**Zusammenfassung**

In der Analysis spielen Integraldarstellungen für Funktionen eine bedeutende Rolle. Dies gilt insbesondere im Hinblick auf gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Solche Differentialgleichungen wiederum tauchen bei den meisten Problemen der angewandten Mathematik auf. In der Regel werden Integraldarstellungen auf reguläre Gebiete formuliert, also für beschränkte Gebiete mit (stückweise) glattem Rand.

Im Mittelpunkt meiner Untersuchungen stehen Integraldarstellungen in der komplexen Analysis. Hier sind die Cauchy-Formel und (als Abwandlung) die Schwarz-Formel allgemein bekannt. Diese Darstellungen beziehen sich auf analytische Funktionen, also, von der Theorie der Differentialgleichungen aus betrachtet, auf die Lösungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung

$$\partial_{\bar{z}}\omega = \frac{1}{2}(\partial_x\omega + i\partial_y\omega) = 0.$$

Allgemeiner lassen sich Funktionen aus dem Sobolev-Raum $W_1^1$ mit Hilfe der Cauchy-Pompeiu-Formel darstellen, die im Fall des Erfülltseins der Cauchy-Riemann-Gleichung mit der Cauchy-Formel zusammenfällt. Verallgemeinerte Cauchy-Pompeiu-Integraldarstellungen für Funktionen aus $W^{n,p}(D;\mathbb{C})$ sind für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leqslant p$ entwickelt worden.

Diese Darstellungen schliessen neben der klassischen Cauchy-Pompeiu-Formel auch die Greensche Darstellungsformel für die (inhomogene) Laplace-Gleichung ein.

Diese Hierarchie von Integraldarstellungen wird aus dem Gausschen Integralsatz entwickelt und ergibt sich auf iterativem Wege. Der Nutzen sei exemplarisch erläutert: Die einfachste Cauchy-Pompeiu-Formel hat die Gestalt $\omega = C\omega + Tf$, wobei

$$C\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \omega(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

$$Tf(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{D} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

und $\omega_{\bar{z}} = f$ sei. Der Pompeiu-Operator $T$ hat die Eigenschaften $\partial_{\bar{z}} Tf = f$, $\partial_z Tf = \Pi f$ mit

$$\Pi f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D f(\xi) \frac{d\xi d\eta}{(\xi - z)^2} \tag{1}$$

Hier sind die Ableitungen distributiv und (1) ist als Cauchysches Hauptwertintegral zu verstehen. Zur Lösung der inhomogenen Beltrami-Gleichung

$$\omega_{\bar{z}} + \mu \omega_z = f, \tag{2}$$

wo $|\mu(z)| \leqslant q_0 < 1$, sucht man eine partikuläre Lösung in der Form $\omega = T\rho$ mit unbekanntem $\rho$. In die Differentialgleichung (2) eingesetzt, ergibt dieser Ansatz

$$\rho + \mu \Pi \rho = f.$$

Dies ist eine singuläre Integralgleichung für $\rho$, in der $\mu\Pi$ eine Kontraktion darstellt, so dass diese Integralgleichung eindeutig lösbar ist. Dieses Prinzip kann auf komplexe partielle elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung ausgedehnt werden. Durch Einbeziehung der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Problems kann man so (im linearen Fall) die Lösung von korrekt gestellten Randwertproblemen erhalten.

Die Cauchy-Pompeiuschen Integraldarstellungen haben sich noch in anderer Hinsicht als nützlich erwiesen. Die Kernfunktionen, die Fundamentallösungen gewisser Differentialoperatoren sind, lassen sich durch Ableitungen von geeigneten polyharmonischen Green Funktionen ausdrücken. Dadurch erreicht man eine Aufspaltung der Integraldarstellung in eine Summe von Termen, die zum Kern des involvierten Differentialoperators gehören, zu der ein weiteres Integral addiert wird, das aus dem orthogonalen Komplement dieses Kern in $L^2(D; \mathbb{C})$ stammt. Im Prinzip lässt sich diese orthogonale Zerlegung für Differentialoperatoren der Form $\partial_z^{\mu} \partial_{\bar{z}}^{\nu}$, wo $\mu, \nu \geq 0$, durchführen. In regulären Gebieten ist dies bisher erfolgt, siehe [26]. Anwendungen und Verallgemeinerungen (im Hinblick auf Quaternionen- und Clifford-Analysis) sind gefunden worden, siehe [30].

Für spezielle Gebiete sind die Integraldarstellungen explizit, sobald die Greenschen Funktionen beliebiger Ordnung für dieses Gebiet bekannt sind. Dies ist für den Einheitskreis der Fall. In meiner Arbeit wird die Situation für die obere Halbebene in $\mathbb{C}$ untersucht. Die Arbeit gliedert sich in 5 Kapitel. In Kapitel 1 werden die Greenschen Funktionen hörer Ordnungen betrachtet und ihre Eigenschaften dargestellt. Die Untersuchung stützt sich auf [3] und [28]. Gaussche Theoreme, Cauchy-Pompeiusche Darstellung, Neumannsche Funktionen werden in Kapitel 2 untersucht. Grundlegende Randwertprobleme für analytische Funktionen für die obere Halbebene werden in Kapitel 3 untersucht. In Kapitel 4 werden diese Randwertprobleme für die inhomogene Cauchy-Riemannsche Gleichungen für die obere Halbebene explizit gelöst. Schliesslich wird in Kapitel 5 ein Dirichlet Problem für die inhomogene polyharmonische Gleichung unter Ordnung in das Halbebene berechnet. Hierzu wird die Cauchy-Pompeiu Formel mit Hilfe der Green Funktion aus Kapitel 1 abgewandelt. Unter gewissen notwendigen und hinreichenden Lösbarkeitsbedingungen erweist sich diese Darstellung als die eindeutig gegebene Lösung.