Kapitel 1

Verbesserung eines Ergebnisses von Pan Chengdong

1.1 Formulierung der Problemstellung

Im gesamten ersten Kapitel soll durchgehend $2d < x$ vorausgesetzt werden.
Analog, wie man beim Beweis des Primzahlsatzes von $\pi(x)$ zur praktikableren Funktion

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

übergeht, kann man statt $\pi_{2d}(x)$ die eng verwandte Funktion

$$\psi_2(x, 2d) := \sum_{2d < n \leq x} \Lambda(n)\Lambda(n - 2d)$$

betrachten. Dieser Übergang zu $\psi_2(x, 2d)$ ist vorteilhaft, weil die Mangoldt- Funktion Λ in einfacher Weise als Faltung geschrieben werden kann, nämlich als $\Lambda = \mu * \log$. Der Zusammenhang zwischen $\pi_{2d}(x)$ und $\psi_2(x, 2d)$ wird hergestellt durch

Lemma 1.1:

(i) Sei $f : IR^+ \longrightarrow IR^+$ eine riemannintegrierbare, monoton wachsende Funktion mit $x^{\frac{1}{2}} \log x \ll f(x) \ll \frac{x}{\log^2 x}$. Dann ist für $x \geq 2d + 2$

$$\pi_{2d}(x) = \sigma(2d) \cdot \int_{2d+2}^{x} \frac{dt}{\log t \log(t - 2d)} \quad + \quad O(f(x)) \tag{1.1}$$

äquivalent mit

$$\psi_2(x, 2d) = \sigma(2d)(x - 2d) + O\left(f(x) \log^2 x\right) \ . \tag{1.2}$$

(ii) Die Vermutung (1) von Hardy-Littlewood aus der Eineitung ist äquivalent mit

$$\psi_2(x, 2d) \sim \sigma(2d)(x - 2d) \ .$$

Beweis:

Zunächst läßt sich $\psi_2(x,2d)$ aufspalten in

$$\psi_2(x,2d) = H(x,2d) + R(x,2d) \ ,$$

wobei

$$H(x,2d) := \sum_{\substack{2d < p \le x, \\ p-2d \in I\!P}} \log p \ \log(p-2d)$$

und

$$R(x,2d) := \sum_{\substack{p_1,p_2 \in I\!P, \ \alpha_1,\alpha_2 \in I\!N \\ 2d < p_1^{\alpha_1} \le x, \ p_1^{\alpha_1} - 2d = p_2^{\alpha_2}, \\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ge 2}} \log p_1 \ \log p_2$$

sei. Da α_1 nur Werte $\le [\log_2 x]$ und α_2 entsprechend nur Werte $\le [\log_2(x-2d)]$ annimmt und nicht gleichzeitig $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 1$ ist, kann die Summe $R(x,2d)$ abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} R(x,2d) \ &\le \ \sum_{h=2}^{[\log_2 x]} \sum_{(2d)^{\frac{1}{h}} < n \le x^{\frac{1}{h}}} \log n \ \log(n^h - 2d) + \sum_{h=2}^{[\log_2 (x-2d)]} \sum_{n \le (x-2d)^{\frac{1}{h}}} \log(n^h + 2d) \ \log n \\ &= \ O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^3 x\right) \ . \end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung $x^{\frac{1}{2}} \log x \ll f(x)$ ist also (1.2) äquivalent mit

$$H(x,2d) = \sigma(2d)(x-2d) + O\left(f(x)\log^2 x\right) \ . \tag{1.3}$$

Für den Beweis von Teil (i) genügt es somit, die Äquivalenz von (1.1) und (1.3) zu zeigen. Zuerst soll bewiesen werden die Richtung

„(1.3) $\Rightarrow$ (1.1)":

Partielle Summation liefert

$$\pi_{2d}(x) = \frac{H(x,2d)}{\log x \log(x-2d)} - \int\limits_{2d+2}^{x} H(t,2d) \cdot \left(\frac{1}{\log t \log(t-2d)}\right)' dt \ . \tag{1.4}$$

Wegen (1.3) kann die rechte Seite approximiert werden durch

$$\begin{aligned} &\frac{H(x,2d)}{\log x \log(x-2d)} - \int\limits_{2d+2}^{x} H(t,2d) \cdot \left(\frac{1}{\log t \log(t-2d)}\right)' dt \\ = \ &\frac{\sigma(2d)(x-2d)}{\log x \log(x-2d)} - \int\limits_{2d+2}^{x} \sigma(2d)(t-2d) \cdot \left(\frac{1}{\log t \log(t-2d)}\right)' dt \ + \ O\left(f(x) + \int\limits_{2}^{x} \frac{f(t)}{t \log t} dt\right) \ . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Das Integral im O-Term läßt sich wegen der Voraussetzungen des Lemmas abschätzen durch

$$\int_2^x \frac{f(t)}{t\log t}dt = \int_2^{x^{\frac12}} \frac{f(t)}{t\log t}dt + \int_{x^{\frac12}}^x \frac{f(t)}{t\log t}dt \le x^{\frac12}\int_2^{x^{\frac12}} \frac{1}{t\log t}dt + f(x)\int_{x^{\frac12}}^x \frac{1}{t\log t}dt = O(f(x)) \ . \tag{1.6}$$

Für den Hauptterm auf der rechten Seite von (1.5) ergibt sich mit partieller Integration

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma(2d)(x-2d)}{\log x\log(x-2d)} - \int_{2d+2}^x \sigma(2d)(t-2d)\cdot\left(\frac{1}{\log t\log(t-2d)}\right)' dt \\ = \ & \sigma(2d)\cdot\int_{2d+2}^x \frac{dt}{\log t\log(t-2d)} + \frac{2\sigma(2d)}{\log(2d)\ \log 2} \ . \end{aligned} \tag{1.7}$$

Aus (1.4), (1.5), (1.6) und (1.7) folgt nun (1.1).

Sehr ähnlich erfolgt der Beweis der Richtung

„(1.1) $\Rightarrow$ (1.3)":

Partielle Summation liefert

$$H(x,2d) = \pi_{2d}(x)\log x\log(x-2d) - \int_{2d+2}^x \pi_{2d}(t)\cdot(\log t\log(t-2d))'\,dt \ . \tag{1.8}$$

Wegen (1.1) kann die rechte Seite approximiert werden durch

$$\begin{aligned} & \pi_{2d}(x)\log x\log(x-2d) - \int_{2d+2}^x \pi_{2d}(t)\cdot(\log t\log(t-2d))'\,dt \\ = \ & \log x\log(x-2d)\cdot\sigma(2d)\cdot\int_{2d+2}^x \frac{dt}{\log t\log(t-2d)} - \\ & \int_{2d+2}^x (\log t\log(t-2d))'\cdot\sigma(2d)\cdot\int_{2d+2}^t \frac{du}{\log u\log(u-2d)}\,dt + \\ & O\left(f(x)\log^2 x + \int_{2d+2}^x (\log t\log(t-2d))'\cdot f(t)dt\right) \ . \end{aligned} \tag{1.9}$$

Das Integral im O-Term läßt sich abschätzen durch

$$\int_{2d+2}^x (\log t\log(t-2d))'\cdot f(t)dt \le f(x)\cdot\int_{2d+2}^x (\log t\log(t-2d))'\,dt \le f(x)\log^2 x \ , \tag{1.10}$$

da die Funktion f laut Voraussetzung monoton steigend ist. Für den Hauptterm auf der rechten Seite von (1.9) ergibt sich mit partieller Integration

$$\log x \log(x-2d)\cdot\sigma(2d)\cdot\int\limits_{2d+2}^{x}\frac{dt}{\log t\log(t-2d)} -$$

$$\int\limits_{2d+2}^{x}(\log t\log(t-2d))'\cdot\sigma(2d)\cdot\int\limits_{2d+2}^{t}\frac{du}{\log u\log(u-2d)}\,dt \quad = \quad \sigma(2d)(x-2d-2)\ . \tag{1.11}$$

Aus (1.8), (1.9), (1.10) und (1.11) folgt nun (1.3). Damit ist Teil (i) gezeigt.

Wegen

$$\int\limits_{2d+2}^{x}\frac{dt}{\log t\log(t-2d)} = \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

ergibt sich Teil (ii) sofort aus Teil (i), womit Lemma 1.1 bewiesen ist. $\square$

Nun kann $\psi_2(x, 2d)$ wegen $\Lambda = \mu * \log$ in der Form

$$\psi_2(x, 2d) = \sum_{n\le x-2d}\left(\sum_{q_1|n}\mu(q_1)\log q_1 \sum_{q_2|(n+2d)}\mu(q_2)\log q_2\right) \tag{1.12}$$

geschrieben werden. Das Ziel ist es jetzt, von der rechten Seite von (1.12) einen Teilterm $T_{2d}(x)$ mit möglichst vielen Summanden abzuspalten, für den

$$T_{2d}(x) \sim \sigma(2d)(x-2d)$$

gezeigt werden kann. Dann ist wegen Lemma 1.1(ii) die Vermutung von Hardy- Littlewood genau dann richtig, wenn der ,,Rest" $\psi_2(x, 2d) - T_{2d}(x)$ ein echter Fehlerterm ist, also

$$\psi_2(x, 2d) - T_{2d}(x) = o(x)$$

gilt. Im ersten Kapitel dieser Arbeit sollen Teilterme der rechten Seite von (1.12) der Form

$$T_{2d}(x, u_1, v_1, u_2, v_2) := \sum_{n\le x-2d}\left(\sum_{\substack{q_1\,|\,n,\\ u_1<q_1\le v_1}}\mu(q_1)\log q_1\sum_{\substack{q_2\,|\,(n+2d),\\ u_2<q_2\le v_2}}\mu(q_2)\log q_2\right) \tag{1.13}$$

mit geeignet in Abhängigkeit von x gewählten Parametern $u_1, v_1, u_2, v_2 \in I\!R^+$ betrachtet werden.

1.2 Ein Ergebnis von Pan Chengdong

Überträgt man die in [Pan] für das Goldbachproblem bewiesene Aussage auf Primzahlzwillinge, so gelangt man zu folgendem

Satz 1.1:

Seien $A \geq 1$ und $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ beliebig, aber fest. Dann gilt für $x^\delta \leq Q \leq x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-(A+7)}$ die Abschätzung

$$T_{2d}(x, 0, Q, 0, x) + T_{2d}(x, Q, x, 0, Q) = \sigma(2d)(x - 2d) + O\left(x(\log x)^{-A}\right) \ , \tag{1.14}$$

wobei die O-Konstante nur von A und δ abhängt.

Daraus erhält man wegen Lemma 1.1(ii), (1.12) und (1.13) sofort als

Korollar 1.1:

Für $Q := x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-8}$ ist die Vermutung von Hardy-Littlewood äquivalent mit

$$T_{2d}(x, Q, x, Q, x) = o(x) \ .$$

Im folgenden soll Satz 1.1 auf ähnliche Weise wie die analoge Aussage in [Pan] bewiesen werden. Dazu wird wie in [Pan] der Satz von Bombieri-Vinogradov über die Verteilung der Mangoldt-Funktion Λ in primen Restklassen benutzt.
Zunächst ist es sinnvoll, die linke Seite von (1.14) in der Form

$$T_{2d}(x, 0, Q, 0, x) + T_{2d}(x, Q, x, 0, Q) = T_{2d}(x, 0, x, 0, Q) + T_{2d}(x, 0, Q, 0, x) - T_{2d}(x, 0, Q, 0, Q) \tag{1.15}$$

zu schreiben. Die Terme auf der rechten Seite von (1.15) werden nun einzeln abgeschätzt. Für den letzten Term erhält man

Lemma 1.2:

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.1 gilt

$$T_{2d}(x, 0, Q, 0, Q) = \sigma(2d)(x - 2d) + O\left(x(\log x)^{-(2A+12)}\right) \ ,$$

wobei die O-Konstante nur von A und δ abhängt.

Beweis:

Der Term $T_{2d}(x, 0, Q, 0, Q)$ läßt sich wegen der späteren Gleichung (1.24) ähnlich wie in [Pan] aufspalten in

$$T_{2d}(x, 0, Q, 0, Q) = H_{2d}(x, 0, Q, 0, Q) + R^1_{2d}(x, 0, Q, 0, Q) + R^2_{2d}(x, 0, Q, 0, Q) \ ,$$

wobei die Terme auf der rechten Seite definiert seien wie in (1.25), (1.26) und (1.27). Wegen der Voraussetzung $Q \geq x^{\delta}$ von Satz 1.1 ergibt sich aus dem später bewiesenen Satz 1.4

$$H_{2d}(x,0,Q,0,Q) = \sigma(2d)(x-2d) + O\left(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}\right)$$

für eine geeignete, nur von δ abhängige Konstante $c_1 > 0$. Schätzt man die Terme $R^{\nu}_{2d}(x,0,Q,0,Q)$ $(\nu = 1,2)$ trivial ab, so bekommt man ferner

$$R^{\nu}_{2d}(x,0,Q,0,Q) \leq Q^2 \log^2 x \leq x(\log x)^{-(2A+12)} \ .$$

Insgesamt folgt die Behauptung. $\square$

Zur Abschätzung der Terme $T_{2d}(x,0,x,0,Q)$ und $T_{2d}(x,0,Q,0,x)$ auf der rechten Seite von (1.15) sollen diese zunächst geeignet approximiert werden. Dies geschieht in

Lemma 1.3:

Für $Q \leq x$ gelten die Abschätzungen

$$(i) \quad T_{2d}\left(x,0,x,0,Q\right) = - \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q,2d)=1}} \mu(q) \log q \ \psi(x-2d;q,-2d) \ + \ O\left(x^{\epsilon}\right) \ , \qquad (1.16)$$

$$(ii) \quad T_{2d}\left(x,0,Q,0,x\right) = - \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q,2d)=1}} \mu(q) \log q \left(\psi(x;q,2d) - \psi(2d;q,2d)\right) \ + \ O\left(x^{\epsilon}\right) \ , \qquad (1.17)$$

wobei die O-Konstante jeweils nur von ϵ abhängt.

Beweis:

Wegen $\Lambda = \mu * \log$ gilt

$$\begin{aligned}
T_{2d}\left(x,0,x,0,Q\right) &= \sum_{n \leq x-2d} \ \sum_{\substack{q_1 \mid n \\ q_1 \leq x}} \mu(q_1)\log q_1 \sum_{\substack{q_2 \mid (n+2d) \\ q_2 \leq Q}} \mu(q_2) \log q_2 \\
&= - \sum_{n \leq x-2d} \Lambda(n) \sum_{\substack{q \mid (n+2d) \\ q \leq Q}} \mu(q)\log q \\
&= - \sum_{n \leq x-2d} \Lambda(n) \sum_{\substack{q \mid (n+2d) \\ q \leq Q \\ (q,2d)=1}} \mu(q)\log q \ + \\
&\quad - \sum_{n \leq x-2d} \Lambda(n) \sum_{\substack{q \mid (n+2d) \\ q \leq Q \\ (q,2d)>1}} \mu(q)\log q \ . \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

Die erste Doppelsumme in der letzten Gleichungszeile kann umgeformt werden in

$$\sum_{n\le x-2d}\Lambda(n)\sum_{\substack{q\mid(n+2d)\\ q\le Q\\ (q,2d)=1}}\mu(q)\log q = \sum_{\substack{q\le Q\\ (q,2d)=1}}\mu(q)\log q\sum_{\substack{n\equiv -2d \bmod q\\ n\le x-2d}}\Lambda(n)$$
$$= \sum_{\substack{q\le Q\\ (q,2d)=1}}\mu(q)\log q\;\psi(x-2d;q,-2d). \quad (1.19)$$

Da $(n,2d)>1$ aus $q\mid(n+2d)$ und $(q,2d)>1$ folgt, bekommt man unter Beachtung der Definition von Λ für die zweite Doppelsumme auf der rechten Seite von (1.18)

$$\left|\sum_{n\le x-2d}\Lambda(n)\sum_{\substack{q\mid(n+2d)\\ q\le Q\\ (q,2d)>1}}\mu(q)\log q\right| = \left|\sum_{p\mid 2d}\sum_{\alpha=1}^{[\log_p(x-2d)]}\Lambda\left(p^\alpha\right)\sum_{\substack{q\mid(p^\alpha+2d)\\ q\le Q\\ (q,2d)>1}}\mu(q)\log q\right|$$
$$\le \sum_{p\mid 2d}\sum_{\alpha=1}^{[\log_p(x-2d)]}\log p\;\log Q\;\tau(p^\alpha+2d)\;, \quad (1.20)$$

wobei $\tau(t)$ für beliebiges $t\in IN$ die Anzahl der Teiler von t bezeichne. Die letzte Gleichungszeile kann wegen der aus Satz 5.28. in [Krä] folgenden Abschätzung $\tau(t)=O\left(t^\epsilon\right)$ und wegen der trivialen Abschätzung $\omega(2d)\le\log_2(2d)$ für die Anzahl $\omega(2d)$ der verschiedenen Primfaktoren von $2d$ weiter abgeschätzt werden durch

$$\sum_{p\mid 2d}\sum_{\alpha=1}^{[\log_p(x-2d)]}\log p\;\log Q\;\tau(p^\alpha+2d)=O\left(x^\epsilon\right)\;. \quad (1.21)$$

Aus (1.18), (1.19), (1.20) und (1.21) erhält man Teil (i).
Auf analoge Weise kann Teil (ii) gezeigt werden. Damit ist Lemma 1.3 bewiesen.

□

Nun liegt es nahe, die Ausdrücke $\psi(x-2d;q,-2d)$ und $\psi(x;q,2d)-\psi(2d;q,2d)$ in Lemma 1.3 jeweils durch $\frac{x-2d}{\varphi(q)}$ anzunähern, also die rechten Seiten von (1.16) und (1.17) jeweils durch $\sum_{\substack{q\le Q\\ (q,2d)=1}}\mu(q)\log q\;\frac{x-2d}{\varphi(q)}$ zu approximieren. Zur Abschätzung des dabei entstehenden Fehlers wird der Satz von Bombieri-Vinogradov benutzt. Dieser wird formuliert in folgendem

Lemma 1.4: (Bombieri-Vinogradov, siehe Satz 6.2.1. auf S. 197 in [Brü])

Sei $B \geq 1$ beliebig. Dann gilt

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} \max_{y \leq x} \left| \psi(y;q,a) - \frac{y}{\varphi(q)} \right| = O\left(x(\log x)^{-B} + Q\sqrt{x}(\log Qx)^6 \right) ,$$

wobei die O-Konstante nur von B abhängt.

Daraus ergibt sich

Lemma 1.5: Unter den Voraussetzungen von Satz 1.1 gelten die Abschätzungen

$$(i) \qquad \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q,2d)=1}} \mu(q) \log q \left(\psi(x-2d;q,-2d) - \frac{x-2d}{\varphi(q)} \right) = O\left(x(\log x)^{-A} \right) ,$$

$$(ii) \qquad \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q,2d)=1}} \mu(q) \log q \left((\psi(x;q,2d) - \psi(2d;q,2d)) - \frac{x-2d}{\varphi(q)} \right) = O\left(x(\log x)^{-A} \right) ,$$

wobei die O-Konstante jeweils nur von A abhängt.

Beweis:

Teil (i) erhält man sofort aus Lemma 1.4, und Teil (ii) folgt aus

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q,2d)=1}} \mu(q) \log q \left((\psi(x;q,2d) - \psi(2d;q,2d)) - \frac{x-2d}{\varphi(q)} \right) \\ = & \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q,2d)=1}} \mu(q) \log q \left(\psi(x;q,2d) - \frac{x}{\varphi(q)} \right) - \sum_{\substack{q \leq Q \\ (q,2d)=1}} \mu(q) \log q \left((\psi(2d;q,2d) - \frac{2d}{\varphi(q)} \right) , \end{aligned}$$

indem die Summen auf der rechten Seite mit Hilfe von Lemma 1.4 abgeschätzt werden.
□

Schließlich wird für den Beweis von Satz 1.1 noch gebraucht

Lemma 1.6: (Lemma 3 auf S. 557 in [Pan])

Sei $c_2 > 0$ beliebig, aber fest. Dann gilt für beliebige $m \in I\!N$, $Q \in I\!R^+$ mit $m \leq Q^{c_2}$ und eine geeignete positive reelle Konstante c_3 die Abschätzung

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ (q,m)=1}} \frac{\mu(q) \log q}{\varphi(q)} = -\sigma(m) + O\left(e^{-c_3\sqrt{\log Q}} \right) .$$

Aus den Lemmata 1.3, 1.5 und 1.6 erhält man unmittelbar

Satz 1.2:

Seien $A \geq 1$ und $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ beliebig, aber fest. Dann gilt für $x^\delta \leq Q \leq x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-(A+7)}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &(i) \quad T_{2d}(x,0,x,0,Q) = \sigma(2d)(x-2d) + O\left(x(\log x)^{-A}\right) \ , \\ &(ii) \quad T_{2d}(x,0,Q,0,x) = \sigma(2d)(x-2d) + O\left(x(\log x)^{-A}\right) \ , \end{aligned}$$

wobei die O-Konstante jeweils nur von A und δ abhängt.

Dieser Satz wird in Kapitel 2 noch geeignet verallgemeinert. Nun erfolgt der kurze

Beweis von Satz 1.1:

Aus (1.15), Lemma 1.2 und Satz 1.2 ergibt sich die Behauptung. $\square$

1.3 Formulierung der Hauptergebnisse

In den folgenden Abschnitten des ersten Kapitels dieser Arbeit soll das nach [Pan] erzielte Ergebnis aus Abschnitt 1.2 in der Weise verbessert werden, daß vom dort unbewältigt gebliebenen Term $T_{2d}(x,Q,x,Q,x)$ noch Teilterme $T_{2d}(x,u_1,v_1,u_2,v_2)$ mit „vielen" Summanden abgespalten werden, für die gezeigt wird, daß sie von der Größenordnung $o(x)$ und somit vermutlich echte Fehlerterme sind. Dies erfolgt nicht wie in Abschnitt 1.2 mit Hilfe des Satzes von Bombieri-Vinogradov, sondern durch Rückführung auf die Exponentialsummen

$$G^i(2dh,k,s_1,w_1,s_2,w_2) := \sum_{\substack{s_1 < q_1 \leq w_1 \\ s_2 < q_2 \leq w_2 \\ (q_1,q_2)=1}} \mu(q_1k)^i \mu(q_2k)^i e\left(\frac{2dh}{k}\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right) \tag{1.22}$$

mit $i = 1,2$, wobei $\bar{q}_1$ jeweils eine beliebige ganze Zahl mit $\bar{q}_1 q_1 \equiv 1 \bmod q_2$ bezeichne. Diese Exponentialsummen werden später mit Hilfe der in Abschnitt 1.7 eingeführten Hypothesen DFI und R^* über unvollständige Kloostermansummen, sowie hypothesenfrei abgeschätzt.

Als erstes Hauptergebnis bekommt man aus der späteren Gleichung (1.24) und den in den folgenden Abschnitten bewiesenen Sätzen 1.4, 1.5(i), 1.6(i), 1.7, 1.8 und 1.9

Satz 1.3:

a) Es gebe eine Konstante $A \in [0,1)$, so daß für $i = 1,2$ und beliebige $s_1, w_1, s_2, w_2 \in I\!R^+$, $h, k \in I\!N$ mit $s_1 < w_1 \leq 2s_1$, $s_2 < w_2 \leq 2s_2$, $h \leq (s_1 s_2)^{\frac{1-A}{3}} (s_1+s_2)^{\frac{A-1}{3}}$ und $k|2d$ die Abschätzung

$$G^i(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = O\left((s_1 s_2)^{A+\epsilon}(s_1+s_2)^{1-A}\right)$$

gilt, wobei die O-Konstante nur von ϵ, d und k abhängt. Dann folgt

$$T_{2d}(x, 0, x^{b_1}, 0, x^{b_2}) = \sigma(2d)(x-2d) + O\left(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}\right) \tag{1.23}$$

für beliebige, aber feste $b_1, b_2 > 0$ mit $\max\{b_1 + Ab_2,\ Ab_1 + b_2\} < 1$ und eine geeignete, nur von b_1 und b_2 abhängige Konstante $c_1 > 0$. Dabei hängt die O-Konstante nur von b_1, b_2 und d ab.

b) In Teil a) kann gewählt werden

$$(i) \quad A := \frac{1}{2} \quad \text{unter der Hypothese DFI,}$$

$$(ii) \quad A := \frac{11}{12} \quad \text{unter der Hooley Hypothese } R^*,$$

$$(iii) \quad A := \frac{57}{58} \quad \text{ohne Hypothesen.}$$

Daraus erhält man unmittelbar folgendes

Korollar 1.2:

Unter der Voraussetzung von Satz 1.3a) gelten die Abschätzungen

$$(i) \quad T_{2d}(x, x^{a_1}, x^{b_1}, x^{a_2}, x^{b_2}) = O\left(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}\right),$$

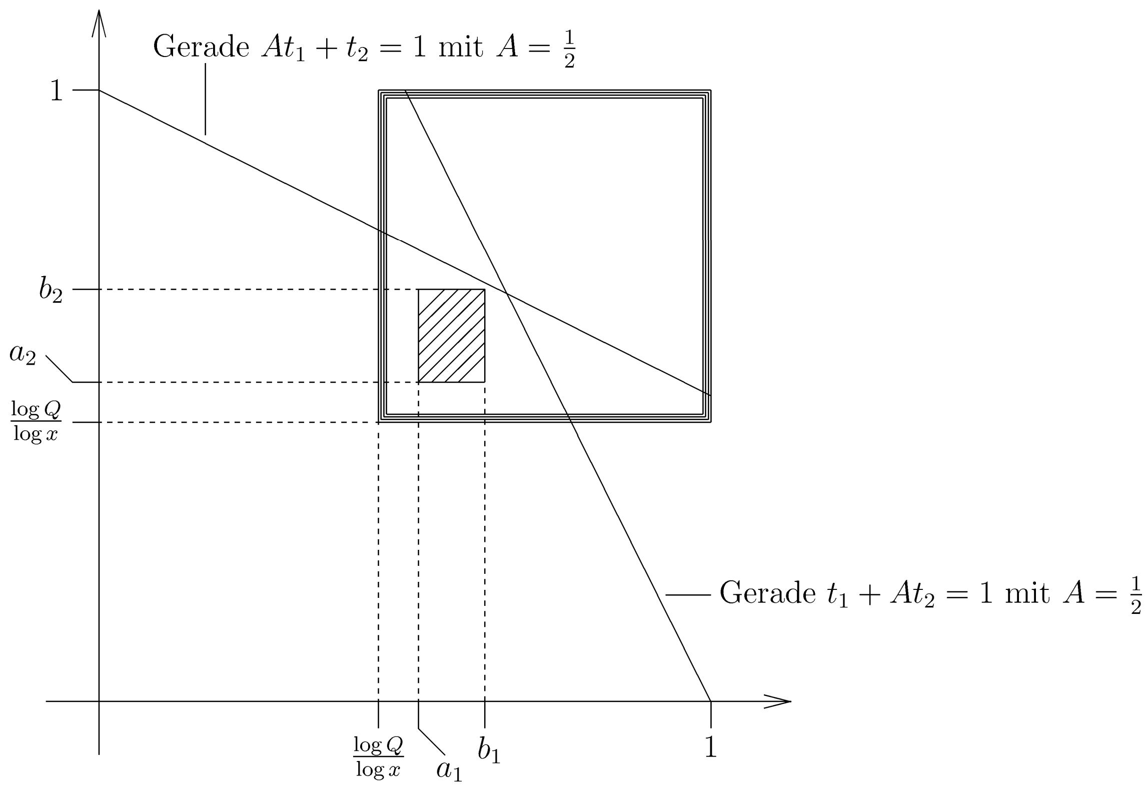
$$(ii) \quad T_{2d}(x, 0, x^{b_1}, x^{a_2}, x^{b_2}) = O\left(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}\right),$$

$$(iii) \quad T_{2d}(x, x^{a_1}, x^{b_1}, 0, x^{b_2}) = O\left(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}\right)$$

für beliebige, aber feste $a_1, b_1, a_2, b_2 \in I\!R^+$ mit $0 < a_1 < b_1$, $0 < a_2 < b_2$, $\max\{b_1 + Ab_2,\ Ab_1 + b_2\} < 1$ und eine geeignete, nur von a_1, b_1, a_2, b_2 abhängige Konstante $c_1 > 0$. Dabei hängt die O-Konstante nur von a_1, b_1, a_2, b_2 und d ab.

Vom in Abschnitt 1.2 unbewältigt gebliebenen Term $T_{2d}(x, Q, x, Q, x)$ können nun wegen Korollar 1.2 unter den Hypothesen DFI und R^*, sowie auch hypothesenfrei noch nichttriviale Teilterme $T_{2d}(x, x^{a_1}, x^{b_1}, x^{a_2}, x^{b_2})$ der Größenordnung $O\left(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}\right)$ abgespalten werden. Dazu sind a_1, b_1, a_2, b_2 so zu wählen, daß $\frac{1}{2} \leq a_1 < b_1$, $\frac{1}{2} \leq a_2 < b_2$ und $\max\{b_1 + Ab_2,\ Ab_1 + b_2\} < 1$ gilt, was wegen $A < 1$ möglich ist. Dieser Sachverhalt wird verdeutlicht in der folgenden

Abbildung 1:



Das schraffierte Rechteck stellt einen Term $T_{2d}(x, x^{a_1}, x^{b_1}, x^{a_2}, x^{b_2})$ der Größenordnung $O\left(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}\right)$ dar, der von dem bei [Pan] unbewältigt gebliebenen Term $T_{2d}(x, Q, x, Q, x)$ abgespalten werden kann. Der Term $T_{2d}(x, Q, x, Q, x)$ ist durch das dick umrandete Rechteck gekennzeichnet.

Verschärft man die Voraussetzung von Satz 1.3a) noch etwas, so gilt die Abschätzung (1.23) sogar für eine von d unabhängige O-Konstante. Genauer erhält man aus (1.24) und den Sätzen 1.4, 1.5(ii), 1.6(ii) und 1.8 als zweites Hauptergebnis

Satz 1.3':

Es gebe eine Konstante $A \in [0,1)$, so daß für $i = 1,2$ und beliebige $s_1, w_1, s_2, w_2 \in IR^+$, $h, k \in IN$ mit $s_1 < w_1 \le 2s_1$, $s_2 < w_2 \le 2s_2$ und $k|2d$ die Abschätzung

$$G^i(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = O\left((s_1 s_2)^A (s_1 + s_2)^{1-A} (dhs_1 s_2)^\epsilon\right)$$

gilt, wobei die O-Konstante nur von ϵ abhängt. Dann folgt

$$T_{2d}(x, 0, x^{b_1}, 0, x^{b_2}) = \sigma(2d)(x - 2d) + O\left(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}\right)$$

für beliebige, aber feste $b_1, b_2 > 0$ mit $\max\{b_1 + Ab_2,\ Ab_1 + b_2\} < 1$ und eine geeignete, nur von b_1 und b_2 abhängige Konstante $c_1 > 0$. Dabei hängt die O-Konstante **nicht** von d, sondern nur von b_1 und b_2 ab.
Unter der Hypothese DFI kann $A := \frac{1}{2}$ gewählt werden.

1.4 Aufspaltung der Teilterme

In ähnlicher Weise wie bei Huas Ansatz (s. [Hua]) wird der Teilterm $T_{2d}(x, u_1, v_1, u_2, v_2)$ zuerst in ein Hauptglied $H_{2d}(x, u_1, v_1, u_2, v_2)$ und zwei Restglieder $R^1_{2d}(x, u_1, v_1, u_2, v_2)$ und $R^2_{2d}(x, u_1, v_1, u_2, v_2)$ aufgespalten. Diese Terme haben eine ähnliche, aber nicht die gleiche Gestalt, wie die entsprechenden Haupt- und Restglieder in [Hua]. In den folgenden Abschnitten werden $H_{2d}(x, u_1, v_1, u_2, v_2)$, $R^1_{2d}(x, u_1, v_1, u_2, v_2)$ und $R^2_{2d}(x, u_1, v_1, u_2, v_2)$ dann einzeln abgeschätzt, wobei die Hauptgliedabschätzung ähnlich durchgeführt wird, wie die in [Hua], und die Restgliedabschätzung mit Hilfe von Hypothesen und bewiesenen Aussagen über Kloostermansummen erfolgt. In [Hua] wurde das dort auftretende Restglied hingegen nicht gesondert untersucht.
Aus (1.13) folgt

$$T_{2d}(x, u_1, v_1, u_2, v_2) = \sum_{\substack{q_1, q_2, m_1, m_2 \\ u_1 < q_1 \le v_1, \\ u_2 < q_2 \le v_2, \\ q_1 m_1 \le x - 2d, \\ q_2 m_2 - q_1 m_1 = 2d}} \mu(q_1) \log q_1\ \mu(q_2) \log q_2$$

$$= \sum_{\substack{u_1 < q_1 \le v_1,\\ u_2 < q_2 \le v_2}} \mu(q_1)\log q_1\ \mu(q_2)\log q_2 \cdot \sharp\left\{m_1 \le \frac{x-2d}{q_1} \mid q_1 m_1 \equiv -2d \bmod q_2\right\}$$

$$= \sum_{k|2d} \sum_{\substack{\frac{u_1}{k} < q_1 \le \frac{v_1}{k},\\ \frac{u_2}{k} < q_2 \le \frac{v_2}{k},\\ (q_1,q_2)=1}} \mu(q_1k)\log(q_1k)\mu(q_2k)\log(q_2k) \cdot \sharp\left\{m_1 \le \frac{x-2d}{kq_1} \mid q_1 m_1 \equiv \frac{-2d}{k} \bmod q_2\right\}$$

$$= \sum_{k|2d} \sum_{\substack{\frac{u_1}{k} < q_1 \le \frac{v_1}{k},\\ \frac{u_2}{k} < q_2 \le \frac{v_2}{k},\\ (q_1,q_2)=1}} \mu(q_1k)\log(q_1k)\mu(q_2k)\log(q_2k) \cdot \left(\left[\frac{x-2d}{kq_1q_2} + \frac{2d}{k}\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right] - \left[\frac{2d}{k}\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right]\right) ,$$

wobei $\bar{q}_1 \in \mathbb{Z}$ beliebig mit $\bar{q}_1 q_1 \equiv 1 \bmod q_2$ sei. Der innere Term $\left(\left[\frac{x-2d}{kq_1q_2} + \frac{2d}{k}\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right] - \left[\frac{2d}{k}\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right]\right)$ in der letzten Gleichungszeile kann approximiert werden durch $\frac{x-2d}{kq_1q_2}$ bis auf den beschränkt bleibenden Fehler $\left(-\left\{\frac{x-2d}{kq_1q_2} + \frac{2d}{k}\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right\} + \left\{\frac{2d}{k}\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right\}\right)$, wobei $\{r\}$ wie in den Standardnotationen für alle $r \in I\!R$ definiert sei durch $\{r\} := r - [r]$. Daher liegt es nahe, $T_{2d}(x,u_1,v_1,u_2,v_2)$ nun aufzuspalten in

$$T_{2d}(x,u_1,v_1,u_2,v_2) = H_{2d}(x,u_1,v_1,u_2,v_2) + R^1_{2d}(x,u_1,v_1,u_2,v_2) + R^2_{2d}(x,u_1,v_1,u_2,v_2) \tag{1.24}$$

mit dem Hauptglied

$$H_{2d}(x,u_1,v_1,u_2,v_2) := (x-2d)\cdot \sum_{k|2d} \frac{1}{k} \cdot \sum_{\substack{\frac{u_1}{k} < q_1 \le \frac{v_1}{k},\\ \frac{u_2}{k} < q_2 \le \frac{v_2}{k},\\ (q_1,q_2)=1}} \frac{\mu(q_1k)\log(q_1k)\mu(q_2k)\log(q_2k)}{q_1q_2} , \tag{1.25}$$

und den Restgliedern

$$R^1_{2d}(x,u_1,v_1,u_2,v_2) := \sum_{k|2d} \sum_{\substack{\frac{u_1}{k} < q_1 \le \frac{v_1}{k},\\ \frac{u_2}{k} < q_2 \le \frac{v_2}{k},\\ (q_1,q_2)=1}} \mu(q_1k)\log(q_1k)\ \mu(q_2k)\log(q_2k) \cdot \left(\left\{\frac{2d}{k}\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right\} - \frac{1}{2}\right) \tag{1.26}$$

und

$$R^2_{2d}(x,u_1,v_1,u_2,v_2) := \sum_{k|2d} \sum_{\substack{\frac{u_1}{k} < q_1 \le \frac{v_1}{k},\\ \frac{u_2}{k} < q_2 \le \frac{v_2}{k},\\ (q_1,q_2)=1}} \mu(q_1k)\log(q_1k)\mu(q_2k)\log(q_2k) \cdot \left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{x-2d}{kq_1q_2} + \frac{2d}{k}\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right\}\right) . \tag{1.27}$$

1.5 Abschätzung des Hauptgliedes

Mit einer ähnlichen Methode wie bei der Abschätzung des Hauptgliedes in [Hua], das eine etwas andere Gestalt als das hier auftretende Hauptglied hat, wird gezeigt

Satz 1.4:

Für beliebige, aber feste $b_1, b_2 \in I\!R$ mit $b_1, b_2 > 0$ und beliebige $v_1, v_2 \in I\!R^+$ mit $v_1 \geq x^{b_1}$ und $v_2 \geq x^{b_2}$ gilt die Abschätzung

$$H_{2d}(x, 0, v_1, 0, v_2) = \sigma(2d)(x - 2d) + O\left(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}\right) ,$$

wobei $c_1 > 0$ eine geeignete, nur von b_1 und b_2 abhängige Konstante sei und die O-Konstante von d unabhängig ist.

Beweis:

Zunächst kann für $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ die innere Summe auf der rechten Seite von (1.25) umgeformt werden in

$$\sum_{\substack{q_1 \leq \frac{v_1}{k}, q_2 \leq \frac{v_2}{k} \\ (q_1, q_2) = 1}} \frac{\mu(q_1 k) \log(q_1 k) \mu(q_2 k) \log(q_2 k)}{q_1 q_2}$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ (n,k)=1}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \cdot \left(\sum_{q_1 \leq \frac{v_1}{nk}} \frac{\mu(q_1 nk) \log(q_1 nk)}{q_1} \right) \left(\sum_{q_2 \leq \frac{v_2}{nk}} \frac{\mu(q_2 nk) \log(q_2 nk)}{q_2} \right) . \quad (1.28)$$

Aus (1.25), (1.28) und dem später bewiesenen Lemma 1.8 folgt für $v_1 \geq x^{b_1}$ und $v_2 \geq x^{b_2}$ nach kurzer Rechnung

$$H_{2d}(x, 0, v_1, 0, v_2) = \sum_{k|2d} \left(\frac{\mu(k)^2 k}{\varphi(k)^2} \cdot \sum_{\substack{n=1 \\ (n,k)=1}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)^2} \right) \cdot (x - 2d) + O\left(\sum_{k|d} k^{3\epsilon - 1} x e^{-c_4\sqrt{\log x}} \right) \quad (1.29)$$

für eine geeignete, nur von b_1 und b_2 abhängige Konstante $c_4 > 0$ und eine nur von ϵ abhängige O-Konstante. Die Summe im Restglied auf der rechten Seite kann wegen Satz 5.26 auf S. 123 in [Krä] abgeschätzt werden durch

$$\sum_{k|2d} k^{3\epsilon-1} = (2d)^{3\epsilon-1} \sum_{k|2d} k^{1-3\epsilon} = O\left(e^{(1+\delta)\frac{(\log 2d)^{3\epsilon}}{\log\log 2d}}\right) \quad (1.30)$$

für geeignetes $\delta > 0$. Außerdem gilt für die Doppelsumme auf der rechten Seite von (1.29)

$$\sum_{k|2d} \left(\frac{\mu(k)^2 k}{\varphi(k)^2} \cdot \sum_{\substack{n=1 \\ (n,k)=1}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)^2} \right) = \sum_{k|2d} \left(\frac{\mu(k)^2 k}{\varphi(k)^2} \cdot \prod_{p \nmid k} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \right)$$

$$= \sum_{\substack{k \mid 2d \\ 2 \mid k}} \left(\frac{\mu(k)^2 k}{\varphi(k)^2} \cdot \prod_{\substack{p \mid k \\ p > 2}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right)^{-1} \right) \cdot \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right)$$

$$= 2 \cdot \sum_{\substack{l \mid d \\ 2 \nmid l}} \left(\mu(l)^2 \cdot \prod_{p|l} \frac{p}{(p-1)^2} \cdot \prod_{p|l} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right)^{-1} \right) \cdot \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right)$$

$$= 2 \cdot \sum_{\substack{l \mid d \\ 2 \nmid l}} \left(\mu(l)^2 \cdot \prod_{p|l} \frac{1}{p-2} \right) \cdot \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right)$$

$$= 2 \cdot \prod_{\substack{p \mid d, \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \cdot \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) = \sigma(2d) \tag{1.31}$$

nach Definition der Zwillingskonstante $\sigma(2d)$ in (2).
Aus (1.29), (1.30) und (1.31) ergibt sich die Behauptung des Satzes, wenn man $\epsilon < \frac{1}{6}$ wählt und die Generalvoraussetzung $2d < x$ des ersten Kapitels beachtet. □

Es muß nun noch das Produkt

$$\left(\sum_{q_1 \le \frac{v_1}{nk}} \frac{\mu(q_1 nk) \log(q_1 nk)}{q_1} \right) \cdot \left(\sum_{q_2 \le \frac{v_2}{nk}} \frac{\mu(q_2 nk) \log(q_2 nk)}{q_2} \right)$$

auf der rechten Seite von (1.28) abgeschätzt werden.
Dazu benötigt man zuerst

Lemma 1.7: (Modifikation von Lemma 2 in [Hua])

Für alle $y \in I\!R^+$, $z \in I\!N$ und geeignete Konstanten $c_5, c_6 > 0$ gelten die Abschätzungen

$$(i) \qquad \sum_{\substack{n \le y \\ (n,z)=1}} \frac{\mu(n)}{n} = O\left(z^{\epsilon} e^{-c_5 \sqrt{\log y}} \right) ,$$

$$(ii) \qquad \sum_{\substack{n \le y \\ (n,z)=1}} \frac{\mu(n) \log n}{n} = -\frac{z}{\varphi(z)} + O\left(z^{\epsilon} e^{-c_6 \sqrt{\log y}} \right) ,$$

wobei die O-Konstante jeweils nur von ϵ abhängt.

Beweis:

Wegen

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,z)=1}}^{\infty} \mu(n)n^{-s} = \prod_{p|z}\left(1-p^{-s}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\zeta(s)}$$

für $s\in\mathbb{C}$, Re $s>1$ kann die Summe $\sum\limits_{\substack{n\le y\\(n,z)=1}} \mu(n)$ mit der Methode der komplexen Integration abgeschätzt werden. Geht man analog vor, wie bei der Abschätzung von $\sum\limits_{n\le x}\mu(n)$ in [Pra], S.70-72, so kommen in die Integrale lediglich noch die Produkte $\prod\limits_{p|z}(1-p^{-s})^{-1}$ herein. Benutzt man die für $s\in\mathbb{C}$, Re $s>0$ gültige Abschätzung

$$\left|\prod_{p|z}\left(1-p^{-s}\right)^{-1}\right| \le \prod_{p|z}\left(1-p^{-\mathrm{Re}\,s}\right)^{-1},$$

so gelangt man auf diese Weise zur Abschätzung

$$\sum_{\substack{n\le y\\(n,z)=1}} \mu(n) = O\left(\prod_{p|z}\left(1-p^{-c_7}\right)^{-1}\cdot ye^{-c_8\sqrt{\log y}}\right) \tag{1.32}$$

für geeignete Konstanten $c_7, c_8\in\mathbb{R}$ mit $\frac{1}{2}<c_7<1$ und $c_8>0$. Wegen $p^{-c_7}+p^{-\epsilon}\le 1$ für genügend großes p bekommt man außerdem

$$\prod_{p|z}\left(1-p^{-c_7}\right)^{-1} \ll \prod_{p|z}p^{\epsilon} \le z^{\epsilon}. \tag{1.33}$$

Nun liefern (1.32) und (1.33) zusammen

$$\sum_{\substack{n\le y\\(n,z)=1}} \mu(n) = O\left(z^{\epsilon}ye^{-c_8\sqrt{\log y}}\right), \tag{1.34}$$

woraus sich mit partieller Summation (i) ergibt.
Aus (i) gewinnt man wiederum mit partieller Summation

$$\sum_{\substack{n>y\\(n,z)=1}} \frac{\mu(n)\log n}{n} = O\left(z^{\epsilon}e^{-c_6\sqrt{\log y}}\right) \tag{1.35}$$

für eine geeignete Konstante $c_6>0$. Wegen

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,z)=1}}^{\infty} \frac{\mu(n)\log n}{n} = \lim_{s\to 1+0}\sum_{\substack{n=1\\(n,z)=1}}^{\infty} \frac{\mu(n)\log n}{n^s} = \lim_{s\to 1+0}\frac{d}{ds}\left(-\sum_{\substack{n=1\\(n,z)=1}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right)$$

$$= \lim_{s \to 1+0} \frac{d}{ds} \left(- \prod_{p|z} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{\zeta(s)} \right) = - \frac{z}{\varphi(z)}$$

folgt aus (1.35) nun (ii). □

Mit Hilfe von Lemma 1.7 kann gezeigt werden

Lemma 1.8:

Für beliebige, aber feste $b_1, b_2 \in I\!R$ mit $b_1, b_2 > 0$ und beliebige $z \in I\!N$, $v_1, v_2 \in I\!R^+$ mit $v_1 \geq x^{b_1}$ und $v_2 \geq x^{b_2}$ gilt die Abschätzung

$$\left(\sum_{q_1 \leq \frac{v_1}{z}} \frac{\mu(q_1 z) \log(q_1 z)}{q_1} \right) \cdot \left(\sum_{q_2 \leq \frac{v_2}{z}} \frac{\mu(q_2 z) \log(q_2 z)}{q_2} \right) = \frac{\mu(z)^2 \; z^2}{\varphi(z)^2} + O\left(z^{3\epsilon} e^{-c_4 \sqrt{\log x}} \right) ,$$

wobei $c_4 > 0$ eine geeignete, nur von b_1 und b_2 abhängige Konstante sei und die O-Konstante nur von ϵ abhängt.

Beweis:

Für $v \in I\!R^+$ und $z \in I\!N$ ist

$$\sum_{q \leq \frac{v}{z}} \frac{\mu(qz) \log(qz)}{q} = \mu(z) \left(\sum_{\substack{q \leq \frac{v}{z} \\ (q,z) = 1}} \frac{\mu(q) \log q}{q} + \log(z) \cdot \sum_{\substack{q \leq \frac{v}{z} \\ (q,z) = 1}} \frac{\mu(q)}{q} \right) .$$

Beachtet man die bekannte Abschätzung $\frac{z}{\varphi(z)} = O\left(\log \log z\right)$ (s. z.B. Satz 5.31 in [Krä]) und die Voraussetzung des Lemmas, so ergibt sich aus der obigen Gleichung und Lemma 1.7 nach kurzer Rechnung die Behauptung. □

1.6 Abschätzung der Restglieder

Als nächstes erfolgt eine Abschätzung der in (1.26) und (1.27) definierten Terme durch Rückführung auf die in (1.22) definierten Exponentialsummen $G^i(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2)$. Zuerst wird gezeigt

Satz 1.5:

(i) Unter der Voraussetzung von Satz 1.3a) gilt die Abschätzung

$$R^2_{2d}(x,0,x^{b_1},0,x^{b_2}) = O\left(x^{1-\delta}\right) \tag{1.36}$$

für beliebige, aber feste $b_1, b_2 \in I\!R^+$ mit $\max\{b_1 + Ab_2,\ Ab_1 + b_2\} < 1$ und eine geeignete Konstante $\delta > 0$. Dabei hängt die O-Konstante nur von b_1, b_2, δ und d ab.

(ii) Unter der Voraussetzung von Satz 1.3' gilt die Abschätzung (1.36) mit einer von b_1, b_2 und δ, aber nicht von d abhängigen O-Konstante.

Statt bei der Rückführung auf Exponentialsummen den direkten Weg zu gehen und die auf der rechten Seite von (1.27) vorkommende Funktion $f(z) = \frac{1}{2} - \{z\}$ in ihre Fourierreihe zu entwickeln, sollen hierzu Hilfsmittel aus der Theorie der Gleichverteilung benutzt werden, da man auf diese Weise bessere Abschätzungen erhält. Die benötigten Hilfsmittel werden im folgenden bereitgestellt.

Definition 1.1: (nach [Hla], S. 90)

Für $N \in I\!N$ wird die Diskrepanz D_N einer im Intervall $[0,1)$ liegenden Folge (r_n) definiert durch

$$D_N := \sup_{0 \le a < b \le 1} \left| \frac{A_N(a,b)}{N} - (b-a) \right| ,$$

wobei $A_N(a,b)$ die Anzahl aller $n \le N$ mit $a \le r_n < b$ bezeichne.

Eine Abschätzung der Diskrepanz bekommt man mit folgendem

Lemma 1.9: (Ungleichung von Erdös und Turán, siehe [Hla], S. 97-104.)

Sei $N \in I\!N$. Dann gilt für die Diskrepanz D_N einer im Intervall $[0,1)$ liegenden Folge (r_n) die Abschätzung

$$D_N \ \le\ \frac{10}{H+1} \ +\ \frac{4}{\pi N} \cdot \sum_{h=1}^{H} \frac{1}{h} \left| \sum_{n=1}^{N} e(hr_n) \right|$$

für alle $H \in I\!N_0$.

Außerdem wird noch benötigt

Lemma 1.10: (Variante der Ungleichung von Koksma)

Sei D_N die Diskrepanz einer im Intervall $[0,1)$ liegenden Folge (r_n) und $f : [0,1] \to I\!R$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\left| \int_0^1 f(y)dy - \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} f(r_n) \right| \;\le\; D_N \cdot \int_0^1 |f'(y)|dy \;.$$

Beweis: Siehe [Hla], S. 106, 107.

Es folgt nun der

Beweis von Satz 1.5:

Zunächst wird der in (1.27) definierte Ausdruck $R^2_{2d}(x, u_1, v_1, u_2, v_2)$ zerlegt in

$$R^2_{2d}(x, u_1, v_1, u_2, v_2) = \sum_{k|2d} U_{2d}\left(k, x, \frac{u_1}{k}, \frac{v_1}{k}, \frac{u_2}{k}, \frac{v_2}{k}\right) \;, \tag{1.37}$$

wobei

$$\begin{aligned} U_{2d}(k, x, s_1, t_1, s_2, t_2) \;&:=\; \sum_{\substack{s_1 < q_1 \le t_1 \\ s_2 < q_2 \le t_2 \\ (q_1, q_2) = 1}} \mu(q_1k)\log(q_1k)\mu(q_2k)\log(q_2k) \cdot \\ &\qquad \left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{x-2d}{kq_1q_2} + \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2}\right\}\right) \end{aligned}$$

sei. Doppelte Anwendung von partieller Summation liefert

$$\begin{aligned} &U_{2d}(k, x, s_1, t_1, s_2, t_2) = \\ &\log(t_1k)\log(t_2k)S_{2d}(k, x, s_1, t_1, s_2, t_2) \;-\; \log(t_1k) \cdot \int_{s_2}^{t_2} S_{2d}(k, x, s_1, t_1, s_2, \tau_2)\frac{d\tau_2}{\tau_2} \;- \\ &\log(t_2k) \cdot \int_{s_1}^{t_1} S_{2d}(k, x, s_1, \tau_1, s_2, t_2)\frac{d\tau_1}{\tau_1} \;+\; \int_{s_1}^{t_1}\int_{s_2}^{t_2} S_{2d}(k, x, s_1, \tau_1, s_2, \tau_2)\frac{d\tau_2}{\tau_2}\frac{d\tau_1}{\tau_1} \end{aligned} \tag{1.38}$$

mit

$$S_{2d}(k, x, s_1, \tau_1, s_2, \tau_2) := \sum_{\substack{s_1 < q_1 \le \tau_1 \\ s_2 < q_2 \le \tau_2 \\ (q_1, q_2) = 1}} \mu(q_1k)\mu(q_2k)\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{x-2d}{kq_1q_2} + \frac{2d}{k} \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2}\right\}\right) \;.$$

Die Summe $S_{2d}(k, x, s_1, \tau_1, s_2, \tau_2)$ kann weiter aufgespalten werden in

$$S_{2d}(k, x, s_1, \tau_1, s_2, \tau_2) \;=\; S^1_{2d}(k, x, s_1, \tau_1, s_2, \tau_2) \;-\; S^{-1}_{2d}(k, x, s_1, \tau_1, s_2, \tau_2) \;, \tag{1.39}$$

wobei

$$S_{2d}^{j}(k,x,s_1,\tau_1,s_2,\tau_2) := \sum_{\substack{s_1<q_1\le\tau_1\\ s_2<q_2\le\tau_2\\ (q_1,q_2)=1\\ \mu(q_1k)\mu(q_2k)=j}} \left(\frac{1}{2}-\left\{\frac{x-2d}{kq_1q_2}+\frac{2d}{k}\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right\}\right)$$

sei für $j=\pm 1$. Schreibt man nun die Parameter $\left\{\frac{x-2d}{kq_1q_2}+\frac{2d}{k}\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right\}$ mit $s_1<q_1\le\tau_1$, $s_2<q_2\le\tau_2$, $(q_1,q_2)=1$, $\mu(q_1k)\mu(q_2k)=j$ als endliche Folge $r_1, r_2, \ldots r_N$ und setzt $f(y):=\frac{1}{2}-y$, so erhält man unter Beachtung von $N\le\tau_1\tau_2$ aus Lemma 1.9 und Lemma 1.10 die Abschätzung

$$\left|S_{2d}^{j}(k,x,s_1,\tau_1,s_2,\tau_2)\right| \;\le\; \frac{10\tau_1\tau_2}{H+1} \;+\; \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{h=1}^{H}\frac{1}{h}\cdot\left|E_{2d}^{j}(h,k,x,s_1,\tau_1,s_2,\tau_2)\right| \tag{1.40}$$

für alle $H\in IN_0$, wobei

$$E_{2d}^{j}(h,k,x,s_1,\tau_1,s_2,\tau_2) := \sum_{\substack{s_1<q_1\le\tau_1\\ s_2<q_2\le\tau_2\\ (q_1,q_2)=1\\ \mu(q_1k)\mu(q_2k)=j}} e\left(\frac{h(x-2d)}{kq_1q_2}\right) e\left(\frac{2dh}{k}\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right) \tag{1.41}$$

sei. Die störenden Terme $e\left(\frac{h(x-2d)}{kq_1q_2}\right)$ auf der rechten Seite von (1.41) können nun wieder durch doppelte Anwendung von partieller Summation beseitigt werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&|E_{2d}^{j}(h,k,x,s_1,\tau_1,s_2,\tau_2)| \;\le\; |F^{j}(2dh,k,s_1,\tau_1,s_2,\tau_2)| \;+\\
&\frac{2\pi hx}{ks_2}\int_{s_1}^{\tau_1}|F^{j}(2dh,k,s_1,w_1,s_2,\tau_2)|\frac{dw_1}{w_1^2} \;+\; \frac{2\pi hx}{ks_1}\int_{s_2}^{\tau_2}|F^{j}(2dh,k,s_1,\tau_1,s_2,w_2)|\frac{dw_2}{w_2^2} \;+\\
&\frac{2\pi hx}{k}\int_{s_1}^{\tau_1}\int_{s_2}^{\tau_2}|F^{j}(2dh,k,s_1,w_1,s_2,w_2)|\frac{dw_2}{w_2^2}\frac{dw_1}{w_1^2} \;+\\
&\left(\frac{2\pi hx}{k}\right)^2\int_{s_1}^{\tau_1}\int_{s_2}^{\tau_2}|F^{j}(2dh,k,s_1,w_1,s_2,w_2)|\frac{dw_2}{w_2^3}\frac{dw_1}{w_1^3}\;,
\end{aligned} \tag{1.42}$$

wobei

$$F^{j}(2dh,k,s_1,w_1,s_2,w_2) := \sum_{\substack{s_1<q_1\le w_1\\ s_2<q_2\le w_2\\ (q_1,q_2)=1\\ \mu(q_1k)\mu(q_2k)=j}} e\left(\frac{2dh}{k}\cdot\frac{\bar{q}_1}{q_2}\right) \tag{1.43}$$

sei. Schließlich kann die unangenehme Summationsbedingung $\mu(q_1k)\mu(q_2k)=j$ auf der rechten Seite von (1.43) noch entfernt werden durch die für $j:=\pm 1$ geltende Rückführung

$$F^{j}(2dh,k,s_1,w_1,s_2,w_2) = \frac{1}{2}\cdot\Big(G^{2}(2dh,k,s_1,w_1,s_2,w_2)+jG^{1}(2dh,k,s_1,w_1,s_2,w_2)\Big) \tag{1.44}$$

mit $G^i(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2)$ definiert wie in (1.22). Wendet man nacheinander die Voraussetzung von Satz 1.3a), (1.44), (1.42), (1.40), (1.39), (1.38) und (1.37) an und setzt in (1.40) dabei

$$H := \left[(s_1 s_2)^{1-\frac{A}{3}}(s_1+s_2)^{\frac{A-1}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right] \ , \tag{1.45}$$

so bekommt man für $u_1 < v_1 \le 2u_1$, $u_2 < v_2 \le 2u_2$ nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned} R^2_{2d}(x, u_1, v_1, u_2, v_2) &= O\Big(\Big((u_1u_2)^A(u_1+u_2)^{1-A} + (u_1u_2)^{\frac{2A}{3}}(u_1+u_2)^{\frac{2(1-A)}{3}}x^{\frac{1}{3}} + \\ &\qquad +(u_1u_2)^{\frac{A}{3}}(u_1+u_2)^{\frac{1-A}{3}}x^{\frac{2}{3}}\Big)(u_1u_2)^{\epsilon}\Big) \end{aligned} \tag{1.46}$$

mit einer von ϵ und d abhängigen O-Konstante. Man beachte dabei, daß die in Satz 1.3a) vorausgesetzte Ungleichung $h \le (s_1s_2)^{\frac{1-A}{3}}(s_1+s_2)^{\frac{A-1}{3}}$ stets erfüllt ist, da die Variable h in (1.40) bis H summiert wird und für das in (1.45) gewählte H die Ungleichung $H \le (s_1s_2)^{\frac{1-A}{3}}(s_1+s_2)^{\frac{A-1}{3}}$ gilt, falls $s_1 \le x$ und $s_2 \le x$ ist.
Nun liefern

$$R^2_{2d}(x, 0, x^{b_1}, 0, x^{b_2}) = \sum_{i_1=1}^{[\log_2 x^{b_1}]} \sum_{i_2=1}^{[\log_2 x^{b_2}]} R^2_{2d}\left(x, \frac{x^{b_1}}{2^{i_1}+1}, \frac{x^{b_1}}{2^{i_1}}, \frac{x^{b_2}}{2^{i_2+1}}, \frac{x^{b_2}}{2^{i_2}}\right)$$

und (1.46) die Abschätzung

$$\begin{aligned} &R^2_{2d}(x, 0, x^{b_1}, 0, x^{b_2}) \\ = \ &O\Big(\Big(x^{b_1+Ab_2} + x^{Ab_1+b_2} + x^{\frac{2}{3}(b_1+Ab_2)+\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}(Ab_1+b_2)+\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}(b_1+Ab_2)+\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}(Ab_1+b_2)+\frac{2}{3}}\Big)x^{\epsilon}\Big) \end{aligned} \tag{1.47}$$

mit einer von ϵ und d abhängigen O-Konstante. Hieraus ergibt sich die Behauptung von Teil (i).
Benutzt man im Beweis statt der Voraussetzung von Satz 1.3a) die von Satz 1.3' und beachtet die Generalvoraussetzung $2d \le x$ des ersten Kapitels, so gelten die Abschätzungen (1.46) und (1.47) auch mit einer von d unabhängigen O-Konstante, und man erhält sich die Behauptung von Teil (ii). Damit ist Satz 1.5 bewiesen. $\square$

Völlig analog wie Satz 1.5 läßt sich beweisen

Satz 1.6:

(i) Unter der Voraussetzung von Satz 1.3a) gilt die Abschätzung

$$R^1_{2d}(x, 0, x^{b_1}, 0, x^{b_2}) = O\left(x^{1-\delta}\right) \tag{1.48}$$

für beliebige, aber feste $b_1, b_2 \in I\!R^+$ mit $\max\{b_1 + Ab_2,\ Ab_1 + b_2\} < 1$ und eine geeignete Konstante $\delta > 0$. Dabei hängt die O-Konstante nur von b_1, b_2, δ und d ab.

(ii) Unter der Voraussetzung von Satz 1.3' gilt die Abschätzung (1.48) mit einer von b_1, b_2 und δ, aber nicht von d abhängigen O-Konstante.

1.7 Abschätzung unvollständiger Kloostermansummen und einfache Folgerungen

Im folgenden kommt es darauf an, eine Abschätzung für die in (1.22) definierten Exponentialsummen $G^i(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2)$ zu finden. Dies geschieht auf unterschiedliche Weise mit Hilfe eines Lemmas und zweier Hypothesen über unvollständige Kloostermansummen.
Ohne Verwendung von Hypothesen konnten Duke, Friedländer und Iwaniec zeigen

Lemma 1.11: ([Iwa], S.2, Theorem 3)

Seien (α_m), (β_n) beliebige komplexe Folgen, $M, N \in I\!R^+$ und $\lambda \in I\!N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{M<m\leq 2M} \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ (n,m)=1}} \alpha_m \beta_n e\left(\lambda \cdot \frac{\bar{m}}{n}\right) \\ =\; &O\left(\left(\sum_{M<m\leq 2M} |\alpha_m|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{N<n\leq 2N} |\beta_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} (\lambda + MN)^{\frac{14}{29}} (M+N)^{\frac{1}{58}+\epsilon}\right) \;, \end{aligned}$$

wobei die O-Konstante nur von ϵ abhängt. Dabei sei $\bar{m}m \equiv 1 \bmod n$ für $(m, n) = 1$.

Daraus folgt unmittelbar

Satz 1.7:

Für $i = 1, 2$ und beliebige $s_1, w_1, s_2, w_2 \in I\!R^+$, $h, k \in I\!N$ mit $s_1 < w_1 \leq 2s_1$, $s_2 < w_2 \leq 2s_2$, $h \leq s_1 s_2$ und $k|2d$ gilt die Abschätzung

$$G^i(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = O\left((s_1 s_2)^{\frac{57}{58}+\epsilon} (s_1 + s_2)^{\frac{1}{58}}\right) \;,$$

wobei die O-Konstante nur von ϵ, d und k abhängt.

Ebenfalls in [Iwa] formulieren o.g. Autoren die wesentlich stärkere

Hypothese DFI: (s. [Iwa], Ungleichung (2.20); die hier eingeführte Bezeichnung ,,DFI" leitet sich von den Anfangsbuchstaben der Autoren Duke, Friedlander und Iwaniec ab)

Seien (α_m), (β_n) beliebige komplexe Folgen, $M, N \in I\!R^+$ und $\lambda \in I\!N$. Dann gilt

$$\sum_{M<m\leq 2M} \sum_{\substack{N<n\leq 2N \\ (n,m)=1}} \alpha_m \beta_n e\left(\lambda \cdot \frac{\bar{m}}{n}\right)$$
$$= O\left(\left(\sum_{M<m\leq 2M} |\alpha_m|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{N<n\leq 2N} |\beta_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} (M+N)^{\frac{1}{2}} (\lambda MN)^{\epsilon}\right) ,$$

wobei die O-Konstante nur von ϵ abhängt. Dabei sei $\bar{m}m \equiv 1 \bmod n$ für $(m,n)=1$.

Diese Hypothese liefert sofort

Satz 1.8:

Für $i = 1, 2$ und beliebige $s_1, w_1, s_2, w_2 \in I\!R^+$, $h, k \in I\!N$ mit $s_1 < w_1 \leq 2s_1$, $s_2 < w_2 \leq 2s_2$ und $k|2d$ gilt die Abschätzung

$$G^i(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = O\left((s_1 s_2)^{\frac{1}{2}} (s_1+s_2)^{\frac{1}{2}} (dhs_1s_2)^{\epsilon}\right) ,$$

wobei die O-Konstante nur von ϵ abhängt.

Im nächsten Abschnitt erfolgt eine Abschätzung von $G^i(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2)$ auf Grundlage der

Hooley-Hypothese R^*: (s. [Ho1], S.44)

Sei $s, w \in I\!R^+$, $z, \lambda_1, \lambda \in Z\!\!\!Z$, $z \neq 0$ und $0 < w - s \leq |z|$. Dann gilt

$$\sum_{\substack{s<q\leq w \\ (q,z)=1}} e\left(\frac{\lambda_1 q + \lambda \bar{q}}{z}\right) = O\left((w-s+1)^{\frac{1}{2}} |z|^{\epsilon} (\lambda, z)^{\frac{1}{2}}\right) ,$$

wobei die O-Konstante nur von ϵ abhängt. Dabei sei $\bar{q}q \equiv 1 \bmod z$ für $(q,z)=1$.

1.8 Abschätzung der Exponentialsummen mit Hilfe der Hooley-Hypothese R^*

Es soll gezeigt werden

Satz 1.9:

Unter der Hooley-Hypothese R^* gilt für $i = 1, 2$ und beliebige $s_1, w_1, s_2, w_2 \in IR^+$, $h, k \in IN$ mit $s_1 < w_1 \leq 2s_1$, $s_2 < w_2 \leq 2s_2$, $h \leq (s_1 s_2)^{\frac{11}{12}}(s_1+s_2)^{\frac{1}{12}}$ und $k|2d$

$$G^i(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = O\left((s_1 s_2)^{\frac{11}{12}+\epsilon}(s_1+s_2)^{\frac{1}{12}}\right) ,$$

wobei die O-Konstante nur von ϵ, d und k abhängt.

Dazu wird zuerst benötigt

Lemma 1.12:

Unter der Hooley-Hypothese R^* gilt für beliebige $s_1, w_1, s_2, w_2 \in IR^+$, $h, k \in IN$ mit $s_1 \leq s_2$, $s_1 < w_1 \leq 2s_1$, $s_2 < w_2 \leq 2s_2$ und $k|2d$

$$G^2(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = O\left(s_1^{\frac{1}{2}} s_2 (h s_1 s_2)^{\epsilon}\right) ,$$

wobei die O-Konstante nur von ϵ, d und k abhängt.

Beweis:

Aus (1.22) folgt

$$G^2(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = \mu(k)^2 \sum_{s_2 < q_2 \leq w_2} \mu(q_2 k)^2 \sum_{\substack{s_1 < q_1 \leq w_1 \\ (q_1, q_2 k) = 1}} \mu(q_1)^2 e\left(2dh \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2 k}\right) . \tag{1.49}$$

Wegen der Summationsbedingung $(q_1, q_2 k) = 1$ für die innere Summe auf der rechten Seite von (1.49) kann die durchgehend geforderte Bedingung $\bar{q}_1 q_1 \equiv 1 \bmod q_2$ nun durch die schärfere $\bar{q}_1 q_1 \equiv 1 \bmod q_2 k$ ersetzt werden. Man erhält somit für $\bar{f} f \equiv 1 \bmod q_2 k$, $\bar{q} q \equiv 1 \bmod q_2 k$

$$\sum_{\substack{s_1 < q_1 \leq w_1 \\ (q_1, q_2 k) = 1}} \mu(q_1)^2 e\left(2dh \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2 k}\right) = \sum_{\substack{f \leq \sqrt{w_1} \\ (f, q_2 k) = 1}} \mu(f) \sum_{\substack{\frac{s_1}{f^2} < q \leq \frac{w_1}{f^2} \\ (q, q_2 k) = 1}} e\left(2dh \bar{f}^2 \cdot \frac{\bar{q}}{q_2 k}\right) . \tag{1.50}$$

Da für $f, k \in IN$, $s_2 < q_2 \leq w_2$ wegen der Voraussetzungen des Lemmas $\frac{w_1}{f^2} - \frac{s_1}{f^2} \leq q_2 k$ ist, kann nun R^* angewendet werden, um die innere Summe auf der rechten Seite von

(1.50) abzuschätzen. Dies liefert

$$\sum_{\substack{\frac{s_1}{f^2} < q \le \frac{w_1}{f^2} \\ (q,q_2k)=1}} e\left(2dh\bar{f}^2 \cdot \frac{\bar{q}}{q_2k}\right) = O\left(s_1^{\frac{1}{2}} f^{-1}(q_2k)^{\epsilon}(2dh,q_2k)^{\frac{1}{2}}\right) \ . \tag{1.51}$$

Aus (1.49), (1.50) und (1.51) bekommt man unter Beachtung der Voraussetzung $s_2 < w_2 \le 2s_2$ des Lemmas

$$G^2(2dh,k,s_1,w_1,s_2,w_2) = O\left(s_1^{\frac{1}{2}+\epsilon}(s_2k)^{\epsilon} \sum_{s_2<q_2\le w_2} (2dh,q_2k)^{\frac{1}{2}}\right) \ . \tag{1.52}$$

Wegen Lemma 2(*iii*) auf S.68 in [Ho2] gilt

$$\sum_{s_2<q_2\le w_2} (2dh,q_2k)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{s_2k<q\le w_2k} (2dh,q) = O\left(\tau(2dh)s_2k\right) \ , \tag{1.53}$$

wobei $\tau(2dh)$ die Anzahl der Teiler von $2dh$ bezeichne (s. Standardnotationen). Da wegen Satz 5.28 in [Krä] die Abschätzung

$$\tau(2dh) = O\left((dh)^{\epsilon}\right)$$

gilt, folgt aus (1.53) die später noch wichtige Abschätzung

$$\sum_{s_2<q_2\le w_2} (2dh,q_2k)^{\frac{1}{2}} = O\left(s_2k(dh)^{\epsilon}\right) \ , \tag{1.54}$$

welche zusammen mit (1.52) die Behauptung liefert. □

Als nächstes soll $G^1(2dh,k,s_1,w_1,s_2,w_2)$ unter den Voraussetzungen von Lemma 1.12 abgeschätzt werden. Dazu wird benötigt

Lemma 1.13: (Variante der Vaughan-Identität für die μ-Funktion)

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine beliebige arithmetische Funktion. Dann gilt für beliebige $U, V, \nu, w \in \mathbb{R}$ mit $\nu < w$, $1 \le U \le \nu$, $1 \le V \le \nu$

$$\sum_{\nu<n\le w} \mu(n)f(n) = S_1 + S_2 \ ,$$

wobei

$$S_1 := -\sum_{t\le UV} \alpha(t) \sum_{\frac{\nu}{t}<q\le\frac{w}{t}} f(tq) \ , \qquad S_2 := -\sum_{V<t<\frac{w}{U}} \beta(t) \sum_{\max\left(U,\frac{\nu}{t}\right)<q\le\frac{w}{t}} \mu(q)f(tq)$$

sei mit

$$\alpha(t) := \sum_{\substack{mr=t, \\ m\le U,\ r\le V}} \mu(m)\mu(r) \ , \qquad \beta(t) := \sum_{\substack{r \mid t \\ r\le V}} \mu(r) \ .$$

Beweis: (vgl. [Brü], S.194, 195 für die von Mangoldt-Funktion)

Seien $F : (1, \infty) \to \mathbb{C}$, $G : (1, \infty) \to \mathbb{C}$ beliebige Funktionen. Dann gilt sicher

$$\frac{1}{\zeta(s)} = F(s) + G(s) - \zeta(s)F(s)G(s) + \left(\frac{1}{\zeta(s)} - F(s)\right)(1 - \zeta(s)G(s)) \ . \tag{1.55}$$

Setzt man nun

$$F(s) := \sum_{n \leq U} \mu(n)n^{-s} \ , \qquad G(s) := \sum_{n \leq V} \mu(n)n^{-s}$$

und schreibt $\frac{1}{\zeta(s)}$ als Dirichletreihe $\sum \mu(n)n^{-s}$ und $\zeta(s)$ als Dirichletreihe $\sum n^{-s}$, so zeigt ein Koeffizientenvergleich in (1.55) nach Ausmultiplizieren der Produkte von Dirichletreihen auf der rechten Seite

$$\mu(n) = a_1(n) + a_2(n) + a_3(n) + a_4(n) \tag{1.56}$$

mit

$$a_1(n) := \begin{cases} \mu(n) & \text{falls } n \leq U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \ , \qquad a_2(n) := \begin{cases} \mu(n) & \text{falls } n \leq V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \ ,$$

$$a_3(n) := -\sum_{\substack{qmr = n, \\ m \leq U, \ r \leq V}} \mu(m)\mu(r) \ , \qquad a_4(n) := -\sum_{\substack{qt = n, \\ q > U, \ t > 1}} \mu(q) \sum_{\substack{r \mid t \\ r \leq V}} \mu(r) \ .$$

Multipliziert man die Zerlegung (1.56) von $\mu(n)$ mit $f(n)$ und summiert über alle n mit $\nu < n \leq w$ auf, so erhält man unter Beachtung der Voraussetzung des Lemmas

$$\sum_{\nu < n \leq w} \mu(n)f(n) = \sum_{\nu < n \leq w} a_3(n)f(n) + \sum_{\nu < n \leq w} a_4(n)f(n) \ . \tag{1.57}$$

Setzt man $t = mr$ in der Summationsbedingung für a_3, so folgt

$$\sum_{\nu < n \leq w} a_3(n)f(n) = S_1 \tag{1.58}$$

wobei S_1 definiert ist wie im Lemma. Beachtet man

$$\sum_{\substack{r \mid t \\ r \leq V}} \mu(r) = 0$$

für $1 < t \leq V$, so findet man außerdem

$$\sum_{\nu < n \leq w} a_4(n)f(n) = S_2 \ . \tag{1.59}$$

Aus (1.57), (1.58) und (1.59) ergibt sich die Behauptung. □

Mit Hilfe von Lemma 1.13 kann nun gezeigt werden

Lemma 1.14:

Unter der Hooley-Hypothese R^* gilt für beliebige $s_1, w_1, s_2, w_2 \in I\!R^+$, $h, k \in I\!N$ mit $s_1 \leq s_2$, $s_1 < w_1 \leq 2s_1$, $s_2 < w_2 \leq 2s_2$ und $k|2d$

$$G^1(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = O\left(s_1^{\frac{11}{12}} s_2 (hs_1s_2)^\epsilon\right) \ ,$$

wobei die O-Konstante nur von ϵ, d und k abhängt.

Beweis:

Analog wie (1.49) ergibt sich aus (1.22)

$$G^1(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = \mu(k) \sum_{s_2 < q_2 \leq w_2} \mu(q_2k) \sum_{\substack{s_1 < q_1 \leq w_1 \\ (q_1, q_2k) = 1}} \mu(q_1) e\left(2dh \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2k}\right) \ , \quad (1.60)$$

wobei wieder $\bar{q}_1 q_1 \equiv 1 \bmod q_2k$ sei.
Für $s_1 < 1$ gilt die Behauptung des Lemmas trivialerweise. Im folgenden werde also $1 \leq s_1$ vorausgesetzt.
Dann läßt sich die innere Summe auf der rechten Seite von (1.60) wegen Lemma 1.13 aufspalten in

$$\sum_{\substack{s_1 < q_1 \leq w_1 \\ (q_1, q_2k) = 1}} \mu(q_1) e\left(2dh \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2k}\right) = S_1(q_2) + S_2(q_2) \quad (1.61)$$

mit

$$S_1(q_2) := - \sum_{\substack{t \leq UV \\ (t, q_2k) = 1}} \alpha(t) \sum_{\substack{\frac{s_1}{t} < q \leq \frac{w_1}{t} \\ (q, q_2k) = 1}} e\left(2dh \cdot \frac{\bar{t}\bar{q}}{q_2k}\right) \quad (1.62)$$

und

$$S_2(q_2) := - \sum_{\substack{V < t < \frac{w_1}{U} \\ (t, q_2k) = 1}} \beta(t) \sum_{\substack{\max\left(U, \frac{s_1}{t}\right) < q \leq \frac{w_1}{t}, \\ (q, q_2k) = 1}} \mu(q) e\left(2dh \cdot \frac{\bar{t}\bar{q}}{q_2k}\right) \ , \quad (1.63)$$

wobei $\bar{t}t \equiv 1 \bmod q_2k$ und $\bar{q}q \equiv 1 \bmod q_2k$ gelte und U und V freie Parameter mit $1 \leq U \leq s_1$, $1 \leq V \leq s_1$ seien, die später noch geeignet gewählt werden.
Da für $t, k \in I\!N$, $s_2 < q_2 \leq w_2$ wegen der Voraussetzungen des Lemmas $\frac{w_1}{t} - \frac{s_1}{t} \leq q_2k$ ist, kann wieder R^* angewendet werden, um die innere Summe auf der rechten Seite von (1.62) abzuschätzen. Dies liefert

$$\sum_{\substack{\frac{s_1}{t} < q \leq \frac{w_1}{t} \\ (q, q_2k) = 1}} e\left(2dh \cdot \frac{\bar{t}\bar{q}}{q_2k}\right) = O\left(\left(\frac{s_1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} (q_2k)^\epsilon (2dh, q_2k)^{\frac{1}{2}}\right) \ . \quad (1.64)$$

Zur Abschätzung von $S_1(q_2)$ benötigt man außerdem die aus Satz 5.28 in [Krä] folgende Abschätzung

$$|\alpha(t)| \leq \tau(t) = O\left(t^\epsilon\right) \ . \tag{1.65}$$

Aus (1.62), (1.64) und (1.65) erhält man

$$S_1(q_2) = O\left((s_1UV)^{\frac{1}{2}}(q_2kUV)^\epsilon(2dh, q_2k)^{\frac{1}{2}}\right) \ ,$$

woraus wegen (1.54)

$$\sum_{s_2<q_2\leq w_2} \mu(q_2k)S_1(q_2) \leq \sum_{s_2<q_2\leq w_2} |S_1(q_2)| = O\left(s_1^{\frac{1}{2}}s_2k(UV)^{\frac{1}{2}}(dhs_2kUV)^\epsilon\right) \tag{1.66}$$

folgt. Die Abschätzung von $S_2(q_2)$ ist schwieriger. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich zunächst

$$|S_2(q_2)|^2 \leq \left(\sum_{\substack{V<t<\frac{w_1}{U} \\ (t,q_2k)=1}} |\beta(t)|^2\right) \sum_{\substack{V<t<\frac{w_1}{U} \\ (t,q_2k)=1}} \left| \sum_{\substack{\max\left(U,\frac{s_1}{t}\right)<q\leq\frac{w_1}{t}, \\ (q,q_2k)=1}} \mu(q)e\left(2dh\cdot\frac{\bar{t}\bar{q}}{q_2k}\right)\right|^2 \ . \tag{1.67}$$

Für den ersten Faktor auf der rechten Seite von (1.67) bekommt man

$$\sum_{\substack{V<t<\frac{w_1}{U} \\ (t,q_2k)=1}} |\beta(t)|^2 = O\left(\left(\frac{s_1}{U}\right)^{1+\epsilon}\right) \tag{1.68}$$

aus der analog zu (1.65) geltenden Abschätzung

$$|\beta(t)| \leq \tau(t) = O\left(t^{\frac{\epsilon}{2}}\right) \ .$$

Ausmultiplizieren des zweiten Faktors ergibt

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{V<t<\frac{w_1}{U} \\ (t,q_2k)=1}} \left| \sum_{\substack{\max\left(U,\frac{s_1}{t}\right)<q\leq\frac{w_1}{t}, \\ (q,q_2k)=1}} \mu(q)e\left(2dh\cdot\frac{\bar{t}\bar{q}}{q_2k}\right)\right|^2 \\
= \ &\sum_{\substack{V<t<\frac{w_1}{U} \\ (t,q_2k)=1}} \ \sum_{\substack{\max\left(U,\frac{s_1}{t}\right)<m_1,m_2\leq\frac{w_1}{t}, \\ (m_1,q_2k)=(m_2,q_2k)=1}} \mu(m_1)\mu(m_2)e\left(2dh(\bar{m}_2-\bar{m}_1)\cdot\frac{\bar{t}}{q_2k}\right) \\
= \ &A_1(q_2)+A_2(q_2)+\overline{A_2(q_2)} \ ,
\end{aligned} \tag{1.69}$$

wobei $\bar{m}_im_i \equiv 1 \bmod q_2k$ gelte für $i = 1, 2$,

$$A_1(q_2) \ := \sum_{\substack{U<q<\frac{w_1}{V} \\ (q,q_2k)=1}} \mu(q)^2 \sum_{\substack{\max\left(V,\frac{s_1}{q}\right)<t\leq\frac{w_1}{q}, \\ (t,q_2k)=1}} 1 \ , \tag{1.70}$$

$$
\begin{aligned}
A_2(q_2) &:= \sum_{\substack{U < m_1 < m_2 < \frac{w_1}{V} \\ (m_1, q_2k) = (m_2, q_2k) = 1}} \mu(m_1)\mu(m_2) \sum_{\substack{\max\left(V, \frac{s_1}{m_1}\right) < t \le \frac{w_1}{m_2}, \\ (t, q_2k) = 1}} e\left(2dh(\bar{m}_1 - \bar{m}_2) \cdot \frac{\bar{t}}{q_2k}\right) \\
&= \sum_{\substack{U < m_1 < m_2 < \frac{w_1}{V} \\ (m_1m_2, q_2k) = 1}} \mu(m_1)\mu(m_2) \sum_{\substack{\max\left(V, \frac{s_1}{m_1}\right) < t \le \frac{w_1}{m_2}, \\ (t, q_2k) = 1}} e\left(2dh(m_2 - m_1) \cdot \frac{\overline{m_1m_2}\ \bar{t}}{q_2k}\right)
\end{aligned}
\tag{1.71}
$$

sei und $\overline{A_2(q_2)}$ das konjugiert Komplexe zu $A_2(q_2)$ bezeichne. Offenbar gilt

$$
A_1(q_2) = O\left(s_1^{1+\epsilon}\right) . \tag{1.72}
$$

Zur Abschätzung von $A_2(q_2)$ kann wieder die Hypothese R^* benutzt werden, denn für $k, m_1, m_2 \in I\!N$, $m_1 < m_2$, $s_2 < q_2 \le w_2$ ist wegen der Voraussetzungen des Lemmas $\frac{w_1}{m_2} - \frac{s_1}{m_1} \le q_2k$. Man erhält also für die innere Summe in der zweiten Gleichungszeile von (1.71)

$$
\sum_{\substack{\max\left(V, \frac{s_1}{m_1}\right) < t \le \frac{w_1}{m_2}, \\ (t, q_2k) = 1}} e\left(2dh(m_2 - m_1) \cdot \frac{\overline{m_1m_2}\ \bar{t}}{q_2k}\right) = O\left(\left(\frac{s_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}} (q_2k)^{\epsilon} \left(2dh(m_2 - m_1), q_2k\right)^{\frac{1}{2}}\right) ,
$$

woraus

$$
\begin{aligned}
A_2(q_2) &\ll (q_2k)^{\epsilon} \sum_{\substack{m_2 < \frac{w_1}{V} \\ (m_2, q_2k) = 1}} \left(\frac{s_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m_1 < m_2 \\ (m_1, q_2k) = 1}} \left(2dh(m_2 - m_1), q_2k\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le (q_2k)^{\epsilon} (2dh, q_2k)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m_2 < \frac{s_1}{V} \\ (m_2, q_2k) = 1}} \left(\frac{s_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m < m_2 \\ (m, q_2k) = 1}} (m_1, q_2k)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{1.73}
$$

folgt. Analog wie in (1.54) ergibt sich für die innere Summe in (1.73)

$$
\sum_{\substack{m < m_2 \\ (m, q_2k) = 1}} (m, q_2k)^{\frac{1}{2}} = O\left(m_2 (q_2k)^{\epsilon}\right) , \tag{1.74}
$$

wobei q_2 diesmal fest bleibt. Aus (1.73) und (1.74) gewinnt man die Abschätzung

$$
A_2(q_2) = O\left(s_1^2 V^{-\frac{3}{2}} (q_2k)^{2\epsilon} (2dh, q_2k)^{\frac{1}{2}}\right) . \tag{1.75}
$$

Faßt man (1.67), (1.68), (1.69), (1.72) und (1.75) zusammen und zieht die Wurzel, so erhält man

$$
S_2(q_2) = O\left(\left(s_1 U^{-\frac{1}{2}} + s_1^{\frac{3}{2}} U^{-\frac{1}{2}} V^{-\frac{3}{4}} (2dh, q_2k)^{\frac{1}{4}}\right) (s_1q_2k)^{\epsilon}\right) ,
$$

woraus wegen $(2dh, q_2k)^{\frac{1}{4}} \leq (2dh, q_2k)^{\frac{1}{2}}$ und (1.54)

$$\sum_{s_2<q_2\leq w_2} \mu(q_2k)S_2(q_2) \leq \sum_{s_2<q_2\leq w_2} |S_2(q_2)| = O\left(\left(s_1s_2U^{-\frac{1}{2}} + s_1^{\frac{3}{2}}s_2kU^{-\frac{1}{2}}V^{-\frac{3}{4}}\right)(dhks_1s_2)^{\epsilon}\right) \tag{1.76}$$

folgt. Da wegen (1.60) und (1.61)

$$G^1(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = \mu(k)\left(\sum_{s_2<q_2\leq w_2} \mu(q_2k)S_1(q_2) + \sum_{s_2<q_2\leq w_2} \mu(q_2k)S_2(q_2)\right) \tag{1.77}$$

ist, liefern (1.66) und (1.76) zusammen

$$G^1(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = O\left(\left(s_1^{\frac{1}{2}}s_2(UV)^{\frac{1}{2}} + s_1s_2U^{-\frac{1}{2}} + s_1^{\frac{3}{2}}s_2U^{-\frac{1}{2}}V^{-\frac{3}{4}}\right)(hs_1s_2UV)^{\epsilon}\right) ,$$

wobei die O-Konstante nur von ϵ, d und k abhängt. Setzt man nun $U := s_1^{\frac{1}{6}}$ und $V := s_1^{\frac{2}{3}}$, so ist die im Beweis gestellte Bedingung $1 \leq U \leq s_1$, $1 \leq V \leq s_1$ erfüllt, und man erhält die Behauptung. $\square$

Zum Schluß folgt der

Beweis von Satz 1.9:

Für den Fall $s_1 \leq s_2$ folgt die Behauptung sofort aus Lemma 1.12 und Lemma 1.14.

Es werde nun $s_2 < s_1$ vorausgesetzt.
Leicht einzusehen ist, daß

$$e\left(\lambda \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2}\right) = e\left(\frac{\lambda}{q_1q_2}\right) e\left(-\lambda \cdot \frac{\bar{q}_2}{q_1}\right) \tag{1.78}$$

gilt für beliebiges $\lambda \in IN$. Wird $\lambda := \frac{2dh}{k}$ gesetzt, so folgt aus (1.22) und (1.78)

$$G^i(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = \sum_{\substack{s_1 < q_1 \leq w_1, \\ s_2 < q_2 \leq w_2 \\ (q_1, q_2) = 1}} \mu(q_1k)^i \mu(q_2k)^i e\left(\frac{2dh}{kq_1q_2}\right) e\left(-\frac{2dh}{k} \cdot \frac{\bar{q}_2}{q_1}\right) \tag{1.79}$$

für $i = 1, 2$. Sei nun $\bar{G}^i(2dh, k, s_2, w_2, s_1, w_1)$ das konjugiert Komplexe zu $G^i(2dh, k, s_2, w_2, s_1, w_1)$, also

$$\bar{G}^i(2dh, k, s_2, w_2, s_1, w_1) = \sum_{\substack{s_1 < q_1 \leq w_1, \\ s_2 < q_2 \leq w_2 \\ (q_1, q_2) = 1}} \mu(q_1k)^i \mu(q_2k)^i e\left(-\frac{2dh}{k} \cdot \frac{\bar{q}_2}{q_1}\right) . \tag{1.80}$$

Dann erhält man wegen

$$\left|1 - e\left(\frac{2dh}{kq_1q_2}\right)\right| \leq \frac{4\pi dh}{kq_1q_2}$$

und der Voraussetzung des Lemmas aus (1.79) und (1.80)

$$G^i(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = \bar{G}^i(2dh, k, s_2, w_2, s_1, w_1) + O\left(\frac{dh}{k}\right) . \qquad (1.81)$$

Wegen $s_2 < s_1$ liefern nun (1.81), Lemma 1.12 und Lemma 1.14 zusammen die Behauptung.
Damit ist Satz 1.9 bewiesen. $\square$

1.9 Weiterer Versuch zur Abschätzung der Exponentialsummen

Nun soll noch der Versuch dargestellt werden, die Exponentialsummen $G^i(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2)$ mit Hilfe einer weiteren Hypothese abzuschätzen, die im Gegensatz zu den bisher benutzten Hypothesen DFI und R^* eine Aussage über Summen von **vollständigen** Kloostermansummen trifft. Es handelt sich dabei um die

Hypothese VLS: (Verallgemeinerte Linnik-Selberg-Hypothese)

Für beliebige $k, l, m, n, w \in I\!N$ mit $(k, l) = 1$ und $w \geq (n, m)^{\frac{1}{2}}$ gilt die Abschätzung

$$\sum_{\substack{c \leq w, \\ (c,l)=1}} S(m\bar{l}, \pm n; ck) = O\left(kl^{\frac{1}{2}} w^{1+\epsilon}\right)$$

mit einer nur von ϵ abhängigen O-Konstante. Dabei bezeichne $\bar{l}$ jeweils eine beliebige ganze Zahl mit $\bar{l}\, l \equiv 1 \bmod ck$.

Bekanntlich sind die hier verwandten klassischen Kloostermansummen $S(m, n; c)$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ und $q \in I\!N$ definiert durch

$$S(m, n; c) := \sum_{\substack{q \leq c, \\ (q,c)=1}} e\left(\frac{m\bar{q} + nq}{c}\right) .$$

Leider gelang es nicht, die erste Exponentialsumme $G^1(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2)$ **allein** mit Hilfe der Hypothese VLS abzuschätzen, und auch eine Kombination mit der Hooley-Hypothese R^* brachte keine Verbesserung des Ergebnisses von Lemma 1.14. Nach dem später bewiesenen Lemma 1.16 reicht die Hypothese VLS aber zumindest für eine befriedigende Abschätzung der zweiten Exponentialsumme $G^2(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2)$ aus.

Da die Hypothese VLS nicht der Literatur entstammt, sondern eine hier eingeführte Verallgemeinerung der bekannten Linnik-Selberg-Hypothese über Summen von Kloostermansummen ist, soll sie erst einmal motiviert werden.
Nach A. Weil gilt für $m, n, q \in I\!N$ die Abschätzung (s. [Des], S. 243)

$$|S(m, n; c)| \leq (m, n, c)^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} \tau(c) ,$$

aus der sich

$$\sum_{c \leq w} \frac{1}{c} \cdot S(m, n; c) = O\left(w^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)$$

ergibt mit einer von ϵ, m und n abhängigen O-Konstante. Kuznietsov zeigte die im w-Aspekt viel stärkere Abschätzung (s. [Des], S. 221)

$$\sum_{c \leq w} \frac{1}{c} \cdot S(m, n; c) = O\left(w^{\frac{1}{6}+\epsilon}\right)$$

mit einer von ϵ, m und n abhängigen O-Konstante. Die Linnik-Selberg-Vermutung besagt sogar (s. [Des], S. 235)

$$\sum_{c \leq w} \frac{1}{c} \cdot S(m, n; c) = O\left(w^{\epsilon}\right)$$

für $w \geq (n, m)^{\frac{1}{2}}$, wobei die O-Konstante nur von ϵ und **nicht** von m und n abhängt. Daraus ergibt sich durch partielle Summation

$$\sum_{c \leq w} S(m, n; c) = O\left(w^{1+\epsilon}\right) . \tag{1.82}$$

Weiter erhält man aus Theorem 9 in [Des] folgendes

Lemma 1.15:

Sei $k, l, m, n, w \in I\!N$, $(k, l) = 1$ und $g : I\!R \to \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Support in $[w, 2w]$, die den Bedingungen $|g(c)| \leq 1$, $|g'(c)| \leq w^{-1}$ und $|g''(c)| \leq w^{-2}$ für alle $c \in I\!R$ genügt. Dann gilt die Abschätzung

$$\sum_{(c,l)=1} g(c) S(m\bar{l}, \pm n; ck) = O\left(w^{\epsilon}\left(k\sqrt{l}w\right)^{\theta_{kl}} k\sqrt{l}w\right) ,$$

wobei θ_{kl} eine geeignete von kl abhängige Konstante ist und die O-Konstante nur von ϵ, m und n abhängt.

Außerdem liefert die Selbergsche Eigenwertvermutung $\theta_{kl} = 0$ für alle $k, l \in I\!N$ (s. [Des], S. 232,234), was im Fall $k = l = 1$ nach [Des], S.235 unten auch tatsächlich zutrifft. Damit gewinnt man aus Lemma 1.15 erst einmal die Vermutung

$$\sum_{(c,l)=1} g(c) S(m\bar{l}, \pm n; ck) = O\left(k l^{\frac{1}{2}} w^{1+\epsilon}\right) \tag{1.83}$$

mit einer von ϵ, m und n abhängigen O-Konstante. Für $k = l = 1$ ist die Abschätzung (1.83) im w-Aspekt genauso gut, wie die Vermutung (1.82), mit dem einzigen Unterschied, daß auf der linken Seite von (1.83) eine Gewichtsfunktion g auftritt, die den Bedingungen von Lemma 1.15 genügt. Es liegt also nahe, daß auch für **beliebige** $k, l \in I\!N$ die Abschätzung (1.83) gültig bleibt, wenn die linke Seite durch $\sum_{\substack{c \leq w, \\ (c,l)=1}} S(m\bar{l}, \pm n; ck)$ ersetzt wird. Außerdem sollte analog wie in (1.82) die O-Konstante nicht von m und n abhängen, sondern lediglich die Bedingung $w \geq (n,m)^{\frac{1}{2}}$ vorauszusetzen sein. Somit bekommt man die Hypothese VLS.

Im folgenden soll bewiesen werden

Lemma 1.16:

Unter der Hypothese VLS gilt für beliebige $s_1, w_1, s_2, w_2 \in I\!R^+$, $h, k \in I\!N$ mit $s_1 < w_1 \leq 2s_1$, $s_2 < w_2 \leq 2s_2$, $h \leq (s_1 s_2)^{\frac{3}{4}} (s_1 + s_2)^{\frac{1}{4}}$ und $k | 2d$

$$G^2(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = O\left((s_1 s_2)^{\frac{3}{4}+\epsilon} (s_1 + s_2)^{\frac{1}{4}}\right) \;,$$

wobei die O-Konstante nur von ϵ, d und k abhängt.

Zum Beweis müssen später gewisse unvollständige Kloostermansummen auf vollständige zurückgeführt werden. Dazu wird benötigt

Lemma 1.17:

Die Funktion $g : [0, 1) \times (0, 1] \to I\!R$ werde definiert durch

$$g(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y \leq x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann gilt für alle $(x, y) \in [0, 1) \times (0, 1]$ mit $y \neq x$ und $y \neq 1$

$$g(x, y) = x + \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e(nx) - 1}{n} \cdot e(-ny) \;,$$

wobei in der Reihe die Glieder mit $\pm n$ zusammenzufassen sind. Die Reihe konvergiert für alle $(x, y) \in [0, 1) \times (0, 1]$. Bricht man die Entwicklung an der Stelle $N \in I\!N$ ab, so bekommt man einen Fehler

$$\Delta_N(x, y) := \left| g(x, y) - \left(x + \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_{\substack{|n| \leq N \\ n \neq 0}} \frac{e(nx) - 1}{n} \cdot e(-ny) \right) \right| ,$$

der für alle $(x, y) \in [0, 1) \times (0, 1]$ abgeschätzt werden kann durch

$$\Delta_N(x, y) \leq \min \left\{ \frac{1}{2\pi N ||y||} + \frac{1}{2\pi N ||y - x||} , C \right\} ,$$

wobei C eine geeignete positive reelle Konstante ist und $||z||$ für beliebiges $z \in I\!R$ den Abstand von z zur nächsten ganzen Zahl bezeichne (s. Standardnotationen).

Beweis:

Für $(x, y) \in [0, 1) \times (0, 1]$, $y \neq x$, $y \neq 1$ ist offenbar

$$g(x, y) = x + \left(\{y - x\} - \frac{1}{2} \right) - \left(\{y\} - \frac{1}{2} \right) . \tag{1.84}$$

Nach [Brü], Lemma 4.1.2. gilt nun für alle $z \in I\!R$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e(-nz)}{2\pi i n} = \begin{cases} \{z\} - \frac{1}{2} & \text{falls } z \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \text{falls } z \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{1.85}$$

und

$$\left| \{z\} - \frac{1}{2} - \sum_{\substack{|n| \leq N \\ n \neq 0}} \frac{e(-nz)}{2\pi i n} \right| \leq \frac{1}{2\pi N ||z||} . \tag{1.86}$$

Da nach dem selben Lemma die Partialsummen $\sum_{\substack{|n| \leq N \\ n \neq 0}} \frac{e(-nz)}{2\pi i n}$ gleichmäßig beschränkt in z und N sind, gibt es außerdem eine positive reelle Konstante C, so daß für alle $z \in I\!R$ und $N \in I\!N$

$$\left| \{z\} - \frac{1}{2} - \sum_{\substack{|n| \leq N \\ n \neq 0}} \frac{e(-nz)}{2\pi i n} \right| \leq \frac{C}{2} \tag{1.87}$$

ist. Zusammen liefern (1.84), (1.85), (1.86) und (1.87) nach kurzer Rechnung die Behauptung. $\square$

Nun kann durch eine geeignete Rückführung auf Summen von vollständigen Kloosterman-summen und anschließender Anwendung der Hypothese VLS gezeigt werden

Lemma 1.18:

Unter der Hypothese VLS gilt für beliebige $s_1, w_1, s_2, w_2 \in I\!R^+$, $k, l, m \in I\!N$ mit $s_1 < w_1 \leq 2s_1$, $s_2 < w_2 \leq 2s_2$ und $(k,l) = 1$

$$\sum_{\substack{s_2 < q_2 \leq w_2,\\ (q_2,l)=1}} \sum_{\substack{s_1 < q_1 \leq w_1,\\ (q_1,q_2k)=1}} e\left(m \cdot \frac{\bar{q}_1\bar{l}}{q_2k}\right) = O\left(\left(s_2 l^{\frac{1}{2}} k + s_1 k^{\frac{1}{2}} l + \frac{m}{kl}\right)(ms_1s_2)^{\epsilon}\right) ,$$

wobei die O-Konstante nur von ϵ abhängt.

Beweis:

Wegen der Beziehung

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{s_2 < q_2 \leq w_2,\\ (q_2,l)=1}} \sum_{\substack{s_1 < q_1 \leq w_1,\\ (q_1,q_2k)=1}} e\left(m \cdot \frac{\bar{q}_1\bar{l}}{q_2k}\right) \\
= &\sum_{\substack{q_2 \leq w_2,\\ (q_2,l)=1}} \sum_{\substack{q_1 \leq w_1,\\ (q_1,q_2k)=1}} e\left(m \cdot \frac{\bar{q}_1\bar{l}}{q_2k}\right) - \sum_{\substack{q_2 \leq w_2,\\ (q_2,l)=1}} \sum_{\substack{q_1 \leq s_1,\\ (q_1,q_2k)=1}} e\left(m \cdot \frac{\bar{q}_1\bar{t}}{q_2k}\right) - \\
&\sum_{\substack{q_2 \leq s_2,\\ (q_2,l)=1}} \sum_{\substack{q_1 \leq w_1,\\ (q_1,q_2k)=1}} e\left(m \cdot \frac{\bar{q}_1\bar{l}}{q_2k}\right) + \sum_{\substack{q_2 \leq s_2,\\ (q_2,l)=1}} \sum_{\substack{q_1 \leq s_1,\\ (q_1,q_2k)=1}} e\left(m \cdot \frac{\bar{q}_1\bar{l}}{q_2k}\right)
\end{aligned} \tag{1.88}$$

genügt eine Abschätzung für $\sum\limits_{\substack{q_2 \leq z_2,\\ (q_2,l)=1}} \sum\limits_{\substack{q_1 \leq z_1,\\ (q_1,q_2k)=1}} e\left(m \cdot \frac{\bar{q}_1\bar{l}}{q_2k}\right)$ mit $z_1, z_2 \in I\!R^+$. Trivialerweise gilt die Aufspaltung

$$\sum_{\substack{q_2 \leq z_2,\\ (q_2,l)=1}} \sum_{\substack{q_1 \leq z_1,\\ (q_1,q_2k)=1}} e\left(m \cdot \frac{\bar{q}_1\bar{l}}{q_2k}\right) = S_1 + S_2 \tag{1.89}$$

mit

$$S_1 := \sum_{\substack{q_2 \leq z_2,\\ (q_2,l)=1}} \sum_{\substack{q_1 \leq \frac{z_1}{z_2} \cdot q_2,\\ (q_1,q_2k)=1}} e\left(m \cdot \frac{\bar{q}_1\bar{l}}{q_2k}\right)$$

und

$$S_2 := \sum_{\substack{q_1 \leq z_1,\\ (q_1,k)=1}} \sum_{\substack{q_2 \leq \frac{z_2}{z_1} \cdot q_1,\\ (q_2,q_1l)=1}} e\left(m \cdot \frac{\bar{q}_1\bar{l}}{q_2k}\right) . \tag{1.90}$$

Es soll zunächst S_1 abgeschätzt werden.
Unter den Bezeichnungen von Lemma 1.17 erhält man die weitere Aufspaltung

$$S_1 = \left[\frac{z_1}{z_2 k}\right] \sum_{\substack{q_2 \le z_2, \\ (q_2, l) = 1}} C_{q_2 k}(m) \; + \sum_{\substack{q_2 \le z_2, \\ (q_2, l) = 1}} \; \sum_{\substack{q_1 \le q_2 k, \\ (q_1, q_2 k) = 1}} g\left(\left\{\frac{z_1}{z_2 k}\right\}, \frac{q_1}{q_2 k}\right) e\left(m \cdot \frac{\bar{q}_1 \bar{l}}{q_2 k}\right) \; , \tag{1.91}$$

wobei die Ramanujansumme $C_{q_2 k}(m)$ definiert ist durch

$$C_{q_2 k}(m) := \sum_{\substack{q \le q_2 k, \\ (q, q_2 k) = 1}} e\left(m \cdot \frac{q}{q_2 k}\right) \; .$$

Wendet man die Definition von $\Delta_N(x, y)$ in Lemma 1.17 an, so ergibt sich aus (1.91) für beliebiges $N \in I\!N$ nach einigen Umformungen

$$\left| S_1 - \frac{z_1}{z_2 k} \cdot \sum_{\substack{q_2 \le z_2, \\ (q_2, l) = 1}} C_{q_2 k}(m) \; - \; \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_{\substack{n \ne 0, \\ |n| \le N}} \frac{e\left(n \cdot \frac{z_1}{z_2 k}\right) - 1}{n} \cdot \sum_{\substack{q_2 \le z_2, \\ (q_2, l) = 1}} S(m\bar{l}, -n; q_2 k) \right|$$
$$\le \sum_{q_2 \le z_2} \sum_{q_1 \le q_2 k} \Delta_N\left(\left\{\frac{z_1}{z_2 k}\right\}, \frac{q_1}{q_2 k}\right) \; . \tag{1.92}$$

Die rechte Seite läßt sich wegen Lemma 1.17 weiter abschätzen durch

$$\sum_{q_2 \le z_2} \sum_{q_1 \le q_2 k} \Delta_N\left(\left\{\frac{z_1}{z_2 k}\right\}, \frac{q_1}{q_2 k}\right) \; \le \; \sum_{q_2 \le z_2} \sum_{q_1 \le q_2 k} \min\left\{\frac{1}{2\pi N ||\frac{q_1}{q_2 k}||} + \frac{1}{2\pi N ||\frac{q_1}{q_2 k} - \frac{z_1}{z_2 k}||} \; , \; C\right\}$$
$$\le \; 2 C z_2 + 4 \sum_{q_2 \le z_2} \sum_{q_1 \le \frac{q_2 k}{2}} \frac{q_2 k}{2\pi N q_1} \; = \; O\left(z_2 + \frac{z_2^{2+\epsilon} k}{N}\right) \; . \tag{1.93}$$

Es sollen nun noch die Summen von Ramanujan- und Kloostermansummen auf der linken Seite von (1.92) abgeschätzt werden. Aus der bekannten Beziehung

$$C_{q_2 k}(m) = \varphi(q_2 k) \cdot \frac{\mu(q_2 k / (m, q_2 k))}{\varphi(q_2 k / (m, q_2 k))}$$

folgt

$$|C_{q_2 k}(m)| \le (m, q_2 k) \; ,$$

also

$$\left| \sum_{\substack{q_2 \le z_2, \\ (q_2, l) = 1}} C_{q_2 k}(m) \right| \; \le \; \sum_{q_2 \le z_2} (m, q_2 k) \; .$$

Wird die rechte Seite wieder mit Hilfe von Lemma 2(iii) auf S.68 in [Ho2] abgeschätzt, so bekommt man daraus

$$\sum_{\substack{q_2 \le z_2, \\ (q_2, l) = 1}} C_{q_2 k}(m) = O\left(z_2 k m^{\epsilon}\right) \ . \tag{1.94}$$

Falls $z_2 \ge N^{\frac{1}{2}}$ ist, so erhält man ferner mit Hilfe der Hypothese VLS

$$\sum_{\substack{n \ne 0, \\ |n| \le N}} \frac{e\left(n \cdot \frac{z_1}{z_2 k}\right) - 1}{n} \cdot \sum_{\substack{q_2 \le z_2, \\ (q_2, l) = 1}} S(m\bar{l}, -n; q_2 k) = O\left(z_2^{1+\epsilon} l^{\frac{1}{2}} k (1 + \log N)\right) \ . \tag{1.95}$$

Faßt man (1.92), (1.93), (1.94) und (1.95) zusammen und wählt $N := [z_2 + 1]$, so gewinnt man die Abschätzung

$$S_1 = O\left(\left(z_1 + z_2 l^{\frac{1}{2}} k\right) (m z_2)^{\epsilon}\right) \ . \tag{1.96}$$

Da analog wie (1.78)

$$e\left(m \cdot \frac{\bar{q}_1 \bar{l}}{q_2 k}\right) = e\left(\frac{m}{q_1 l q_2 k}\right) e\left(-m \cdot \frac{\bar{q}_2 \bar{k}}{q_1 l}\right)$$

gilt, läßt sich die in (1.90) definierte Summe S_2 weiter aufspalten in

$$S_2 := S_3 + S_4 \tag{1.97}$$

mit

$$S_3 := \sum_{\substack{q_1 \le z_1, \\ (q_1, k) = 1}} \sum_{\substack{q_2 \le \frac{z_2}{z_1} \cdot q_1, \\ (q_2, q_1 l) = 1}} e\left(-m \cdot \frac{\bar{q}_2 \bar{k}}{q_1 l}\right)$$

und

$$S_4 := \sum_{\substack{q_1 \le z_1, \\ (q_1, k) = 1}} \sum_{\substack{q_2 \le \frac{z_2}{z_1} \cdot q_1, \\ (q_2, q_1 l) = 1}} e\left(-m \cdot \frac{\bar{q}_2 \bar{k}}{q_1 l}\right) \left(e\left(\frac{m}{q_1 l q_2 k}\right) - 1\right) \ .$$

Analog zu (1.96) hat man

$$S_3 = O\left(\left(z_2 + z_1 k^{\frac{1}{2}} l\right) (m z_1)^{\epsilon}\right) \ , \tag{1.98}$$

und wegen

$$\left| e\left(\frac{m}{q_1 l q_2 k}\right) - 1 \right| \le \frac{2\pi m}{q_1 l q_2 k}$$

ergibt sich

$$S_4 = O\left(\frac{m (z_1 z_2)^{\epsilon}}{kl}\right) \ . \tag{1.99}$$

Nun liefern (1.89), (1.96), (1.97), (1.98) und (1.99)

$$\sum_{\substack{q_2 \le z_2, \\ (q_2, l) = 1}} \sum_{\substack{q_1 \le z_1, \\ (q_1, q_2 k) = 1}} e\left(m \cdot \frac{\bar{q}_1 \bar{l}}{q_2 k}\right) = O\left(\left(z_2 l^{\frac{1}{2}} k + z_1 k^{\frac{1}{2}} l + \frac{m}{kl}\right) (m z_1 z_2)^{\epsilon}\right) ,$$

woraus zusammen mit (1.88) unter Beachtung der Voraussetzung $s_1 < w_1 \le 2s_1$, $s_2 < w_2 \le 2s_2$ des Lemmas die Behauptung folgt. □

Mit Hilfe von Lemma 1.18 erfolgt jetzt der

Beweis von Lemma 1.16:

Aus (1.22) erhält man zunächst

$$G^2(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = \mu(k)^2 \sum_{\substack{s_2 < q_2 \le w_2 \\ (q_2, k) = 1}} \sum_{\substack{s_1 < q_1 \le w_1 \\ (q_1, q_2 k) = 1}} \mu(q_1)^2 \mu(q_2)^2 e\left(2dh \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2 k}\right) ,$$

woraus weiter

$$\begin{aligned} & G^2(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) \\ = \; & \mu(k)^2 \sum_{g|k} \mu(g) \sum_{\frac{s_2}{g} < q_2 \le \frac{w_2}{g}} \sum_{\substack{s_1 < q_1 \le w_1 \\ (q_1, q_2 g k) = 1}} \mu(q_1)^2 \mu(q_2)^2 e\left(2dh \cdot \frac{\bar{q}_1}{q_2 g k}\right) \end{aligned} \tag{1.100}$$

folgt. Schreibt man $\mu(q_i)^2$ $(i = 1, 2)$ jeweils in der Form

$$\mu(q_i)^2 = \sum_{f^2 | q_i} \mu(f)$$

(vgl. [Brü], S.175) und summiert in geeigneter Weise um, so ergibt sich aus (1.100)

$$G^2(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = \mu(k)^2 \sum_{g|k} \mu(g) \sum_{f_2 \le \sqrt{\frac{w_2}{g}}} \sum_{\substack{f_1 \le \sqrt{w_1} \\ (f_1, f_2 g k) = 1}} \mu(f_1) \mu(f_2) W(g, f_1, f_2) , \tag{1.101}$$

wobei

$$W(g, f_1, f_2) := \sum_{\substack{\frac{s_2}{f_2^2 g} < q_2 \le \frac{w_2}{f_2^2 g} \\ (q_2, f_1^2) = 1}} \sum_{\substack{\frac{s_1}{f_1^2} < q_1 \le \frac{w_1}{f_1^2} \\ (q_1, q_2 f_2^2 g k) = 1}} e\left(2dh \cdot \frac{\bar{q}_1 \bar{f}_1^2}{q_2 f_2^2 g k}\right) .$$

sei. Die Summe auf der rechten Seite von (1.101) kann für beliebiges, aber festes $U \in I\!R^+$ mit $U \le \min\left\{\sqrt{w_1}, \sqrt{\frac{w_2}{k}}\right\}$ weiter aufgespalten werden in

$$\sum_{g|k} \mu(g) \sum_{f_2 \le \sqrt{\frac{w_2}{g}}} \sum_{\substack{f_1 \le \sqrt{w_1} \\ (f_1, f_2 g k) = 1}} \mu(f_1) \mu(f_2) W(g, f_1, f_2) = S_1 + S_2 + S_3 \tag{1.102}$$

mit

$$S_1 := \sum_{g|k} \mu(g) \sum_{f_2 \le U} \sum_{\substack{f_1 \le U \\ (f_1, f_2 gk) = 1}} \mu(f_1)\mu(f_2) W(g, f_1, f_2) \ ,$$

$$S_2 := \sum_{g|k} \mu(g) \sum_{f_2 \le U} \sum_{\substack{U < f_1 \le \sqrt{w_1} \\ (f_1, f_2 gk) = 1}} \mu(f_1)\mu(f_2) W(g, f_1, f_2)$$

und

$$S_3 := \sum_{g|k} \mu(g) \sum_{U < f_2 \le \sqrt{\frac{w_2}{g}}} \sum_{\substack{f_1 \le \sqrt{w_1} \\ (f_1, f_2 gk) = 1}} \mu(f_1)\mu(f_2) W(g, f_1, f_2) \ .$$

Beachtet man die Voraussetzung von Lemma 1.16 und schätzt den Ausdruck $W(g, f_1, f_2)$ mit Hilfe von Lemma 1.18 ab, so bekommt man

$$S_1 = O\left(\Big((s_1 + s_2)U^3 k^2 + dh\Big) (dhs_1s_2)^{\epsilon}\right) \ . \tag{1.103}$$

Eine triviale Abschätzung von $W(g, f_1, f_2)$ liefert

$$S_2 + S_3 = O\left(\frac{s_1 s_2 k}{U}\right) \ . \tag{1.104}$$

Setzt man nun $U := \left(\frac{s_1 s_2}{k(s_1+s_2)}\right)^{\frac{1}{4}}$, so ist die im Beweis gestellte Bedingung $U \le \min\left\{\sqrt{w_1}, \sqrt{\frac{w_2}{k}}\right\}$ erfüllt, und die Behauptung folgt aus (1.102), (1.103) und (1.104). □

Soll $G^1(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2)$ wie in Lemma 1.14 durch Anwendung der Vaughan-Identität für die μ-Funktion abgeschätzt werden, so ist eine Abschätzung der Summen $\sum_{s_2 < q_2 \le w_2} \mu(q_k) S_i(q_2)$ mit $i = 1, 2$ erforderlich, wobei $S_1(q_2)$ und $S_2(q_2)$ definiert seien wie in (1.62) und (1.63). Zum Schluß wird noch dargestellt, wie $\sum_{s_2 < q_2 \le w_2} \mu(q_2 k) S_2(q_2)$ **allein** mit Hilfe von Lemma 1.18, also auf Grundlage der Hypothese VLS abgeschätzt werden kann. Dabei sollen die gleichen Voraussetzungen gelten, wie in Lemma 1.14. Ferner soll wie im Beweis des Lemmas 1.14 o.B.d.A. wieder $1 \le s_1$ vorausgesetzt werden.

Zunächst liefert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung unter Beachtung der Voraussetzung $s_2 < w_2 \le 2s_2$ von Lemma 1.14

$$\sum_{s_2 < q_2 \le w_2} \mu(q_2 k) S_2(q_2) \le s_2^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{s_2 < q_2 \le w_2} |S_2(q_2)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{1.105}$$

Wegen (1.67), (1.68) und (1.69) ist weiter

$$\sum_{s_2 < q_2 \le w_2} |S_2(q_2)|^2 \ll \left(\frac{s_1}{U}\right)^{1+\epsilon} \left(\sum_{s_2 < q_2 \le w_2} A_1(q_2) + \sum_{s_2 < q_2 \le w_2} A_2(q_2) + \sum_{s_2 < q_2 \le w_2} \overline{A_2(q_2)} \right) \tag{1.106}$$

für $A_1(q_2)$, $A_2(q_2)$ definiert wie in (1.70) und (1.71). Dabei sollen U, V wieder freie Parameter mit $1 \le U \le s_1$, $1 \le V \le s_1$ bezeichnen, die später noch geeignet gewählt werden. Für die erste Summe auf der rechten Seite von (1.106) folgt aus (1.72)

$$\sum_{s_2 < q_2 \le w_2} A_1(q_2) = O\left(s_1^{1+\epsilon} s_2\right) \ . \tag{1.107}$$

Nach Definition von $A_2(q_2)$ ergibt sich für die zweite Summe

$$\sum_{s_2<q_2\le w_2} A_2(q_2) \quad = \quad \sum_{\substack{U < m_1 < m_2 < \frac{w_1}{V} \\ (m_1 m_2, k) = 1}} \mu(m_1)\mu(m_2) \sum_{\substack{s_2 < q_2 \le w_2 \\ (q_2, m_1 m_2) = 1}} \sum_{\substack{\max\left(V, \frac{s_1}{m_1}\right) < t \le \frac{w_1}{m_2}, \\ (t, q_2 k) = 1}} e\left(2dh(m_2 - m_1) \cdot \frac{\overline{m_1 m_2}\ \overline{t}}{q_2 k}\right) .$$

Beachtet man die Voraussetzung von Lemma 1.14 und schätzt die innere Doppelsumme auf der rechten Seite mit Lemma 1.18 ab, so bekommt man nach kurzer Rechnung

$$\sum_{s_2<q_2\le w_2} A_2(q_2) = O\left(\left(\frac{s_1^3 s_2 k}{V^3} + \frac{s_1^4 k^{\frac{1}{2}}}{V^3} + \frac{s_1 dh}{Vk}\right)(dhs_1s_2)^\epsilon\right) \ . \tag{1.108}$$

Nun liefern (1.105), (1.106), (1.107) und (1.108) zusammen

$$\sum_{s_2<q_2\le w_2} \mu(q_2 k) S_2(q_2) = O\left(\left(\frac{s_1 s_2}{U^{\frac{1}{2}}} + \frac{s_1^2 s_2 k^{\frac{1}{2}}}{U^{\frac{1}{2}} V^{\frac{3}{2}}} + \frac{s_1^{\frac{5}{2}} s_2^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{4}}}{U^{\frac{1}{2}} V^{\frac{3}{2}}} + \frac{s_1 s_2^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}}{U^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}}}\right)(dhs_1s_2)^\epsilon\right) \ . \tag{1.109}$$

Nach allen bisherigen Untersuchungen scheint Lemma 1.18 ungeeignet zu sein für die ebenfalls benötigte Abschätzung der Summe $\sum\limits_{s_2<q_2\le w_2} \mu(q_2k)S_1(q_2)$. Man muß somit auf die aus der Hooley-Hypothese R^* folgende Abschätzung (1.66) zurückgreifen. Aus (1.66), (1.77) und (1.109) erhält man

$$G^1(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2) = O\left(\left(s_1^{\frac{1}{2}} s_2 (UV)^{\frac{1}{2}} + \frac{s_1 s_2}{U^{\frac{1}{2}}} + \frac{s_1^2 s_2}{U^{\frac{1}{2}} V^{\frac{3}{2}}} + \frac{s_1^{\frac{5}{2}} s_2^{\frac{1}{2}}}{U^{\frac{1}{2}} V^{\frac{3}{2}}} + \frac{s_1 s_2^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}}{U^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}}}\right)(hs_1s_2UV)^\epsilon\right) ,$$

wobei die O-Konstante nur von ϵ, d und k abhängt. Der Term $\frac{s_1^{\frac{5}{2}} s_2^{\frac{1}{2}}}{U^{\frac{1}{2}} V^{\frac{3}{2}}}$ auf der rechten Seite kann weggelassen werden, da wegen der Voraussetzung $s_1 \le s_2$ von Lemma 1.14 offenbar $\frac{s_1^{\frac{5}{2}} s_2^{\frac{1}{2}}}{U^{\frac{1}{2}} V^{\frac{3}{2}}} \le \frac{s_1^2 s_2}{U^{\frac{1}{2}} V^{\frac{3}{2}}}$ ist. Wie im Beweis von Lemma 1.14 ist die Abschätzung von $G^1(2dh, k, s_1, w_1, s_2, w_2)$ nun optimal, wenn $U := s_1^{\frac{1}{6}}$ und $V := s_1^{\frac{2}{3}}$ gewählt wird. Dadurch ergibt sich aber das gleiche Ergebnis, wie in Lemma 1.14, wobei zusätzlich sogar noch $h \le s_1^{\frac{2}{3}} s_2$ gefordert werden muß.