DOI: 10.1002/piuz.202201660

Das Wie und Warum mathematischer Wirkung

Was macht Mathematik effektiv?

Andreas Loos | Rainer Sinn | Günter M. Ziegler

„Ob ich die Mathematik auf ein Paar Dreckklumpen anwende, die wir Planeten nennen, oder auf rein arithmetische Probleme, es bleibt sich gleich, die letztern haben nur noch einen höhern Reiz für mich", soll Gauß gesagt haben. Aus unserer Sicht ist es ein Geben und Nehmen auf gleicher Augenhöhe zwischen Mathematik und anderen Wissenschaften. Oft zerfließen sogar die Grenzen zwischen den Disziplinen.

Aus dem Buch *Il Saggiatore* von Galileo stammt die Behauptung, die Welt sei „in der Sprache der Mathematik geschrieben" – stimmt das? Das Staunen über die „unerwartete Effektivität der Mathematik" beruht teilweise auf einer platonischen Philosophie der Mathematik, die der Mathematik eine reale Existenz zuschreibt, die lediglich entdeckt wird. Das Staunen wäre kleiner bei einer aristotelischen Weltsicht, nach der die Mathematik langsam aufgebaut und dabei gestaltet wird. In der Mathematikgeschichte ist in großem Umfang Mathematik anhand von physikalischen Fragestellungen und zur Beschreibung von physikalischen Prozessen erforscht und entwickelt worden.

Physikalische Fragestellungen haben vielfach die Entwicklung der Mathematik angeregt und teilweise ihre Richtung bestimmt. So gibt es in der Teilchenphysik quantenfeldtheoretische Rechnungen, die in der Naturbeschreibung ausgesprochen erfolgreich sind, mathematisch gesehen aber gar nicht konvergieren. Es waren größere theoretische Anstrengungen nötig, um die in der Physik praktizierte „Renormierung" auch mathematisch nachzuvollziehen und zu rechtfertigen. Genauso fehlt vielen der aktuellen physikalischen Arbeiten im Rahmen der Suche nach einer Stringtheorie zur Beschreibung von Elementarteilchen bisher die mathematische Basis – die Theorie ist noch nicht fertig.

Es gibt gar keine scharfe Grenze zwischen Mathematik und Physik: Letztlich wird üblicherweise die theoretische Physik als ein Teilgebiet der Physik betrachtet und an Universitäten an physikalischen Fachbereichen angesiedelt, während die mathematische Physik als Teilgebiet der Mathematik gilt und an mathematischen Fachbereichen zu finden ist. Erfolgreiche Forschung basiert auf beiden Gebieten aber immer auf einer Kombination von physikalischem Verständnis und physikalischer Intuition mit mathematischen Methoden.

Eine sinnvollere Einteilung bezieht sich folglich nicht mehr auf die sogenannte Reinheit der Mathematik oder ihre Anwendbarkeit, also auf die Untersuchungsgegenstände, sondern eher auf die Motivation: Neben die innermathematische Forschung, die betrieben wurde, um mathematische Strukturen zu verstehen und dazugehörige Probleme zu lösen, tritt die anwendungsgetriebene Grundlagenforschung. Der nächste Schritt der praktischen Umsetzung kann als Anwendungen der Mathematik beschrieben werden; hier geht es um Modellierung und Rechnung auf Praxis-Daten, um Software-Systeme und ihre Weiterentwicklung und Pflege. Diese von der Mathematik angetriebenen Arbeitsbereiche finden sich typischerweise in der Industrie (Abbildung 1).

Abb. 1 ***Ein inverses Pendel auf zwei Rädern: Sobald man auf den Elektroroller steigt, messen Gyroskope – im Prinzip kleine Kreisel – die Bewegungen in drei Raumrichtungen, also das Kippen nach hinten und vorne, die Drehung nach links und rechts und die Drehung um den Vektor in Fahrtrichtung. Entsprechend beschleunigen oder bremsen die beiden Motoren, die in den Rädern eingebaut sind, so dass man das Gefährt nur durch Kippen steuern, beschleunigen und bremsen kann*** *(Bild: www.segway.com)*.

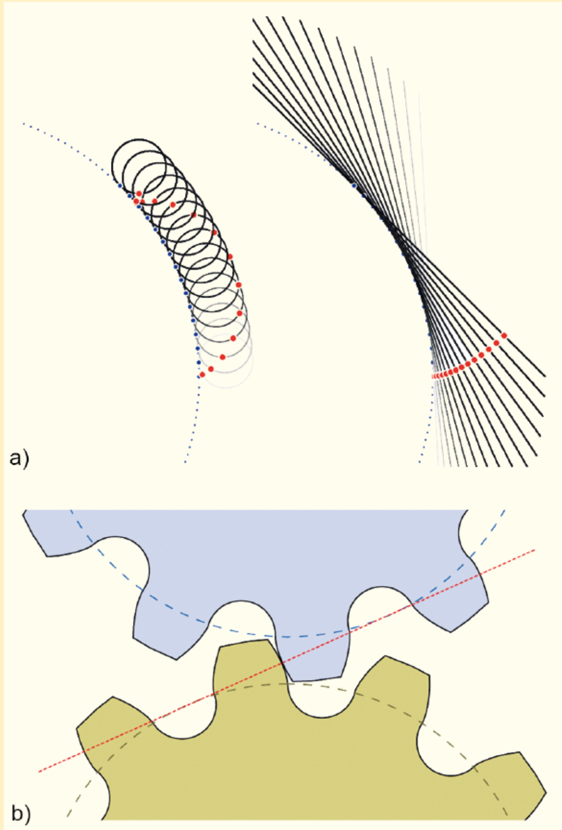
Die erstaunliche Wirkung von Wigners Aufsatz

Aber warum kann man Mathematik überhaupt anwenden? Diese Frage bewegt seit langer Zeit Mathematikerinnen und Mathematiker, Philosophinnen und Philosophen und die, welche die Mathematik anwenden. Am 11. Mai 1959 setzte der Physiker Eugene Paul Wigner ein inzwischen geflügeltes Wort in die Welt: Er hielt damals an der New York University einen Vortrag unter dem Titel *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences* (etwa: „Die unerklärliche Wirksamkeit der Mathematik in den Naturwissenschaften") und wunderte sich vor dem Publikum darüber, dass es so viele mathematische Modelle gibt, die weit über das Wissen ihrer Schöpfer oder Entdecker hinaus Vorhersagen über die Welt ermöglichen: „Die mathematische Formulierung der oft rohen Erfahrung des Physikers führt in einer unheimlichen Anzahl von Fällen zu einer erstaunlich genauen Beschreibung einer großen Klasse von Phänomenen. Das zeigt, dass die mathematische Sprache mehr zu bieten hat als eben nur die einzige Sprache zu sein, die wir können; es zeigt, dass sie, in einem sehr reellen Sinne, die korrekte Sprache ist" [1].

Wigner betonte, dass Physiker es sich nicht einfach machten bei der Auswahl der Mathematik für ihre Modelle, Simulationen und Theorien. Tatsächlich greifen physikalische Theorie und Modellbildung heute wie vor 50 Jahren auf sehr komplizierte mathematische Hilfsmittel und Theorien zurück. Doch wie entstehen solche Theorien? Wie schon Henri Poincaré stellte auch Wigner fest, Mathematik werde nicht vom stupiden Anwenden von Axiomen geleitet, sondern von einem von Ästhetik geleiteten Auswahlprozess. „Der Mathematiker könnte nur eine Handvoll interessanter Sätze formulieren, ohne auf Ideen zurückzugreifen, die außerhalb der Axiome liegen und definiert werden, um logische Operationen voll Erfindungsgeist zu ermöglichen, die uns ästhetisch erfreuen, sowohl als Operationen an sich als auch in ihren Ergebnissen von großer Allgemeinheit und Einfachheit. […] Die komplexen Zahlen stellen ein besonders eindrucksvolles Beispiel für das Vorgehen dar. Es spricht einfach nichts in unserer Erfahrung für die Einführung dieser Größen."

Und wie kommt dann die Mathematik in die Physik? Wigner betonte: Es gebe keine Eins-Zu-Eins-Abbildung zwischen Mathematik und Physik. Mit neueren Erkenntnissen gelten ältere physikalische Theorien als überholt, und es muss neues Werkzeug aus dem Fundus der Mathematik geholt werden. Die physikalische Empirie wird so zu einem weiteren Auswahlkriterium für Mathematik, zu einer Art Entscheidungshilfe bei der Frage, was interessant ist. Warum die Mathematik aber so gut zu den quantitativen Wissenschaften passt, kann auch er nicht erklären. „Das Wunder, dass die Sprache der Mathematik für die Formulierung physikalischer Gesetze so gut geeignet ist, ist ein wundervolles Geschenk, das wir weder verstehen noch verdienen." Sicher ist: Bis heute rätseln Menschen über diese Fragen. Möglicherweise hat es etwas damit zu tun, dass Mathematik eben gar nicht so weltfremd und ideal ist, wie viele denken, sondern dass die Welt der Zahlen und ihrer Strukturen genau wie die physikalische Welt („die paar Dreckklumpen, die wir Planeten nennen", wie es Gauß ausdrückt) ganz einfach Teil der Realität ist, in der wir Menschen leben – was dann eine eher aristotelische Sichtweise wäre.

ABB. 2 | EPIZYKEL UND EVOLVENTEN



Ein Epizykel ist die Spur eines Punktes auf einem Kreis, der auf einem anderen Kreis abrollt (oben links). Evolventen sind dagegen die Spuren eines Punktes auf einer Geraden, die auf einem Kreis abgerollt wird (oben rechts). Aus beiden Kurven kann man Zähne eines Zahnrades konstruieren; unten eine Skizze zweier Zahnräder in Evolventenverzahnung. Die beiden Zahnräder „rollen" aufeinander ab, wobei sich der Berührpunkt entlang der roten Geraden bewegt.

Die Kluft zwischen „angewandt" und „rein"

Im Kapitel „Was ist Mathematik?" des Buches *Panorama der Mathematik* werfen wir einen Blick in die *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* von Felix Klein, Heinrich Weber und Wilhelm Franz Meyer [2]. Die Autoren widmeten letztlich zehn der 23 Teilbände den mathematischen Anwendungen, Themen wie Astronomie und Mechanik, Thermodynamik, Optik und Kristallographie bis hin zu Elektrostatik, Quantentheorie und Relativitätstheorie. Dass die Enzyklopädie nicht nach Band drei mit der reinen Mathematik abgeschlossen wurde, ist wohl vor allem Klein und seinem

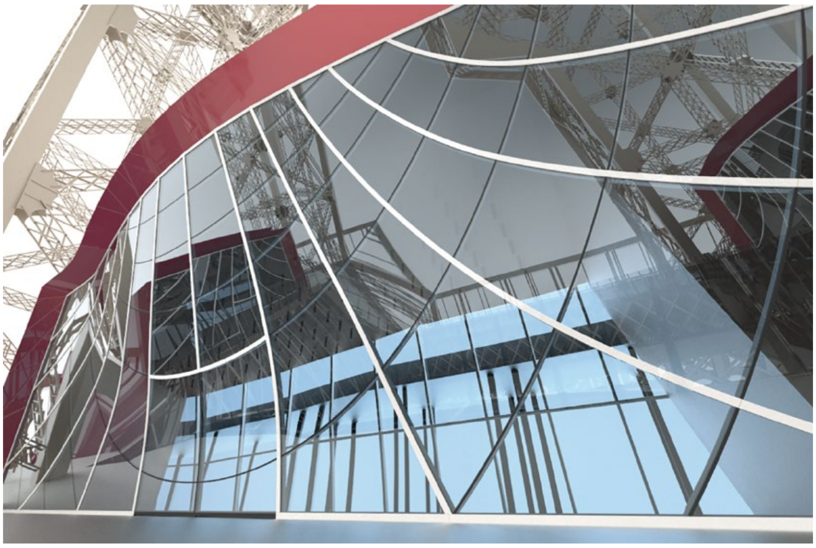


Abb. 3 ***Der Pavillon auf dem Eiffelturm wurde 2014 erneuert, in einer Zusammenarbeit von Mathematikern des DFG-Sonderforschungsbereichs „Diskretisierung in Geometrie und Dynamik", der Geometrie-Beratungsfirma Evolute, Ingenieuren bei RFR und den Architekten Moatti und Riviere. Üblicherweise werden architektonische Flächen in Dreiecke zerlegt. Für den Eiffelturm wurde dagegen eine Zerlegung in Vierecke gewählt, was weitaus komplizierter ist. Der Hauptgrund dafür: Vier Punkte müssen nicht immer in einer Ebene liegen. Obendrein waren hier die Kanten gebogen; die Mathematik dazu hat erst vor etwa zehn Jahren Einzug in die Architektur gehalten*** *(Bild: Evolute GmbH, Wien)*.

Schüler Meyer zu verdanken. Klein versuchte Zeit seines Lebens, die Kluft zwischen angewandter und reiner Mathematik zu überbrücken; auf der einen Seite standen die Befürworter des humboldtschen Bildungsideals, auf der anderen die Gefolgschaft der „Realbildung". Wie war es dazu gekommen? Wilhelm von Humboldt hatte als Leiter der „Sektion des Kultus und des öffentlichen Unterrichts" in der preußischen Kulturverwaltung eine Reform des Gymnasialwesens und -lehrplans in die Wege geleitet. Im humboldtschen Bildungskanon war die Mathematik ein wichtiger Bestandteil – allerdings dachte Humboldt an klassische, griechische Mathematik, die zur Geistes- und Allgemeinbildung beitragen sollte, wie es schon Platon empfohlen hatte. In den preußischen Lehrplänen fand sich entsprechend Geometrie, Mathematik der Kegelschnitte, das Auflösen von Gleichungen und höhere Algebra.

Das war jedoch nicht, was eine allmählich entstehende Industrie forderte: Sie suchte Menschen, die rechnen und vielleicht sogar Differentialgleichungen oder Integrale lösen konnten. Es entwickelte sich parallel zum Gymnasialwesen allmählich (und in verschiedenen Ländern sehr unterschiedlich) ein Realschul- und Realgymnasialwesen, das direkt anwendbares Wissen zu vermitteln versuchte: kaufmännisches Rechnen oder Mathematik für Maschinenbau und Elektrotechnik zum Beispiel. Diese Realbildung musste oft hart um Anerkennung kämpfen: Aus Sicht der „echten" Gymnasien und Universitäten war sie nicht selten Bildung zweiter Klasse.

Ein Mathematiker wie Klein, der engen Kontakt zum Beispiel zu seinem Münchner Kollegen, dem Kältetechniker und Unternehmer Carl von Linde, unterhielt und seine Antrittsvorlesung in Leipzig „Über die Beziehungen der neueren Mathematik zu den Anwendungen" gehalten hatte, wurde von seinen Kollegen schief angesehen, als er – als einziger deutscher Mathematikprofessor – 1895 Mitglied im Verein Deutscher Ingenieure wurde. Diesen Schritt tat er trotz seiner theoretischen Arbeiten aus der Geometrie und Algebra, für die er zu dieser Zeit schon berühmt war. Doch Klein verdanken wir zum Beispiel, dass heute in Gymnasien Funktionen, Differential- und Integralrechnung gelehrt werden, und er hat bis heute recht: Die angebliche Kluft zwischen Anwendung und Theorie erweist sich immer wieder als Phantom, wie an den Abbildungen 2 und 3 zu sehen ist.

Godfrey Harold Hardy etwa ist berühmt für sein Loblied auf die reine Mathematik, das er 1940 – während des Zweiten Weltkriegs – in seiner *Apology* sang: „In praktischen Anwendungen haben wir es nur mit vergleichsweise kleinen Zahlen zu tun, nur die stellare Astronomie und die Atomphysik beschäftigen sich mit ‚großen' Zahlen, und beide haben wenig mehr praktische Bedeutung als die meiste abstrakte reine Mathematik" [3]. Im selben Werk verstieg er sich sogar zur Behauptung „I have never done anything ‚useful'". Auch Carl Friedrich Gauß habe die Zahlentheorie aufgrund ihrer Nutzlosigkeit als Königin der Wissenschaften bezeichnet – was eine gewagte Auslegung eines Gauß lediglich zugeschriebenen Zitats ist.

In Wirklichkeit sind Teile der Arbeit Hardys heute sehr nützlich, zum Beispiel bei der Verschlüsselung von Daten oder in der Molekularbiologie (Hardy-Weinberg-Prinzip). Hardy übersah offensichtlich, dass wichtige Teile der Mathematik nur deshalb entstanden, weil es dafür einen praktischen Bedarf gab – die Differential- und Integralrechnung etwa, die sich im 17. Jahrhundert entwickelte, weil man Flächen und Volumina von gekrümmten Flächenstücken und Körpern berechnen wollte. Man denke zum Beispiel an Keplers Fassregel (auch als Simpson-Regel bekannt), eine Näherungslösung für die Integration bauchiger, fassförmiger Volumina, die Johannes Kepler erfand, um Volumina von Weinfässern zu berechnen.

Mathematik in Wirtschaft und Industrie

Als 2002 das von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG finanzierte Forschungszentrum Matheon in Berlin an den Start ging mit dem Anspruch, in der Wissenschaft Mathematik für Schlüsseltechnologien zu entwickeln, wurde das als außergewöhnlich wahrgenommen. In der Tat hat sich die Sichtbarkeit wie auch die Wirksamkeit mathematischer Methoden in der Praxis seitdem stark erhöht. Das Matheon wird inzwischen im Exzellenzcluster MATH+ weitergeführt. Mathematik für Anwendungen wird aber auch an mehreren Fraunhofer-Instituten entwickelt, darunter dem Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM in Kaiserslautern (1996 unter der Leitung von Helmut Neunzert gegründet), am im selben Jahr gegründeten „Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften“ in Leipzig, am Weierstrass-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik WIAS in Berlin und so weiter.

Gleichzeitig findet mathematische Forschung in großem und stark wachsendem Umfang in der Industrie statt: Das gilt nicht nur für die Finanzindustrie (Banken und Versicherungen), die Telekommunikationsindustrie, die Verkehrsindustrie und Logistik (Bahn, Fluglinien, Speditionen, etc.), sondern für praktisch alle Bereiche der modernen Industrie, wo mit mathematischen Methoden Produkte entworfen, optimiert und vertrieben werden. All dies hat sich in den vergangenen Jahren extrem beschleunigt, seit die mathematischen Methoden von Big Data und Künstlicher Intelligenz sichtbar Eingang in alle Bereiche von Technologie, Wirtschaft und Industrie wie auch in den Alltag genommen haben.

Beispiele aus der Praxis

Im Folgenden stellen wir eine kleine Sammlung interessanter Beispiele angewandter oder anwendbarer Mathematik zusammen – als Inspirationsquelle und ohne jeden Anspruch auf Vollständigkeit.

Die Methode der kleinsten Quadrate. Der 24-jährige Carl Friedrich Gauß stieß in der „Monatlichen Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde“ vom September 1801 auf eine faszinierende Mitteilung. Der Herausgeber des Blattes, Franz Xaver Freiherr von Zach, verfolgte seit 1800 ein großes Vorhaben: Er war auf der Suche nach dem fehlenden Planeten zwischen Mars und Jupiter, an den viele Astronomen seit Kepler glaubten, vor allem aus zahlenmystischen Gründen. Er organisierte die Gründung der „Vereinigten Astronomischen Gesellschaft“, die „Himmelspolizei“: „Durch eine […] streng organisierte, in 24 Departements abgesteckte Himmels-Polizey hoffen wir endlich, diesem, unsern Blicken sich so lange entzogenen Planeten, wenn er anders existiert und sich sichtbar zeigt, auf die Spur zu kommen [4].“

Just am ersten Tag des 19. Jahrhunderts beobachtete Giuseppe Piazzi in Sizilien zum ersten Mal einen bisher unbekannten Himmelskörper. Er verfolgte den Lichtpunkt in den nächsten Tagen und war sich am 4. Januar sicher, dass der Punkt sich bewegte, also kein Fixstern ist. War es der von Zach gesuchte Planet? Die Neuigkeit verbreitete sich schnell in ganz Europa, und die Aufregung unter astronomischen Experten war groß. Ende Januar wurde der unbekannte Himmelskörper aber unbeobachtbar: Er bewegte sich scheinbar rückläufig wie der Mond, bewegte sich also von Nacht zu Nacht weiter nach Osten und ging damit in der Abenddämmerung verloren. Es gab deshalb nur wenige Beobachtungen von Piazzi. Die große Frage war, wann und wo er am Nachthimmel wieder auftauchen würde. Die vorhandenen Beobachtungen von Piazzi, die im September 1801 in der Monatlichen Korrespondenz veröffentlicht wurden, waren ein Geschenk des Himmels für Gauß. Er entwickelte neue Methoden, rechnete auf Basis der veröffentlichten Beobachtungsdaten und kam zu Vorhersagen, die von denen seiner Zeitgenossen deutlich abwichen (Abbildung 4).

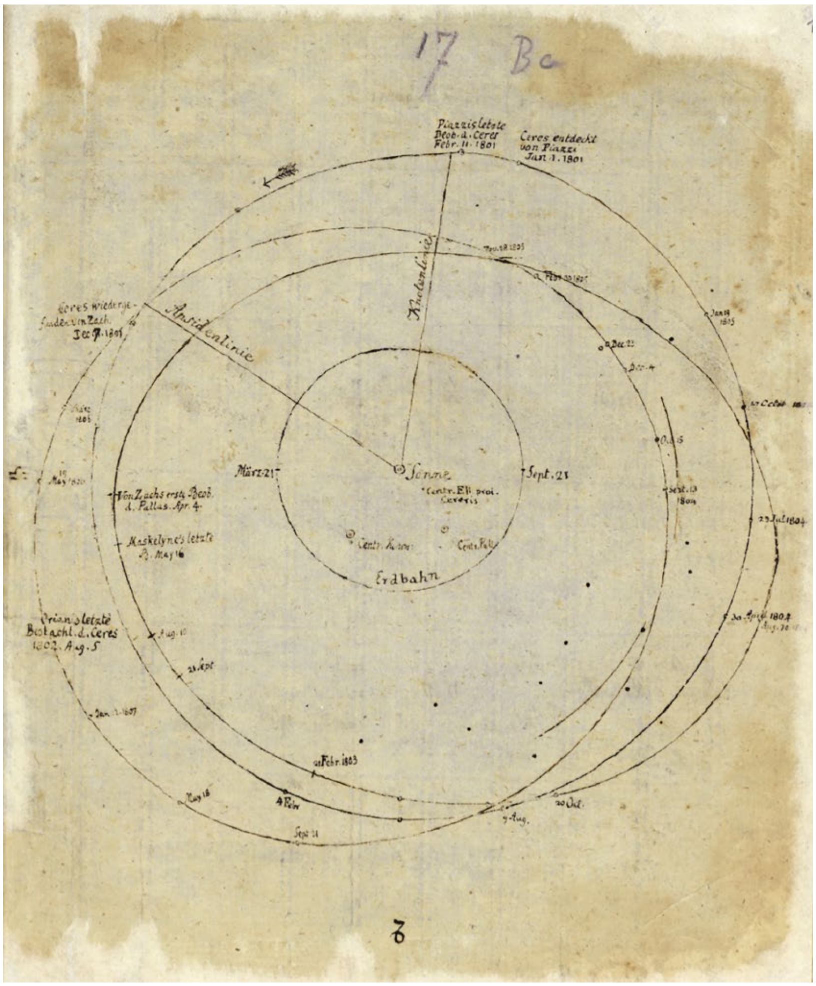


Abb. 4 ***Auf dieser Skizze von Gauß sind die Bahnen von Ceres, Pallas und vermutlich Juno zu sehen. Die Bahn der Ceres war nicht die einzige Planet(oid)enbahn, die er berechnete und auf dieser Seite aus seinem Tagebuch in handschriftlicher Skizze dokumentierte*** *(Bild: Gauß Handbuch 4, Bl. Ir, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Georg-August-Universität Göttingen)*.

Nach Gauß sollte Piazzis Entdeckung – die später Ceres heißen wird – am 7. Dezember 1801 wieder am Nachthimmel zu beobachten sein. Und tatsächlich fand Zach Ceres dort wieder! Gauß schrieb einige Jahre später: „Dem Verfasser des vorliegenden Werkes [also Gauß selbst] hatten sich im Sommer 1801 bei Gelegenheit einer ganz anderen Beschäftigung einige Ideen dargeboten, die ihm zu einer Auflösung des erwähnten Problems führen zu können schienen. Zu einer andern Zeit würde er vielleicht diese Ideen, welche zunächst nur theoretischen Reiz für ihn hatten, nicht sogleich weiter verfolgt und ausgeführt haben: allein gerade in jenem Zeitpunkte, wo Piazzis Entdeckung die allgemeine Aufmerksamkeit gespannt hatte, und dessen Beobachtungen so eben ins Publicum gekommen waren, konnte er sich nicht enthalten, an diesen die practische Anwendbarkeit jener Ideen zu prüfen“ [5].

Man weiß nicht genau, welche mathematischen Verfahren Gauß meint. Sicher ist, dass er genug Mathematik kannte, um aus einer Reihe von gemessenen Positionen eines Himmelskörpers die tatsächliche Bahn des Körpers zu berechnen. Dazu gehörten vor allem Reihenentwicklungen, um Näherungen (und Integrale) berechnen zu können, die Transformation von Koordinatensystemen [6] – und vermutlich auch gleich von Anfang an eine Idee, um aus einer Reihe von Messwerten „den richtigen" abzuschätzen. Diese Methode der kleinsten Quadrate setzte Gauß später oft ein, und er wurde auch durch sie berühmt [7].

Bézier-Kurven. Je schneller sich Fahrzeuge bewegen, desto stärker fällt der Einfluss des Luftwiderstandes ins Gewicht. Die ersten, langsamen Autos konnten daher noch kastenförmigen Kutschen gleichen – sie schafften kaum mehr als 20 km/h. Doch mit der Entwicklung stärkerer Motoren begann die Suche nach der idealen „Stromlinienform". Mit Modellen kann man Formen im Strömungskanal ausprobieren und sich so langsam an ein möglichst gutes Design herantasten, und es wurden auch – zunächst im Luftschiffbau – schon um 1920 mathematische Methoden zur Optimierung des Luftwiderstandes eingesetzt. Wichtige Namen sind hier Ludwig Prandtl und der etwas jüngere Max Michael Munk. Zuvor hatte man Luftschiffe zum Beispiel als Zylinder mit halbkugelförmigen Kappen modelliert.

Doch die glatten Designs mussten dann auch in der Produktion umgesetzt werden. Wie modelliert man solche Formen? Hierzu wurde in den 1950er-Jahren eine neue Methode entwickelt, bei Renault von Pierre Étienne Bézier – der darüber mit 67 Jahren an der Sorbonne promovierte – und fast gleichzeitig beim Konkurrenten Citroën vom zwanzig Jahre jüngeren Paul de Faget de Casteljau. In seiner sehr eigentümlichen und poetischen Wortwahl erinnert sich Casteljau fast 50 Jahre später [8]: „Es ist ja nur zu wahr, daß in Karosserie rosserie [Boshaftigkeit] steckt. ‚Wenn man die Stücke nicht nach dem Konstruktionsplan herstellen kann, nützt der ganze Aufwand nichts', übertrieb Monsieur [Jean] de la Boixiére [der Vorgesetzte von Casteljau bei Citroën], und fügte hinzu: ‚Wir können uns über Dingoide *n*-ten Grades auslassen, haben aber Geraden und Kreise noch immer nicht im Griff!' Es musste schnell gehen. Die gesamte Abteilung arbeitete in geheimem Einverständnis, hocherfreut, Monsieur de la Boixiére die Stirn bieten zu können. Kurz darauf, an einem besonders stürmischen Nachmittag, verwandelte die Olivetti-Tetractys [eine Rechenmaschine mit integriertem Drucker] unter ohrenbetäubendem Lärm eine ganze Rolle Papier in etwa vierzig kubische Kurven. Das brachte die Ingenieure der angrenzenden Büros an die Grenze ihrer Geduld. Sie suchten sich woanders eine Beschäftigung" [8, Übersetzung: Andreas Müller und Petra Schulze].

Auch wenn sie es mathematisch etwas unterschiedlich ausdrückten, hatten Casteljau und Bézier im Prinzip – und unabhängig voneinander – dieselbe Idee: Sie entwickelten ein Iterationsverfahren, das heute De-Casteljau-Algorithmus heißt, zur Darstellung einer Kurve, die man heute Bézier-Kurven nennt (siehe „Was sind Bézier-Kurven" auf S. 181 und Abbildung 5).

Differentialgleichungen. Differentialgleichungen waren die ersten Objekte, mit denen sich Naturwissenschaftler und Mathematiker in der Anfangszeit der Differential- und Integralrechnung im 17. Jahrhundert befassten – und heute werden die meisten Gesetze der Naturwissenschaften mit Hilfe von Differentialgleichungen beschrieben, vom Flug einer Rakete bis zum radioaktiven Zerfall von Atomen oder dem Abbau von Medikamenten im Körper, von Klima und Wetter bis zur Entwicklung und Bewertung von Finanzprodukten. Differentialgleichungen beschreiben das Verhalten von Funktionen indirekt, durch die Veränderung von Größen, durch partielle oder totale Ableitungen. Ein erstes Beispiel war wohl Newtons Bewegungsgesetz, das „Aktions-

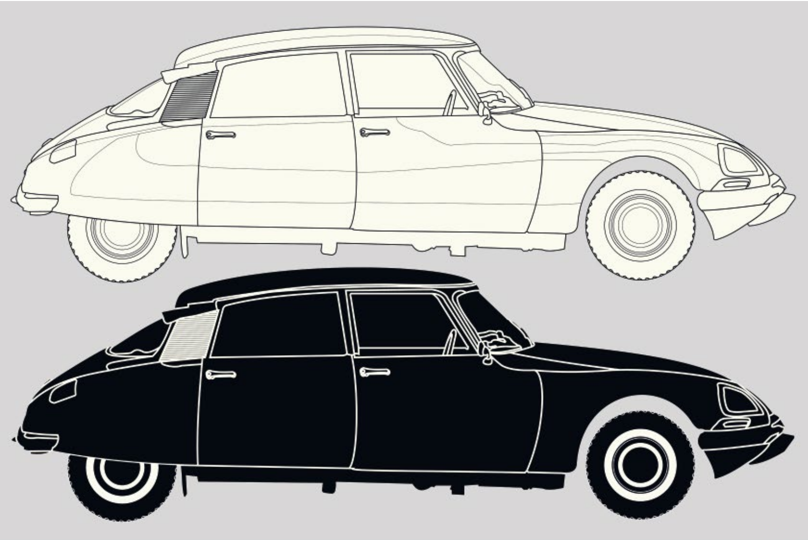


Abb. 5 ***Der Citroën DS, der 1955 auf den Markt kam. Bei seiner Konstruktion wurden erstmals Bezier-Flächen eingesetzt – und ermöglichten die ikonische windschnittige Form, hier einmal als technische Zeichnung und als fertiges Automobil zu sehen*** *(Zeichnung: Hicham, stock.adobe.com; Bild: Konstantinos Moraiti – stock.adobe.com)*.

prinzip“, das in der modernen Physik $F = \dot{p}$ geschrieben wird. Damit kann man zum Beispiel auch beschreiben, wie man einen Finger bewegen muss, um einen Besenstiel darauf zu balancieren – das sogenannte inverse Pendel gehört neben dem harmonischen Pendel und dem Doppelpendel zu den Klassikern aus der Schwingungsmechanik.

Die Physik, die hinter dem Balancieren von Besenstielen steckt, findet erstaunlich viele Anwendungen, angefangen bei Raketen, die durch Ausgleichsbewegungen beim Flug stabilisiert werden müssen, über große Containerfrachter, deren Schwerpunkt so hoch liegt, dass sie durch seitliche Turbinen permanent vor dem Umkippen bewahrt werden, bis hin zu Robotern und Fahrzeugen, die mit nur einer Achse und zwei Rädern stabil gehalten werden. Das bekannteste dieser Fahrzeuge ist der Motorroller Segway Personal Transporter (Abbildung 1) des amerikanischen Erfinders Dean Kamen, den dieser 1999 patentieren ließ und dessen Produktion 2020 eingestellt wurde; die aufkommenden E-Roller waren unter anderem aus rechtlichen Gründen einfacher und populärer.

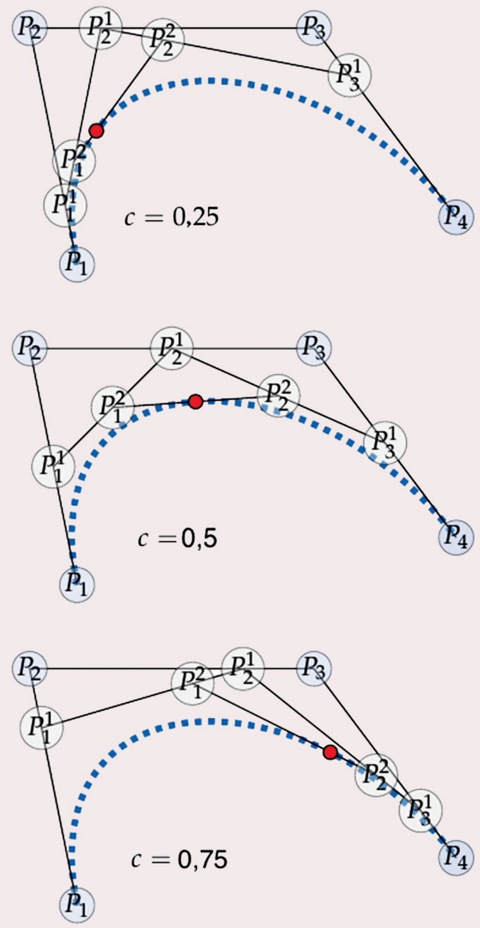
All diese Anwendungen basieren auf der Lösung eines Systems von partiellen Differentialgleichungen aus der Mechanik, den nach Joseph Louis Lagrange benannten Lagrange-Gleichungen, die im Wesentlichen die Energie eines Systems beschreiben, das gewissen Nebenbedingungen gehorchen soll. Dabei bewegen sich Körper immer so, dass ihre Bahn das Integral über die Lagrange-Funktion – im Wesentlichen die Differenz zwischen Bewegungs- und Lageenergie – über die Zeit minimiert, was das Hamiltonsche Prinzip genannt wird.

Um die Bahn eines Körpers zu berechnen, muss man daher aus mathematischer Sicht ein Variationsproblem lösen. Die Untersuchung der Lösungsmengen von Differentialgleichungen ist eine der wichtigsten Aufgaben der theoretischen Mathematik – mit höchst praktischen Anwendungen und vielen ungelösten Problemen. Das bekannteste ist wohl die Untersuchung der Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen aus der Strömungsmechanik, eines der Millenniums-Probleme des Clay-Stiftung.

Vom Assortiment bis zum Zahnrad. Wenn sie nicht aus dem Luxussegment kommen, dann enthalten die meisten mechanischen Uhren in Europa ein mechanisches Herz, das von ein- und demselben Schweizer Hersteller stammt. Der Grund: Ein solches Assortiment oder Swing-System zu entwickeln (zu dem unter anderem auch die Unruh gehört), ist teuer und aufwendig – auch wegen der komplexen Mathematik, die dahintersteckt; es muss zum Beispiel die Kraftübertragung des schwingenden Systems auf das Räderwerk der Uhr modelliert werden. Ein Uhrenhersteller aus dem sächsischen Ort Glashütte hat daher großes Aufsehen erregt, als er für fast neun Millionen Euro zusammen mit Mathematikern der Universität Dresden ein eigenes Assortiment entwickelt hat. Tatsächlich steckt in einer mechanischen Armbanduhr neben Zahnrädern, Federn, Schwingkörpern und Lagern vor allem jede Menge Mathematik.

WAS SIND BEZIER-KURVEN?

Die geometrische Idee ist die folgende: Man nehme eine Reihe von n Punkten P_i in zwei oder drei Dimensionen, die sogenannten Kontrollpunkte. Für jedes Teilungsverhältnis c einer Strecke konstruiert man einen Punkt der Bézier-Kurve, indem man die Strecken zwischen zwei benachbarten Kontrollpunkten P_i und P_{i+1} im Verhältnis c teilt. Das liefert den Punkt P_i^1. Damit hat man jetzt Punkte P_1^1, P_2^1, ..., P_{n-1}^1. Mit diesen neuen Punkten verfährt man genauso und wiederholt das Verfahren genau n-1-mal. Weil man bei jedem Schritt einen Punkt verliert, hat man am Ende genau einen Punkt P_1^{n-1}, und dies ist der Punkt der Bézier-Kurve zum Teilungsverhältnis c. Indem man c zwischen 0 und 1 variiert, durchläuft man die Kurve. Die Abbildung illustriert das Verfahren für verschiedene Teilungsverhältnisse $c = 1/4$, $c = 1/2$ und $c = 3/4$ und vier Kontrollpunkte $n = 4$, was auf eine kubische Bézier-Kurve führt.



Schon in der Antike wusste man die Größen von Zahnrädern sehr genau aufeinander anzupassen, damit Zeiger in der richtigen Geschwindigkeit über Zifferblätter kreisen. Das berühmteste Beispiel ist der höchst komplexe Mechanismus von Antikythera, vermutlich eine Art mechanischer Kalender, der wohl aus dem 1. Jahrhundert v. Chr. stammt [9]. Seit 2002 wird der Fund aus einem Wrack vor der griechischen Insel Antikythera von dem Dokumentarfilmer Tony Freeth intensiv mit mathematischen Methoden erforscht. Freeth hat auch einen Doktortitel in Logik und Mengentheorie von der Universität Bristol.

In den Zahnradgetrieben der letzten Jahrhunderte steckt noch mehr Mathematik – schon in der Form der Zähne. Wie muss man die Zähne fräsen, damit die Räder die Kräfte mit möglichst wenig Reibungsverlust und Spiel übertragen? Damit befassten sich schon Uhren-Mathematiker im 17. und 18. Jahrhundert. Der Künstler und Mathematiker Philippe de La Hire und der Astronom und Mathematiker Ole Rømer verfassten zum Beispiel Schriften über Epizykloide, in denen sie bemerkten, dass man die Zähne von Zahnrädern in der Form von Zykloiden abrunden kann, um sie aufeinander abrollen zu lassen. So tritt nur Rollreibung auf, und die ist viel geringer als die Gleitreibung. Leonhard Euler entdeckte – mit Hilfe geometrischer Betrachtungen und der jungen Differentialrechnung – noch eine andere günstige Form für Zahnrad-Zähne: die Evolvente. Etwa 1752 verfasste er darüber eine Arbeit mit dem Titel *De aptissima figura rotarum dentibus tribuenda* („Über die beste Form für Zahnrad-Zähne"), zehn Jahre später ergänzt durch *Supplementum de figura dentium rotarum* („Nachtrag über die Form rotierender Zähne").

Zahnräder beschäftigen heute natürlich nicht nur Uhrmacher: Ein modernes Autogetriebe enthält Zahnräder, die nicht nur Reibungsverluste minimieren sollen, sondern auch noch bei Rotationsgeschwindigkeiten von mehreren Tausend Umdrehungen pro Minute nicht ins Vibrieren kommen dürfen. Obendrein dürfen beim Abrollen der Zahnräder keine Hohlräume entstehen, in denen sich Getriebeöl fangen könnte: Das Öl ist eine praktisch inkompressible Flüssigkeit und kann daher das Zahnrad im schlimmsten Fall sprengen, sobald es eingequetscht wird.

Heute laufen die meisten Getriebe in Evolventenverzahnung, weil sich diese Form einfacher fräsen lässt als eine Zykloidenverzahnung, doch es gibt daneben viele weitere Arten von Verzahnungen und sogar Hybridformen, in der die Zahnrad-Zähne teils einer Evolvente, teils anderen Kurven nachgebildet sind.

Regelflächen. Wer Lehrbücher zur Liniengeometrie oder zu Regelflächen sucht, der wird auf viele historische Werke stoßen. Die Regelflächen wurden um 1828 von Jean Nicolas Pierre Hachette so getauft, nachdem er sie bereits 1812 beschrieben hatte, in einem Anhang zum Bestseller *Géometrie déscriptive* von Gaspard Monge. Der Name kommt wohl daher, dass sich solche Flächen nach einer einfachen Regel herstellen lassen: Man nehme eine Gerade und bewege sie entlang einer Kurve im Raum. Das klassische Beispiel einer Regelfläche ist ein Hyperboloid.

Die Theorie der Regelflächen war in ihren Anfängen eingebettet in die sogenannte Darstellende Geometrie, also die Geometrie, die sich zum Beispiel mit der Projektion dreidimensionaler Objekte in zwei Dimensionen befasste – sehr gut anwendbare Mathematik also, was Hachette in seinem Anhang zur *Géometrie déscriptive* auch ausdrücklich betont. Die Anwendungen reichen von der Kunst bis zur Beschreibung der Bewegungen von Maschinenteilen – heutzutage zum Beispiel von Roboterarmen.

Einerseits entwickelte sich aus diesen Anfängen in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts eine hochdimensionale und abstrakte Geometrie, unter anderem durch die Arbeiten von Julius Plücker, Felix Klein und Wilhelm Blaschke. Plückers Beitrag bestand vor allem in einem Werk, an dem er bis kurz vor seinem Tod arbeitete und das 1868/69 in zwei Bänden (Band 2 posthum) erschien, unter dem Titel *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*. Plückers Ideen werden derzeit zum Beispiel in der Theorie der Diskretisierung von Geometrien und dynamischen Systemen benutzt.

Andererseits lebt die Theorie der Regelflächen für sich fort – unter anderem in der Architektur, zum Beispiel im Betonbau. Denn Beton wird in Formen gegossen, in Verschalungen. Weil Beton Zug nicht gut verträgt, leitet man Zugkräfte durch Stahlgitter und -stäbe im Inneren des Betonteils ab, mit der Bewehrung. Ebene Wände und Böden sind daher schnell und einfach zu konstruieren, gebogene Flächen viel schwieriger. Nicht selten muss die Verschalung in solchen Fällen in einzelne Elemente aufgeteilt werden, die maßgeschneidert werden – was sehr teuer werden kann. Dazu kommt die Frage: Wie soll die Bewehrung im Inneren verlaufen? Regelflächen bieten hier eine Lösung an. Weil sie durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden, kann man die Verschalungen leicht aus Kunststoff mit einem Heißdraht erzeugen, der entlang der gewünschten Kurve bewegt wird und den Kunststoff schneidet. Zudem kann man die Bewehrung im Inneren in der Richtung der erzeugenden Geraden laufen lassen. Wie man Regelflächen in der Architektur einsetzen kann, wird daher derzeit intensiv erforscht.

Tatsächlich steht die Architektur seit Jahrhunderten in enger Verbindung zur Mathematik, von der Konstruktion von Formen bis zur Berechnung der Statik von Gebäuden. Ein antikes Beispiel ist die bauchige Form griechischer Säulen, die sogenannte Entasis. Bisweilen orientierten sich die Steinmetze dafür offenbar an Schnüren, die sie neben der (horizontal liegenden) Säule spannten. Deren Form wird dann durch eine Katenoide (Kettenlinie) beschrieben, also den Cosinus Hyperbolicus.

Wie kann die Mathematik so nützlich sein? Ist die Natur wirklich mathematisch? Es ist ein Geben und ein Nehmen: Der technische, physikalische, metrische Blick auf die Welt wird möglich, weil wir die Welt in Zahlen und mathematischen Strukturen fassen und beschreiben, so wie eine Schriftstellerin die Welt in ihre Worte fasst. Umgekehrt erweitert sich die Mathematik wie eine Sprache, weil man sie braucht, zur Weiterentwicklung technischer und physikalischer Methoden. Und wie eine Sprache kann sie auch selbst zum Untersuchungsgegenstand werden. Ob sie unabhängig davon existiert – entdeckt oder noch nicht entdeckt – oder dabei erfunden wird, das ist damit noch nicht gesagt. Sicher ist: Sie funktioniert.

Zusammenfassung

Mathematik scheint den natürlichen Formalismus zur Beschreibung und Berechnung physikalischer Prozesse und Gesetzmäßigkeiten zu liefern. Umgekehrt haben physikalische Fragestellungen die Entwicklung der Mathematik angeregt und teilweise ihre Richtung bestimmt, und eigentlich gibt es keine scharfe Grenze zwischen Mathematik und Physik. Eine sinnvolle Einteilung bezieht sich eher auf die Motivation als auf die Untersuchungsgegenstände der Mathematik: Forschung wird betrieben, um mathematische Strukturen zu verstehen oder ist durch naturwissenschaftliche oder technisch-industrielle Anwendungen motiviert.

Stichwörter

Angewandte Mathematik, reine Mathematik, mathematische Physik, Philosophie der Mathematik.

Danksagung

Open Access funding enabled and organized by Projekt DEAL.

Literatur

[1] E. Wigner, Commun. Pure Appl. Math. **1960**, *13*(1), 1.

[2] F. Klein, H. Weber, W. Franz Meyer (Hg.), Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, B. G. Teubner Verlag, Leipzig, 1898–1935.

[3] G. H. Hardy, A Mathematician's Apology, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1941.

[4] F. von Zach, Über einen zwischen Mars und Jupiter längst vermutheten nun wahrscheinlich entdeckten neuen Hauptplaneten unseres Sonnen-Systems. Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Juni **1801**, *3*(6), 592.

[5] C. F. Gauß, Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium. In: Ges. Werke Band VI, S. 53, Königl. Ges. d. Wiss., Göttingen 1874.

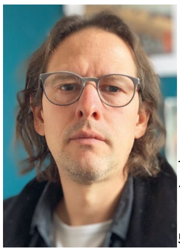
[6] K. Whitehead, D. Teets, Math. Mag. **1999**, *72*(2), 83.

[7] U. Krengel, Mathematische Semesterberichte **2006**, *53*(1), 1.

[8] P. de Faget de Casteljau, De Casteljau's autobiography: My time at Citroën. Computer Aided Geometric Design **1999**, *16*, 583.

[9] T. Freeth, Scientific American, December **2009**, *301*(6), 24–33.

Die Autoren


(Foto: privat)

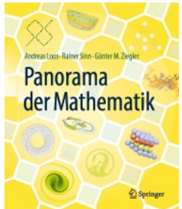

(Foto: Kay Herschelmann)


(Foto: David Ausserhofer)

Andreas Loos ist Senior Data Scientist bei ZEIT Online in Berlin.
Rainer Sinn ist Professor für Mathematik an der Universität Leipzig.
Günter M. Ziegler ist Professor für Mathematik an der Freien Universität Berlin.

Anschrift
Dr. Andreas Loos, ZEIT Online, Schöneberger Straße 21A, 10963 Berlin.
andreas.loos@zeit.de
Prof. Dr. Rainer Sinn, Universität Leipzig, PF 10 09 20, 04009 Leipzig.
rainer.sinn@uni-leipzig.de
Prof. Dr. Günter M. Ziegler, Freie Universität Berlin, Arnimallee 2, 14195 Berlin.
ziegler@math.fu-berlin.de

Zum Thema



Dieser Aufsatz ist der gekürzte Auszug eines Kapitels aus dem Buch Panorama der Mathematik von Andreas Loos, Rainer Sinn und Günter M. Ziegler. 496 S., Springer, Berlin 2022. 22,99 Euro. ISBN 978-3-662-54872-1.