s_1)}\int_M H(x,t,y,s_1)d\mu_{h(s_1)}(y)$$

Lässt man $s_2 \to t$ gehen und ersetzt man s_1 durch s, erhält man

$$1 \leq e^{\hat{C}_2(t-s)}\int_M H(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y)$$

und damit

$$e^{-\hat{C}_2(t-s)} \leq \int_M H(x,t,y,s)d\mu_{h(s)}(y)$$

□

Definition 12.19. *Sei (M,h) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Definiere den parabolischen Zylinder $P_h(x,t,r) := B_h(x,r)\times[t-r^2,t]$ mit Basispunkt $(x,t)\in M\times(0,T]$, $0<T\leq\infty$ und $r>0$.*

Bemerkung 12.20. Das ist die Definition aus [17], S. 306, Gleichung (25.7), wobei dort $P_h(x,t,r,-r^2) := B_h(x,r)\times[t-r^2,t]$ gesetzt wird.

Satz 12.21. *Gelte $\mathrm{Ric}_{h(0)} \geq -(n-1)Kh(0)$ in Ω mit $K\geq 0$. Sei $u:\Omega\times[0,T]\to\boldsymbol{R}$ positiv und gelte $\frac{\partial}{\partial t}u \leq \Delta_{h(t)}u - Qu$ in $\Omega\times(0,T]$. Sind $(x_0,t_0)\in\Omega\times(0,T]$ und $r_0>0$ so dass $\overline{P_{h(0)}(x_0,t_0,2r_0)}\subset\Omega\times[0,T]$ so folgt*

$$\sup_{P_{h(0)}(x_0,t_0,r_0)} u \leq \frac{\widetilde{C}_1 e^{\widetilde{C}_2 t_0+\widetilde{C}_3\sqrt{K}r_0}}{r_0^2 V_{h(0)}(x_0,r_0)}\int_{P_{h(0)}(x_0,t_0,2r_0)} u(x,t)d\mu_{h(0)}(x)dt$$

mit $\widetilde{C}_1 = \widetilde{C}_0^{\frac{(n+3)n}{2}}C(n)$, $\widetilde{C}_2 = \widetilde{C}_2(\sup_{\Omega\times[0,T]}|Q|, \sup_{\Omega\times[0,T]}|\mathcal{R}|)$, $\widetilde{C}_3=\widetilde{C}_3(n)$. Dabei ist $\widetilde{C}_0 := e^{2\Lambda T}$ mit $\Lambda := \sup_{M\times[0,T]}|\mathfrak{R}|$.

Beweis. siehe [17], Theorem 25.2, S. 306, und das Setting davor ebenfalls auf S. 306, ab Z. 2. $\square$

Bemerkung 12.22. Obiges $\widetilde{C}_3$ ist das C_3 aus [17], Theorem 25.2, S. 306 multipliziert mit $\sqrt{n-1}$. Das kommt daher, dass wir die Bedingung $\mathrm{Ric}_{h(0)} \geq -Kh(0)$ durch $\mathrm{Ric}_{h(0)} \geq -(n-1)Kh(0)$ ersetzt haben. Auch $\widetilde{C}_3$ hängt damit nur von n ab. $\widetilde{C}_2$ ist C_2 aus [17], $\widetilde{C}_1$ ist ebenfalls C_1 aus [17]. Letzteres sieht man, indem man die Konstante C_1 im Beweis des Theorems 25.2 in [17] (S. 306) verfolgt.

Satz 12.23. *Sei M nichtkompakt. Gelte $\mathrm{Ric}_{h(0)} \geq -(n-1)Kh(0)$ für ein $K > 0$. Seien $\sup\limits_{M} |\sec_{h(0)}|$, $\sup\limits_{M\times[0,T]} |\mathfrak{R}|$, $\sup\limits_{M\times[0,T]} |\nabla\mathfrak{R}| < \infty$. Dann gilt*

$$H(x,t,y,s) \leq \min\{\frac{C_7 e^{C_5 T}}{V_{h(0)}(x, \frac{\sqrt{t-s}}{4})}, \frac{C_7 e^{C_6 T}}{V_{h(0)}(y, \frac{\sqrt{t-s}}{4})}\}$$

für alle $x, y \in M$ und alle $0 \leq s < t \leq T$ mit
$C_5 = C_5(n, K, \sup|\mathfrak{R}|, \sup|Q|, \sup|\mathcal{R}|, \sup|Q-\mathcal{R}|)$,
$C_6 = C_6(n, K, \sup|\mathfrak{R}|, \sup|Q|, \sup|\mathcal{R}|)$ *und* $C_7 = C_7(n, K)$.

Bemerkung 12.24. Im Folgenden ersten Teil des Beweises haben wir $r_0 = \frac{\sqrt{t-s}}{4}$ statt $r_0 = \frac{\sqrt{t-s}}{2}$ wie in [17], S. 346, Beweis des Lemmas 26.17 gewählt, und im zweiten Teil $r_0 = \frac{\sqrt{\sigma}}{4}$ statt $r_0 = \frac{\sqrt{\sigma}}{2}$. Dadurch erhalten wir in den Volumentermen eine 4 statt eine 2 wie in [17]. Entsprechend ändern sich auch Zahlen in folgenden Sätzen!

Beweis. Erster Teil:
Zuerst eine Kopie des Beweises aus [17], S. 346, Lemma 26.17 in unserer Notation: Sei $(y, s) \in M \times [0, T)$ fest aber beliebig und wende die Mittelwertungleichung, d. h. Satz 12.21, auf ein beliebiges Zentrum $(x, t) \in M \times (s, T]$ mit Radius (spatial scale) $r_0 = \frac{\sqrt{t-s}}{4}$ auf die Lösung $u(x,t) := H(x,t,y,s)$ von

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = (\Delta_{h(t)} u)(x,t) - Q(x,t)u(x,t)$$

eingeschränkt auf $M \times [s, T]$ an. Das ergibt

$$\begin{aligned} u(x,t) &\leq \sup_{P_{h(0)}(x,t,\frac{\sqrt{t-s}}{4})} u \\ &\leq \frac{\widetilde{C}_1 e^{\widetilde{C}_2(t-s)+\widetilde{C}_3\sqrt{K}\frac{\sqrt{t-s}}{4}}}{\frac{t-s}{4} V_{h(0)}(x, \frac{\sqrt{t-s}}{4})} \int\limits_{P_{h(0)}(x,t,\frac{\sqrt{t-s}}{2})} u(z,\sigma) d\mu_{h(0)}(z) d\sigma \end{aligned}$$

wobei $P_{h(0)}$ weiter oben definiert ist und $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \widetilde{C}_3$ aus Satz 12.21 sind. Auf der anderen Seite gilt, da $u > 0$ und $P_{h(0)}(x, t, \frac{\sqrt{t-s}}{2}) \subset M \times [s, t]$ ist,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{P_{h(0)}(x,t,\frac{\sqrt{t-s}}{2})} u(z,\sigma) d\mu_{h(0)}(z) d\sigma &\leq \int_s^t \int_M u(z,\sigma) d\mu_{h(0)}(z) d\sigma \\
&\leq \widetilde{C}_0^{n/2} \int_s^t e^{\hat{C}_1(\sigma - s)} d\sigma
\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Ungleichung benutzten, dass für $\sigma \in [s, t]$ gilt

$$\int_M u(z,\sigma) d\mu_{h(0)}(z) \leq \widetilde{C}_0^{n/2} \int_M H(z, \sigma, y, s) d\mu_{g(\sigma)}(z) \leq \widetilde{C}_0^{n/2} e^{\hat{C}_1(\sigma - s)}$$

nach Satz 12.17. Das ergibt

$$H(x,t,y,s) = u(x,t) \leq \frac{4\widetilde{C}_0^{\frac{n}{2}} \widetilde{C}_1 e^{\widetilde{C}_2 T + \frac{\widetilde{C}_3 \sqrt{KT}}{4}}}{V_{h(0)}(x, \frac{\sqrt{t-s}}{4})} \frac{\int_s^t e^{\hat{C}_1(\sigma-s)} d\sigma}{t-s}$$

da $t - s \leq T$, und wir benutzten

$$\frac{\int_s^t e^{\hat{C}_1(\sigma-s)} d\sigma}{t-s} \leq \frac{\int_s^t e^{\hat{C}_1(t-s)} d\sigma}{t-s} = e^{\hat{C}_1(t-s)} \leq e^{\hat{C}_1 T}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$H(x,t,y,s) \leq \frac{C}{V_{h(0)}(x, \frac{\sqrt{t-s}}{4})}$$

mit

$$\begin{aligned}
C &= 4\widetilde{C}_0^{\frac{n}{2}} \widetilde{C}_1 e^{\widetilde{C}_2 T + \frac{\widetilde{C}_3 \sqrt{KT}}{4}} e^{\hat{C}_1 T} \\
&\leq 4\widetilde{C}_0^{(n+4)\frac{n}{2}} C(n) e^{\widetilde{C}_2 T} e^{\hat{C}_1 T} e^{\frac{\widetilde{C}_3 \sqrt{K}}{4}} e^{\frac{\widetilde{C}_3 \sqrt{KT}}{4}} \\
&= C(n, K) e^{C_5 T}
\end{aligned}$$

wobei $C_5 = C_5(n, K, \sup|\mathfrak{R}|, \sup|Q|, \sup|\mathcal{R}|, \sup|Q - \mathcal{R}|)$ gilt und $\sup = \sup\limits_{M\times[0,T]}$ bedeutet. Außerdem benutzten wir $e^{\widetilde{C}_3 \frac{\sqrt{KT}}{2}} \leq e^{\widetilde{C}_3 \frac{\sqrt{K}}{2}} e^{\widetilde{C}_3 \frac{\sqrt{KT}}{2}}$ und es gilt $\widetilde{C}_0 = e^{2\Lambda T}$ mit $\Lambda = \sup_{M\times[0,T]} |\mathfrak{R}|$. Ferner ist $\hat{C}_1 = \sup\limits_{M\times[0,T]} |Q - \mathcal{R}|$ die Konstante aus Lemma 12.17, $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \widetilde{C}_3$ sind die Konstanten aus Satz 12.21.

Zweiter Teil:
Im Folgenden beweisen wir die noch fehlende Abschätzung, d. h. die Übung aus [17] auf S. 347, Z. 5., der Beweis ist ähnlich wie der vorige:
Sei $(x,t) \in M \times (0,T]$ fest und wende die mean value inequality, d. h. Satz 12.21, auf irgendein Zentrum $(y,\sigma) \in M \times (0,t]$ mit Radius (spatial scale) $r_0 = \frac{\sqrt{\sigma}}{4}$ auf die Lösung $u(y,\sigma) := H(x,t,y,t-\sigma)$ von

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \sigma}(y,\sigma) &= -(\frac{\partial}{\partial s}H)(x,t,y,t-\sigma)\\ &= (\Delta_{y,h(t-\sigma)}H)(x,t,y,t-\sigma) + (\mathcal{R}-Q)(y,t-\sigma)H(x,t,y,t-\sigma)\\ &= (\Delta_{y,h'(\sigma)}u)(y,\sigma) + (\mathcal{R}'-Q')(y,\sigma)u(y,\sigma)\end{aligned}$$

eingeschränkt auf $M \times [0,t]$ an.
Dabei seien $h'(\sigma) := h(t-\sigma), \mathcal{R}'(y,\sigma) := \mathcal{R}(y,t-\sigma), Q'(y,\sigma) := Q(y,t-\sigma)$. Das ergibt

$$u(y,\sigma) \leq \sup_{P_{h(0)}(y,\sigma,\frac{\sqrt{\sigma}}{4})} u \leq \frac{\widetilde{C}_1 e^{\widetilde{C}_2\sigma + \widetilde{C}_3\frac{\sqrt{K\sigma}}{4}}}{\frac{\sigma}{4}V_{h(0)}(y,\frac{\sqrt{\sigma}}{2})} \int\limits_{P_{h(0)}(y,\sigma,\frac{\sqrt{\sigma}}{2})} u(y',\sigma')d\mu_{h'(0)}(y')d\sigma'$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_{P_{h(0)}(y,\sigma,\frac{\sqrt{\sigma}}{2})} u(y',\sigma')d\mu_{h'(0)}(y')d\sigma' &\leq \int_0^\sigma \int_M u(y',\sigma')d\mu_{h'(0)}(y')d\sigma'\\ &\leq \widetilde{C}_0^{\frac{n}{2}} \int_0^\sigma e^{\hat{C}_2\sigma'}d\sigma'\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Ungleichung benutzten ($\sigma' \in [0,\sigma]$)

$$\int_M u(y',\sigma')d\mu_{h'(0)}(y') \leq \widetilde{C}_0^{\frac{n}{2}} \int_M H(x,t,y',t-\sigma')d\mu_{h(t-\sigma')}(y') \leq \widetilde{C}_0^{\frac{n}{2}} e^{\hat{C}_2\sigma'}$$

nach Satz 12.18. Daraus folgt

$$H(x,t,y,t-\sigma) = u(y,\sigma) \leq \frac{4\widetilde{C}_0^{\frac{n}{2}}\widetilde{C}_1 e^{\widetilde{C}_2 T + \widetilde{C}_3\frac{\sqrt{KT}}{4}}}{V_{h(0)}(y,\frac{\sqrt{\sigma}}{4})} \frac{\int_0^\sigma e^{\hat{C}_2\sigma'}d\sigma'}{\sigma}$$

Dies impliziert

$$H(x,t,y,s) \leq \frac{4\widetilde{C}_0^{\frac{n}{2}}\widetilde{C}_1 e^{\widetilde{C}_2 T + \widetilde{C}_3\frac{\sqrt{KT}}{4}} e^{\hat{C}_2 T}}{V_{h(0)}(y,\frac{\sqrt{t-s}}{4})} \leq \frac{C(n,K)e^{C_6 T}}{V_{h(0)}(y,\frac{\sqrt{t-s}}{2})}$$

(dabei benutzten wir $\int_0^\sigma e^{\hat{C}_2\sigma'}d\sigma' \leq \int_0^\sigma e^{\hat{C}_2 T}d\sigma' = \sigma e^{\hat{C}_2 T}$ und $e^{\widetilde{C}_3\frac{\sqrt{KT}}{2}} \leq e^{\widetilde{C}_3\frac{\sqrt{K}}{2}} e^{\widetilde{C}_3\frac{\sqrt{KT}}{2}}$)
mit $C_6 = C_6(n,K,\sup|\mathfrak{R}|,\sup|Q|,\sup|\mathcal{R}|)$. □

Definition 12.25. *((γ, A)-regulär) Eine stetige, strikt wachsende Funktion $f : (0,T] \to (0,\infty)$ heißt (γ, A)-regulär, wobei $\gamma > 1$ und $A \geq 1$, falls*

$$\frac{f(t_1)}{f(t_1/\gamma)} \leq A \frac{f(t_2)}{f(t_2/\gamma)}$$

für alle $0 < t_1 \leq t_2 \leq T$ gilt.

Bemerkung 12.26. Diese Definition ist aus [17], S. 347.

Lemma 12.27. *Sei $0 < T < \infty$. Sei $h(t), t \in [0,T]$ eine C^∞ Familie von C^∞ Riemannschen Metriken auf M und $Q : \Omega \times [0,T] \to \boldsymbol{R}$ C^∞ und beschränkt, wobei $\Omega \subset M$ eine kompakte C^∞ Mannigfaltigkeit mit Rand sei. (Achtung: Dies ist ein anderes T und eine andere Familie von Metriken $h(t)$ und ein anderes Q als zu Beginn des Kapitels beschrieben!). Seien $h(t)$ vollständig für alle $0 \leq t \leq T$ und gelte $h(a)\frac{1}{\widetilde{D}} \leq h(b) \leq h(a)\widetilde{D}$ für ein $\widetilde{D} > 0$ und für alle $a, b \in [0,T]$. Sei K eine kompakte Menge mit $K \subset \operatorname{int}\Omega$. Es existieren $C := 2(1-\gamma^{-1}) \sup |Q - \frac{1}{2}\mathcal{R}|$ und $D := \frac{16}{B}\widetilde{D}$ (aufpassen: anderes $\mathcal{R}$!) mit den folgenden Eigenschaften: Sei entweder $u : \Omega \times [0,T] \to \boldsymbol{R}$ eine Lösung von*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{h(t)} u - Qu \tag{7}$$

mit Dirichlet Randwerten

$$u|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0$$

und

$$\operatorname{supp} u(\cdot, 0) \subset K$$

d. h. für $x \in \Omega - K$ gilt $\lim_{t \searrow 0} u(x,t) = 0$ lokal gleichmäßig, oder gelte $K = \{y\}$ für ein $y \in \operatorname{int}\Omega$ und u sei der Dirichlet heat kernel der Gleichung (7) in Ω mit $u(\cdot, 0) = \delta_y$. Falls gilt

$$\int_\Omega u^2(x,t) d\mu_{h(t)}(x) \leq \frac{1}{f(t)}$$

für alle $t \in (0,T]$, wobei f (γ, A)-regulär ist, dann folgt

$$\int_\Omega u^2(x,t) e^{\frac{d^2_{h(0)}(x,K)}{Dt}} d\mu_{h(t)}(x) \leq \frac{4Ae^{Ct}}{f(t/\gamma)}$$

für alle $t \in (0,T]$.

Beweis. Für den „entweder"Teil siehe [17], S. 348, Lemma 26.21. Dabei ist unser $\widetilde{D}$ dort $\widetilde{C}_0$. Die im Lemma aufgeführte Abhängigkeit der Konstanten folgt aus dem Beweis des Lemmas 26.21 in [17]. Wir beweisen den „oder"Teil:

Es reicht zu zeigen, dass der Dirichlet heat kernel $H(x,t,y,s)$ in Ω auf $\Omega - \{y\}$ lokal gleichmäßig (in x) gegen 0 konvergiert (für $t \searrow s$). Nach [17], Kapitel 24, Subsection 5.2, S. 290-292 ist der Dirichlet heat kernel $H(x,t,y,s)$ in Ω gegeben durch

$$H(x,t,y,s) = \widetilde{H}(x,t,y,s) + f_{y,s}(x,t)$$

für alle $x, y \in \Omega, (t,s) \in \mathbf{R}_T^2$; hierbei ist $\widetilde{H} : \widetilde{\Omega} \times \widetilde{\Omega} \times \mathbf{R}_T^2$ der heat kernel von $\widetilde{L} := \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{\widetilde{h}(t)} + \widetilde{Q}$ auf einer C^∞ kompakten Mannigfaltigkeit $\widetilde{\Omega}$ ohne Rand mit einer C^∞ Familie Riemannscher Metriken $\widetilde{h}(t), t \in [0,T]$ und einer C^∞ Funktion $\widetilde{Q} : \widetilde{\Omega} \times [0,T] \to \mathbf{R}$, wobei $\widetilde{\Omega}$ eine Eweiterung von Ω und $\widetilde{h}(t), t \in [0,T]$, $\widetilde{Q}$ Erweiterungen von $h(t), t \in [0,T]$ und Q sind (genaugenommen Erweiterungen der Einschränkungen von $h(t), t \in [0,T]$ und Q auf Ω), und $f_{y,s} : \Omega \times [s,T] \to \mathbf{R}$ ist stetig, C^∞ im Inneren und erfüllt $Lf_{y,s} = 0$ ($L := \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_{h(t)} + Q$) mit den Randbedingungen $f_{y,s}(x,s) = 0$ für alle $x \in \operatorname{int}\Omega$, $f_{y,s}(x,t) = -\widetilde{H}(x,t,y,s)$ für alle $x \in \partial\Omega, t \in (s,T]$.

Da Ω kompakt, $f_{y,s}$ stetig ist und wegen $f_{y,s}(x,s) = 0$ für alle $x \in \operatorname{int}\Omega$ (wegen der Stetigkeit auch für alle $x \in \Omega$) konvergiert $f_{y,s}$ gleichmäßig gegen 0 (für $t \searrow s$). Die asymptotische Entwicklung von $\widetilde{H}$ in [17], Theorem 24.21 (S. 279) liefert die Darstellung

$$\widetilde{H}(x,t,y,s) = w_N(x,t,y,s) + (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{d_{\widetilde{h}(t)}(x,y)}{4(t-s)}} \sum_{k=0}^{N} (t-s)^k u_k(x,t,y,s)$$

für alle $x, y \in M, 0 \leq s < t \leq T$, wobei die Funktionen $u_j : \widetilde{\Omega} \times \widetilde{\Omega} \times \overline{\mathbf{R}_T^2} \to \mathbf{R}$ C^∞ sind und es gilt

$$w_N(x,t,y,s) = O((t-s)^{N+1-\frac{n}{2}})$$

für $t \searrow s$ gleichmäßig für alle $x, y \in \widetilde{\Omega}$. Wähle $N > \frac{n}{2}$. Dann folgt $w_N \to 0$ ($t \searrow s$) gleichmäßig in x (y fest). Außerdem gilt

$$(4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{d_{\widetilde{h}(t)}(x,y)}{4(t-s)}} \to 0$$

($t \searrow s$) lokal gleichmäßig in $x \in \widetilde{\Omega} - \{y\}$, denn: Sei $K \subset \widetilde{\Omega} - \{y\}$ kompakt. Dann gilt $d_{\widetilde{h}(t)}(x,y) \geq r$ für ein $r > 0$ und alle $x \in K$, da alle Metriken $d_{\widetilde{h}(t)}$ gleichmäßig äquivalent sind (siehe Appendix B). Daraus folgt

$$4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{d_{\widetilde{h}(t)}(x,y)}{4(t-s)}} \leq 4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r}{4(t-s)}} \to 0$$

($t \searrow s$) für alle $x \in K$.

Da die Funktionen $u_j, j = 1, ..., N$ beschränkt sind, kovergiert somit $\widetilde{H}$ auf $\widetilde{\Omega} - \{y\}$ lokal gleichmäßig (in x) gegen 0 (für $t \searrow s$).

Also folgt, dass der Dirichlet heat kernel $H(x,t,y,s)$ in Ω auf $\Omega - \{y\}$ lokal gleichmäßig (in x) gegen 0 konvergiert (für $t \searrow s$) und damit die Behauptung. $\square$

Lemma 12.28. *Sei M nichtkompakt. Gelte $\mathrm{Ric}_{h(0)} \geq -(n-1)Kh(0)$ für ein $K > 0$. Seien $\sup\limits_M |\sec_{h(0)}|$, $\sup\limits_{M\times[0,T]} |\mathfrak{R}|$, $\sup\limits_{M\times[0,T]} |\nabla\mathfrak{R}| < \infty$. Dann folgt*

$$\int_M H^2(x,t,y,s) e^{\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{\frac{16}{B} e^{\int_0^T C(\tau)d\tau}(t-s)}} d\mu_{h(t)}(x) \leq \frac{C_9 e^{C_{10}T}}{V_{h(0)}(y, \frac{\sqrt{t-s}}{8})}$$

mit $C_9 = C_9(n,K)$ und $C_{10} = C_{10}(n, K, \sup|\mathfrak{R}|, \sup|Q|, \sup|\mathcal{R}|, \sup|Q-\mathcal{R}|)$ und

$$\int_M H^2(x,t,y,s) e^{\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{\frac{16}{B} e^{\int_0^T C(\tau)d\tau}(t-s)}} d\mu_{h(s)}(y) \leq \frac{C_{12} e^{C_{13}T}}{V_{h(0)}(x, \frac{\sqrt{t-s}}{8})}$$

mit $C_{12} = C_{12}(n,K)$ und $C_{13} = C_{13}(n, K, \sup|\mathfrak{R}|, \sup|Q|, \sup|\mathcal{R}|, \sup|Q-\mathcal{R}|)$.

Beweis. Wir beweisen zuerst die 1. Ungleichung. Dies ist im Wesentlichen eine Reproduktion des Beweises von Lemma 26.23 auf S. 354 in [17]: Sei $\{\Omega_i, i \in \mathbf{N}\}$ eine Ausschöpfung von M. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_i} H^2_{\Omega_i}(x,t,y,s) d\mu_{h(t)}(x) \leq \frac{C_7 e^{C_6 T}}{V_{h(0)}(y, \frac{\sqrt{t-s}}{4})} \int_{\Omega_i} H_{\Omega_i}(x,t,y,s) d\mu_{h(t)}(x) \\
&\leq \frac{C_7 e^{C_6 T} e^{\hat{C}_1 T}}{V_{h(0)}(y, \frac{\sqrt{t-s}}{4})} = \frac{C_7 e^{C_8 T}}{V_{h(0)}(y, \frac{\sqrt{t-s}}{4})}
\end{aligned}$$

mit $\hat{C}_1 = \sup|Q - \mathbf{R}|$ und $C_8 = C_8(n, K, \sup|\mathfrak{R}|, \sup|Q|, \sup|\mathcal{R}|, \sup|Q-\mathcal{R}|)$ wegen der Sätze 12.17 und 12.23. Für $y \in \operatorname{int}\Omega_i$ und $s \in [0,T)$ definiere $G_i : \Omega_i \times (0, T-s] \to \mathbf{R}$ durch $G_i(x,\sigma) := H_{\Omega_i}(x, s+\sigma, y, s)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\sigma} G_i(x,\sigma) &= \frac{\partial}{\partial t} H_{\Omega_i}(x, s+\sigma, y, s) \\
&= \Delta_{h(s+\sigma)} H_{\Omega_i}(x, s+\sigma, y, s) - Q(x, s+\sigma) H_{\Omega_i}(x, s+\sigma, y, s) \\
&= \Delta_{h'(\sigma)} G_i(x,\sigma) - Q'(x,\sigma) G_i(x,\sigma)
\end{aligned}$$

mit $h'(\sigma) := h(s+\sigma)$ und $Q'(x,\sigma) := Q(x, s+\sigma)$. Definiere $f : (0, T-s] \to (0,\infty)$ durch $f(\sigma) := \frac{1}{C_7 e^{C_8 T}} V_{h(0)}(y, \frac{\sqrt{\sigma}}{4})$. Dann folgt $\int_{\Omega_i} G_i^2(x,\sigma) d\mu_{h'(\sigma)}(x) \leq \frac{1}{f(\sigma)}$. Wir können somit Lemma 12.27 anwenden mit $\Omega = \Omega_i, K = \{y\}, h = h'(\sigma), \sigma \in [0, T-s], Q = Q'(x,\sigma), u = G_i(x,\sigma)$. Sei $\mathcal{R}'(x,\sigma) = \mathcal{R}(x, s+\sigma)$ zu h' gehörig. Bemerke $\sup\limits_{\Omega_i \times [0,T-s]} |Q'| \leq$

$\sup\limits_{M\times[0,T]}|Q|$ und $\sup\limits_{\Omega_i\times[0,T-s]}|\mathcal{R}'| \leq \sup\limits_{M\times[0,T]}|\mathcal{R}|$. Bemerke außerdem, dass $h'(a)$ und $h'(b)$ mit der Konstanten $\widetilde{D} := e^{\int_0^T C(\tau)d\tau}$ äquivalent sind. Bemerke schließlich, dass f (γ, A)-regulär mit $\gamma = 4$ und $A = \frac{V^{-K}(\frac{\sqrt{T}}{4})}{V^{-K}(\frac{\sqrt{T}}{8})}$, wobei $V^H(r)$ das Volumen eines Balles vom Radius $r > 0$ in der n-dimensionalen, vollständigen, einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $H \in \mathbf{R}$ bezeichnet, ist (siehe [17], S. 355, Z. 3 ff. (wir haben K durch $(n-1)K$ ersetzt!)). Das ergibt

$$\int_{\Omega_i} G_i^2(x,\sigma)e^{\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{D\sigma}}d\mu_{h'(\sigma)}(x) \leq \frac{4Ae^{C\sigma}}{f(\sigma/4)}$$

mit $C = 2(1-\gamma^{-1})(\sup\limits_{M\times[0,T]}|Q| + \sup\limits_{M\times[0,T]}|\mathcal{R}|)$ und $D = \frac{16}{B}e^{\int_0^T C(\tau)d\tau}$. Nimmt man den Limes $i \to \infty$ und ersetzt $\sigma = t - s$, erhält man

$$\int_M H^2(x,t,y,s)e^{\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{D(t-s)}}d\mu_{h(t)}(x) \leq \frac{4Ae^{C(t-s)}}{f(\frac{t-s}{4})} \leq \frac{4Ae^{CT}C_7e^{C_8T}}{V_{h(0)}(y,\frac{\sqrt{t-s}}{8})}$$

Wir zeigen noch $A \leq C(n,K)e^{C(n,K)T}$: Mit Satz C.6 erhalten wir

$$\frac{V^{-K}(\frac{\sqrt{T}}{4})}{V^{-K}(\frac{\sqrt{T}}{8})} \leq C(n,k)e^{\widetilde{C}(n,K)\frac{\sqrt{T}}{8}} \leq C(n,K)e^{\frac{\widetilde{C}(n,K)}{8}}e^{\frac{\widetilde{C}(n,K)}{8}T}$$

Daraus folgt schließlich $\int_M H^2(x,t,y,s)e^{\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{D(t-s)}}d\mu_{h(t)}(x) \leq \frac{C_9e^{C_{10}T}}{V_{h(0)}(y,\frac{\sqrt{t-s}}{8})}$ mit $C_9 = C_9(n,K)$ und $C_{10} = C_{10}(n,K,\sup|\mathfrak{R}|,\sup|Q|,\sup|\mathcal{R}|,\sup|Q-\mathcal{R}|)$.

Wir beweisen jetzt die 2. Ungleichung, d. h. Gleichung (26.62) auf S. 354 in [17], der Beweis ist analog zu vorigem:
Definiere für festes $t \in (0,T]$ und $x \in \operatorname{int}\Omega_i$

$$G_i(y,\sigma) := H_{\Omega_i}(x,t,y,t-\sigma), y \in \operatorname{int}\Omega_i, \sigma \in (0,t]$$

Dann erfüllt G_i die Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\sigma}G_i(y,\sigma) &= -\frac{\partial}{\partial s}H_{\Omega_i}(x,t,y,t-\sigma)\\
&= \Delta_{y,h(t-\sigma)}H_{\Omega_i}(x,t,y,t-\sigma) + (\mathcal{R}-Q)(y,t-\sigma)H_{\Omega_i}(x,t,y,t-\sigma)\\
&= \Delta_{y,h'(\sigma)}G_i(y,\sigma) + (\mathcal{R}'-Q')(y,\sigma)G_i(y,\sigma)
\end{aligned}$$

mit

$$h'(\sigma) := h(t-\sigma), \mathcal{R}'(y,\sigma) := \mathcal{R}(y,t-\sigma), Q'(y,\sigma) := Q(y,t-\sigma)$$

Es gilt

$$H_{\Omega_i}(x,t,y,s) \leq H(x,t,y,s) \leq \frac{C_7 e^{C_5 T}}{V_{h(0)}(x, \frac{\sqrt{t-s}}{4})}$$

nach Satz 12.23. Das impliziert nach Satz 12.18

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i} H^2_{\Omega_i}(x,t,y,s) d\mu_{h(s)}(y) &\leq \frac{C_7 e^{C_5 T}}{V_{h(0)}(x, \frac{\sqrt{t-s}}{4})} \int_{\Omega_i} H_{\Omega_i}(x,t,y,s) d\mu_{h(s)}(y) \\
&\leq \frac{C_7 e^{C_5 T}}{V_{h(0)}(x, \frac{\sqrt{t-s}}{4})} e^{\hat{C}_2(t-s)} \\
&\leq \frac{C_7 e^{C_5 T} e^{\hat{C}_2 T}}{V_{h(0)}(x, \frac{\sqrt{t-s}}{4})} = \frac{C_7 e^{C_{11} T}}{V_{h(0)}(x, \frac{\sqrt{t-s}}{4})}
\end{aligned}$$

mit $C_{11} = C_{11}(n, K, \sup |\mathfrak{R}|, \sup |Q|, \sup |\mathcal{R}|, \sup |Q - \mathcal{R}|)$.
Definiere

$$f : (0,t] \to (0,\infty), f(\sigma) = \frac{1}{C_7 e^{C_{11} T}} V_{h(0)}(x, \frac{\sqrt{\sigma}}{4})$$

Dann erfüllt G_i die Abschätzung

$$\int_{\Omega_i} G_i^2(y,\sigma) d\mu_{h'(\sigma)}(y) = \int_{\Omega_i} H^2_{\Omega_i}(x,t,y,t-\sigma) d\mu_{h(t-\sigma)}(y) \leq \frac{C_7 e^{C_{11} T}}{V_{h(0)}(x, \frac{\sqrt{\sigma}}{4})} = \frac{1}{f(\sigma)}$$

Dieses f ist wiederum (γ, A)-regulär mit $\gamma = 4$ und

$$A = \frac{V^{-K}(\frac{\sqrt{T}}{4})}{V^{-K}(\frac{\sqrt{T}}{8})}$$

Nach Lemma 12.27 folgt

$$\int_{\Omega_i} G_i^2(y,\sigma) e^{\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{\frac{16}{B} e^{\int_0^T C(\tau)d\tau} \sigma}} d\mu_{h'(\sigma)}(y) \leq \frac{4Ae^{C\sigma}}{f(\sigma/4)}$$

mit $C = 2(1-\gamma^{-1})(\sup_{M\times[0,T]} |Q| + \sup_{M\times[0,T]} |\mathcal{R}|)$ also

$$\int_{\Omega_i} H^2_{\Omega_i}(x,t,y,t-\sigma) e^{\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{\frac{16}{B} e^{\int_0^T C(\tau)d\tau} \sigma}} d\mu_{h(t-\sigma)}(y) \leq \frac{4Ae^{C\sigma}}{f(\sigma/4)}$$

und indem man $\sigma = t - s$ einsetzt

$$\int_{\Omega_i} H^2_{\Omega_i}(x,t,y,s) e^{\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{\frac{16}{B} e^{\int_0^T C(\tau)d\tau} (t-s)}} d\mu_{h(s)}(y) \leq \frac{4Ae^{C(t-s)}}{f((t-s)/4)}$$

Indem man $i \to \infty$ gehen lässt folgt

$$\int_M H^2(x,t,y,s) e^{\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{\frac{16}{B} e^{\int_0^T C(\tau)d\tau}(t-s)}} d\mu_{h(s)}(y) \leq \frac{4Ae^{C(t-s)}}{f((t-s)/4)} \leq \frac{C_{12}e^{C_{13}T}}{V_{h(0)}(x, \frac{\sqrt{t-s}}{8})}$$

mit $C_{12} = C_{12}(n,K)$ und $C_{13} = C_{13}(n, K, \sup|\mathfrak{R}|, \sup|Q|, \sup|\mathcal{R}|, \sup|Q-\mathcal{R}|)$. □

Theorem 12.29. *Sei M nichtkompakt. Gelte $\mathrm{Ric}_{h(0)} \geq -(n-1)Kh(0)$ für ein $K > 0$. Seien $\sup_M |\sec_{h(0)}|$, $\sup_{M\times[0,T]} |\mathfrak{R}|$, $\sup_{M\times[0,T]} |\nabla\mathfrak{R}| < \infty$. Es existieren $C_1 = C_1(n,K) < \infty$, $C_2 = C_2(n, K, \sup|\mathfrak{R}|, \sup|Q|, \sup|\mathcal{R}|, \sup|\mathcal{R}-Q|) < \infty$, so dass gilt*

$$H(x,t,y,s) \leq \frac{C_1 e^{C_2 T} e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{\frac{32}{B} e^{\int_0^T C(\tau)d\tau}(t-s)}}}{V^{1/2}_{h(0)}(x, \sqrt{\frac{t-s}{128}}) V^{1/2}_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t-s}{128}})}$$

für alle $x, y \in M$ und $0 \leq s < t \leq T$.

Beweis. Es folgt eine Kopie des Beweises aus [17], S. 356, Theorem 26.25, in unserer Notation und mit unseren Abschätzungen: Sei $D := \frac{16}{B} e^{\int_0^T C(\tau)d\tau} \in (0,\infty)$. Es gilt

$$\frac{d^2_{h(0)}(x,z)}{t-\rho} + \frac{d^2_{h(0)}(z,y)}{\rho-s} \geq \frac{(d_{h(0)}(x,z) + d_{h(0)}(z,y))^2}{(t-\rho)+(\rho-s)} \geq \frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{t-s}$$

für alle $x, y, z \in M$ und alle $s < \rho < t$. Daraus und aus der Halbgruppeneigenschaft Satz 12.13 folgt

$$\begin{aligned}
H(x,t,y,s) &= \int_M H(x,t,z,\rho) H(z,\rho,y,s) d\mu_{h(\rho)}(z) \\
&\leq e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{2D(t-s)}} \int_M H(x,t,z,\rho) e^{\frac{d^2_{h(0)}(x,z)}{2D(t-\rho)}} H(z,\rho,y,s) e^{\frac{d^2_{h(0)}(z,y)}{2D(\rho-s)}} d\mu_{h(\rho)}(z) \\
&\leq e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{2D(t-s)}} (\int_M H^2(x,t,z,\rho) e^{\frac{d^2_{h(0)}(x,z)}{D(t-\rho)}} d\mu_{h(\rho)}(z))^{\frac{1}{2}} (\int_M H^2(z,\rho,y,s) e^{\frac{d^2_{h(0)}(z,y)}{D(\rho-s)}} d\mu_{h(\rho)}(z))^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Hölderschen Ungleichung folgt. Setzen wir die Abschätzungen aus Lemma 12.28 ein, erhalten wir

$$H(x,t,y,s) \leq \frac{C_1 e^{C_2 T} e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{\frac{32}{B} e^{\int_0^T C(\tau)d\tau}(t-s)}}}{V^{1/2}_{h(0)}(x, \frac{\sqrt{t-\rho}}{8}) V^{1/2}_{h(0)}(y, \frac{\sqrt{\rho-s}}{8})}$$

für alle $x, y \in M$ und $0 \leq s < t \leq T$ mit $C_1 := \max\{C_9, C_{12}\}, C_2 := \max\{C_{10}, C_{13}\}$. Setzen wir $\rho = \frac{t+s}{2}$, erhalten wir die Behauptung. □

Daraus erhalten wir folgende Version:

Theorem 12.30. *Sei M nichtkompakt. Gelte* $\mathrm{Ric}_{h(0)} \geq -(n-1)Kh(0)$ *für ein* $K > 0$. *Seien* $\sup_M |\sec_{h(0)}|$, $\sup_{M\times[0,T]} |\mathfrak{R}|$, $\sup_{M\times[0,T]} |\nabla\mathfrak{R}| < \infty$. *Es existieren* $C_1 = C_1(n,K) < \infty$, $C_2 = C_2(n, K, \sup|\mathfrak{R}|, \sup|Q|) < \infty$ *und eine universelle Konstante* $C > 0$, *so dass gilt*

$$H(x,t,y,0) \leq \frac{C_1 e^{C_2 t} e^{-\frac{C d^2_{h(t)}(x,y)}{t e^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}}}{V^{1/2}_{h(0)}(x, \sqrt{\frac{t}{128}}) V^{1/2}_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t}{128}})}$$

für alle $x, y \in M$ *und* $0 < t$.

Beweis. Aus Theorem 12.29, wegen Korollar A.6, Bemerkung 12.14 und da B eine universelle Konstante ist, kann man die Abhängigkeit der Konstanten auch so schreiben: Es existieren $C_1 = C_1(n,K) < \infty$, $C_2 = C_2(n, K, \sup|\mathfrak{R}|, \sup|Q|) < \infty$ und eine universelle Konstante $C > 0$, so dass gilt

$$H(x,t,y,s) \leq \frac{C_1 e^{C_2 T} e^{-\frac{C d^2_{h(0)}(x,y)}{e^{\int_0^T C(\tau)d\tau}(t-s)}}}{V^{1/2}_{h(0)}(x, \sqrt{\frac{t-s}{128}}) V^{1/2}_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t-s}{128}})}$$

für alle $x, y \in M$ und $0 \leq s < t \leq T$.

Benutzt man die Äquivalenz der Abstandsfunktionen, erhält man

$$H(x,t,y,s) \leq \frac{C_1 e^{C_2 T} e^{-\frac{C d^2_{h(T)}(x,y)}{e^{2\int_0^T C(\tau)d\tau}(t-s)}}}{V^{1/2}_{h(0)}(x, \sqrt{\frac{t-s}{128}}) V^{1/2}_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t-s}{128}})}$$

für alle $x, y \in M$ und $0 \leq s < t \leq T$.

Da die Abschätzung insbesondere für $t = T$ gilt, folgt

$$H(x,t,y,s) \leq \frac{C_1 e^{C_2 t} e^{-\frac{C d^2_{h(t)}(x,y)}{e^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}(t-s)}}}{V^{1/2}_{h(0)}(x, \sqrt{\frac{t-s}{128}}) V^{1/2}_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t-s}{128}})}$$

für alle $x, y \in M$ und $0 \leq s < t$.

$s = 0$ liefert

$$H(x,t,y,0) \leq \frac{C_1 e^{C_2 t} e^{-\frac{C d^2_{h(t)}(x,y)}{t e^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}}}{V^{1/2}_{h(0)}(x, \sqrt{\frac{t}{128}}) V^{1/2}_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t}{128}})}$$

für alle $x, y \in M$ und $0 < t$. □

Wir bemerken, dass auch die Variante ohne explizite Ausweisung der T-Abhängigkeit der Konstanten gilt:

Theorem 12.31. *Sei M nichtkompakt. Gelte* $\mathrm{Ric}_{h(0)} \geq -(n-1)Kh(0)$ *für ein* $K > 0$. *Seien* $\sup\limits_M |\sec_{h(0)}|$, $\sup\limits_{M\times[0,T]} |\mathfrak{R}|$, $\sup\limits_{M\times[0,T]} |\nabla\mathfrak{R}| < \infty$. *Es existieren* $C_3 = C_3(n, T, K, \sup|\mathfrak{R}|, \sup|Q|) < \infty$ *und* $C_4 = C_4(T, \sup|\mathfrak{R}|) < \infty$, *so dass gilt*

$$H(x,t,y,s) \leq \frac{C_3 e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{C_4(t-s)}}}{V^{1/2}_{h(0)}(x, \sqrt{\frac{t-s}{128}}) V^{1/2}_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t-s}{128}})}$$

für alle $x, y \in M$ *und* $0 \leq s < t \leq T$.

Beweis. Das folgt aus Theorem 12.29, oder auch aus [17], S. 355, Theorem 26.25 □

Bemerkung 12.32. Hier wurde die Abhängigkeit der Konstante C_3 von Q eingefügt!

13 Gaußsche Abschätzungen für (Sub)Lösungen

In diesem Kapitel haben wir ein ähnliches Setting wie im vorigen Kapitel:

Sei M eine n-dimensionale zusammenhängende C^∞ Mannigfaltigkeit. Wir unterscheiden 2 Fälle: Entweder ist M nichtkompakt ohne Rand, oder M ist kompakt mit Rand.

Der 2. Fall tritt in folgendem Zusammenhang auf:
Sei $U \subset M$, wobei M nichtkompakt ist und keinen Rand hat, eine echte offene zusammenhängende Teilmenge mit glattem Rand, so dass $\Omega := \overline{U}$ kompakt ist. Ω ist dann eine C^∞, kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand.

Sei $h(t), t \in [0, \infty)$ eine C^∞ Familie von C^∞ Riemannschen Metriken auf M. Definiere $\frac{\partial}{\partial t} h = 2\mathfrak{R}$, d. h. $\mathfrak{R}$ ist ein zeitabhängiger symmetrischer $(0, 2)$-Tensor. Definiere $\mathcal{R} = \operatorname{tr} \mathfrak{R}$. (Das bedeutet in lokalen Koordinaten: $\frac{d}{dt} h_{ij} = 2\mathfrak{R}_{ij}$ und $\mathcal{R} = h^{ij}\mathfrak{R}_{ij}$).

Sei $Q : M \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ C^∞ und beschränkt.

Sei außerdem $0 < T < \infty$ fest aber beliebig und betrachte entsprechend die Einschränkung (z. B. von der Metrik h) auf $M \times [0, T]$.

Gelten
$\sup\limits_{M\times[0,\infty)} |\mathcal{R} - Q| < \infty$, $\sup\limits_{M\times[0,\infty)} |Q| < \infty$, $\sup\limits_{M\times[0,\infty)} |\mathfrak{R}| < \infty$, $\sup\limits_{M\times[0,T]} |\nabla\mathfrak{R}| < \infty$,
$\sup_M |\sec_{h(0)}| < \infty$, $\operatorname{Ric}_{h(0)} \geq -(n-1)Kh(0)$ für ein $K > 0$

Sei $C : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion mit $|\frac{d}{dt} h|(x, t) = 2|\mathfrak{R}|(x, t) \leq C(t)$ für alle $x \in M, t \in [0, \infty)$.

Sei außerdem $h(0)$ vollständig. (Aus $\sup_{M\times[0,\infty)} |\mathfrak{R}| < \infty$ folgt damit die Vollständigkeit von $h(t)$ für alle $t \in [0, \infty)$, siehe die Sätze B.8, B.9).

Sei $B := \inf_{i\in\mathbf{N}_0} \frac{\gamma^{i+1}}{(i+3)^4(i+2)(\gamma-1)}$ und $\gamma := 4$.

Sei (N, g_N) eine vollständige, flache, zusammenhängende, **kompakte** C^∞ Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Außerdem verwenden wir folgende Notation:
Ist allgemein (M, h) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann bezeichnen wir mit $V_h(p, r)$ das Volumen des (offenen) Balles $B_h(p, r)$ mit Zentrum $p \in M$ und Radius $r > 0$. d_h bezeichnet die durch die Riemannsche Metrik h induzierte Metrik.

Weiterhin verwenden wir folgende abkürzende Notation:

$$C(h(0), v(\cdot, 0), y, t) := \frac{1}{V_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t}{128}})} \int_M \frac{v(\xi, 0)}{V_{h(0)}^{1/2}(\xi, \sqrt{\frac{t}{128}})} d\mu_{h(0)}(\xi)$$

wobei $v : M \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ eine Funktion ist, $v(\cdot, 0)$ kompakten Träger hat und $y \in M$ ist.

In diesem Kapitel zeigen wir zuerst Gaußsche obere Abschätzungen für Sublösungen v der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta_{h(t)} u - Qu$$

wobei $v(\cdot, 0)$ kompakten Träger hat. Dabei benutzen wir den heat kernel, um eine Lösung u mit $u(\cdot, 0) = v(\cdot, 0)$ zu definieren, und zeigen mit Hilfe des nichtkompakten Maximumprinzips von Hsu 9.1, dass $v \leq u$ gilt. Anschließend benutzen wir die oberen Gaußschen Abschätzungen für den heat kernel aus dem vorigen Kapitel, um obere Gaußsche Abschätzungen für v herzuleiten. Unter der Zusatzannahme, dass $M = \mathbf{R} \times N$ mit $h(t) = f^2(\cdot, t)dx^2 + g^2(\cdot, t)g_N$ gilt, ergeben sich obere Gaußsche Abschätzungen für den warped product Fall.

Wir wollen zeigen:

Satz 13.1. *Sei $v : M \times [0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ stetig, auf $M \times (0, \infty)$ C^∞ und gelte*

$$\frac{\partial}{\partial t} v \leq \Delta v - Qv$$

auf $M \times (0, \infty)$. Sei $v|_{M \times [0,T]}$ beschränkt für jedes $0 < T < \infty$. Sei $S := \operatorname{supp} v(\cdot, 0)$ kompakt. Sei $y \in M$ ein fester Punkt. Dann existieren $C_1 = C_1(n, K)$, $C_2 = C_2(n, K, \sup_{M \times [0,\infty)} |\mathfrak{R}|, \sup_{M \times [0,\infty)} |Q|)$, $C_3 = C_3(n, K)$ und eine universelle Konstante $C > 0$, so dass gilt

$$v(x, t) \leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), v(\cdot, 0), y, t) e^{C_3 e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} d_{h(t)}(x,y)} e^{-\frac{C d^2_{h(t)}(x,S)}{t e^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}}$$

für alle $x \in M, t \in (0, \infty)$ mit

$$C(h(0), v(\cdot, 0), y, t) := \frac{1}{V_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t}{128}})} \int_M \frac{v(\xi, 0)}{V_{h(0)}^{1/2}(\xi, \sqrt{\frac{t}{128}})} d\mu_{h(0)}(\xi)$$

Bemerkung 13.2. Die Riemannschen Metriken $h(0)$ und $h(t)$ und damit auch die Quadrate der induzierten Metriken $d^2_{h(0)}$ und $d^2_{h(t)}$ sind äquivalent mit dem Faktor $e^{\int_0^t C(\tau)d\tau}$ (siehe Appendix B). Deshalb taucht dieser mehrfach in der obigen Abschätzung auf, an diesen Stellen wurde (direkt oder indirekt) die Äquivalenz der Metriken benutzt!

Bemerkung 13.3. In der obigen Abschätzung dominiert der Term $e^{-\frac{Cd^2_{h(t)}(x,S)}{te^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}}$ den Term $e^{C_3 e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} d_{h(t)}(x,y)}$ für „große" x!

Wir zeigen zuerst, dass sich v durch eine Lösung u der Gleichung $\frac{\partial}{\partial t}u = \Delta u - Qu$ mit $u(\cdot,0) = v(\cdot,0)$ abschätzen lässt. Zuerst ein paar Vorbereitungen:

Lemma 13.4. *Sei (M,g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $K \subset M$ kompakt. Dann existieren $c_0 > 0, r_0 > 0$, so dass für alle $p \in K$ und alle $0 < r \leq r_0$ gilt: $V_g(p,r) \geq c_0 r^n$.*

Beweis. Der Beweis ist dem Leser überlassen! $\square$

Lemma 13.5. *Sei (M,g) eine vollständige, zusammenhängende n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)Kg$ für ein $K \geq 0$. Dann gibt es ein $C > 0$, so dass für alle $x \in M$ gilt:*

$$\int_M e^{-\alpha d^2(x,y)+\beta d(x,y)} d\mu_g(y) \leq C$$

wobei $\alpha, \beta > 0$ feste Konstanten sind und d die durch die Riemannsche Metrik g induzierte Metrik auf M bezeichnet.

Beweis. siehe Appendix D $\square$

Satz 13.6. *Seien M, N C^∞ Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Seien $W : N \times M \to \boldsymbol{R}$ und $f : M \to \boldsymbol{R}$ jeweils C^∞ mit $\operatorname{supp} f = K \subset M$ kompakt. Definiere $u : N \to \boldsymbol{R}, u(x) = \int_M W(x,y)f(y)d\mu(y)$. Dann ist u C^∞ und es gilt $\frac{\partial}{\partial x^i}u(x) = \int_M \frac{\partial}{\partial x^i}W(x,y)f(y)d\mu(y)$ für jedes Koordinatensystem.*

Beweis. siehe Appendix D $\square$

Satz 13.7. *Sei $f : M \to \boldsymbol{R}$ stetig mit kompaktem Träger. Dann ist $u : M \times [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$, $u(x,t) = \int_M H(x,t,y,0)f(y)d\mu_{h(0)}(y)$, $u(x,0) = f(x)$, $x, y \in M, 0 < t < \infty$, stetig, C^∞ auf $M \times (0,\infty)$ und eine Lösung von*

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - Qu \text{ auf } M \times (0,\infty) \\ u(\cdot,0) = f \end{cases} \tag{8}$$

Dabei bedeutet die Anfangsbedingung $u(\cdot,0) = f$: $u(\cdot,t) \to f$ lokal gleichmäßig für $t \searrow 0$. Ferner ist die Konvergenz von u gegen die Anfangsdaten sogar gleichmäßig.

Bemerkung 13.8. siehe [28] für den Fall, dass M kompakt ist.

Beweis. Sei $0 < T < \infty$ fest aber beliebig.

u ist C^∞ auf $M \times (0,\infty)$ und dort eine Lösung von $u_t = \Delta u - Qu$:

Da H C^∞ ist, ist auch u C^∞ nach Satz 13.6. Seien $U \subset M$ offen, $V \subset \mathbf{R}^n$ offen, $\phi : U \to V$ eine Karte. Dann ist $\phi \times \mathrm{id} : U \times (0,\infty) \to V \times (0,\infty)$ eine Karte von $M \times (0,\infty)$, und wir erhalten mittels Satz 13.6

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial t}u)(x,t) &= \int_M \frac{\partial}{\partial t} H(x,t,y,0) f(y) d\mu_{h(0)}(y) \\
&= \int ((\Delta H)(x,t,y,0) - Q(x,t)H(x,t,y,0)) f(y) d\mu_{h(0)}(y)
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$
(\Delta u)(x,t) = (\Delta_{h(t)} u(\cdot,t))(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(h_{kl})}(x,t)} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{\det(h_{kl})} h^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} u)(x,t)
$$

Daraus und aus Satz 13.6 folgt

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial t}u)(x,t) &= \int (\Delta H)(x,t,y,0) f(y) d\mu_{h(0)}(y) - Q(x,t)u(x,t) \\
&= (\Delta u)(x,t) - Q(x,t)u(x,t)
\end{aligned}
$$

d. h. u ist eine Lösung.

Die Anfangsdaten werden lokal gleichmäßig angenommen:

Sei

$$
a(x,t) := \int_M H(x,t,y,0) d\mu_{h(0)}(y)
$$

$x \in M, t > 0$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&|u(x,t) - f(x)| \le |u(x,t) - a(x,t)f(x)| + |a(x,t)f(x) - f(x)| \\
&\le |\int_M H(x,t,y,0)f(y)d\mu_{h(0)}(y) - \int_M H(x,t,y,0)f(x)d\mu_{h(0)}(y)| + |f(x)||a(x,t) - 1| \\
&\le \int_M H(x,t,y,0)|f(y) - f(x)| d\mu_{h(0)}(y) + C|a(x,t) - 1|
\end{aligned}
$$

mit $C = \sup_M |f| = \max_M |f|$. Wegen $e^{-\hat{C}_2(t-s)} \le \int_M H(x,t,y,s) d\mu_{h(s)}(y) \le e^{\hat{C}_2(t-s)}$ für alle $x \in M$ und $0 \le s < t \le T$ (Satz 12.18) folgt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|a(x,t) - 1| < \varepsilon$ für alle $x \in M$, für alle $0 < t < \delta$.

Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es zum selben $\varepsilon > 0$ ein $\delta' > 0$, so dass $d_{h(0)}(x,y) < \delta'$ impliziert $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ferner gilt für alle $\rho > 0$:

$$\begin{aligned}
&\int_M H(x,t,y,0)|f(y)-f(x)|d\mu_{h(0)}(y)\\
&= \int\limits_{B_{h(0)}(x,\rho)} H(x,t,y,0)|f(y)-f(x)|d\mu_{h(0)}(y) +\\
&+ \int\limits_{M-B_{h(0)}(x,\rho)} H(x,t,y,0)|f(y)-f(x)|d\mu_{h(0)}(y)\\
&= A + B
\end{aligned}$$

Es gelten für $\rho < \delta'$ (wir können also $\rho := \frac{\delta'}{2} > 0$ wählen)

$$A \leq \varepsilon \int_{B_{h(0)}(x,\rho)} H(x,t,y,0)d\mu_{h(0)}(y) \leq \varepsilon \int_M H(x,t,y,0)d\mu_{h(0)}(y) \leq \varepsilon e^{\hat{C}_2 T}$$

$$B \leq 2C \int_{M-B_{h(0)}(x,\rho)} H(x,t,y,0)d\mu_{h(0)}(y)$$

Einschub: Wir können einen Volumenterm folgendermaßen durch die Distanzfunktion abschätzen: Für alle $x, y \in M$ und $r > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V_{h(0)}(x,r)} &\leq \frac{1}{V_{h(0)}(y,r)} \frac{V^{-K}(r + d_{h(0)}(x,y))}{V^{-K}(r)} && \text{nach Satz C.7}\\
&\leq \frac{1}{V^2_{h(0)}(y,r)} V^{-K}(r + d_{h(0)}(x,y)) && \text{wegen } V_{h(0)}(y,r) \leq V^{-K}(r)\\
&\leq \frac{1}{V^2_{h(0)}(y,r)} C(n,K) e^{(n-1)K(r + d_{h(0)}(x,y))} && \text{wegen Satz C.3}\\
&= \frac{C(n,K)}{V^2_{h(0)}(y,r)} e^{(n-1)Kr} e^{(n-1)K d_{h(0)}(x,y)}
\end{aligned}$$

Setzen wir $r = \sqrt{\frac{t}{128}}$ und ziehen die Wurzel, erhalten wir (die Abschätzung gilt auch mit x und y vertauscht)

$$\frac{1}{\sqrt{V_{h(0)}(x, \sqrt{\frac{t}{128}})}} \leq \frac{\sqrt{C(n,K)}}{V_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t}{128}})} e^{\frac{n-1}{2}K\sqrt{\frac{t}{128}}} e^{\frac{n-1}{2}K d_{h(0)}(x,y)}$$

Wir benutzen die Gaußschen Abschätzungen (Theorem 12.31) für $H(x,t,y,0)$:

$$\begin{aligned}
&\int_{M-B_{h(0)}(x,\rho)} H(x,t,y,0)d\mu_{h(0)}(y)\\
&\leq \int_{M-B_{h(0)}(x,\rho)} \frac{C_3 e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{C_4 t}}}{\sqrt{V_{h(0)}(x,\sqrt{t/128})}\sqrt{V_{h(0)}(y,\sqrt{t/128})}} d\mu_{h(0)}(y)\\
&\leq \frac{C_3\sqrt{C(n,K)}}{(V_{h(0)}(x,\sqrt{t/128}))^{3/2}} e^{\frac{n-1}{2}K\sqrt{t/128}} \int_{M-B_{h(0)}(x,\rho)} e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{C_4 t}+\frac{n-1}{2}Kd_{h(0)}(x,y)} d\mu_{h(0)}(y)\\
&\leq \frac{C_3\sqrt{C(n,K)}}{(V_{h(0)}(x,\sqrt{t/128}))^{3/2}} e^{\frac{n-1}{2}K\sqrt{t/128}} e^{\frac{-\rho^2}{2C_4 t}} \int_{M-B_{h(0)}(x,\rho)} e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{2C_4 t}+\frac{n-1}{2}Kd_{h(0)}(x,y)} d\mu_{h(0)}(y)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{C_4 t}} = e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{2C_4 t}} e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{2C_4 t}} \leq e^{-\frac{\rho^2}{2C_4 t}} e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{2C_4 t}}$, falls $d_{h(0)}(x,y) \geq \rho$ ist (was erfüllt ist), benutzt. Es gilt für $0 < t \leq 1$

$$\begin{aligned}
&\int_{M-B_{h(0)}(x,\rho)} e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{2C_4 t}+\frac{n-1}{2}Kd_{h(0)}(x,y)} d\mu_{h(0)}(y)\\
&\leq \int_M e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{2C_4}+\frac{n-1}{2}Kd_{h(0)}(x,y)} d\mu_{h(0)}(y) \leq C
\end{aligned}$$

wegen Satz 13.5.

Sei nun $x \in \widetilde{K} \subset M$ kompakt. Aufgrund von Satz 13.4 existieren $c_0 > 0, t_0 > 0$ mit

$$\frac{1}{V_{h(0)}(x,\sqrt{t/128})} \leq \frac{1}{c_0(\sqrt{t/128})^n} = \frac{128^{n/2}}{c_0 t^{n/2}}$$

für alle $0 < t \leq t_0$ und alle $x \in \widetilde{K}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{M-B_{h(0)}(x,\rho)} H(x,t,y,0)d\mu_{h(0)}(y)\\
&\leq C_3\sqrt{C(n,K)} e^{\frac{n-1}{2}K\sqrt{t/128}} e^{\frac{-\rho^2}{2C_4 t}} (\frac{128^{n/2}}{c_0 t^{n/2}})^{3/2} C \to 0
\end{aligned}$$

für $t \to 0$, denn

$$\lim_{t\to 0} e^{\frac{-\rho^2}{2C_4 t}} \frac{128^{3n/4}}{c_0 t^{3n/4}} = \lim_{s\to\infty} e^{\frac{-\rho^2 s}{2C_4}} \frac{128^{3n/4} s^{3n/4}}{c_0} = 0$$

Daraus folgt insgesamt $u(\cdot,t) \to f$ lokal gleichmäßig ($t \searrow 0$).

Hat f kompakten Träger, so ist die Konvergenz sogar gleichmäßig: Mit $\operatorname{supp} f := S$ und $d_{h(0)}(x,S) \geq \delta > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq \int_S H(x,t,y,0)|f|(y)d\mu_{h(0)}(y) \\
&\leq \int_S \frac{C_3 e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{C_4 t}}}{\sqrt{V_{h(0)}(x,\sqrt{t/128})}\sqrt{V_{h(0)}(y,\sqrt{t/128})}}|f|(y)d\mu_{h(0)}(y) \\
&\leq C_3\sqrt{C(n,K)}e^{\frac{n-1}{2}K\sqrt{t/128}} \int_S \frac{e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{C_4 t}+\frac{n-1}{2}Kd_{h(0)}(x,y)}}{(V_{h(0)}(y,\sqrt{t/128}))^{3/2}}|f|(y)d\mu_{h(0)}(y) \\
&\leq C_3\sqrt{C(n,K)}e^{\frac{n-1}{2}K\sqrt{t/128}}e^{-\frac{\delta^2}{2C_4 t}} \int_S \frac{e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{2C_4 t}+\frac{n-1}{2}Kd_{h(0)}(x,y)}}{(V_{h(0)}(y,\sqrt{t/128}))^{3/2}}|f|(y)d\mu_{h(0)}(y) \\
&\leq C_3\sqrt{C(n,K)}e^{\frac{n-1}{2}K\sqrt{t/128}}e^{-\frac{\delta^2}{2C_4 t}}(\frac{128^{n/2}}{c_0 t^{n/2}})^{3/2} \int_S e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{2C_4}+\frac{n-1}{2}Kd_{h(0)}(x,y)}|f|(y)d\mu_{h(0)}(y) \\
&\leq C_3\sqrt{C(n,K)}e^{\frac{n-1}{2}K\sqrt{t/128}}e^{-\frac{\delta^2}{2C_4 t}}(\frac{128^{n/2}}{c_0 t^{n/2}})^{3/2} C \to 0
\end{aligned}$$

für $t \to 0$. Dabei haben wir t im Zähler im Integral durch 1 ersetzt, den Volumenterm im Nenner entsprechend abgeschätzt und Lemma 13.5 benutzt. Also gilt $|u(x,t)| \to 0$ für $t \to 0$ gleichmäßig auf $\{x \in M | d_{h(0)}(x,K) \geq \delta\}$. Zusammen mit der lokal gleichmäßigen Konvergenz folgt damit die gleichmäßige. $\square$

Satz 13.9. *Sei $v : M \times [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ stetig, auf $M \times (0,\infty)$ C^∞ und gelte*

$$\frac{\partial}{\partial t} v \leq \Delta v - Qv$$

auf $M \times (0,\infty)$. Sei $v|_{M\times[0,T]}$ beschränkt für jedes $0 < T < \infty$. Sei $S := \operatorname{supp} v(\cdot,0)$ kompakt. Sei u aus Satz 13.7 mit $u(\cdot,0) = v(\cdot,0)$. Dann gilt $v \leq u$.

Beweis. Sei $0 < T < \infty$ fest aber beliebig. Setze $f := v(\cdot,0)$ und $S := \operatorname{supp} f \subset M$ kompakt. Wir wenden das Maximumprinzip von Hsu Theorem 9.1 auf $h = u - v$ an. Es gelten $h_t = v_t - u_t \leq \Delta v - Qv - \Delta u + Qu = \Delta h - Qh$ und $h(\cdot,0) = 0$. Wir zeigen als Nächstes, dass $u|_{M\times[0,T]}$ beschränkt ist: Aus der gleichmäßigen Konvergenz von u gegen die Anfangsdaten folgt die Beschränktheit von u für $0 \leq t \leq t_0$ für ein $0 < t_0 < T$. Außerdem gilt für alle $0 < t_0 \leq t \leq T$ und für $d_{h(0)}(x,S) \geq \rho > 0$:

$$
\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq \int_K H(x,t,y,0)|f|(y)d\mu_{h(0)}(y)\\
&\leq \int_S \frac{C_3 e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{C_4 t}}}{\sqrt{V_{h(0)}(x,\sqrt{t/128})}\sqrt{V_{h(0)}(y,\sqrt{t/128})}}|f|(y)d\mu_{h(0)}(y)\\
&\leq C_3\sqrt{C(n,K)}e^{\frac{n-1}{2}K\sqrt{t/128}}e^{-\frac{\rho^2}{2C_4 t}}\int_S \frac{e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{2C_4 t}+\frac{n-1}{2}Kd_{h(0)}(x,y)}}{(V_{h(0)}(y,\sqrt{t/128}))^{3/2}}|f|(y)d\mu_{h(0)}(y)\\
&\leq C_3\sqrt{C(n,K)}e^{\frac{n-1}{2}K\sqrt{t/128}}e^{-\frac{\rho^2}{2C_4 t}}\int_S \frac{e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{2C_4 t}+\frac{n-1}{2}Kd_{h(0)}(x,y)}}{(V_{h(0)}(y,\sqrt{t_0/128}))^{3/2}}|f|(y)d\mu_{h(0)}(y)\\
&\leq CC_3\sqrt{C(n,K)}e^{\frac{n-1}{2}K\sqrt{t/128}}e^{-\frac{\rho^2}{2C_4 t}}\int_S e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{2C_4 T}+\frac{n-1}{2}Kd_{h(0)}(x,y)}d\mu_{h(0)}(y)
\end{aligned}
$$

denn $V_{h(0)}(y,\sqrt{t_0/2})$ hat für $y \in S$ ein positives Minimum und $|f|$ ist beschränkt. Nun gilt wegen Lemma 13.5

$$
\int_K e^{-\frac{d^2_{h(0)}(x,y)}{2C_4 T}+\frac{n-1}{2}Kd_{h(0)}(x,y)}d\mu_{h(0)}(y) \leq C
$$

Da $\{x : d_{h(0)}(x,S) \leq \rho\} \times [t_0,T]$ kompakt und u stetig ist, folgt, dass $u|_{M\times[0,T]}$ beschränkt ist. $v|_{M\times[0,T]}$ ist nach Voraussetzung ebenfalls beschränkt. Wegen $h_+^2 = (v-u)_+^2 \leq (v-u)^2 \leq 2u^2+2v^2 \leq C$ auf $M \times [0,T]$ folgt somit

$$
\int_0^T \Big(\int_M e^{-\alpha^2 d^2_{h(t)}(x,y)} h_+^2(x,t)d\mu_t(x)\Big)dt \leq C\int_0^T \Big(\int_M e^{-\alpha^2 d^2_{h(t)}(x,y)}d\mu_{h(t)}(x)\Big)dt < \infty
$$

wegen Lemma 13.5 und der Tatsache, dass alle Riemannschen Metriken $h(t), t \in [0,T]$ und damit auch induzierten Metriken $d^2_{h(t)}$ und die Volumenmaße $d\mu_{h(t)}$ auf $[0,T]$ gleichmäßig äquivalent sind (siehe auch die Sätze B.8 und B.9, die Aussage über die Volumenmaße ist dem Leser überlassen!). Somit ist die Integralbedingung (iii) erfüllt. Bedingung (iv) ist wegen der Bedingung $|\frac{d}{dt}h(t)| \leq C(t)$ an die Familie von Metriken $h(t), t \in [0,\infty)$ und Satz B.8 erfüllt. Also folgt $v \leq u$ aus dem Maximumprinzip. $\square$

Jetzt zum Beweis von Satz 13.1:

Beweis. Aufgrund von Theorem 12.30 können wir abschätzen

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_M H(x,t,y,0)v(y,0)d\mu_{h(0)}(y) \\
&\leq \int_M \frac{C_1 e^{C_2 t}}{V_{h(0)}^{1/2}(x,\sqrt{\frac{t}{128}})V_{h(0)}^{1/2}(y,\sqrt{\frac{t}{128}})} e^{-\frac{Cd^2_{h(t)}(x,y)}{te^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}} v(y,0)d\mu_{h(0)}(y) \\
&\leq \frac{C_1 e^{C_2 t}}{V_{h(0)}^{1/2}(x,\sqrt{\frac{t}{128}})} \int_S \frac{v(y,0)}{V_{h(0)}^{1/2}(y,\sqrt{\frac{t}{128}})} e^{-\frac{Cd^2_{h(t)}(x,y)}{te^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}} d\mu_{h(0)}(y) \\
&\leq \frac{C_1 e^{C_2 t}}{V_{h(0)}^{1/2}(x,\sqrt{\frac{t}{128}})} e^{-\frac{Cd^2_{h(t)}(x,S)}{te^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}} \int_M \frac{v(y,0)}{V_{h(0)}^{1/2}(y,\sqrt{\frac{t}{128}})} d\mu_{h(0)}(y)
\end{aligned}
$$

für alle $x \in M, t > 0$, denn für $y \in S = \operatorname{supp} v(\cdot,0)$ gilt

$$d_{h(t)}(x,y) \geq d_{h(t)}(x,S)$$

Mit der abkürzenden Notation

$$I(h(0),v(\cdot,0),t) := \int_M \frac{v(\xi,0)}{V_{h(0)}^{1/2}(\xi,\sqrt{\frac{t}{128}})} d\mu_{h(0)}(\xi)$$

ergibt das

$$u(x,t) \leq \frac{C_1 e^{C_2 t}}{V_{h(0)}^{1/2}(x,\sqrt{\frac{t}{128}})} I(h(0),v(\cdot,0),t) e^{-\frac{Cd^2_{h(t)}(x,S)}{te^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}}$$

Wir wollen den Volumenterm durch die Distanzfunktion abschätzen, siehe für alle Schritte bis auf den Letzten den Beweis des Satzes 13.7: Für alle $x, y \in M$ gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{V_{h(0)}(x,r)} &\leq \frac{1}{V_{h(0)}(y,r)} \frac{V^{-K}(r + d_{h(0)}(x,y))}{V^{-K}(r)} \\
&\leq \frac{1}{V^2_{h(0)}(y,r)} V^{-K}(r + d_{h(0)}(x,y)) \\
&\leq \frac{1}{V^2_{h(0)}(y,r)} C(n,K) e^{(n-1)K(r + d_{h(0)}(x,y))} \\
&= \frac{C(n,K)}{V^2_{h(0)}(y,r)} e^{(n-1)Kr} e^{(n-1)K d_{h(0)}(x,y)} \\
&\leq \frac{C(n,K)}{V^2_{h(0)}(y,r)} e^{(n-1)Kr} e^{(n-1)K e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} d_{h(t)}(x,y)}
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt haben wir dann noch $d_{h(0)}(x,y) \leq e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} d_{h(t)}(x,y)$ benutzt. Setzen wir $r = \sqrt{\frac{t}{128}}$ und ziehen die Wurzel, erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{V_{h(0)}(x, \sqrt{\frac{t}{128}})}} \leq \frac{\sqrt{C(n,K)}}{V_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t}{128}})} e^{\frac{n-1}{2}K\sqrt{\frac{t}{128}}} e^{\frac{n-1}{2}Ke^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} d_{h(t)}(x,y)}$$

Sei nun $y \in M$ ein fester Punkt. Die obige Abschätzung geht damit so weiter:

$$u(x,t) \leq$$
$$C_1 e^{C_2 t} \frac{\sqrt{C(n,K)}}{V_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t}{128}})} e^{\frac{n-1}{2}K\sqrt{\frac{t}{128}}} e^{\frac{n-1}{2}Ke^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} d_{h(t)}(x,y)} I(h(0), v(\cdot,0), t) e^{-\frac{Cd^2_{h(t)}(x,S)}{te^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}}$$

Es gilt $e^{\frac{n-1}{2}K\sqrt{\frac{t}{128}}} \leq e^{\frac{n-1}{\sqrt{1282}}K} e^{\frac{n-1}{\sqrt{1282}}Kt}$. Schreiben wir $\widetilde{C}_1 = C_1\sqrt{C(n,K)}e^{\frac{n-1}{\sqrt{1282}}K}$, $\widetilde{C}_2 = C_2 + \frac{n-1}{\sqrt{1282}}K$, $C_3 = \frac{n-1}{2}K$ und beachten $v \leq u$, erhalten wir

$$\begin{aligned} v(x,t) &\leq u(x,t) \\ &\leq \frac{\widetilde{C}_1 e^{\widetilde{C}_2 t}}{V_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t}{128}})} I(h(0), v(\cdot,0), t) e^{C_3 e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} d_{h(t)}(x,y)} e^{-\frac{Cd^2_{h(t)}(x,S)}{te^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}} \\ &= \widetilde{C}_1 e^{\widetilde{C}_2 t} C(h(0), v(\cdot,0), y, t) e^{C_3 e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} d_{h(t)}(x,y)} e^{-\frac{Cd^2_{h(t)}(x,S)}{te^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}} \end{aligned}$$

Umbenennen der Konstanten $\widetilde{C}_1$ in C_1 und $\widetilde{C}_2$ in C_2 liefert die Behauptung! □

Bemerkung 13.10. Hat $(M, h(0))$ endliches Volumen V, so geht $V_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t}{128}})$ für $t \to \infty$ gegen diese Konstante V, ansonsten nach ∞.

Sei nun zusätzlich $M = \mathbf{R} \times N$, wobei (N, g_N) eine flache, vollständige, zusammenhängende C^∞ Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$ ist und gelte (zusätzlich) $h(t) = f^2(\cdot,t)dx^2 + g^2(\cdot,t)g_N, t \in [0,\infty)$ mit $f, g : \mathbf{R} \times [0,\infty) \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv. Dann erhalten wir folgende "warped product"Version von Satz 13.1:

Satz 13.11. *Sei $v : \boldsymbol{R} \times N \times [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ stetig, auf $\boldsymbol{R} \times N \times (0,\infty)$ C^∞, und gelte*

$$\frac{\partial}{\partial t} v \leq \Delta v - Qv$$

auf $\boldsymbol{R} \times N \times (0,\infty)$. Sei $v|_{\boldsymbol{R}\times N\times[0,T]}$ beschränkt für jedes $0 < T < \infty$. Sei $S := \operatorname{supp} v(\cdot,\cdot,0)$ kompakt. Gelte außerdem $v(x,q,t) = \widetilde{v}(x,t)$ für eine Funktion $\widetilde{v} : \boldsymbol{R} \times [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$. Sei $(y,p) \in \boldsymbol{R} \times N$ mit $y = \sup L$, $L := \operatorname{supp} \widetilde{v}(\cdot,0)$ und p fest aber beliebig.

Es existieren $C_1 = C_1(n,K)$, $C_2 = C_2(n,K, \sup_{M\times[0,\infty)} |\mathfrak{R}|, \sup_{M\times[0,\infty)} |Q|)$, $C_3 = C_3(n,K)$ *und eine universelle Konstante* $C > 0$*, so dass gilt*

$$\widetilde{v}(x,t) \leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), v(\cdot,\cdot,0), y, t) e^{C_3 e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} d_t(x,y)} e^{-\frac{C d_t^2(x,y)}{t e^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}}$$

für alle $x \geq y, q \in N, t > 0$ *mit*

$$C(h(0), v(\cdot,\cdot,0), y, p, t) := \frac{1}{V_{h(0)}((y,p), \sqrt{\frac{t}{128}})} \int_{\boldsymbol{R}\times N} \frac{v(\xi,c,0)}{V_{h(0)}^{1/2}((\xi,c), \sqrt{\frac{t}{128}})} d\mu_{h(0)}(\xi,c)$$

Dabei hängt $C(h(0), v(\cdot,\cdot,0), y, p, t)$ *nicht von* p *ab, falls* N *homogen ist.* d_t *bezeichnet die durch die Riemannsche Metrik* $f^2(\cdot,t)dx^2$ *induzierte Metrik auf* $\boldsymbol{R}$*.*

Beweis. Wähle als festen Punkt (y,p) mit $y := \sup L$, $L := \operatorname{supp}\widetilde{v}(\cdot,0)$ und p fest aber beliebig. Wegen $d_{h(t)}((x,p),(y,p)) = d_t(x,y)$ und $d_{h(t)}((x,p),S) = d_t(x,L) = d_t(x,y)$ für alle $x \geq y$ (siehe die Sätze 5.16 und 5.19) folgt

$$\begin{aligned}
&\widetilde{v}(x,t) = v(x,q,t) = v(x,p,t) \leq u(x,p,t) \\
&\leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), v(\cdot,\cdot,0), y, p, t) e^{C_3 e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} d_{h(t)}((x,p),(y,p))} e^{-\frac{C d_{h(t)}^2((x,p),S)}{t e^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}} \\
&= C_1 e^{C_2 t} C(h(0), v(\cdot,\cdot,0), y, p, t) e^{C_3 e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} d_t(x,y)} e^{-\frac{C d_t^2(x,y)}{t e^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}}
\end{aligned}$$

Nach Satz 5.39 hängt $V_{h(0)}((y,p), \sqrt{\frac{t}{128}})$ und damit $C(h(0), v(\cdot,\cdot,0), y, p, t)$ nicht von $p \in N$ ab, falls N homogen ist. □

Mit dem gleichen Beweis erhält man

Satz 13.12. *Sei* $v : \boldsymbol{R} \times N \times [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ *stetig, auf* $\boldsymbol{R} \times N \times (0,\infty)$ C^∞ *und gelte*

$$\frac{\partial}{\partial t} v \leq \Delta v - Qv$$

auf $\boldsymbol{R} \times N \times (0,\infty)$*. Sei* $v|_{\boldsymbol{R}\times N\times[0,T]}$ *beschränkt für jedes* $0 < T < \infty$*. Sei* $S := \operatorname{supp} v(\cdot,\cdot,0)$ *kompakt. Gelte außerdem* $v(x,q,t) = \widetilde{v}(x,t)$ *für eine Funktion* $\widetilde{v} : \boldsymbol{R} \times [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$*. Sei* $(y,p) \in \boldsymbol{R} \times N$ *mit* $y = \inf L$, $L := \operatorname{supp}\widetilde{v}(\cdot,0)$ *und* p *fest aber beliebig. Es existieren* $C_1 = C_1(n,K)$, $C_2 = C_2(n,K, \sup_{M\times[0,\infty)} |\mathfrak{R}|, \sup_{M\times[0,\infty)} |Q|)$, $C_3 = C_3(n,K)$ *und eine universelle Konstante* $C > 0$*, so dass gilt*

$$\widetilde{v}(x,t) \leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), v(\cdot,\cdot,0), y, p, t) e^{C_3 e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} d_t(x,y)} e^{-\frac{C d_t^2(x,y)}{t e^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}}$$

für alle $x \leq y, q \in N, t > 0$*.*

Für das Folgende definieren wir $\hat{v} : \mathbf{R}\times[0,\infty) \to \mathbf{R}$, $\hat{v}(b,t) := \widetilde{v}(s_y^{-1}(b,t),t)$ mit $s_y(x,t) := \int_{\mathbf{R}} f(\xi,t)d\xi$ für alle $x \in \mathbf{R}, t \in [0,\infty)$ (siehe Definition 4.12). Mit $s_y^{-1}(b,t)$ meinen wir hier und im Folgenden $(s_y(\cdot,t))^{-1}(b)$.

Korollar 13.13. *Unter denselben Voraussetzungen wie in Satz 13.11 gilt*

$$\hat{v}(b,t) \leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), v(\cdot,\cdot,0), y, t) e^{C_3 e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} b} e^{-\frac{Cb^2}{te^2 \int_0^t C(\tau)d\tau}}$$

für alle $b \geq 0, t > 0$.

Beweis. Setzen wir in Satz 13.11 $x = s_y^{-1}(b,t)$ erhalten wir für $x \geq y$ ($\Leftrightarrow b \geq 0$) wegen $d_t(x,y) = s_y(x,t) = s_y(s_y^{-1}(b,t),t) = b$ (nach Korollar 4.16)

$$\hat{v}(b,t) = \widetilde{v}(s_y^{-1}(b,t),t) \leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), v(\cdot,\cdot,0), y, p, t) e^{C_3 e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} b} e^{-\frac{Cb^2}{te^2 \int_0^t C(\tau)d\tau}}$$

□

Wiederum analog erhält man

Korollar 13.14. *Unter denselben Voraussetzungen wie in Satz 13.12 gilt*

$$\hat{v}(b,t) \leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), v(\cdot,\cdot,0), y, p, t) e^{C_3 e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} |b|} e^{-\frac{Cb^2}{te^2 \int_0^t C(\tau)d\tau}}$$

für alle $b \leq 0, t > 0$.

Beweis. Setzen wir in Satz 13.12 $x = s_y^{-1}(b,t)$ erhalten wir für $x \leq y$ ($\Leftrightarrow b \leq 0$) wegen $d_t(x,y) = -s_y(x,t) = -s_y(s_y^{-1}(b,t),t) = -b = |b|$ (nach Korollar 4.16)

$$\hat{v}(b,t) = \widetilde{v}(s_y^{-1}(b,t),t) \leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), v(\cdot,\cdot,0), y, p, t) e^{C_3 e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} |b|} e^{-\frac{Cb^2}{te^2 \int_0^t C(\tau)d\tau}}$$

□

Bemerkung 13.15. Satz 13.12 und Korollar 13.14 wurden der Vollständigkeit halber aufgeführt und werden im Folgenden nicht angewendet.

14 Gaußsche Abschätzungen für den Ricci Fluss

In diesem Kapitel zeigen wir, dass die geometrischen Größen $|\operatorname{Rm}|^2, |\nabla \operatorname{Rm}|^2$ und $|T|^2$ unter Ricci Fluss jeweils Sublösungen von $\frac{\partial}{\partial t}u = \Delta_{h(t)}u - Qu$ mit jeweils geeignetem Q sind. Auf diese Weise erhalten wir für diese Größen, falls sie bei $t = 0$ kompakten Träger haben, Gaußsche obere Abschätzungen aus Satz 13.1.

Erfüllt schließlich $h(t) = f^2(\cdot, t)dx^2 + g^2(\cdot, t)g_N$ Ricci Fluss, erhalten wir die entsprechenden Abschätzungen für $|\operatorname{Rm}|^2, |\nabla \operatorname{Rm}|^2$ und $|T|^2$ im warped product Fall und durch Integration Abschätzungen für die Hauptschnittkrümmungen K_V und K_H. Mit Hilfe dieser Abschätzungen können wir, falls $\mathbf{R} \times N$ zum Zeitpunkt $t = 0$ hyperbolische Enden (d. h. alle Schnittkrümmungen dort $= k < 0$) hat, zeigen, dass die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} K_V(x, t)$ und $\lim_{x\to\infty} K_H(x, t)$ für jedes $t \geq 0$ existieren und gleich $C(t) := -\frac{1}{2nt - \frac{1}{k}}$ sind. Das ist exakt die Rate, mit der die Schnittkrümmungen von H^{n+1} unter Ricci Fluss gegen 0 gehen.

14.1 Allgemeiner Fall

Sei nun $h \in B(M)$ (siehe Definition 7.6) mit $\sup |\nabla \operatorname{Rm}| < \infty$. Sei $h(t), t \in [0, T)$ die eindeutige maximale Lösung des Ricci Fluss in $BK(M)$ mit $h(0) = h$. Dann gelten $\mathfrak{R} = -\operatorname{Ric}, \mathcal{R} = -R$. Wir nehmen $T = \infty$ an (diese Annahme ist jedoch nicht wesentlich, man erhält die Gaußschen Abschätzungen auch im Fall $T < \infty$). Außerdem nehmen wir $\sup_{M\times[0,\infty)} |\operatorname{Rm}| < \infty$ an. (Daraus und aus $|\nabla \operatorname{Rm}|(\cdot, 0) \leq C$ folgt mittels Theorem 11.1 $\sup_{M\times[0,T]} |\nabla \operatorname{Rm}| < \infty$ für alle $0 < T < \infty$ und wegen $|\nabla\mathfrak{R}| = |\nabla \operatorname{Ric}| \leq C(n)|\nabla \operatorname{Rm}|$ dann auch $\sup_{M\times[0,T]} |\nabla\mathfrak{R}| < \infty$ für alle $0 < T < \infty$). Sei $C : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion mit $2|\operatorname{Ric}|(x, t) \leq C(t)$ für alle $x \in M, t \in [0, \infty)$.
Dann sind die allgemeinen Voraussetzungen/ das Setting aus Kapitel 13 erfüllt.
Wir definieren wie im vorigen Kapitel

$$C(h(0), v(\cdot, 0), y, t) := \frac{1}{V_{h(0)}(y, \sqrt{\frac{t}{128}})} \int_M \frac{v(\xi, 0)}{V^{1/2}_{h(0)}(\xi, \sqrt{\frac{t}{128}})} d\mu_{h(0)}(\xi)$$

Es gelten die folgenden Evolutionsgleichungen

Satz 14.1.

$$\frac{\partial}{\partial t}|\operatorname{Rm}|^2 \leq \Delta|\operatorname{Rm}|^2 - 2|\nabla \operatorname{Rm}|^2 + 16|\operatorname{Rm}||\operatorname{Rm}|^2 \leq \Delta|\operatorname{Rm}|^2 + 16|\operatorname{Rm}||\operatorname{Rm}|^2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla \operatorname{Rm}|^2 &\leq \Delta|\nabla \operatorname{Rm}|^2 - 2|\nabla\nabla \operatorname{Rm}|^2 + C(n)|\operatorname{Rm}||\nabla \operatorname{Rm}|^2\\ &\leq \Delta|\nabla \operatorname{Rm}|^2 + C(n)|\operatorname{Rm}||\nabla \operatorname{Rm}|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|T|^2 &= \Delta|T|^2 - 2|\nabla T|^2 + 4\langle \operatorname{Rm}(T), T\rangle + \frac{4}{n}R|T|^2\\ &\leq \Delta|T|^2 + 4(C(n)|\operatorname{Rm}| + \frac{1}{n}R)|T|^2\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet T den spurlosen Ricci Tensor.

Beweis. Die ersten beiden Abschätzungen stehen in [19]. Die dritte Abschätzung steht im Fall des normalisierten Ricci Flusses in [54]. Unser Beweis der dritten Abschätzung orientiert sich an [54].

In diesem Beweis bezeichnen wir die Metriken mit $g(t), g_{ij}, ...$ statt mit $h(t), h_{ij}, ...$ Aus [54] übernehmen wir folgende Definition: Sei h ein symmetrischer $(0,2)$-Tensor. Dann ist per Definition $\operatorname{Rm}(h)$ wieder ein symmetrischer $(0,2)$-Tensor, gegeben durch $\operatorname{Rm}(h)_{ij} := R_{ipjq}h^{pq}$.
Es gilt per Definition $T_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij}$. T_{ij} ist ein symmetrischer $(0,2)$-Tensor.
Ferner gilt $|\operatorname{Ric}|^2 = |T|^2 + \frac{R^2}{n}$, denn:

$$\begin{aligned}|\operatorname{Ric}|^2 &= g^{ik}g^{jl}R_{ij}R_{kl} = g^{ik}g^{jl}(T_{ij} + \frac{R}{n}g_{ij})(T_{kl} + \frac{R}{n}g_{kl})\\ &= g^{ik}g^{jl}T_{ij}T_{kl} + g^{ik}g^{jl}T_{ij}\frac{R}{n}g_{kl} + g^{ik}g^{jl}\frac{R}{n}g_{ij}T_{kl} + g^{ik}g^{jl}\frac{R^2}{n^2}g_{ij}g_{kl}\\ &= |T|^2 + g^{ij}T_{ij}\frac{R}{n} + g^{jl}\frac{R}{n}T_{jl} + g^{jl}\frac{R^2}{n^2}g_{jl}\\ &= |T|^2 + \frac{R^2}{n}\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta R + 2|\operatorname{Ric}|^2 = \Delta R + 2|T|^2 + \frac{2}{n}R^2$$

Außerdem gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ij} = \Delta R_{ij} + 2R_{ipjq}R^{pq} - 2R_{ip}R^p_j$$

Damit können wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}T_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t}R_{ij} - \frac{1}{n}(\frac{\partial}{\partial t}Rg_{ij} + R\frac{\partial}{\partial t}g_{ij})\\ &= \Delta R_{ij} + 2R_{ipjq}R^{pq} - 2R_{ip}R^p_j - \frac{1}{n}(\Delta R + 2|T|^2 + \frac{2}{n}R^2)g_{ij} + \frac{2}{n}RR_{ij}\\ &= \Delta R_{ij} + 2R_{ipjq}R^{pq} - 2R_{ip}R^p_j - \frac{1}{n}\Delta Rg_{ij} - \frac{2}{n}|T|^2g_{ij} - \frac{2}{n^2}R^2g_{ij} + \frac{2}{n}RR_{ij}\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\Delta T_{ij} &= g^{kl}\nabla_k\nabla_l(R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij}) = g^{kl}\nabla_k(\nabla_l R_{ij} - \nabla_l(\frac{R}{n}g_{ij}))\\
&= g^{kl}\nabla_k\nabla_l R_{ij} - g^{kl}\nabla_k\nabla_l(\frac{R}{n}g_{ij}) = \Delta R_{ij} - g^{kl}\frac{\nabla_k\nabla_l R}{n}g_{ij}\\
&= \Delta R_{ij} - \frac{\Delta R}{n}g_{ij}
\end{aligned}$$

Außerdem gelten

$$\begin{aligned}
T^p_j &= g^{pi}T_{ij} = g^{pi}(R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij}) = R^p_j - \frac{R}{n}\delta^p_j\\
T^{pq} &= g^{qj}g^{pi}T_{ij} = g^{qj}(R^p_j - \frac{R}{n}\delta^p_j) = R^{pq} - \frac{R}{n}g^{pq}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2R_{ipjq}T^{pq} &= 2R_{ipjq}(R^{pq} - \frac{R}{n}g^{pq}) = 2R_{ipjq}R^{pq} - \frac{2}{n}Rg^{pq}R_{ipjq}\\
&= 2R_{ipjq}R^{pq} - \frac{2}{n}RR_{ij}
\end{aligned}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned}
-2T_{pi}T^p_j &= -2T_{pi}(R^p_j - \frac{R}{n}\delta^p_j) = -2T_{pi}R^p_j + \frac{2}{n}RT_{pi}\delta^p_j\\
&= -2(R_{pi} - \frac{R}{n}g_{pi})R^p_j + \frac{2}{n}RT_{ij}\\
&= -2R_{pi}R^p_j + \frac{2}{n}RR_{ij} + \frac{2}{n}R(R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij})\\
&= -2R_{pi}R^p_j + \frac{4}{n}RR_{ij} - \frac{2}{n^2}R^2g_{ij}
\end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
&\Delta T_{ij} + 2R_{ipjq}T^{pq} - \frac{2}{n}|T|^2g_{ij} - 2T_{pi}T^p_j\\
&= \Delta R_{ij} - \frac{\Delta R}{n}g_{ij} + 2R_{ipjq}R^{pq} - \frac{2}{n}RR_{ij} - \frac{2}{n}|T|^2g_{ij} - 2R_{pi}R^p_j + \frac{4}{n}RR_{ij} - \frac{2}{n^2}R^2g_{ij}\\
&= \Delta R_{ij} - \frac{\Delta R}{n}g_{ij} + 2R_{ipjq}R^{pq} - \frac{2}{n}|T|^2g_{ij} - 2R_{pi}R^p_j + \frac{2}{n}RR_{ij} - \frac{2}{n^2}R^2g_{ij}
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\frac{\partial}{\partial t}T_{ij} = \Delta T_{ij} + 2R_{ipjq}T^{pq} - \frac{2}{n}|T|^2g_{ij} - 2T_{pi}T^p_j$$

Wir können jetzt die Evolutionsgleichung von $|T|^2$ berechnen: Es gilt $|T|^2 = g^{ik}g^{jl}T_{ij}T_{kl}$
Außerdem gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}g^{ij} = -g^{ik}g^{jl}\frac{\partial}{\partial t}g_{kl} = 2g^{ik}g^{jl}R_{kl}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}|T|^2 &= \frac{\partial}{\partial t}g^{ik}g^{jl}T_{ij}T_{kl} + g^{ik}\frac{\partial}{\partial t}g^{jl}T_{ij}T_{kl} + g^{ik}g^{jl}\frac{\partial}{\partial t}T_{ij}T_{kl} + g^{ik}g^{jl}T_{ij}\frac{\partial}{\partial t}T_{kl} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}g^{ik}g^{jl}T_{ij}T_{kl} + g^{jl}\frac{\partial}{\partial t}g^{ik}T_{ji}T_{lk} + g^{ik}g^{jl}\frac{\partial}{\partial t}T_{ij}T_{kl} + g^{ki}g^{lj}T_{kl}\frac{\partial}{\partial t}T_{ij} \\
&= 2\frac{\partial}{\partial t}g^{ik}g^{jl}T_{ij}T_{kl} + 2g^{ik}g^{jl}\frac{\partial}{\partial t}T_{ij}T_{kl} \\
&= 4g^{ia}g^{kb}R_{ab}g^{jl}T_{ij}T_{kl} + 2g^{ik}g^{jl}T_{kl}(\Delta T_{ij} + 2R_{ipjq}T^{pq} - \frac{2}{n}|T|^2 g_{ij} - 2T_{pi}T^p_j)
\end{aligned}$$

Es gelten

$$\begin{aligned}
\Delta|T|^2 &= g^{ab}\nabla_a\nabla_b(g^{ik}g^{jl}T_{ij}T_{kl}) \\
&= g^{ab}\nabla_a(g^{ik}g^{jl}(\nabla_b T_{ij}T_{kl} + T_{ij}\nabla_b T_{kl})) \\
&= g^{ab}g^{ik}g^{jl}(\nabla_a\nabla_b T_{ij}T_{kl} + \nabla_b T_{ij}\nabla_a T_{kl} + \nabla_a T_{ij}\nabla_b T_{kl} + T_{ij}\nabla_a\nabla_b T_{kl}) \\
&= 2g^{ab}g^{ik}g^{jl}\nabla_a\nabla_b T_{ij}T_{kl} + 2g^{ab}g^{ik}g^{jl}\nabla_a T_{ij}\nabla_b T_{kl} \\
&= 2\Delta T_{ij}g^{ik}g^{jl}T_{kl} + 2|\nabla T|^2
\end{aligned}$$

$$4\langle \mathrm{Rm}(T), T\rangle = 4g^{ik}g^{jl}\,\mathrm{Rm}(T)_{ij}T_{kl} = 4g^{ik}g^{jl}R_{ipjq}T^{pq}T_{kl}$$

Weiterhin gelten

$$\begin{aligned}
4g^{ia}g^{kb}R_{ab}g^{jl}T_{ij}T_{kl} &= 4g^{ia}g^{kb}(T_{ab} + \frac{R}{n}g_{ab})g^{jl}T_{ij}T_{kl} \\
&= 4g^{ia}g^{kb}g^{jl}T_{ab}T_{ij}T_{kl} + \frac{4}{n}R\delta^i_b g^{kb}g^{jl}T_{ij}T_{kl} \\
&= 4g^{ia}g^{kb}g^{jl}T_{ab}T_{ij}T_{kl} + \frac{4}{n}Rg^{ki}g^{jl}T_{ij}T_{kl} \\
&= 4T^i_b T^l_i T^b_l + \frac{4}{n}R|T|^2
\end{aligned}$$

$$-4g^{ik}g^{jl}T_{kl}T_{pi}T^p_j = -4T^j_k T^k_p T^p_j$$

$$-\frac{4}{n}g^{ik}g^{jl}T_{kl}|T|^2 g_{ij} = -\frac{4}{n}g^{kl}T_{kl}|T|^2 = 0$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}|T|^2 = 4T_b^iT_l^bT_i^l + \frac{4}{n}R|T|^2 + \Delta|T|^2 - 2|\nabla T|^2 + 4\langle \mathrm{Rm}(T), T\rangle - 4T_k^jT_p^kT_j^p$$

Das ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t}|T|^2 = \Delta|T|^2 - 2|\nabla T|^2 + 4\langle \mathrm{Rm}(T), T\rangle + \frac{4}{n}R|T|^2$$

Mittels Cauchy-Schwarz und A.6 können wir abschätzen

$$\langle \mathrm{Rm}(T), T\rangle \leq |\mathrm{Rm}(T)||T| \leq C(n)|\mathrm{Rm}||T|^2$$

, denn $\mathrm{Rm}(T) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathrm{Rm}\otimes T))$, wobei $\mathcal{C}$ jeweils für eine Kontraktion steht.
Das ergibt schließlich

$$\frac{\partial}{\partial t}|T|^2 \leq \Delta|T|^2 + 4C(n)|\mathrm{Rm}||T|^2 + \frac{4}{n}R|T|^2 = \Delta|T|^2 + 4(C(n)|\mathrm{Rm}| + \frac{R}{n})|T|^2$$

□

Die (Un)Gleichungen lassen sich regularisieren:

Korollar 14.2. *Jeweils für alle $\varepsilon > 0$ gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial t}|\mathrm{Rm}|^2 \leq \Delta|\mathrm{Rm}|^2 + 16\sqrt{|\mathrm{Rm}|^2+\varepsilon^2}|\mathrm{Rm}|^2$$
$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla\mathrm{Rm}|^2 \leq \Delta|\nabla\mathrm{Rm}|^2 + C(n)\sqrt{|\mathrm{Rm}|^2+\varepsilon^2}|\nabla\mathrm{Rm}|^2$$
$$\frac{\partial}{\partial t}|T|^2 \leq \Delta|T|^2 + 4(C(n)\sqrt{|\mathrm{Rm}|^2+\varepsilon^2} + \frac{1}{n}R)|T|^2$$

Bemerkung 14.3. Für unsere Zwecke reicht es, überall $\varepsilon = 1$ zu wählen.

Korollar 14.4. *Sei $S := \mathrm{supp}\,|\mathrm{Rm}|^2(\cdot,0)$ kompakt. Sei $y \in M$ ein fester Punkt. Dann existieren $C_1 = C_1(n,K)$, $C_2 = C_2(n,K,\sup_{M\times[0,\infty)}|\mathrm{Rm}|)$, $C_3 = C_3(n,K)$ und eine universelle Konstante $C > 0$, so dass gilt*

$$|\mathrm{Rm}|^2(x,t) \leq C_1e^{C_2t}C(h(0),|\mathrm{Rm}|^2(\cdot,0),y,t)e^{C_3e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau}d_{h(t)}(x,y)}e^{-\frac{Cd^2_{h(t)}(x,S)}{te^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}}$$

für alle $x \in M, t > 0$.

Sei $S := \mathrm{supp}\,|\nabla\mathrm{Rm}|^2(\cdot,0)$ kompakt. Sei $y \in M$ ein fester Punkt. Dann existieren $C_1 = C_1(n,K)$, $C_2 = C_2(n,K,\sup_{M\times[0,\infty)}|\mathrm{Rm}|)$, $C_3 = C_3(n,K)$ und eine universelle Konstante $C > 0$, so dass gilt

$$|\nabla\mathrm{Rm}|^2(x,t) \leq C_1e^{C_2t}C(h(0),|\nabla\mathrm{Rm}|^2(\cdot,0),y,t)e^{C_3e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau}d_{h(t)}(x,y)}e^{-\frac{Cd^2_{h(t)}(x,S)}{te^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}}$$

für alle $x \in M, t > 0$.

Sei $S := \operatorname{supp} |T|^2(\cdot, 0)$ *kompakt. Sei* $y \in M$ *ein fester Punkt. Dann existieren* $C_1 = C_1(n, K)$, $C_2 = C_2(n, K, \sup_{M \times [0,\infty)} |\operatorname{Rm}|)$, $C_3 = C_3(n, K)$ *und eine universelle Konstante* $C > 0$, *so dass gilt*

$$|T|^2(x,t) \leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |T|^2(\cdot, 0), y, t) e^{C_3 e^{\frac{1}{2}\int_0^t C(\tau)d\tau} d_{h(t)}(x,y)} e^{-\frac{C d^2_{h(t)}(x,S)}{te^{2\int_0^t C(\tau)d\tau}}}$$

für alle $x \in M, t > 0$.

Dabei sind C_2, S *und* y *in den drei Versionen im Allgemeinen verschieden.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage für $|\nabla \operatorname{Rm}|^2$, die anderen folgen analog. Setze $v = |\nabla \operatorname{Rm}|^2$. Dann ist v stetig, auf $M \times (0, \infty)$ C^∞ (sogar auf $M \times [0, \infty)$) und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} v \leq \Delta v - Qv$$

auf $M \times (0, \infty)$ mit $Q = -C(n)\sqrt{|\operatorname{Rm}|^2 + \varepsilon^2}$ und $\varepsilon = 1$. Außerdem ist wegen Satz 11.1 $v|_{M \times [0,T]}$ beschränkt für jedes $0 < T < \infty$. Außerdem ist nach Annahme $S = \operatorname{supp} v(\cdot, 0)$ kompakt. Nun folgt die Behauptung aus Satz 13.1. □

Bemerkung 14.5. (Beziehung zwischen Einstein und lokal symmetrischen Mannigfaltigkeiten) Sei (M, g) eine zusammenhängende, n-dimensionale C^∞ Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gilt $T = 0 \Rightarrow \nabla \operatorname{Rm} = 0$ falls $n = 3$, denn: $T = 0 \Rightarrow \operatorname{Ric} = cg \Rightarrow \nabla \operatorname{Ric} = 0 \Rightarrow \nabla \operatorname{Rm} = 0$. Andersherum gilt: Aus $\nabla \operatorname{Rm} = 0$ folgt $\nabla \operatorname{Ric} = 0$ und $\nabla R = 0$. Deshalb ist auch $\nabla T = \nabla \operatorname{Ric} - \nabla(\frac{R}{n} g) = 0$. Daraus folgt für ein beliebiges Vektorfeld X

$$\nabla_X |T|^2 = \nabla_X \langle T, T \rangle = 2 \langle \nabla_X T, T \rangle = 0$$

, d. h. $|T| = \mathit{const.}$. Wenn also an einem Punkt $p \in M$ $T(p) = 0$ gilt, so folgt $|T| = 0$ überall.

14.2 Warped product Fall

Sei nun (N, g_N) eine vollständige, flache, zusammenhängende, **kompakte** C^∞ Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$, $M := \mathbf{R} \times N$ und sei $h \in B(\mathbf{R} \times N)$ mit $\sup |\nabla \operatorname{Rm}| < \infty$ eine warped product Metrik der Form $h = f_0^2 dx^2 + g_0^2 g_N$ mit $f_0, g_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv. Sei $h(t) = f^2(\cdot, t)dx^2 + g^2(\cdot, t)g_N, t \in [0, \infty)$ mit $f, g : \mathbf{R} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv und mit $f(\cdot, 0) = f_0, g(\cdot, 0) = g_0$ die maximale Lösung des Ricci Flusses in $BK(\mathbf{R} \times N)$ mit $h(0) = h$ (siehe Definition 7.6, Satz 8.3 und Korollar 10.5). Nach Satz 10.10 gilt für diese Lösung des Ricci Flusses

$|\operatorname{Ric}|(x,q,t) \leq \frac{C_{\mathrm{Ric}}}{t+a}$ für alle $x \in \mathbf{R}, q \in N, t \in [0,\infty)$ mit $a = \frac{1}{2n\sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{g_s^2}{g^2}(x,0)}$ und $C_{\mathrm{Ric}} = C_{\mathrm{Ric}}(n, \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |\frac{g_{ss}}{g}|(x,0), \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |\frac{g_s^2}{g^2}|(x,0))$. Wir wählen $C(t) := \frac{2C_{\mathrm{Ric}}}{t+a}$.

Damit sind die allgemeinen Voraussetzungen/ das Setting des Unterabschnitts 14.1 und folglich auch die allgemeinen Voraussetzungen/ das Setting in Kapitel 13 erfüllt.

Außerdem definieren wir

$$\widetilde{u}(x,t) := u(x,q,t)$$

für eine Funktion $u : \mathbf{R} \times N \times [0,\infty) \to \mathbf{R}$ mit $u(x,p,t) = u(x,q,t)$ für alle $x \in \mathbf{R}, p, q \in N, t \in [0,\infty)$ und

$$\hat{u}(b,t) := \widetilde{u}(s_y^{-1}(b,t),t)$$

für alle $b \in \mathbf{R}, t \in [0,\infty)$. Dabei ist $s_y^{-1}(b,t) := (s_y(\cdot,t))^{-1}(b)$ in Kapitel 4 erklärt.

Bemerkung 14.6. Ein Bespiel für C_{Ric} und a: Im Falle $f(x,0) = 1$ und $g(x,0) = e^{kx}$ ($k \neq 0$) für alle $x \in \mathbf{R}$ ist $\mathbf{R} \times N$ hyperbolisch (alle Schnittkrümmungen $= -k^2 < 0$) (globale hyperbolische cusp). In diesem Fall gelten $K_H(x,t) = K_V(x,t) = -\frac{1}{2nt+\frac{1}{k^2}}$ für alle $x \in \mathbf{R}, t \in [0,\infty)$ (siehe Bemerkung 10.7). Somit gilt $a = \frac{1}{2nk^2}$.
Wegen Satz 5.13 ergibt das

$$\begin{aligned} |\operatorname{Ric}|^2 &= n(n+1)K_H^2 + 2n(n-1)K_H K_V + n(n-1)^2 K_V^2 \\ &= (n(n+1) + 2n(n-1) + n(n-1)^2)(\frac{1}{2nt+\frac{1}{k^2}})^2 \\ &= n^2(n+1)(\frac{1}{2nt+\frac{1}{k^2}})^2 \end{aligned}$$

also

$$|\operatorname{Ric}| = n\sqrt{n+1}\frac{1}{2nt+\frac{1}{k^2}} = \frac{\sqrt{n+1}}{2}\frac{1}{t+\frac{1}{2nk^2}} = \frac{C_{\mathrm{Ric}}}{t+a}$$

mit $C_{\mathrm{Ric}} = \frac{\sqrt{n+1}}{2}$.

Somit erhalten wir

Korollar 14.7. *Sei* $\operatorname{supp} \widetilde{|\operatorname{Rm}|^2}(\cdot,\cdot,0)$ *kompakt. Sei* $(y,p) \in \boldsymbol{R} \times N$ *ein fester Punkt mit* $y = \sup L$ *und* $L := \operatorname{supp} \widetilde{|\operatorname{Rm}|^2}(\cdot,0)$. *Dann existieren* $C_1 = C_1(n,K)$, $C_2 = C_2(n,K,\sup_{M\times[0,\infty)} |\operatorname{Rm}|)$, $C_3 = C_3(n,K)$ *und eine universelle Konstante* $C > 0$, *so dass gilt*

$$\widetilde{|\operatorname{Rm}|^2}(x,t) \leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |\operatorname{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0), y, p, t) e^{C_3 d_t(x,y)(\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C d_t^2(x,y)}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}}$$

für alle $x \geq y, t > 0$.

Sei $\operatorname{supp} |\nabla \operatorname{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0)$ *kompakt. Sei* $(y,p) \in \boldsymbol{R} \times N$ *ein fester Punkt mit* $y = \sup L$ *und* $L := \operatorname{supp} |\widetilde{\nabla \operatorname{Rm}}|^2(\cdot,0)$. *Dann existieren* $C_1 = C_1(n,K)$,$C_2 = C_2(n,K,\sup_{M\times[0,\infty)} |\operatorname{Rm}|)$, $C_3 = C_3(n,K)$ *und eine universelle Konstante* $C > 0$, *so dass gilt*

$$|\widetilde{\nabla \operatorname{Rm}}|^2(x,t) \leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |\nabla \operatorname{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0), y, p, t) e^{C_3 d_t(x,y)(\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C d_t^2(x,y)}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}}$$

für alle $x \geq y, t > 0$.

Sei $\operatorname{supp} |T|^2(\cdot,\cdot,0)$ *kompakt. Sei* $(y,p) \in \boldsymbol{R} \times N$ *ein fester Punkt mit* $y = \sup L$ *und* $L := \operatorname{supp} \widetilde{|T|}^2(\cdot,0)$. *Dann existieren* $C_1 = C_1(n,K)$,$C_2 = C_2(n,K,\sup_{M\times[0,\infty)} |\operatorname{Rm}|)$, $C_3 = C_3(n,K)$ *und eine universelle Konstante* $C > 0$, *so dass gilt*

$$\widetilde{|T|}^2(x,t) \leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |T|^2(\cdot,\cdot,0), y, p, t) e^{C_3 d_t(x,y)(\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C d_t^2(x,y)}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}}$$

für alle $x \geq y, t > 0$.

Dabei sind L und C_2 (und auch y!) im Allgemeinen von Zeile zu Zeile verschieden.

Beweis. Das folgt aus Satz 13.11 und daraus, dass alle Krümmungsgrößen nur von x (und t) abhängen (Korollar 5.31). □

Korollar 14.8. *Unter denselben Voraussetzungen wie in Korollar 14.7 gelten, jeweils für alle $b \geq 0, t > 0$,*

$$|\hat{\operatorname{Rm}}|^2(b,t) \leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |\operatorname{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0), y, p, t) e^{C_3 b(\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C b^2}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}}$$

$$|\nabla \hat{\operatorname{Rm}}|^2(b,t) \leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |\nabla \operatorname{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0), y, p, t) e^{C_3 b(\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C b^2}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}}$$

$$|\hat{T}|^2(b,t) \leq C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |T|^2(\cdot,\cdot,0), y, p, t) e^{C_3 b(\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C b^2}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}}$$

Dabei sind L und C_2 (und auch y!) im Allgemeinen von Zeile zu Zeile verschieden.

Beweis. Das folgt aus Korollar 13.13 □

Bemerkung 14.9. Wegen $\frac{g_s^2}{g^2} \leq \widetilde{|\operatorname{Rm}|}$ und $|\frac{g_{ss}}{g}| \leq \widetilde{|\operatorname{Rm}|}$ erhalten wir im obigen ersten Fall ($\operatorname{supp} |\operatorname{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0)$ kompakt) auch Abschätzungen für $\frac{g_s^2}{g^2}$ und $\frac{g_{ss}}{g}$.

Ebenfalls gelten Gaußsche Abschätzungen für die Differenz der Hauptschnittkrümmungen zum Quadrat:

Satz 14.10. *Sei* $\mathrm{supp}(K_V - K_H)^2\widetilde{(\cdot,\cdot,0)}$ *kompakt. Sei* $(y,p) \in \boldsymbol{R} \times N$ *ein fester Punkt mit* $y = \sup L$ *und* $L := \mathrm{supp}\,(\widetilde{K_V - K_H})^2(\cdot,0)$*. Dann existieren* $C_1 = C_1(n,K)$*,* $C_2 = C_2(n,K,\sup_{M\times[0,\infty)} |\,\mathrm{Rm}\,|)$*,* $C_3 = C_3(n,K)$ *und eine universelle Konstante* $C > 0$*, so dass gilt*

$$(\widetilde{K_V - K_H})^2(x,t) \le C_1 e^{C_2 t} C(h(0),(K_V - K_H)^2(\cdot,\cdot,0),y,p,t) e^{C_3 d_t(x,y)(\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{Cd_t^2(x,y)}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}}$$

für alle $x \ge y, t > 0$ *und*

$$(K_V \hat{-} K_H)^2(b,t) \le C_1 e^{C_2 t} C(h(0),(K_V - K_H)^2(\cdot,\cdot,0),y,p,t) e^{C_3 b(\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{Cb^2}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}} \tag{9}$$

für alle $b \ge 0, t > 0$.

Beweis. Es gilt $(\widetilde{K_V - K_H})^2(x,t) = (K_V - K_H)^2(x,q,t) = ((\frac{g_s}{g})_s)^2(x,t)$ für alle $x \in \mathbf{R}, q \in N, t \in [0,\infty)$ und $(((\frac{g_s}{g})_s)^2)_t \le (((\frac{g_s}{g})_s)^2)_{ss} + n\frac{g_s}{g}(((\frac{g_s}{g})_s)^2)_s$. Wegen Korollar 5.35 (oder alternativ aus [24], S. 74, Exercises 3.15) folgt $\frac{\partial}{\partial t}(K_V - K_H)^2 \le \Delta(K_V - K_H)^2$ auf $\mathbf{R} \times N \times [0,\infty)$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 13.11 und Korollar 13.13. $\square$

Wir wollen jetzt Abschätzungen für $\frac{g_s^2}{g^2}$ und $\frac{g_{ss}}{g}$ im Fall $\mathrm{supp}\,|\nabla\,\mathrm{Rm}\,|^2(\cdot,\cdot,0)$ kompakt herleiten:

Zuvor präzisieren wir den Begriff der Enden einer Mannigfaltigkeit:

Definition 14.11. *Sei* X *eine Mannigfaltigkeit und* $K \subset X$ *kompakt. Dann sind die Enden von* X *(bzgl.* K*) die Zusammenhangskomponenten von* $X - K$.

Wir wollen zeigen:

Satz 14.12. *Sei* $\mathrm{supp}\,|\nabla\,\mathrm{Rm}\,|^2(\cdot,\cdot,0)$ *kompakt. Dann sind die Enden von* $\boldsymbol{R} \times N$ *(bzgl. jeder kompakten Menge* $[\alpha,\beta] \times N$ *mit* $\mathrm{supp}\,|\nabla\,\mathrm{Rm}\,|^2(\cdot,\cdot,0) \subset [\alpha,\beta] \times N$*) zum Zeitpunkt* $t = 0$ *jeweils entweder flach oder hyperbolisch. Im Falle hyperbolischer Enden mit konstanter Krümmung* $k < 0$ *gilt: Sei* $(y,p) \in \boldsymbol{R} \times N$ *ein fester Punkt mit* $y = \sup L$ *und* $L := \mathrm{supp}\,|\widetilde{\nabla\,\mathrm{Rm}}\,|^2(\cdot,0)$*. Dann existieren* $C_1 = C_1(n,K)$*,* $C_2 = C_2(n,K,\sup\limits_{M\times[0,\infty)} |\,\mathrm{Rm}\,|)$*,* $C_4 = C_4(n,K)$ *und eine universelle Konstante* $C_5 > 0$*, so dass gelten*

$$\begin{aligned}
&|\frac{1}{2nt - \frac{1}{k}} - (\hat{\frac{g_s^2}{g^2}})(b,t)| \\
&\le \sqrt{C_1 e^{C_2 t} C(h(0),|\nabla\,\mathrm{Rm}\,|^2(\cdot,\cdot,0),y,p,t)} \int\limits_b^\infty e^{C_4 z(\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C_5 z^2}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}} dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&|\frac{1}{2nt-\frac{1}{k}} - (\frac{\hat{g_{ss}}}{g})(b,t)| \\
&\leq \sqrt{C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |\nabla \operatorname{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0), y, p, t)} \int_b^\infty e^{C_4 z (\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C_5 z^2}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}} dz
\end{aligned}
$$

für alle $b \geq 0, t > 0$

Bemerkung 14.13. Eine analoge Abschätzung erhalten wir für die Wahl $y = \inf L$.

Dazu zeigen wir zunächst:

Satz 14.14. *Sei* $\operatorname{supp} |\nabla \operatorname{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0)$ *kompakt. Dann sind die Enden von $\boldsymbol{R} \times N$ (bzgl. jeder kompakten Menge $[\alpha,\beta] \times N$ mit* $\operatorname{supp} |\nabla \operatorname{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0) \subset [\alpha,\beta] \times N$*) zum Zeitpunkt $t = 0$ jeweils entweder flach oder hyperbolisch. Im Falle hyperbolischer Enden mit konstanter Krümmung $k < 0$ gilt: Sei $(y,p) \in \boldsymbol{R} \times N$ ein fester Punkt mit $y = \sup L$ und* $L := \operatorname{supp} |\widetilde{\nabla \operatorname{Rm}}|^2(\cdot,0)$. *Dann existieren $C_1 = C_1(n,K)$, $C_2 = C_2(n,K, \sup_{M\times[0,\infty)} |\operatorname{Rm}|)$, $C_4 = C_4(n,K)$ und eine universelle Konstante $C_5 > 0$, so dass gelten*

$$
\begin{aligned}
&|-C(t) - \frac{g_s^2}{g^2}(s_y^{-1}(b,t),t)| \\
&\leq \sqrt{C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |\nabla \operatorname{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0), y, p, t)} \int_b^\infty e^{C_4 z (\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C_5 z^2}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}} dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|-C(t) - \frac{g_{ss}}{g}(s_y^{-1}(b,t),t)| \\
&\leq \sqrt{C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |\nabla \operatorname{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0), y, p, t)} \int_b^\infty e^{C_4 z (\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C_5 z^2}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}} dz
\end{aligned}
$$

für alle $b \geq 0, t > 0$, mit $C : (0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ gegeben durch

$$
C(t) := \lim_{c\to\infty} \widetilde{K_V}(s_y^{-1}(c,t),t)
$$

Beweis. Nach Voraussetzung hat unsere warped product Mannigfaltigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ lokal symmetrische Enden (bzgl. $[\alpha,\beta] \times N$). Daraus folgt, dass jedes Ende bei $t = 0$ konstante nichtpositive Krümmung hat, siehe Satz 5.36. Nach Annahme ist die Krümmung der Enden strikt negativ und gleich k.

Es gilt nach Satz 5.12 $|(\frac{g_s^2}{g^2})_s| \leq |\widetilde{\nabla \operatorname{Rm}}|$ und $|(\frac{g_{ss}}{g^2})_s| \leq |\widetilde{\nabla \operatorname{Rm}}|$. Wir können somit abschätzen:

$$|\frac{g_s^2}{g^2}(s_y^{-1}(c,t),t) - \frac{g_s^2}{g^2}(s_y^{-1}(b,t),t)| \leq \int\limits_{s_y^{-1}(b,t)}^{s_y^{-1}(c,t)} |(\frac{g_s^2}{g^2})_s|(x,t)ds(x,t)$$

$$\leq \int\limits_{s_y^{-1}(b,t)}^{s_y^{-1}(c,t)} |\widetilde{\nabla \mathrm{Rm}}|(x,t)ds(x,t)$$

$$\leq \int\limits_{s_y^{-1}(b,t)}^{s_y^{-1}(c,t)} \sqrt{C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |\nabla \mathrm{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0), y, p, t) e^{C_3 d_t(x,y)(\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C d_t^2(x,y)}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}}} f(x,t)dx$$

$$= \sqrt{C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |\nabla \mathrm{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0), y, p, t)} \int\limits_{s_y^{-1}(b,t)}^{s_y^{-1}(c,t)} e^{\frac{C_3}{2} d_t(x,y)(\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C d_t^2(x,y)}{2t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}} f(x,t)dx$$

$$= \sqrt{C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |\nabla \mathrm{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0), y, p, t)} \int\limits_b^c e^{\frac{C_3}{2} z(\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C z^2}{2t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}} dz$$

$$\leq \sqrt{C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |\nabla \mathrm{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0), y, p, t)} \int\limits_b^\infty e^{C_4 z(\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C_5 z^2}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}} dz$$

mit $C_4 := \frac{C_3}{2}, C_5 := \frac{C}{2}$ und $0 \leq b \leq c$, denn es gilt $s_y(x,t) = \int_y^x f(\xi,t)d\xi = d_t(x,y)$ für $x \geq y$ und $s_y(\cdot,t)$ ist eine Stammfunktion von $f(\cdot,t)$ (siehe Korollar 4.16 und Bemerkung 4.13). Analog für $\frac{g_{ss}}{g}$.
Aus der Endlichkeit des Integrals auf der rechten Seite folgt: Zu jedem $t > 0$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $b_0 > 0$, so dass für alle $b_0 \leq b \leq c < \infty$ gilt:

$$|\frac{g_s^2}{g^2}(s_y^{-1}(c,t),t) - \frac{g_s^2}{g^2}(s_y^{-1}(b,t),t)| \leq \varepsilon$$

Somit existiert für jedes feste $t > 0$ $C(t) := -\lim\limits_{c\to\infty} \frac{g_s^2}{g^2}(s_y^{-1}(c,t),t)$. Genauso für $\frac{g_{ss}}{g}$. Da die warped product Mannigfaltigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ hyperbolische Enden hat, hat $(K_V - K_H)^2$ zum Zeitpunkt $t = 0$ kompakten Träger. Aus Satz 14.10 folgt damit $\lim\limits_{c\to\infty} \frac{g_s^2}{g^2}(s_y^{-1}(c,t),t) = \lim\limits_{c\to\infty} \frac{g_{ss}}{g}(s_y^{-1}(c,t),t)$. $\square$

Im Folgenden betrachten wir der Einfachheit halber alle Größen $u(x,q,t), x \in \mathbf{R}, q \in N, t \in [0,\infty)$, die nicht von $q \in N$ abhängen, wie z. B. $K_V, K_H, |\mathrm{Rm}|^2, |\nabla \mathrm{Rm}|^2$, als

Funktionen von allein x und t (und schreiben folglich $u(x,t)$ statt $\widetilde{u}(x,t)$); eine Ausnahme bildet Korollar 14.20 (nicht jedoch dessen Beweis).

Jetzt bestimmen wir noch $C(t)$, dazu ein paar Lemmata:

Sei $0 < T < \infty$ fest aber beliebig.

Satz 14.15. *$(K_V - K_H)^2 = ((\frac{g_s}{g})_s)^2$ und $|\nabla \operatorname{Rm}|^2$ konvergieren auf $(0,T]$ lokal gleichmäßig gegen 0 (für $x \to \infty$).*

Beweis. Sei $J \subset (0,T]$ ein kompaktes Intervall. Aus Satz 14.10 folgt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $b_0 > 0$, so dass für alle $b_0 \leq b < \infty$ und alle $t \in J$ gilt:$(K_V - K_H)^2(s_y^{-1}(b,t),t) \leq \varepsilon$, denn alle (nur) von t abhängigen Funktionen auf der rechten Seite der Gleichung (9) in Satz 14.10 haben auf J ein Maximum und ein positives Minimum.
Nun gilt, dass $s_y^{-1}(b_0,t) \leq c_0$ für ein $c_0 > 0$ und für alle $t \in [0,T]$, denn: $s_y^{-1}(b_0,t)$ ist der Punkt $x \geq y$, der von y den Abstand b_0 hat gemessen in der Metrik $f^2(\cdot,t)dx^2$. Wir können oBdA annehmen, dass $f(x,0) = 1$ für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt, siehe Korollar 8.4. Somit hat x den Abstand $\leq Cb_0$ von y gemessen in der Standardmetrik (C ist unabhängig von t), da alle Metriken auf $[0,T]$ gleichmäßig zur Standardmetrik äquivalent sind (siehe Bemerkung 9.4). Somit folgt $s_y^{-1}(b_0,t) = x = x - y + y \leq y + Cb_0 =: c_0$. Also folgt, da $s_y^{-1}(\cdot,t)$ strikt wachsend ist, $((\frac{g_s}{g})_s)^2(c,t) \leq \varepsilon$ für alle $c_0 \leq c < \infty, t \in J$. Der Beweis für $|\nabla \operatorname{Rm}|^2$ geht analog. □

Korollar 14.16. *$(K_V)_s, (K_H)_s, (K_V - K_H)^2$ und $(K_V)_{ss}$ (wobei K_V und K_H hier als Funktionen nur von x und t aufgefasst werden) konvergieren auf $(0,T]$ lokal gleichmäßig gegen 0 (für $x \to \infty$).*

Beweis. Wegen

$$|(K_V)_s| = |(\frac{g_s^2}{g^2})_s| \leq |\nabla \operatorname{Rm}|$$

und

$$|(K_H)_s| = |(\frac{g_{ss}}{g})_s| \leq |\nabla \operatorname{Rm}|$$

sowie

$$(K_V - K_H)^2 = ((\frac{g_s}{g})_s)^2$$

ist die lokal gleichmäßige Konvergenz von $(K_V)_s, (K_H)_s, (K_V - K_H)^2$ klar (Beachte dafür ganz allgemein: $f(x,t) \to 0$ lokal gleichmäßig auf $(0,T]$ $(x \to \infty)$ ist äquivalent zu $f^2(x,t) \to 0$ lokal gleichmäßig auf $(0,T]$ $(x \to \infty)$.)
Für die lokal gleichmäßige Konvergenz von $(K_V)_{ss}$ bemerken wir: $(K_V)_{ss} = -(\frac{g_s^2}{g^2})_{ss}$ und

$$
\begin{aligned}
(\frac{g_s^2}{g^2})_{ss} &= (2\frac{g_s}{g}(\frac{g_s}{g})_s)_s = 2(\frac{g_s}{g})_s^2 + 2\frac{g_s}{g}(\frac{g_s}{g})_{ss} \\
& 2(K_V - K_H)^2 + 2\frac{g_s}{g}(K_V - K_H)_s \\
&= 2(K_V - K_H)^2 + 2\frac{g_s}{g}(K_V)_s - 2\frac{g_s}{g}(K_H)_s
\end{aligned}
$$

Da $\frac{g_s}{g}$ global beschränkt ist, folgt die Behauptung. □

Satz 14.17. *$\frac{g_s^2}{g^2}$ konvergiert auf $(0,T]$ (für $x \to \infty$) lokal gleichmäßig gegen $-C(\cdot)$.*

Beweis. Sei $J \subset (0,T]$ ein kompaktes Intervall. Aus dem Beweis des Satzes 14.14 folgt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $b_0 > 0$, so dass für alle $b_0 \le b \le c < \infty$ und alle $t \in J$ gilt: $|\frac{g_s^2}{g^2}(s_y^{-1}(c,t),t) - \frac{g_s^2}{g^2}(s_y^{-1}(b,t),t)| \le \varepsilon$, denn alle (nur) von t abhängigen Funktionen auf der rechten Seite der Abschätzung im Beweis des Satzes 14.14 wie z. B. $t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}$ haben auf J ein Maximum und ein positives Minimum. Wegen $s_{y_0}^{-1}(b_0,t) \le c_0$ für $t \in [0,T]$ (siehe den Beweis von 14.15) folgt

$$
|-C(t) - \frac{g_s^2}{g^2}(c,t)| \le \varepsilon
$$

für alle $c_0 \le c < \infty, t \in J$. □

Satz 14.18. *$C(t)$ ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar mit $C'(t) = 2nC^2(t)$.*

Beweis. Es gilt die Evolutionsgleichung

$$
(\frac{g_s^2}{g^2})_t = (\frac{g_s^2}{g^2})_{ss} - 2((\frac{g_s}{g})_s)^2 + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s^2}{g^2})_s - 2n\frac{g_s^4}{g^4}
$$

und wegen $K_V = -\frac{g_s^2}{g^2}$ folgt

$$
(K_V)_t = (K_V)_{ss} + 2(K_V - K_H)^2 + n\frac{g_s}{g}(K_V)_s + 2nK_V^2
$$

Aufgrund der vorigen Sätze und Korollare konvergiert $(K_V)_t$ auf $(0,T]$ lokal gleichmäßig gegen $2n(C(t))^2$ für $(x \to \infty)$. Sei nun x_n eine Folge in $\mathbf{R}$ mit $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ und definiere $f_n(t) := K_V(x_n,t)$. Es gilt $f_n(t) \to C(t)$. Und f_n' konvergiert lokal gleichmäßig auf $(0,T]$ gegen $2n(C(\cdot))^2$. Somit ist C differenzierbar mit $C'(t) = 2nC^2(t)$. □

Satz 14.19. *$C(t) = -\frac{1}{2nt-\frac{1}{k}}(= -\frac{1}{2nt+1}$, falls $k = -1)$, $t \in [0,\infty)$.*

Beweis. Wir definieren $C(0) := k = \lim_{x\to\pm\infty} K_V(x,0)$ und zeigen zuerst, dass $C : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ bei $t = 0$ stetig ist. Es gilt für $x \in \mathbf{R}$ und, sagen wir $0 \le t \le 1$, $|\frac{g_s^2}{g^2}(x,t) - \frac{g_s^2}{g^2}(x,0)| \le \int_0^t |\frac{\partial}{\partial t}\frac{g_s^2}{g^2}(x,\tau)|d\tau \le \int_0^t |((\frac{g_s^2}{g^2})_{ss} - 2((\frac{g_s}{g})_s)^2 + n\frac{g_s}{g}(\frac{g_s^2}{g^2})_s - 2n\frac{g_s^4}{g^4})(x,\tau)|d\tau \le \int_0^t L d\tau = Lt$ für ein $L > 0$, denn $\frac{g_s}{g}, K_V, K_H$ und alle deren Ableitungen nach s sind auf $\mathbf{R} \times [0,1]$ beschränkt (siehe Kapitel 11). Lassen wir $x \to \infty$, erhalten wir $|-C(t)+C(0)| \le Lt$, was die Behauptung zeigt. Wegen $C(0) < 0$ kann damit nicht $C \equiv 0$ sein. Aus (Standard) Theorie über gewöhnliche Differentialgleichungen folgt, dass $C(t) < 0$ für alle $t \in [0,\infty)$ gilt. Aus der Differentialgleichung folgt $-2n = -\frac{C'(t)}{C^2(t)} = (\frac{1}{C})'(t)$. Sei $a > 0$. Es folgt $-2n(t-a) = \int_a^t(-2n)d\tau = \int_a^t(\frac{1}{C})'(\tau)d\tau = \frac{1}{C}(t) - \frac{1}{C}(a)$, d.h. es gilt für alle $a, t > 0$: $-2n(t-a) = \frac{1}{C}(t) - \frac{1}{C}(a)$. Lassen wir für festes t $a \to 0$ gehen, erhalten wir $-2nt = \frac{1}{C}(t) - \frac{1}{C}(0)$ und daraus $C(t) = -\frac{1}{2nt - \frac{1}{C(0)}}$ für $t > 0$ und wir sehen, dass die Gleichung auch für $t = 0$ gilt. $\square$

Zusammengenommen ergibt das den Beweis von Satz 14.12.

Tatsächlich gilt, dass nicht nur die Hauptschnittkrümmungen K_V und K_H gegen die Konstante $-\frac{1}{2nt-\frac{1}{k}}$ konvergieren (für $x \to \pm\infty$), sondern soger alle Schnittkrümmungen:

Korollar 14.20. *Unter denselben Voraussetzungen wie in Satz 14.12 gilt: Sei $U \subset T_{(x,q)}(\boldsymbol{R} \times N)$ ein beliebiger 2 dimensionaler Unterraum und $x \ge y$ mit $x = s_y^{-1}(b,t)$. Dann folgt*

$$
\begin{aligned}
&|\frac{1}{2nt - \frac{1}{k}} - \sec U| \\
&\le 3\sqrt{C_1 e^{C_2 t} C(h(0), |\nabla \operatorname{Rm}|^2(\cdot,\cdot,0), y, p, t)} \int\limits_b^\infty e^{C_4 z (\frac{t+a}{a})^{C_{\mathrm{Ric}}}} e^{-\frac{C_5 z^2}{t(\frac{t+a}{a})^{4C_{\mathrm{Ric}}}}} dz
\end{aligned}
$$

Beweis. Der Einfachheit halber setzen wir wieder $C(t) = -\frac{1}{2nt-\frac{1}{k}}$. Wegen Satz 5.9 gilt

$$
\begin{aligned}
|C(t) - \sec U| &\le |\sec U - \overline{\lambda}| + |\overline{\lambda} - C(t)| \\
&\le |K_V(x,t) - K_H(x,t)| + |\overline{\lambda} - C(t)| \\
&\le |K_V(x,t) - C(t)| + |K_H(x,t) - C(t)| + \\
&+ \max\{|K_V(x,t) - C(t)|, |K_H(x,t) - C(t)|\}
\end{aligned}
$$

Beachte für die Abschätzung insbesondere, dass $\overline{\lambda}$ als gewichtetes Mittel von K_V und K_H (siehe auch Satz 5.8) immer zwischen K_V und K_H liegt. Da die Abschätzungen für $|K_V - C(t)|$ und $|K_H - C(t)|$ in Satz 14.12 gleich sind (beachte $K_V(x,t) = K_V(s_y^{-1}(b,t),t) = -(\widehat{\frac{g_s^2}{g^2}})(b,t)$, analog für K_H), folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 14.21. In [36] wird gezeigt, dass vollständige asymptotisch hyperbolische Mannigfaltigkeiten unter einem krümmungs-normalisierten Ricci Fluss für kurze Zeit asymptotisch hyperbolisch bleiben. Daraus folgt ebenfalls die Konvergenz der Schnittkrümmungen gegen eine Konstante (für $x \to \pm\infty$) sowie die obige Abfallrate der Schnittkrümmungen in unserem warped product Setting. Vergleiche auch die Arbeiten [7] und [49] in Bezug auf das Erhalten von konform kompakten asymptotisch hyperbolischen Metriken unter Ricci Fluss. Vergleiche ferner die lokalen Abschätzungen in [50] in Bezug auf Nähe einer Lösung des krümmungs-normalisierten Ricci-de Turck Flusses zur hyperbolischen Metrik.

15 Negative Krümmungen der Enden bleiben erhalten

Sei in diesem Kapitel $M = \mathbf{R} \times N$ mit (N, g_N) eine vollständige, flache, zusammenhängende C^∞ Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$ und $h = f_0^2 dx^2 + g_0^2 g_N$ mit $f_0, g_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv eine warped product Metrik auf M. Wir nehmen zusätzlich $f_0(x) = 1$ für alle $x \in \mathbf{R}$ an und dass $-\infty < a_0 < b_0 < \infty$ existieren mit $g_0(x) = e^x, -\infty < x \leq a_0, g_0(x) = e^{-x}, b_0 \leq x < \infty$. Außerdem nehmen wir an, dass $(g_0)_s$ und $(g_0)_{ss}$ nur endlich viele und nur einfache Nullstellen haben. Es folgt (wegen $K_V = -\frac{g_s^2}{g^2}, K_H = -\frac{g_{ss}}{g}$ und Satz 5.9), dass die Enden $(-\infty, a_0] \times N$ und $[b_0, \infty) \times N$ hyperbolisch ($\sec = -1$) sind, so dass $h \in B(M)$ mit $\sup |\nabla \operatorname{Rm}| < \infty$ gilt. Sei $h(t) = f^2(\cdot, t)dx^2 + g^2(\cdot, t)g_N, t \in [0, \infty)$ mit $f, g : \mathbf{R} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ C^∞ und positiv und mit $f(\cdot, 0) = f_0, g(\cdot, 0) = g_0$ die maximale Lösung des Ricci Fluss in $BK(\mathbf{R} \times N)$ mit $h(0) = h$ (siehe Definition 7.6, Satz 8.3 und Korollar 10.5).

Wir zeigen in diesem Kapitel, dass es zwei disjunkte, (auf endlichen Teilintervallen) stückweise hölderstetige Graphen $x = \gamma(t)$ gibt, so dass links vom linken und rechts vom rechten Graphen $K_V < 0$ und $K_H < 0$ gilt (unter einer Voraussetzung über das Auftreten mehrfacher Nullstellen, siehe Satz 15.3).

Theorem 15.1. *Sei $0 < T < \infty$ und u eine Lösung von*

$$u_t = au_{xx} + bu_x + cu$$

auf $\boldsymbol{R} \times (0, T)$ mit $a, b, c : \boldsymbol{R} \times [0, T) \to \boldsymbol{R}$ C^∞, $a > 0$ und $a, a^{-1}, a_x, a_t, a_{xx}, b, b_t, b_x, c \in L^\infty$. Erfülle u die Abschätzung

$$|u(x, t)| \leq Ae^{Bx^2}$$

für feste Konstanten $A, B > 0$ und alle $x \in \boldsymbol{R}, t \in [0, T)$. Dann gelten:

(Theorem A) Für jedes $0 < t < T$ ist die Nullstellenmenge von $u(\cdot, t)$, $Z_t := \{x | u(x, t) = 0\}$, eine diskrete Teilmenge von $\boldsymbol{R}$.

(Theorem B) Falls bei (x_0, t_0) sowohl u als auch u_x verschwinden, gibt es eine Umgebung $N = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ (die beliebig klein gewählt werden kann!) von (x_0, t_0), so dass:

(i) $u \neq 0$ auf den Seiten von N (d. h. $u(x_0 \pm \varepsilon, t) \neq 0$ für $|t - t_0| \leq \delta$),

(ii) $u(\cdot, t + \delta)$ hat höchstens eine Nullstelle im Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$,

(iii) $u(\cdot, t - \delta)$ hat mindestens zwei Nullstellen im Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.

Beweis. siehe [2]. Dabei wurden die Forderung, dass a, b, c C^∞ sind, sowie die Aussage, dass die Umgebung N beliebig klein gewählt werden kann, hinzugefügt. □

Korollar 15.2. *Sei $0 < T < \infty$ und u eine Lösung des Cauchy Problems*

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + bu_x + cu \text{ auf } \boldsymbol{R} \times (0,T) \\ u(\cdot, 0) = f \end{cases} \tag{10}$$

mit $a, b, c : \boldsymbol{R} \times [0,T) \to \boldsymbol{R}$ C^∞, $a > 0$ und $a, a^{-1}, a_x, a_t, a_{xx}, b, b_t, b_x, c \in L^\infty$ und $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ C^∞. Erfülle u die Abschätzung

$$|u(x,t)| \leq Ae^{Bx^2}$$

für feste Konstanten $A, B > 0$ und alle $x \in \boldsymbol{R}, t \in [0,T)$. Sei die Menge $M := \{0 \leq t < T | u(\cdot, t)$ hat eine mehrfache Nullstelle $\}$ abgeschlossen in $\boldsymbol{R}$ und diskret. Außerdem nehmen wir an, dass f nur endlich viele und nur einfache Nullstellen hat. Dann gilt $M = \{t_1, ..., t_n\}$ (d. h. M ist endlich) mit $0 < t_1 < ... < t_n < T$. Definiere $t_0 := 0$ und $t_{n+1} := T$. Die Anzahl der Nullstellen von $u(\cdot, t)$ ist monoton fallend in t, konstant in (t_i, t_{i+1}) für alle $i = 0, 1, ..., n$ und strikt fallend bei t_i, $i = 1, ..., n$. Sei $Z := \{(x,t) | u(x,t) = 0\}$ die Nullstellenmenge von u. Es gilt: $Z \cap (\boldsymbol{R} \times (t_i, t_{i+1}))$, $i = 0, 1, ..., n-1$ ist jeweils eine disjunkte Vereinigung von hölderstetigen Graphen $x = \gamma(t)$, $Z \cap (\boldsymbol{R} \times (t_n, T))$ ist ebenfalls eine disjunkte Vereinigung von hölderstetigen Graphen $x = \gamma(t)$ oder $= \emptyset$. Definiere $\gamma_{\min}(t) := \min\{x \in \boldsymbol{R} | u(x,t) = 0\}$ und $\gamma_{\max}(t) := \max\{x \in \boldsymbol{R} | u(x,t) = 0\}$, wobei $t \in [0,T)$, falls $Z \cap (\boldsymbol{R} \times (t_n, T)) \neq \emptyset$ und $t \in [0, t_n]$, falls $Z \cap (\boldsymbol{R} \times (t_n, T)) = \emptyset$. Dann sind $\gamma_{\min}$ und $\gamma_{\max}$ stetige und stückweise hölderstetige Funktionen.

Beweis. Da M abgeschlossen in $\mathbf{R}$ und diskret ist und eine Teilmenge von $[0,T)$, ist M endlich. Auf $\mathbf{R} \times (t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, ..., n$ sind alle Nullstellen von u einfach. Nach dem Satz über implizite Funktionen (siehe auch [2]) ist somit $N \cap (\mathbf{R} \times (t_i, t_{i+1}))$ eine disjunkte Vereinigung von hölderstetigen Graphen der Form $x = \gamma(t), t_i < t < t_{i+1}$. Wegen der Hölder- und damit gleichmäßigen Stetigkeit hat jeder Graph eine eindeutige stetige Fortsetzung $x = \gamma(t), t_i \leq t \leq t_{i+1}$ (welche ebenfalls in Z liegt, bis auf die Endpunkte der Graphen im Bereich $\mathbf{R} \times (t_n, T))$, d. h. jeder (fortgesetzte) Graph hat einen Anfangs- und einen Endpunkt. Aus dem Satz über implizite Funktionen (der den Fall einer einfachen Nullstelle abdeckt) und obigem Theorem (das den Fall einer mehrfachen Nullstelle abdeckt) folgt: Die Menge der Endpunkte der Graphen in $\mathbf{R} \times [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, ..., n-1$ stimmt mit der Nullstellenmenge von $u(\cdot, t_{i+1})$ überein, und mindestens zwei Graphen haben denselben Endpunkt; außerdem sind die Anfangspunkte zweier verschiedener Graphen verschieden; ferner besteht die Nullstellenmenge von u in $\mathbf{R} \times [0, t_1)$ (wegen der Voraussetzungen an $u(\cdot, 0) = f$) aus endlich vielen disjunkten Hölderstetigen Graphen, deren Anzahl mit der Anzahl der Nullstellen von $u(\cdot, 0)$ übereinstimmt. Daraus folgen alle Behauptungen. □

Satz 15.3. *Sei $v : \boldsymbol{R} \times [0,\infty) \to \boldsymbol{R}$ die Lösung des Cauchy Problems*

$$\begin{cases} v_t = av_{xx} + bv_x + cv \text{ auf } \boldsymbol{R} \times (0,\infty) \\ v(\cdot,0) = g_{ss}(\cdot,0) \end{cases} \tag{11}$$

mit $a := \frac{1}{f^2}, b := (n-2)\frac{g_s}{fg} - \frac{f_x}{f^3}$ und $c := -2\frac{g_{ss}}{g} - (4n-5)\frac{g_s^2}{g^2}$. Wir nehmen an, dass die Menge $M^H := \{0 \le t < \infty | v(\cdot,t)$ hat eine mehrfache Nullstelle$\}$ abgeschlossen in $\boldsymbol{R}$ und diskret ist. Dann gilt $M^H = \{t_1,...,t_n\}$ (d. h. M ist endlich) mit $0 < t_1 < ... < t_n < \infty$. Seien $\gamma^H_{\min}(t) := \min\{x \in \boldsymbol{R} | v(x,t) = 0\}$ und $\gamma^H_{\max}(t) := \max\{x \in \boldsymbol{R} | v(x,t) = 0\}$, wobei $t \in [0,\infty)$, falls $Z \cap (\boldsymbol{R} \times (t_n,\infty) \neq \emptyset$ und $t \in [0,t_n]$, falls $Z \cap (\boldsymbol{R} \times (t_n,T)) = \emptyset$. Dabei sei $Z := \{(x,t) | v(x,t) = 0\}$ die Nullstellenmenge von v. Dann sind $\gamma^H_{\min}|_{[0,S]}$ und $\gamma^H_{\max}|_{[0,S]}$ stetig und stückweise hölderstetig für jedes feste $0 < S < \infty$ ($S \le t_n$, falls $Z \cap (\boldsymbol{R} \times (t_n,T)) = \emptyset$) und es gilt $K_H(x,t) < 0$ für alle $x < \gamma^H_{\min}(t)$ und $x > \gamma^H_{\max}(t)$.

Ebenso gelten unter der Annahme, dass die Menge
$M^V := \{0 \le t < \infty | g_s(\cdot,t)$ hat eine mehrfache Nullstelle$\}$ abgeschlossen in $\boldsymbol{R}$ und diskret ist, die analogen Aussagen für $\gamma^V_{\min}(t) := \min\{x \in \boldsymbol{R} | g_s(x,t) = 0\}$ und $\gamma^V_{\max}(t) := \max\{x \in \boldsymbol{R} | g_s(x,t) = 0\}$, und es gilt $K_V(x,t) < 0$ gilt für alle $x < \gamma^V_{\min}(t)$ und $x > \gamma^V_{\max}(t)$.

Beweis. Es gelten die Evolutions(un)gleichungen

$$\begin{aligned} g_{st} &= g_{sss} + (n-2)\frac{g_s g_{ss}}{g} - (n-1)\frac{g_s^3}{g^2} \\ &= g_{sss} + ((n-2)\frac{g_{ss}}{g} - (n-1)\frac{g_s^2}{g^2})g_s \\ &= \frac{1}{f^2}(g_s)_{xx} - \frac{f_x}{f^3}(g_s)_x + ((n-2)\frac{g_{ss}}{g} - (n-1)\frac{g_s^2}{g^2})g_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{sst} &= g_{ssss} + (n-2)\frac{g_s g_{sss}}{g} - 2\frac{g_{ss}^2}{g} - (4n-5)\frac{g_s^2 g_{ss}}{g^2} + 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^3} \\ &= g_{ssss} + (n-2)\frac{g_s}{g}g_{sss} + (-2\frac{g_{ss}}{g} - (4n-5)\frac{g_s^2}{g^2})g_{ss} + 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^3} \\ &\ge \frac{1}{f^2}(g_{ss})_{xx} - \frac{f_x}{f^3}(g_{ss})_x + (n-2)\frac{g_s}{fg}(g_{ss})_x + (-2\frac{g_{ss}}{g} - (4n-5)\frac{g_s^2}{g^2})g_{ss} \\ &= \frac{1}{f^2}(g_{ss})_{xx} + ((n-2)\frac{g_s}{g}\frac{1}{f} - \frac{f_x}{f^3})(g_{ss})_x + (-2\frac{g_{ss}}{g} - (4n-5)\frac{g_s^2}{g^2})g_{ss} \end{aligned}$$

Sei zuerst $u = g_s$.

u erfüllt dann die Gleichung $u_t = au_{xx} + bu_x + cu$ in $\mathbf{R} \times (0, \infty)$ mit $a = \frac{1}{f^2}, b = -\frac{f_x}{f^3}, c = (n-2)\frac{g_{ss}}{g} - (n-1)\frac{g_s^2}{g^2}$ Somit sind $a, b, c : \mathbf{R} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ C^∞. Sei $0 < T < \infty$ fest aber beliebig. Aus den Evolutionsgleichungen für $\frac{g_s^2}{g^2}$ und $\frac{g_{ss}}{g}$, dem Kommutator $[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}] = -n\frac{g_{ss}}{g}$ und Satz 5.12 folgt, dass alle partiellen Ableitungen von c nach s und t auf $\mathbf{R} \times [0, T]$ beschränkt sind. Da alle partiellen Ableitungen von f und $\frac{1}{f}$ nach x und t auf $\mathbf{R} \times [0, T]$ beschränkt sind (Satz 11.5), folgt die Beschränktheit aller partiellen Ableitungen nach x und t von a, b und c auf $\mathbf{R} \times [0, T]$.

Da außerdem u auf $\mathbf{R} \times [0, T]$ beschränkt ist (wegen $u = g_s = \frac{g_s}{g}g$ und Korollar 10.14) sind die Voraussetzungen des obigen Theorems erfüllt. Wegen der Annahme, dass die Menge $M^V := \{0 \leq t < \infty | g_s(\cdot, t)$ hat eine mehrfache Nullstelle$\}$ abgeschlossen in $\mathbf{R}$ und diskret ist, sind alle Voraussetzungen des obigen Korollars erfüllt.

Wegen $u(x, 0) = g_s(x, 0) \neq 0$ für hinreichend kleine und große x (da dort $K_V(x, 0) = -\frac{g_s^2}{g^2}(x, 0) \neq 0$ gilt) folgt $g_s(x, t) = u(x, t) \neq 0$ für alle $(x, t) \in \mathbf{R} \times [0, \infty)$ mit $x < \gamma^V_{\min}(t)$ und $x > \gamma^V_{\max}(t)$ und wegen $K_V = -\frac{g_s^2}{g^2}$ die zweite Behauptung des Satzes.

Betrachte nun die Gleichung $v_t = av_{xx} + bv_x + cv$ in $\mathbf{R} \times (0, \infty)$ mit $a = \frac{1}{f^2}, b = (n-2)\frac{g_s}{g}\frac{1}{f} - \frac{f_x}{f^3}, c = -2\frac{g_{ss}}{g} - (4n-5)\frac{g_s^2}{g^2}$. Dann gilt wiederum $a, b, c : \mathbf{R} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ sind C^∞, und alle partiellen Ableitungen von a, b, c (nach x und t) sind auf $\mathbf{R} \times [0, T]$ beschränkt.

Setze nun $u = g_{ss}$. Wegen der Forderungen an $g(\cdot, 0)$ sind alle (partiellen) Ableitungen (nach x) von $u(\cdot, 0) = g_{ss}(\cdot, 0) = g_{xx}(\cdot, 0)$ beschränkt. Nach Theorem 5.1, S. 320 in [39] hat das Cauchy Problem

$$\begin{cases} v_t = av_{xx} + bv_x + cv \text{ auf } \mathbf{R} \times (0, T] \\ v(\cdot, 0) = u(\cdot, 0) \end{cases} \tag{12}$$

genau eine beschränkte Lösung v auf $\mathbf{R} \times [0, T]$ Deshalb sind die Voraussetzungen des obigen Theorems erfüllt. Wegen der Annahme, dass die Menge $M^H := \{0 \leq t < \infty | v(\cdot, t)$ hat eine mehrfache Nullstelle$\}$ abgeschlossen in $\mathbf{R}$ und diskret ist, sind alle Voraussetzungen des obigen Korollars erfüllt. Außerdem gilt

Satz 15.4. *$u \geq v$ auf $\boldsymbol{R} \times [0, \infty)$*

Beweis. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(v-u)_t &= v_t - u_t \\
&= v_{ss} + (n-2)\frac{g_s}{g}v_s + (-2\frac{g_{ss}}{g} - (4n-5)\frac{g_s^2}{g^2})v- \\
&- (u_{ss} + (n-2)\frac{g_s}{g}u_s + (-2\frac{g_{ss}}{g} - (4n-5)\frac{g_s^2}{g^2})u + 2(n-1)\frac{g_s^4}{g^3}) \\
&\leq (v-u)_{ss} + (n-2)\frac{g_s}{g}(v-u)_s + (-2\frac{g_{ss}}{g} - (4n-5)\frac{g_s^2}{g^2})(v-u)
\end{aligned}
$$

und $u(x,0) = v(x,0)$ für alle $x \in \mathbf{R}$. Ferner ist v auf $\mathbf{R} \times [0,T]$ beschränkt, und u ebenso wegen $u = g_{ss} = \frac{g_{ss}}{g}g$ und Korollar 10.14 und den Voraussetzungen an $g(\cdot,0)$. Aus dem Maximumprinzip von Hsu Theorem 9.3 folgt damit $u \geq v$ auf $\mathbf{R} \times [0,T]$ für jedes $0 < T < \infty$ und damit die Behauptung. $\square$

Wegen $v(x,0) = u(x,0) = g_{ss}(x,0) > 0$ für hinreichend große und kleine x (da dort $K_H(x,0) = -\frac{g_{ss}}{g}(x,0) < 0$ gilt) folgt $g_{ss}(x,t) = u(x,t) \geq v(x,t) > 0$ für alle $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0,\infty)$ mit $x < \gamma_{\min}^H(t)$ und $x > \gamma_{\max}^H(t)$ und wegen $K_H = -\frac{g_{ss}}{g}$ die erste Behauptung des Satzes. $\square$

A Norm, Tensorprodukt und Kontraktionen

Einige Sätze darüber, wie sich die Norm mit dem Tensorprodukt, Heben und Senken von Indizes und Kontraktionen verhält:

Satz A.1. *Sei A ein (r,s)-Tensor und B ein (m,q)-Tensor. Dann gilt*

$$|A \otimes B| = |A||B|$$

Beweis. Der Einfachheit halber nehmen wir $r = m = 1$ und $s = q = 2$ an. Wir verwenden Normalkoordinaten bei $p \in M$:

$$\begin{aligned}|A \otimes B|^2(p) &= \sum_{a,b,i,j,k,l} ((A \otimes B)^{ab}_{ijkl}(p))^2 = \sum_{a,b,i,j,k,l} (A^a_{ij}(p)B^b_{kl}(p))^2 \\ &= \sum_{a,i,j}(A^a_{ij}(p))^2 \sum_{b,k,l}(B^b_{kl}(p))^2 = |A|^2(p)|B|^2(p)\end{aligned}$$

□

Satz A.2. *Ist A ein (r,s)-Tensor und entstehe ein (p,q)-Tensor B mit $r+s = p+q$ aus A durch Heben und Senken von Indizes (type changing), so gilt $|A| = |B|$*

Satz A.3. *Sei A ein $(1,1)$-Tensor. Dann gilt $|\mathcal{C}A| \le \sqrt{n}|A|$, wobei $\mathcal{C}A$ die Kontraktion (=Spur) von A bezeichnet.*

Beweis. Wir verwenden Normalkoordinaten bei $p \in M$.

$$\begin{aligned}|\mathcal{C}A|(p) &= |\sum_i A^i_i(p)| \le \sum_i |A^i_i(p)| \le \sqrt{\sum_i (A^i_i(p))^2}\sqrt{n} \\ &\le \sqrt{\sum_{i,j}(A^i_j(p))^2}\sqrt{n} = \sqrt{n}|A|\end{aligned}$$

□

Satz A.4. *Sei A ein (r,s) Tensor mit $r,s \ge 1$. Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kontraktion eines oberen und eines unteren Index. Dann gilt*

$$|\mathcal{C}A| \le \sqrt{n}|A|$$

Beweis. Der Einfachheit halber nehmen wir $r = 2, s = 3$ an. Sei $B := \mathcal{C}A$.

$$\begin{aligned}|\mathcal{C}A|^2(p) &= \sum_{i,k,m}(B^i_{km}(p))^2 = \sum_{i,k,m}(\sum_q A^{iq}_{kqm}(p))^2 \\ &\le n \sum_{i,j,k,l,m} (A^{ij}_{klm}(p))^2 = n|A|^2(p)\end{aligned}$$

Dabei haben wir $(\sum_q A^{iq}_{kqm}(p))^2 \le n\sum_q (A^{iq}_{kqm}(p))^2$ (siehe vorigen Beweis) benutzt. □

Korollar A.5. *Sei A ein (r,s)-Tensor. Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kontraktion zweier oberer oder unterer Indizes (und dann entsprechend $r \geq 2$ oder $s \geq 2$). Dann gilt*

$$|\mathcal{C}A| \leq \sqrt{n}|A|$$

Insgesamt erhalten wir

Korollar A.6. *Sei A ein (r,s)-Tensor und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kontraktion, so folgt $|\mathcal{C}A| \leq \sqrt{n}|A|$.*

B Exkurs: Äquivalenz von Metriken

In diesem Kapitel zeigen wir, wie man aus Abschätzungen an die Zeitableitung einer Familie von Riemannschen Metriken Abschätzungen über die Äquivalenz der Metriken bekommen kann. Außerdem geht es um die Beziehung zwischen Riemanschen Metriken und den induzierten (gewöhnlichen) Metriken in Bezug auf Äquivalenz.

Sei in diesem Kapitel $I \subset \mathbf{R}$ ein Intervall, V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und M eine n-dimensionale C^∞ Mannigfaltigkeit.

Lemma B.1. *Sei $f : I \to \boldsymbol{R}$ C^∞ und positiv, $C : I \to \boldsymbol{R}$ stetig und gelte $|\frac{d}{dt}f|(t) \leq C(t)f(t)$, für alle $t \in I$. Dann folgt*

$$f(a)e^{-\int_a^b C(\tau)d\tau} \leq f(b) \leq f(a)e^{\int_a^b C(\tau)d\tau}$$

und

$$f(b)e^{-\int_a^b C(\tau)d\tau} \leq f(a) \leq f(b)e^{\int_a^b C(\tau)d\tau}$$

für alle $a, b \in I, a < b$.

Beweis. Da f positiv ist, folgt $|\frac{\frac{d}{dt}f}{f}|(t) \leq C(t)$, woraus

$$-C(t) \leq \frac{\frac{d}{dt}f(t)}{f(t)} \leq C(t)$$

folgt, d. h.

$$-C(t) \leq \frac{d}{dt}\log f(t) \leq C(t)$$

Daraus folgt

$$-\int_a^b C(\tau)d\tau \leq \log f(b) - \log f(a) \leq \int_a^b C(\tau)d\tau$$

Somit folgt

$$e^{-\int_a^b C(\tau)d\tau} \leq \frac{f(b)}{f(a)} \leq e^{\int_a^b C(\tau)d\tau}$$

bzw.

$$f(a)e^{-\int_a^b C(\tau)d\tau} \leq f(b) \leq f(a)e^{\int_a^b C(\tau)d\tau}$$

Multiplizieren der ersten Ungleichung mit $e^{\int_a^b C(\tau)d\tau}$ und der zweiten Ungleichung mit $e^{-\int_a^b C(\tau)d\tau}$ ergibt dasselbe mit $f(a)$ und $f(b)$ vertauscht. $\square$

Satz B.2. *Sei $f : \boldsymbol{R}\times I \to \boldsymbol{R}$ C^∞ und positiv eine zeitabhängige Funktion und $C : I \to \boldsymbol{R}$ stetig mit $|\frac{\partial}{\partial t} f|(x,t) \leq C(t)f(x,t)$ für alle $x \in \boldsymbol{R}, t \in I$, so folgt für alle $a < b$, $a, b \in I$ und alle $x \in \boldsymbol{R}$*

$$f(x,a)e^{-\int_a^b C(\tau)d\tau} \leq f(x,b) \leq f(x,a)e^{\int_a^b C(\tau)d\tau}$$

und

$$f(x,b)e^{-\int_a^b C(\tau)d\tau} \leq f(x,a) \leq f(x,b)e^{\int_a^b C(\tau)d\tau}$$

Beweis. Für festes $x \in \mathbf{R}$ gilt nach Voraussetzung $|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)| \leq C(t)f(x,t)$. Setze $g(t) := f(x,t)$. Dann gilt also $|\frac{d}{dt} g|(t) \leq C(t)g(t)$. Aus Lemma B.1 folgt $g(a)e^{-\int_a^b C(\tau)d\tau} \leq g(b) \leq g(a)e^{\int_a^b C(\tau)d\tau}$ für alle $a, b \in I, a < b$ und somit $f(x,a)e^{-\int_a^b C(\tau)d\tau} \leq f(x,b) \leq f(x,a)e^{\int_a^b C(\tau)d\tau}$. □

Definition B.3. *Seien $g, h : V \times V \to \boldsymbol{R}$ bilinear und symmetrisch. Es gilt per Definition*

$$g \leq h :\Longleftrightarrow g(v,v) \leq h(v,v)\ \forall v \in V$$

Lemma B.4. *Seien $g, h : V \times V \to \boldsymbol{R}$ bilinear und symmetrisch. Sei g positiv definit. Sei $H : V \to V$ definiert durch $h(v,w) = g(H(v),w)$, $v, w \in V$. Dann ist H linear und selbstadjungiert und hat n reelle Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Es gilt $|h|_g = |H|_g = \sqrt{\lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2}$.*

Beweis. Das folgt aus Satz A.2 und [48]. □

Lemma B.5. *Seien $g, h : V \times V \to \boldsymbol{R}$ bilinear und symmetrisch. Sei g positiv definit. Dann gilt $-|h|_g g \leq h \leq |h|_g g$. Insbesondere gilt also $|h|_g \leq C \Rightarrow -Cg \leq h \leq Cg$.*

Beweis. Sei $e_1, ..., e_n$ eine zu den Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von H gehörende Orthonormalbasis (bzgl. g) aus Eigenvektoren mit H aus Lemma B.4. Es gilt

$$\begin{aligned}
h(v,v) = g(H(v),v) = g(H(\sum_i v^i e_i), \sum_j v^j e_j) &= \sum_{i,j} v^i v^j g(H(e_i), e_j) \\
= \sum_{i,j} v^i v^j g(\lambda_i e_i, e_j) = \sum_{i,j} \lambda_i v^i v^j \delta_{ij} &= \sum_i \lambda_i (v^i)^2 \\
\leq \max\{|\lambda_i|\} g(v,v) \leq \sqrt{\lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2} g(v,v) &= |h|_g g(v,v)
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen des vorigen Lemmas, das wir gleich nochmal anwenden:

$$h(v,v) = \sum_i \lambda_i (v^i)^2 \geq -\max\{|\lambda_i|\} g(v,v) \geq -\sqrt{\lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2} g(v,v) = -|h|_g g(v,v)$$

Also folgt die Behauptung. □

Satz B.6. *Sei $g(t) : V \times V \to \boldsymbol{R}$, $t \in I$ eine C^∞ Familie von Skalarprodukten auf V. Sei $h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$ und gelte $|h(t)|_{g(t)} \leq C(t)$ mit $C : I \to \boldsymbol{R}$ stetig. Dann folgt für alle $a < b$, $a, b \in I$*

$$e^{-\int_a^b C(\tau) d\tau} g(a) \leq g(b) \leq e^{\int_a^b C(\tau) d\tau} g(a)$$

und

$$e^{-\int_a^b C(\tau) d\tau} g(a) \leq g(b) \leq e^{\int_a^b C(\tau) d\tau} g(a)$$

Beweis. Sei $t \in I$ fest aber beliebig. Aus $|h(t)|_{g(t)} \leq C(t)$ folgt nach obigem Lemma $-C(t)g(t) \leq h(t) \leq C(t)g(t)$, d. h.

$$-C(t)g(t)(v,v) \leq \frac{d}{dt} g(t)(v,v) \leq C(t)g(t)(v,v)$$

für alle $v \in V$. Sei nun $v \neq 0$ fest aber beliebig. Es folgt $g(t)(v,v) \neq 0$ und damit

$$-C(t) \leq \frac{\frac{d}{dt} g(t)(v,v)}{g(t)(v,v)} \leq C(t)$$

(Es gilt $(\frac{d}{dt} g(t))(v,w) = \frac{d}{dt}(g(t)(v,w))$.)
Setze $f(t) = g(t)(v,v)$. Dann ist $f : I \to \mathbf{R}$ positiv und differenzierbar mit

$$-C(t) \leq \frac{\frac{d}{dt} f(t)}{f(t)} \leq C(t)$$

Aus Lemma B.1 folgt damit

$$f(a) e^{-\int_a^b C(\tau) d\tau} \leq f(b) \leq f(a) e^{\int_a^b C(\tau) d\tau}$$

Das ergibt

$$g(a)(v,v) e^{-\int_a^b C(\tau) d\tau} \leq g(b)(v,v) \leq g(a)(v,v) e^{\int_a^b C(\tau) d\tau}$$

für alle $v \neq 0$ und damit auch für alle $v \in V$. Das bedeutet

$$g(a) e^{-\int_a^b C(\tau) d\tau} \leq g(b) \leq g(a) e^{\int_a^b C(\tau) d\tau}$$

□

Definition B.7. *Seien g und h symmetrische $(0,2)$-Tensoren auf M. Es gilt definitionsgemäß $g \leq h$, falls $g(p) \leq h(p)$ für alle $p \in M$ gilt.*

Satz B.8. *Sei $g(t)$, $t \in I$ eine C^∞ Familie von C^∞ Riemannschen Metriken auf M. Definiere eine Familie von $(0,2)$-Tensoren auf M durch $h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$, und gelte $|h(t)|_{g(t)} \leq C(t)$ mit $C : I \to \boldsymbol{R}$ stetig. Dann folgt für alle $a < b$, $a, b \in I$*

$$e^{-\int_a^b C(\tau) d\tau} g(a) \leq g(b) \leq e^{\int_a^b C(\tau) d\tau} g(a)$$

und

$$e^{-\int_a^b C(\tau) d\tau} g(b) \leq g(a) \leq e^{\int_a^b C(\tau) d\tau} g(b)$$

Beweis. Sei $p \in M$ fest aber beliebig. Nach Voraussetzung gelten $h(t)(p) = \frac{d}{dt}g(t)(p)$ und $|h(t)(p)|_{g(t)(p)} \leq C(t)$. Aus Satz B.6 folgt für $a < b$, $a, b \in I$

$$e^{-\int_a^b C(\tau)d\tau} g(a)(p) \leq g(b)(p) \leq e^{\int_a^b C(\tau)d\tau} g(a)(p)$$

□

Für die von Riemannschen Metriken induzierten Metriken gilt allgemein:

Satz B.9. *Sind g, h Riemannsche Metriken auf M, $C > 0$ und gelte*

$$\frac{1}{C}h \leq g \leq Ch$$

Dann folgt

$$\frac{1}{C}d_h^2 \leq d_g^2 \leq Cd_h^2$$

wobei d_g die von der Riemannschen Metrik g induzierte Metrik auf M bezeichne usw.

Beweis. Sei $\gamma : [a, b] \to M$ (stückweise) C^∞. Dann gilt

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt \leq \sqrt{C} \int_a^b \sqrt{h(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt = \sqrt{C}L_h(\gamma)$$

Daraus folgt $d_g \leq \sqrt{C}d_h$. Wegen $\frac{1}{C}h \leq g \Leftrightarrow h \leq Cg$ folgt entsprechend

$$d_h \leq \sqrt{C}d_g$$

□

Satz B.10. *Seien $f, h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ C^∞ und positiv. Dann gilt: Die Riemannschen Metriken f^2dx^2 und h^2dx^2 auf $\boldsymbol{R}$ sind äquivalent mit der Konstanten $C > 0 \Longleftrightarrow$ Die Funktionen f^2 und h^2 sind "äquivalent"mit der Konstanten $C > 0$.*

Beweis. Es ist

$$\frac{1}{C}f^2dx^2 \leq h^2dx^2 \leq Cf^2dx^2$$

äquivalent zu

$$\frac{1}{C}f^2(x)v^2 \leq h^2(x)v^2 \leq Cf^2(x)v^2 \ \forall v \in \mathbf{R} \forall x \in \mathbf{R}$$

was äquivalent zu

$$\frac{1}{C}f^2(x) \leq h^2(x) \leq Cf^2(x) \ \forall x \in \mathbf{R}$$

ist. □

Korollar B.11. *Sei* $f : \boldsymbol{R} \times I \to \boldsymbol{R}$ C^∞ *und positiv eine zeitabhängige Funktion und* $C : I \to \boldsymbol{R}$ *stetig mit* $|\frac{d}{dt} f|(x,t) \leq C(t) f(x,t)$ *für alle* $x \in \boldsymbol{R}, t \in I$*. Dann folgt für* $a < b$, $a, b \in I$

$$f^2(\cdot, a) dx^2 e^{-2\int_a^b C(\tau) d\tau} \leq f^2(\cdot, b) dx^2 \leq f^2(\cdot, a) dx^2 e^{2\int_a^b C(\tau) d\tau}$$

und

$$d_a^2(x,y) e^{-2\int_a^b C(\tau) d\tau} \leq d_b^2(x,y) \leq d_a^2(x,y) e^{2\int_a^b C(\tau) d\tau}$$

für alle $x, y \in \boldsymbol{R}$*, wobei* $d_a(x,y)$ *die Distanzfunktion zur Metrik* $f^2(\cdot, a) dx^2$ *sei.*

Beweis. Das folgt aus Satz B.2 durch Quadrieren und Satz B.10 und Satz B.9. $\square$

C Einige Volumenabschätzungen

In diesem Abschnitt sind einige Volumenabschätzungen zusammengestellt.

Definition C.1. *Bezeichne $V^H(r)$ das Volumen eines Balles vom Radius $r > 0$ in der n-dimensionalen, vollständigen, einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $H \in \boldsymbol{R}$.*

Sei im Folgenden (bis auf das letzte Theorem dieses Abschnitts) $H = -K$ und $K > 0$!

Lemma C.2. *Es gilt*

$$V^{-K}(r) = \omega_n \int_0^r (\frac{\sinh Ks}{K})^{n-1} ds$$

wobei ω_n das $(n-1)$-dimensionale Volumen der Einheitssphäre S^{n-1} bezeichnet.

Beweis. siehe [25] □

Satz C.3. $V^{-K}(r) \leq \frac{\omega_n}{(n-1)K^n 2^{n-1}} e^{(n-1)Kr} = C(n,K)e^{(n-1)Kr}$

Beweis.

$$\begin{aligned} V^{-K}(r) &= \omega_n \int_0^r (\frac{\sinh Ks}{K})^{n-1} ds \leq \frac{\omega_n}{K^{n-1}} \int_0^r (\frac{1}{2} e^{Ks})^{n-1} ds \\ &\leq \frac{\omega_n}{K^{n-1}2^{n-1}} (\frac{1}{(n-1)K} e^{(n-1)Kr} - \frac{1}{(n-1)K}) \\ &\leq \frac{\omega_n}{(n-1)K^n 2^{n-1}} e^{(n-1)Kr} = C(n,k)e^{(n-1)Kr} \end{aligned}$$

□

Bemerkung C.4. Das steht auch in [25].

Satz C.5. $\lim\limits_{r \searrow 0} \frac{V^{-K}(2r)}{V^{-K}(r)} = 2^n$

Beweis.

$$\frac{V^{-K}(2r)}{V^{-K}(r)} = \frac{\omega_n \int_0^{2r} (\frac{\sinh Ks}{K})^{n-1} ds}{\omega_n \int_0^r (\frac{\sinh Ks}{K})^{n-1} ds} = \frac{\int_0^{2r} (\sinh Ks)^{n-1} ds}{\int_0^r (\sinh Ks)^{n-1} ds}$$

Wir benutzen die Regel von de l'Hospital zweimal:

$$\frac{(V^{-K}(2r))'}{(V^{-K}(r))'} = \frac{2(\sinh 2Kr)^{n-1}}{(\sinh Kr)^{n-1}} = 2(\frac{\sinh 2Kr}{\sinh Kr})^{n-1}$$

$$\frac{(\sinh 2Kr)'}{(\sinh Kr)'} = \frac{(\cosh 2Kr)2K}{(\cosh Kr)K} \to 2(r \to 0)$$

Das impliziert

$$\lim_{r \to 0} \frac{V^{-K}(2r)}{V^{-K}(r)} = \lim_{r \to 0} \frac{(V^{-K}(2r))'}{(V^{-K}(r))'} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

□

Satz C.6. $\frac{V^{-K}(2r)}{V^{-K}(r)} \leq C(n,k)e^{\widetilde{C}(n,K)r}$

Beweis. Seien n und $K > 0$ gegeben. Damit ist die strikt monoton wachsende Abbildung $V^{-K} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ gegeben. Sei $r_0 > 0$ der eindeutig bestimmte Radius, so dass $V^{-K}(r_0) = 1$ gilt. Es gilt also $r_0 = r_0(n,K)$, d. h. r_0 hängt nur von n und K ab. Wegen $\lim\limits_{r\to 0} \frac{V^{-K}(2r)}{V^{-K}(r)} = 2^n$ ist $s_0 := \sup\limits_{0<r\leq r_0} \frac{V^{-K}(2r)}{V^{-K}(r)} < \infty$, und es gilt ebenfalls $s_0 = s_0(n,K)$. Daraus folgt

$$\frac{V^{-K}(2r)}{V^{-K}(r)} \leq \max\{s_0, 1\} \max\{1, V^{-K}(2r)\} \leq \max\{s_0, 1\} \max\{1, C(n,k)\} e^{2(n-1)Kr}$$

Das ist gerade die Behauptung (wobei $C(n,K)$ in verschiedenen Zeilen für verschiedene Konstanten stehen kann). □

Satz C.7. *Sei (M,g) eine vollständige n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit* $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)Kg$. *Seien $x, y \in M$, bezeichne $d_g(x,y)$ die Distanz zwischen x und y und $V_g(x,r)$ das Volumen eines Balles um x mit Radius $r > 0$. Dann gilt*

$$V_g(x,r) \geq V_g(y,r) \frac{V^{-K}(r)}{V^{-K}(r + d_g(x,y))}$$

Beweis. siehe [13] □

Theorem C.8. *Sei (M,g) eine vollständige, n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit* $\mathrm{Ric} \geq (n-1)Hg$ *für ein $H \in \boldsymbol{R}$. Dann gilt für alle $0 < r < R$ und alle $p \in M$*

$$\frac{V_g(p,R)}{V_g(p,r)} \leq \frac{V^H(R)}{V^H(r)}$$

Insbesondere gilt $V_g(p,R) \leq V^H(R)$. Dabei bezeichnet $V_g(p,r)$ das Volumen eines Balles um p mit Radius $r > 0$ in (M,g).

Beweis. siehe [22], S. 161, Theorem 4.19 □

D Hilfssätze

Lemma D.1. *Sei (M, g) eine vollständige n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{Ric}_g \geq -(n-1)Kg$ für ein $K \geq 0$. Dann gibt es ein $C > 0$, so dass für alle $x \in M$ gilt:*

$$\int_M e^{-\alpha d^2(x,y)+\beta d(x,y)} d\mu_g(y) \leq C$$

wobei $\alpha, \beta > 0$ feste Konstanten sind und d die durch die Riemannsche Metrik g induzierte Metrik auf M bezeichnet.

Beweis. Sei $N = N(\alpha, \beta)$ die kleinste natürliche Zahl, die $\geq \frac{\beta}{2\alpha}$ ist. Für $r > \frac{\beta}{2\alpha}$ gilt dann nämlich, dass die Funktion $r \to e^{-\alpha r^2+\beta r}$ monoton fallend ist, was wir im Folgenden benutzen. Sei $B_r(x)$ der offene Ball um x mit Radius $r \geq 0$ (also $B_0(x) = \emptyset$). Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\int_M e^{-\alpha d^2(x,y)+\beta d(x,y)} d\mu_g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B_{k+1}(x)-B_k(x)} e^{-\alpha d^2(x,y)+\beta d(x,y)} d\mu_g(y) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \int_{B_{k+1}(x)-B_k(x)} e^{-\alpha d^2(x,y)+\beta d(x,y)} d\mu_g(y) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{B_{k+1}(x)-B_k(x)} e^{-\alpha d^2(x,y)+\beta d(x,y)} d\mu_g(y) \\
&= \int_{B_{N+1}(x)} e^{-\alpha d^2(x,y)+\beta d(x,y)} d\mu_g(y) + \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\alpha k^2+\beta k} \int_{B_{k+1}(x)-B_k(x)} d\mu_g(y) \\
&\leq \max_{0\leq r\leq N+1} e^{-\alpha r^2+\beta r} \int_{B_{N+1}(x)} d\mu_g(y) + \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\alpha k^2+\beta k} \int_{B_{k+1}(x)} d\mu_g(y) \\
&\leq \max_{0\leq r\leq N+1} e^{-\alpha r^2+\beta r} V^{-K}(N+1) + \sum_{k=1} e^{-\alpha k^2+\beta k} V^{-K}(k) \\
&\leq \max_{0\leq r\leq N+1} e^{-\alpha r^2+\beta r} C(n,K) e^{C(n,K)(N+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^2+\beta k} C(n,K) e^{C(n,K)k} \\
&= C(n, K, \alpha, \beta) < \infty
\end{aligned}$$

□

Satz D.2. *Sei $U \subset \boldsymbol{R}^n$ offen, A ein vollständiger σ-endlicher Maßraum und $f : U \times A \to \boldsymbol{R}$, $(x, y) \to f(x, y)$ erfülle*

- *$f(x, \cdot) : A \to \boldsymbol{R}$ ist integrierbar für jedes $x \in U$*
- *$f(\cdot, y) : U \to \boldsymbol{R}$ ist stetig differenzierbar für μ-fast alle $y \in A$*

- *Es existiert ein integrierbares $g : A \to \boldsymbol{R}$ mit $|\frac{\partial}{\partial x^i} f(x,y)| \leq g(y)$ für alle $x \in U, y \in A, 1 \leq i \leq n$*

Dann ist $h : U \to \boldsymbol{R}$, $h(x) = \int_A f(x,y)d\mu(y)$ stetig differenzierbar mit $\frac{\partial}{\partial x^i} h(x) = \int_A \frac{\partial}{\partial x^i} f(x,y)d\mu(y)$ für alle $x \in U, 1 \leq i \leq n$.

Beweis. siehe [1] $\square$

Satz D.3. *Seien M, N C^∞ Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Seien $W : N \times M \to \boldsymbol{R}$ und $f : M \to \boldsymbol{R}$ jeweils C^∞ mit $\operatorname{supp} f =: K \subset M$ kompakt. Definiere $u : N \to \boldsymbol{R}, u(x) = \int_M W(x,y)f(y)d\mu(y)$. Dann ist u C^∞ und es gilt $\frac{\partial}{\partial x^i} u(x) = \int_M \frac{\partial}{\partial x^i} W(x,y)f(y)d\mu(y)$ für jedes Koordinatensystem.*

Beweis. Wir zeigen zuerst: u ist C^∞:

Seien $U \subset N$ offen, $V \subset \mathbf{R}^n$ offen und $\phi : U \to V$ eine Karte. Definiere $\widetilde{W} : V \times M \to \mathbf{R}, \widetilde{W}(z,y) = W(\phi^{-1}(z), y)$. Wegen $\widetilde{W} = W \circ (\phi^{-1} \times \mathrm{id})$ ist $\widetilde{W}$ C^∞. Definiere ebenso $\widetilde{u} : V \to \mathbf{R}, \widetilde{u}(z) = u(\phi^{-1}(z))$. Es gilt

$$\widetilde{u}(z) = \int_M W(\phi^{-1}(z), y)f(y)d\mu(y) = \int_M \widetilde{W}(z,y)f(y)d\mu(y)$$

Überdecke nun V mit offenen Mengen $V_j, j \in J$, so dass $\overline{V_j} \subset V$ kompakt ist. Wir zeigen, dass $\widetilde{u}|_{V_j}$ C^∞ ist und damit auch $\widetilde{u}$. Da $\frac{\partial}{\partial x^i}\widetilde{W}$ C^∞ ist, ist es auf $V_j \times K$ beschränkt. Gleiches gilt für alle höheren partiellen Ableitungen von $\widetilde{W}$. Nach Satz D.2 ist $\widetilde{u}|_{V_j}$ C^1 und

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\widetilde{u}|_{V_j}(z) = \int_M \frac{\partial}{\partial x^i}\widetilde{W}(z,y)f(y)d\mu(y)$$

Induktiv erhalten wir: $\widetilde{u}|_{V_j}$ ist C^k und

$$\frac{\partial^k}{\partial(x^1)^{i_1}\cdots\partial(x^n)^{i_n}}\widetilde{u}|_{V_i}(z) = \int_M \frac{\partial^k}{\partial(x^1)^{i_1}\cdots\partial(x^n)^{i_n}}\widetilde{W}(z,y)f(y)d\mu(y)$$

mit $i_1 + ... + i_n = k$. Somit ist $\widetilde{u}|_{V_j}$ und damit $\widetilde{u}$ C^∞. Also ist u C^∞. Übrigens erhalten wir auch noch

$$\frac{\partial^k}{\partial(x^1)^{i_1}\cdots\partial(x^n)^{i_n}}\widetilde{u}(z) = \int_M \frac{\partial^k}{\partial(x^1)^{i_1}\cdots\partial(x^n)^{i_n}}\widetilde{W}(z,y)f(y)d\mu(y)$$

mit $i_1 + ... + i_n = k$, $z \in U$.

Jetzt zeigen wir noch $\frac{\partial}{\partial x^i}u(x) = \int_M \frac{\partial}{\partial x^i}W(x,y)f(y)d\mu(y)$, $x \in U$.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i} u(x) &= \frac{\partial}{\partial x^i}(u \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i} \widetilde{u}(\phi(x)) \\
&= \int_M \frac{\partial}{\partial x^i} \widetilde{W}(\phi(x), y) f(y) d\mu(y) \\
&= \int_M \frac{\partial}{\partial x^i} W(x, y) f(y) d\mu(y)
\end{aligned}
$$

denn

$$
\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial x^i} W)(x, y) &= (\frac{\partial}{\partial x^i} W(\cdot, y))(x) = (\frac{\partial}{\partial x^i}(W(\cdot, y)) \circ \phi^{-1}))(\phi(x)) \\
&= (\frac{\partial}{\partial x^i} \widetilde{W}(\cdot, y))(\phi(x)) = (\frac{\partial}{\partial x^i} \widetilde{W})(\phi(x), y)
\end{aligned}
$$

□

Literatur

[1] H. Amann, J. Escher, *Analysis III*, Birkhäuser Verlag, 2001

[2] S. Angenent, *The zero set of a solution of a parabolic equation*, J. reine angew. Math. **390** (1988), 79–96

[3] S. Angenent, J. Isenberg, D. Knopf, *Formal matched asymptotics for degenerate Ricci flow neckpinches*, Nonlinearity **24** (2011), 2265–2280

[4] S. Angenent, D. Knopf, *An example of neckpinching for Ricci flow on S^{n+1}*, Math. Res. Lett. **11** (2004), no. 4, 493–518

[5] S. Angenent, D. Knopf, *Precise asymptotics of the Ricci flow neckpinch*, Comm. Anal. Geom. **15** (2007), no. 4, 773–844

[6] D. G. Aronson, *Non-negative solutions of linear parabolic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. (4), **22** (1968), 607–694, Addendum **25** (1971), 221–228

[7] E. Bahuaud, *Ricci flow of conformally compact metrics*, arXiv:1011.2999v2 [math.AP]

[8] R. H. Bamler, *Long-time analysis of 3 dimensional Ricci flow I*, arXiv:1112.5125v1 [math.DG]

[9] E. Cabezas-Rivas, B. Wilking, *How to produce a Ricci flow via Cheeger-Gromoll exhaustion*, arXiv:1107.0606v3 [math.DG]

[10] M. Carfora, J. Isenberg, M. Jackson, *Convergence of the Ricci flow for metrics with indefinite Ricci curvature*, J. Differential Geometry **31** (1990), 249–263

[11] A. Chau, L.-F. Tam, C. Yu, *Pseudolocality for the Ricci flow and applications*, arXiv:math/0701153v2 [math.DG]

[12] J. Cheeger, M. Gromov, *Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded II*, J. Differential Geometry **32** (1990), 269–298

[13] J. Cheeger, M. Gromov, M. Taylor, *Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry **17** (1982), 15–53

[14] S. Y. Cheng, P. Li, S.-T. Yau, *On the upper estimate of the heat kernel of a complete Riemannian manifold*, Amer. J. Math. **103** (1981), no. 5, 1021–1063

[15] B. Chow, S.-C. Chu, D. Glickenstein, C. Guenther, J. Isenberg, T. Ivey, D. Knopf, P. Lu, F. Luo, L. Ni, *The Ricci Flow: Techniques and Applications, Part I: Geometric Aspects*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 135, American Mathematical Society, Providence, 2007

[16] B. Chow, S.-C. Chu, D. Glickenstein, C. Guenther, J. Isenberg, T. Ivey, D. Knopf, P. Lu, F. Luo, L. Ni, *The Ricci Flow: Techniques and Applications, Part II: Analytic Aspects*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 144, American Mathematical Society, 2008

[17] B. Chow, S.-C. Chu, D. Glickenstein, C. Guenther, J. Isenberg, T. Ivey, D. Knopf, P. Lu, F. Luo, L. Ni, *The Ricci Flow: Techniques and Applications, Part III: Geometric-Analytic Aspects*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 163, American Mathematical Society, 2010

[18] B. Chow, D. Knopf, *The Ricci flow: An Introduction*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 110, American Mathematical Society, 2004

[19] B. Chow, P. Lu, L. Ni, *Hamilton's Ricci flow*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 77, American Mathematical Society, 2006

[20] F. Fang, Y. Zhang, Z. Zhang, *Non-singular solutions to the normalized Ricci flow equation*, Math. Ann. **340** (2008), 647–674

[21] F. Fang, Y. Zhang, Z. Zhang, *Non-singular solutions of normalized Ricci flow on noncompact manifolds of finite volume*, J. of Geometric Analysis **20** (2010), no. 3, 592–608

[22] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer Verlag, 1987

[23] A. Grigor'yan, *Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitrary manifolds*, J. Diff. Geom. **45** (1997), 33–52

[24] A. Grigor'yan, *Heat kernel and analysis on manifolds*, Studys in Advanced Mathematics, American Mathematical Society, 2009

[25] A. Grigor'yan, E. Hsu, *Volume growth and escape rate of Brownian motion on a Cartan-Hadamard manifold*, The Annals of Probability **38** (2010), no. 4, 1570–1582

[26] A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste, *Heat kernel on manifolds with ends*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **59** (2009), 1917–1997

[27] H.-L. Gu, X.-P. Zhu, *The existence of type II singularities for the Ricci flow on S^{n+1}*, Comm. Anal. Geom. **16** (2008), no. 3, 467–494

[28] C. Guenther, *The fundamental solution on manifolds with time-dependent metrics*, The Journal of Geometric Analysis **12** (2002), 425–436

[29] R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17** (1982), 255–306

[30] R. Hamilton, *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in differential geometry **2** (1995), 7–136

[31] R. Hamilton, *Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds*, Comm. Anal. Geom. **7** (1999), no. 4, 695–729

[32] R. Hamilton, J. Isenberg, *Quasi-convergence of Ricci flow for a class of metrics*, Comm. Anal. Geom. **1** (1993), no. 3-4, 543–559

[33] C. Hilaire, *The long-time behavior of the Ricci tensor under the Ricci flow*, arXiv:1204.6733v1 [math.DG]

[34] S.-Y. Hsu, *Maximum principle and convergence of fundamental solutions for the Ricci flow*, Tokyo J. of Math. **32**, Number 2 (2009), 501–516

[35] S.-Y. Hsu, *Uniqueness of solutions of Ricci flow on complete noncompact manifolds*, arXiv:0704.3468v4 [math.DG]

[36] X. Hu, J. Qing, Y. Shi, *Regularity and rigidity of asymptotically hyperbolic manifolds*, arXiv:0910.2060v2 [math.DG]

[37] D. Knopf, *Quasi-convergence of the Ricci flow*, Comm. Anal. Geom. **8** (2000), no. 2, 375–391

[38] D. Knopf, *Convergence and stability of locally $\boldsymbol{R}^N$-invariant solutions of Ricci flow*, J. Geom. Anal. **19** (2009), no. 4, 817–846

[39] O.A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Uralceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, 1968

[40] P. Li, S.-T. Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math. **156** (1986), no. 3-4, 153–201

[41] J. Lott, *On the long-time behavior of type-III Ricci flow solutions*, Math. Annalen **339** (2007), 627–666

[42] J. Lott, *Dimensional reduction and the long-time behavior of Ricci flow*, Comm. Math. Helv. **85** (2010), 485–534

[43] J. Lott, N. Sesum, *Ricci flow on three-dimensional manifolds with symmetry*, arXiv:1102.4384v3 [math.DG]

[44] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry, with applications to relativity*, Academic Press, 1983

[45] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math/0211159v1 [math.DG]

[46] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv:math/0303109v1 [math.DG]

[47] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv:math/0307245v1 [math.DG]

[48] P. Petersen, *Riemannian Geometry* (2nd edition), Gradute Texts in Mathematics, Vol. 171, Springer Verlag, 2006

[49] J. Qing, Y. Shi, J. Wu, *Normalized Ricci flows and conformally compact Einstein metrics*, arXiv:1106.0372v1 [math.DG]

[50] O. C. Schnürer, F. Schulze, M. Simon, *Stability of hyperbolic space under Ricci flow*, Comm. Anal. Geom. **19** (2011), no. 5, 1023–1047.

[51] W.-X. Shi, *Deforming the metric on complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry **30** (1989), 223–301

[52] M. Simon, *A class of Riemannian manifolds that pinch when evolved by Ricci flow*, Manuscripta Math. **101** (2000), no. 1, 89–114

[53] P. Topping, *Lectures on the Ricci flow*, http://homepages.warwick.ac.uk/ maseq/RFnotes.html

[54] R. Ye, *Ricci flow, Einstein metrics and space forms*, Transactions of the American Mathematical Society **338** (1993), no. 2, 871–896