

Iteration von harmonischen Robin-Funktionen

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(*Dr. rer. nat.*)

am Fachbereich Mathematik und Informatik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Serkan Emek

Berlin, 2022

Erstgutachter: Herr Prof. Heinrich Begehr
Zweitgutachter: Herr Prof. Alexander Schmitt
Drittgutachter: Herr Prof. Ahmet Okay Çelebi

Tag der Disputation: 20.04.2023

Danksagung

Mit großer Freude kann ich an dieser Stelle festhalten, dass nach vielen Jahren intensiver Forschung am Institut für Mathematik des Fachbereichs Mathematik und Informatik der Freien Universität Berlin meine Dissertation als Ergebnis vieler Bemühungen bereits fertig ist. Gerade in Anbetracht dessen, dass die Realisierung meiner Promotion unter bis dato nicht gekannten Rahmenbedingungen der Covid-19-Pandemie nicht immer einfach war, ist es mir ein großes Anliegen, mich bei jenen Menschen zu bedanken, die mich auf diesem Weg meiner akademischen Laufbahn begleitet haben.

Zuallererst bin ich meinen Professoren zu besonderem Dank verpflichtet, die sich dazu bereit erklärt haben, sich auf meine Forschung und deren Betreuung einzulassen:

Als erster Gutachter hat mich Herr Professor Heinrich Begehr immer wieder mit seinen tollen Anregungen unterstützt und durch diese fachlichen wie auch zwischenmenschlichen Impulse zum Erfolg der Dissertation beigetragen. Ich bin sehr dankbar dafür, dass ich Herrn Professor Begehr kennengelernt habe. Nur wenigen ist es vergönnt, eine solch herausragende und langjährige akademische Begleitung zu finden – angefangen vom Bachelor-Studium über den Master-Abschluss bis zum Doktor der Mathematik! Herr Professor Begehr war maßgeblich daran beteiligt, dass ich meine Forschungsergebnisse schon 2021 im Rahmen eines Fachjournals dem akademischen Publikum vorstellen konnte. Vielen Dank!

Nicht weniger Dank gebührt ebenso Herrn Professor Alexander Schmitt. Hervorheben möchte ich in diesem Zusammenhang die tolle Chance, im Jahr 2020 den Vortrag „Iteriertes Robin-Problem für die Poisson-Gleichung höherer Ordnung“ im Forschungsseminar „Komplexe Analysis“ gehalten und damit meine Forschungsergebnisse zur Diskussion gestellt zu haben. Ich danke Ihnen ganz herzlich dafür! Diese Gelegenheit hat mich nochmals motiviert und in meinen Forschungsbemühungen bestätigt. Weiterhin habe ich durch Herrn Professor Schmitt eine wertvolle Unterstützung erhalten, die ebenso einen Teil zum großen Ganzen meiner Dissertation ausgemacht hat. Die Möglichkeit, ein eigenes Büro als wissenschaftlicher Mitarbeiter und Doktorand in der AG Komplexe Analysis an der Freien Universität Berlin haben zu dürfen, habe ich sehr geschätzt.

Ebenso möchte ich ganz herzlich Herrn Prof. Ahmet Okay Çelebi (Yeditepe Üniversitesi) danken, welcher als türkischsprachiger Forscher für mich eine wichtige Vorbildfunktion hat.

Nicht vergessen sind alle anderen Menschen, die mich während der vergangenen Jahre mit bereichernden Tipps und Diskussionsbeiträgen in neue thematische Bahnen gelenkt haben. Ganz dankbar bin ich dafür!

Das abschließende und ganz besondere Dankeschön für all die Liebe, Unterstützung und Motivation geht an meine Familie, zu der auch ganz besonders mein allergrößter Schatz J. Vogler zählt. Sie mussten leider alle in den vergangenen Jahren immer wieder auf mich verzichten und mich mit meiner Promotion „teilen“, wenn ich doch einmal wieder nur wenig Zeit hatte oder mit meinen Gedanken bei Gleichungen und Funktionen war. Ich danke euch deshalb ebenso für euer liebevolles Verständnis und die Fürsorge. Ohne euch wäre diese Dissertation niemals in dieser Form so entstanden. DANKE!

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Harmonische Randwertprobleme und Green-Funktionen	9
2.1	Notation und technische Grundlagen	9
2.1.1	Funktionenräume	10
2.1.2	Linear- und Differentialformen	10
2.1.3	Integration	13
2.2	Der harmonische Fall	14
2.2.1	Harmonische Randwertprobleme	16
2.2.2	Green-Funktionen und Integraldarstellungen	16
3	Polyharmonische Randwertprobleme und Green-Funktionen	25
3.1	Polyharmonische Randwertprobleme	25
3.2	Polyharmonische Green-Funktionen	28
3.3	Integraldarstellungen	34

4 Die Robin-Funktionen für den Einheitskreis	40
4.1 Einige Hilfsmittel	40
4.2 Der harmonische Fall	43
4.3 Der biharmonische Fall	47
4.4 Der triharmonische Fall	56
5 Lösung des Robin-Randwertproblems	72
5.1 Problemstellung	72
5.2 Der harmonische Fall	76
5.2.1 Der harmonische Fall für $D = \mathbb{D}$	77
5.3 Der polyharmonische Fall	80
5.4 Der polyharmonische Fall für $D = \mathbb{D}$	83
5.4.1 Der biharmonische Fall	88
5.4.2 Der triharmonische Fall	90
6 Fazit	93
Literaturverzeichnis	95

Kapitel 1

Einleitung

Während der vergangenen Jahre sind polyharmonische Green- und Neumann-Funktionen durch fortgesetzte Iteration harmonischer Green- und Neumann-Funktionen eingeführt worden [Ac18, Ac10a, Ac10b, Beg11, BV08a, BV08b, BV06, Bur09, BVZ06, Wan10]. Ebenso wurden hybride polyharmonische Green-Funktionen als Faltungen von Green- und Neumann-Funktionen definiert [Beg06, Bur09]. Jede dieser einem bestimmten Randverhalten angepassten Fundamentallösungen des zugehörigen polyharmonischen Differentialoperators, einer Potenz des Laplace-Operators, entsprechen gewisse Randwertprobleme für die Poisson-Gleichung von gleicher Ordnung. Diese lassen sich damit, gegebenenfalls unter bestimmten Lösbarkeitsbedingungen, explizit lösen.

Ziel dieser Arbeit ist es, iterierte polyharmonische Randwertprobleme und die zugehörigen hybriden polyharmonischen Green-Funktionen in einem einheitlichen Rahmen darzustellen. Ausgehend vom harmonischen Robin-Problem mit der Randbedingung

$$(\alpha + \beta \partial_\nu)w = \gamma \quad \text{auf } \partial D \tag{1.1}$$

für Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, erhalten wir durch Iteration eine hybride polyharmonische Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w &= f \quad \text{in } D, \\ (\alpha_k + \beta_k \partial_\nu)(\partial_z \partial_{\bar{z}})^{k-1} w &= \gamma_k \quad \text{auf } \partial D, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Durch entsprechende Wahl der Parameter α_k, β_k , $k = 1, \dots, n$ lassen sich damit alle denkbaren iterierten Randbedingungen darstellen. Für $\beta_k = 0$ erhalten wir jeweils Dirichlet-Randbedingungen, für $\alpha_k = 0$ Neumann-Randbedingungen.

Im zweiten Kapitel stellen wir zunächst die Theorie für den harmonischen Fall dar, die in [BH06, BV10, BV13] untersucht wurde. Aufbauend darauf entwickeln wir im dritten Kapitel das Konzept der hybriden polyharmonischen Robin-Funktionen $R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}$ und geben eine Integraldarstellung für Funktionen $w \in C^{2n}(D) \cap C^{2n-1}(\overline{D})$ mit polyharmonischen Robin-Funktionen an.

Im vierten Kapitel bestimmen wir die konkreten Robin-Funktionen für $n = 1, 2, 3$ für den Einheitskreis $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. Der harmonische Fall $n = 1$ wurde bereits in [BV13] gelöst. Ausgehend davon erhalten wir die hybriden bi- und triharmonischen Robin-Funktionen durch das Auswerten des Faltungsintegrals

$$R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_D R_{1;\underline{\alpha}_n,\underline{\beta}_n}(z, \tilde{z}) R_{n-1;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\tilde{z}, \zeta) d\tilde{x}d\tilde{y}. \quad (1.3)$$

Abschließend stellen wir im fünften Kapitel Lösbarkeitsbedingungen auf und leiten aus den Integraldarstellungen Lösungsformeln für die polyharmonische Randwertaufgabe (1.2) ab. Dies machen wir zunächst allgemein für beliebige Gebiete D und anschließend für den Einheitskreis \mathbb{D} , für den sich die Darstellung erheblich vereinfacht.

Kapitel 2

Harmonische Randwertprobleme und Green-Funktionen

In diesem Kapitel werden wir zunächst einige Notationen vereinbaren und technische Hilfsmittel und Grundlagen einführen, auf die wir später zurückgreifen werden. Im Anschluss daran werden wir die Theorie der harmonischen Randwertprobleme und die Methode der Green-Funktionen betrachten. Diese dient als Grundlage für den im darauffolgenden Kapitel betrachteten Fall der polyharmonischen Randwertprobleme und Green-Funktionen.

2.1 Notation und technische Grundlagen

Sei \mathbb{C} die komplexe Ebene, deren Elemente wir mit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ bezeichnen. Die Ebene wird um den Punkt ∞ ergänzt und dies mit $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bezeichnet. $\bar{z} = x - iy$ ist die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl. Mit $\operatorname{Re} z = x$ und $\operatorname{Im} z = y$ bezeichnen wir den Real- bzw. Imaginärteil von z . Der Betrag von z ist $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ist für $z \neq 0$ in der Euler-Darstellung $z = re^{i\varphi}$, so gilt $r = |z|$ und $\varphi = \arg z$.

2.1.1 Funktionenräume

Wir verwenden die üblichen Funktionenräume. Der Bildraum ist dabei \mathbb{C} oder, falls notwendig, $\hat{\mathbb{C}}$. Sind die Funktionen reellwertig, so ist der Bildraum natürlich \mathbb{R} .

- $C^k(D) = C^k(D; \mathbb{C})$ mit $k \geq 0$ ist die Menge der k -mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $D \rightarrow \mathbb{C}$. $C(D) = C^0(D)$ sind die stetigen Funktionen und $C^\infty(D) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(D)$ die beliebig oft partiell stetig differenzierbaren Funktionen.
- $C_0^k(D) \subset C^k(D)$ sind die Funktionen mit kompaktem Träger in D , d.h. es gibt für jedes $f \in C_0^k(D)$ eine kompakte Menge $K = K(f) \subset D$, so dass $f|_{D \setminus K} \equiv 0$ ist. Falls erforderlich, wird f mit $f \equiv 0$ auf $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$ fortgesetzt.
- $L_p(D)$, $1 \leq p < \infty$ sind die Lebesgue-integrierbaren Funktionen mit beschränkter p -Norm $\|f\|_p = \left(\int_D |f(z)|^p dx dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

2.1.2 Linear- und Differentialformen

Die Linearformen $dx, dy : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$dx : h \mapsto \operatorname{Re} h \quad \text{und} \quad dy : h \mapsto \operatorname{Im} h$$

bilden eine Basis der \mathbb{R} -linearen Linearformen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Mit $dx, dy, i dx, i dy$ erhalten wir eine Basis der \mathbb{R} -linearen Linearformen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum. Betrachten wir \mathbb{C} als \mathbb{C} -Vektorraum, so gilt $i \cdot dx = i dx$ und dx, dy bilden eine Basis der \mathbb{R} -linearen Linearformen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Eine Linearform $L := \lambda dx + \mu dy$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ist \mathbb{C} -linear, falls für jedes $h \in \mathbb{C}$

$$L(ih) = iL(h)$$

gilt. Dabei ist

$$L(h) = (\lambda dx + \mu dy)(h) = \lambda \operatorname{Re} h + \mu \operatorname{Im} h.$$

Für $h = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, erhalten wir

$$\begin{aligned} L(ih) &= -\lambda v + \mu u \quad \text{und} \\ iL(h) &= i\lambda u + i\mu v. \end{aligned}$$

Damit ist L genau dann \mathbb{C} -linear, wenn die *Cauchy-Riemann-Bedingung* $\mu = i\lambda$ gilt. Wir definieren die \mathbb{C} -lineare Linearform

$$dz := dx + i dy. \tag{2.1}$$

Es ist $L = \lambda dz$, wenn $\mu = i\lambda$ gilt. Für die \mathbb{C} -antilinearen Linearformen, für die die Beziehung $L(\alpha h) = \bar{\alpha}L(h)$ gilt, definieren wir die Linearform

$$d\bar{z} := \overline{dz} = dx - i dy. \quad (2.2)$$

dz und $d\bar{z}$ bilden ebenfalls eine Basis der \mathbb{R} -linearen Linearformen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Es gilt

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \quad \text{und} \\ dy &= \frac{i}{2}(d\bar{z} - dz). \end{aligned}$$

Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine *Differentialform 1. Ordnung* oder *Pfaff'sche Form* in D ist eine Abbildung ω von D in die (\mathbb{R} -linearen) Linearformen

$$\omega = f_1 dx + f_2 dy = w_1 dz + w_2 d\bar{z}$$

mit den Funktionen f_1, f_2 bzw. $w_1, w_2 : D \rightarrow \mathbb{C}$. Gehören f_i bzw. w_i mit $i = 1, 2$ zur Klasse C^k , so ist auch ω aus C^k .

Ist f differenzierbar, so ist df das (*vollständige*) *Differential von f* definiert durch

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (2.3)$$

Stellen wir das Differential df in der Basis $dz, d\bar{z}$ dar, so gilt

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \quad (2.4)$$

Für die in (2.4) eingeführten Differentialoperatoren $\partial/\partial z$ und $\partial/\partial \bar{z}$ erhalten wir mit (2.1) und (2.2) aus (2.3) die Darstellung

$$\partial_z := \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad (2.5)$$

$$\partial_{\bar{z}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.6)$$

Es kann einfach nachgerechnet werden, dass beide Differentialoperatoren formal wie partielle Ableitungen behandelt werden können, d.h. sie sind linear und genügen der Produktregel

$$\partial_z(f \cdot g) = f \partial_z g + g \partial_z f.$$

Gleiches gilt für $\partial_{\bar{z}}$. Mit den Differentialoperatoren ∂_z und $\partial_{\bar{z}}$ erhalten wir die in der komplexen Analysis übliche Form des *Laplace-Operators*

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{4} (\partial_x^2 + \partial_y^2) = \frac{1}{4} \Delta. \quad (2.7)$$

Für $f \in C^1$ ist die Richtungsableitung in Richtung $r = \cos \alpha + i \sin \alpha$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \langle df, r \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + i \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} r + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{r}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Eine (reell) partiell differenzierbare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist auch komplex differenzierbar, wenn das Differential df \mathbb{C} -linear ist, also mit (2.1) $df = \partial_z f dz$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit der *Cauchy-Riemann-Differentialgleichung*

$$\partial_{\bar{z}} f(z) = 0. \quad (\text{CR})$$

Ein *regulärer Pfad* oder eine *reguläre Kurve* ist ein (offener oder geschlossener) Weg

$$\Gamma := \{z \in \mathbb{C} : z = z(t), a \leq t \leq b\}$$

mit einer stetig differenzierbaren Parametrisierung $z = z(t)$, deren Ableitung nirgends verschwindet, also $z'(t) \neq 0$ für alle $a \leq t \leq b$ ist. Wir definieren den *Bogenlängenparameter* s durch

$$s = s(t) = \int_a^t |z'(\tau)| d\tau, \quad 0 \leq s \leq \ell := \int_a^b |z'(\tau)| d\tau,$$

wobei ℓ die Länge der ganzen Kurve bezeichnet. Der *Tangenteneinheitsvektor* an Γ ist dann gegeben durch

$$\frac{dz}{ds} = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}.$$

Der *äußere Normalenvektor* ν ist

$$\nu = -i \frac{dz}{ds}.$$

Mit (2.8) erhalten wir für die *äußere Normalenableitung* (mit $w \in C^1$)

$$\partial_{\nu} w := \frac{\partial w}{\partial \nu} = -i \partial_z w \frac{dz}{ds} + i \partial_{\bar{z}} w \frac{d\bar{z}}{ds}. \quad (2.9)$$

Ist Γ eine (kreuzungsfreie) geschlossene Kurve, so teilt sie $\hat{\mathbb{C}}$ in zwei Teile, die wir mit *Innerem* und *Äußerem* bezeichnen. Dabei zeigt ν stets nach außen. Diese Unterscheidung hängt offensichtlich vom Durchlaufsinne der Parametrisierung ab. Wir gehen aber in der Regel umgekehrt vor, geben das Innere D vor und wählen entsprechend die Orientierung der Parametrisierung für $\Gamma = \partial D$.

Eine offene und wegzusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{C}$ heißt ein *Gebiet*. Ist D beschränkt und der Rand eine reguläre Kurve, so nennen wir D ein *reguläres Gebiet*. Der Umlaufsinn für die Parametrisierung von $\Gamma = \partial D$ ist dann dadurch vorgegeben, dass ν stets aus D hinaus weist. Das Innere liegt vom Rand aus bei positivem Umlaufsinn immer linker Hand.

Wir werden im Weiteren mit D immer ein reguläres Gebiet bezeichnen, auch wenn dies im Text nicht explizit hervorgehoben wird.

2.1.3 Integration

Ist ω eine Pfaff'sche Form, so definieren wir das Pfadintegral von ω entlang der regulären Kurve Γ mit der Parametrisierung $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, durch

$$\int_{\Gamma} \omega := \int_a^b \langle \omega(z(t)), z'(t) \rangle dt$$

bzw. für eine stückweise reguläre Kurve, wenn $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ gilt und die Stellen t_k , $1 \leq k < n$, an denen z nicht differenzierbar ist, durch

$$\int_{\Gamma} \omega := \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle \omega(z(t)), z'(t) \rangle dt.$$

Ist die Parametrisierung von z durch den Bogenlängenparameter gewählt, so definieren wir für eine Funktion g das Integral

$$\int_{\Gamma} g ds := \int_{\Gamma} g d|z| := \int_0^{\ell(\Gamma)} g(z(s)) ds. \quad (2.10)$$

Speziell erhalten wir mit (2.9)

$$\int_{\Gamma} \partial_{\nu} w(z) ds = \frac{1}{i} \int_{\Gamma} w_z(z) dz - \frac{1}{i} \int_{\Gamma} w_{\bar{z}}(z) d\bar{z}. \quad (2.11)$$

Für Flächenintegrale $\int_D w(z) dx dy$ verwenden wir das Lebesgue-Integral. Wir werden diese in der Regel jedoch nicht direkt auswerten, sondern die Integration auf entsprechende Randintegrale *schieben*. Wir benötigen dafür den Gauß'schen Integralsatz in seiner komplexen Form [Beg05a]:

Theorem 2.1 (Gauß'scher Integralsatz): Sei $w \in C^1(D; \mathbb{C}) \cap C(\bar{D}; \mathbb{C})$ auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ der komplexen Ebene. Dann gilt

$$\int_D w_{\bar{z}} dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} w(z) dz \quad \text{und} \quad (2.12)$$

$$\int_D w_z dx dy = -\frac{1}{2i} \int_{\partial D} w(z) d\bar{z}. \quad (2.13)$$

2.2 Der harmonische Fall

Wir betrachten zunächst den harmonischen Fall. Eine Funktion $w \in C^2(D, \mathbb{C})$ heißt *harmonisch* auf dem Gebiet D , wenn sie eine Lösung der *Laplace-Gleichung*

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} w = 0 \quad (2.14)$$

ist. Die Laplace-Gleichung ist die homogene *Poisson-Gleichung*, die durch

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} w = f \quad (2.15)$$

mit der rechten Seite f gegeben ist.

Eine beliebige Lösung $w = w_p + h$ der Poisson-Gleichung (2.15) erhalten wir als Superposition aus einer partikulären Lösung w_p und einer harmonischen Funktion h , die die Laplace-Gleichung (2.14) löst. Ist $f \in C^2(\bar{D})$, finden wir eine partikuläre Lösung durch Faltung der rechten Seite f mit der Fundamentallösung $\Gamma(z) = -\ln|z|^2$. Die Funktion w_p gegeben durch

$$w_p(z) := -\frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) \Gamma(z - \zeta) d\xi d\eta \quad (2.16)$$

löst die inhomogene Gleichung (2.15) [BH97].

Gehen wir zu verallgemeinerten Ableitungen im Sobolev'schen Sinne über, können wir die rechte Seite aus $L_1(D)$ wählen. Dafür definieren wir die verallgemeinerte Ableitung für die Differentialoperatoren ∂_z und $\partial_{\bar{z}}$ [Sob08] bzw. für die hier gewählte Darstellung für die Differentialoperatoren ∂_z und $\partial_{\bar{z}}$ [Vek62, Beg94].

Definition 2.2 (Sobolev): Sind $f, g \in L_1(\bar{D})$, so nennen wir f die verallgemeinerte Ableitung von g bezüglich z bzw. bezüglich \bar{z} , wenn für alle $\varphi \in C_0^1(D)$

$$\begin{aligned} \int_D g(z) \partial_z \varphi(z) dx dy + \int_D f(z) \varphi(z) dx dy &= 0 \quad \text{bzw.} \\ \int_D g(z) \partial_{\bar{z}} \varphi(z) dx dy + \int_D f(z) \varphi(z) dx dy &= 0 \end{aligned}$$

gilt. Wir bezeichnen diese Ableitung wie bisher mit $f = \frac{\partial g}{\partial z} = \partial_z g = g_z$ bzw. mit $f = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \partial_{\bar{z}} g = g_{\bar{z}}$.

Wir sehen, dass aus der herkömmlichen Differenzierbarkeit die verallgemeinerte folgt. Ist $g \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$ und $f = \partial_z g$, so gilt wegen $\partial_z(g\varphi) = f\varphi + g\partial_z\varphi$ und des Gauß'schen Integralsatzes (2.13)

$$\begin{aligned} \int_D g(z)\partial_z\varphi(z) \, dx dy + \int_D f(z)\varphi(z) \, dx dy &= \int_D \partial_z(g(z)\varphi(z)) \, dx dy \\ &= -\frac{1}{2i} \int_{\partial D} g(z)\varphi(z) d\bar{z} = 0, \end{aligned}$$

da $\varphi \in C_0^1(D)$ auf dem Rand ∂D verschwindet. Die Rechnung für $\partial_{\bar{z}}$ verläuft analog.

Wir erinnern, dass für beschränktes D und $p > 1$ die Inklusion $L_p(D) \subset L_1(D)$ gilt. Für $q = \frac{p}{p-1}$ gilt $1 \in L_q(D)$ und aus der Hölder'schen Ungleichung folgt dann für $w \in L_p(D)$

$$\|w\|_1 = \|1 \cdot w\|_1 \leq \|w\|_p \cdot \|1\|_q,$$

also $w \in L_1(D)$.

Ist w im verallgemeinerten Sinne differenzierbar und genügt der Poisson-Gleichung (2.15), so nennen wir w eine *verallgemeinerte* oder *schwache Lösung* von (2.15). In diesem Fall können wir für $f \in L_p(\overline{D})$, $2 < p \leq \infty$, eine Hölder-stetige Lösung w_p durch (2.16) konstruieren, die in ∞ verschwindet [BH97, Vek62].

Wir definieren für das Faltungsintegral (2.16) einen Integraloperator

$$T_{1,D}w(z) := -\frac{1}{\pi} \int_D \Gamma(z - \zeta)w(\zeta) \, d\xi d\eta. \quad (2.17)$$

Der hier definierte Operator $T_{1,D}$ entspricht dem Integraloperator $T_{1,1,D}$ in [BH97]. Wir fassen die beiden partiellen Ableitungen ∂_z und $\partial_{\bar{z}}$ zu einem Laplace-Operator zusammen, während in [BH97] diese in einem Doppelindex einzeln gezählt werden.

Falls im weiteren Text keine ausdrückliche Einschränkung gemacht wird, beziehen wir uns bei Aussagen zur Differenzierbarkeit bzw. bei Lösungen zu Differentialgleichungen immer parallel auf beide (klassische und verallgemeinerte) Konzepte. Für die herkömmliche Differenzierbarkeit sind dann immer die entsprechenden strengeren Voraussetzungen an die Daten erforderlich.

2.2.1 Harmonische Randwertprobleme

Um die Poisson-Gleichung eindeutig lösbar zu machen, werden zusätzlich Randbedingungen auf ∂D vorgegeben. Wir interessieren uns für folgende Fälle:

1. Das *harmonische Dirichlet-Problem*

$$w = \gamma \text{ auf } \partial D. \quad (2.18)$$

2. Das *harmonische Neumann-Problem*

$$\partial_\nu w = \gamma \text{ auf } \partial D. \quad (2.19)$$

3. Das *harmonische Robin-Problem* mit den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$

$$(\alpha + \beta \partial_\nu)w = \gamma \text{ auf } \partial D. \quad (2.20)$$

Das Robin-Problem geht für $\alpha = 1$, $\beta = 0$ in das Dirichlet-Problem über, für $\alpha = 0$, $\beta = 1$ in das Neumann-Problem.

2.2.2 Green-Funktionen und Integraldarstellungen

Die Faltung (2.16) bzw. der Integraloperator (2.17) sind für die Lösung der Randwertaufgaben ungeeignet, da die durch die Randbedingung vorgegebenen Daten nicht berücksichtigt werden. Wir verwenden als Integrationskern statt der Fundamentallösung $\Gamma(z)$ *Green-Funktionen*, die wir durch Superposition der Fundamentallösung mit harmonischen Funktionen erhalten. Die Green-Funktionen erfüllen zusätzlich Randbedingungen, die den Anforderungen der zugeordneten Randwertaufgabe entsprechen. Wir beginnen zunächst mit einer generischen Definition und passen diese später den Anforderungen der jeweiligen Randwertaufgabe an.

Definition 2.3 (generische Green-Funktion): *Eine reellwertige Funktion $K_1(z, \zeta)$ für $z, \zeta \in \bar{D}$ heißt (generische) harmonische Green-Funktion zur (generischen) Randbedingung B , wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:*

1. $K_1(z, \zeta)$ ist für jedes $\zeta \in D$ als Funktion von z harmonisch auf $D \setminus \zeta$.
2. $K_1(z, \zeta) + \log |z - \zeta|^2 = K_1(z, \zeta) - \Gamma(z - \zeta)$ ist harmonisch auf D .
3. K_1 genügt der Randbedingung B .

Für die zu einer Green-Funktion zugehörige Integraldarstellung benötigen wir zunächst noch ein Hilfsmittel, um den Beweis übersichtlicher zu gestalten.

Lemma 2.4: Sei D ein Gebiet, $w \in C^1(D)$ und $z \in D$. Dann gilt

$$w(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} (\Gamma(\zeta-z)\partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) - w(\zeta)\partial_{\nu_\zeta}\Gamma(\zeta-z)) ds_\zeta. \quad (2.21)$$

Beweis: Wir betrachten zunächst

$$I_1(\varepsilon) := \frac{1}{4\pi} \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} \Gamma(\zeta-z)\partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) ds_\zeta.$$

Da $w \in C^1(D)$ und $z \in D$ sind, ist $\{\zeta : |\zeta-z| \leq \varepsilon_0\} \subset D$ für ein hinreichend klein gewähltes ε_0 und es gibt ein $M > 0$, so dass

$$|\partial_{\nu_\zeta} w(\zeta)| \leq M \quad \text{für} \quad |\zeta-z| \leq \varepsilon_0$$

ist. Damit gilt für $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$|I_1(\varepsilon)| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} |\ln \varepsilon| ds = M\varepsilon |\ln \varepsilon|.$$

Also ist $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(\varepsilon) = 0$.

Für den anderen Summanden

$$I_2(\varepsilon) := \frac{1}{4\pi} \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} w(\zeta)\partial_{\nu_\zeta}\Gamma(\zeta-z) ds_\zeta$$

gilt mit (2.9)

$$\begin{aligned} \partial_{\nu_\zeta}\Gamma(\zeta-z) &= \frac{1}{i}\partial_\zeta\Gamma(\zeta-z)\frac{d\zeta}{ds} - \frac{1}{i}\partial_{\bar{\zeta}}\Gamma(\zeta-z)\frac{d\bar{\zeta}}{ds} \\ &= \frac{1}{i} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\frac{d\bar{\zeta}}{ds} - \frac{1}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{ds} \right), \end{aligned}$$

also

$$I_2(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi i} \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} w(\zeta) \left(\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\bar{z}} - \frac{d\zeta}{\zeta-z} \right).$$

Mit der Substitution

$$\zeta = z + \varepsilon e^{i\varphi}, \quad \frac{d\zeta}{\zeta - z} = id\varphi$$

erhalten wir

$$I_2(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(z + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Da w stetig ist, gilt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2(\varepsilon) = -w(z)$. Beide Grenzwerte für $I_1(\varepsilon)$ und $I_2(\varepsilon)$ zusammen liefern die Behauptung. \square

Wir können das Ergebnis aus Lemma 2.4 problemlos von $\Gamma(\zeta - z)$ auf die Green-Funktionen $K_1(z, \zeta)$ übertragen.

Korollar 2.5: Sei D ein Gebiet, $K_1(z, \zeta)$ eine generische Green-Funktion auf D , $w \in C^1(D)$ und $z \in D$. Dann gilt

$$w(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} (K_1(\zeta, z) \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) - w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} K_1(\zeta, z)) ds_\zeta. \quad (2.22)$$

Beweis: Es ist (zu festem z) $K_1(\zeta, z) = \Gamma(\zeta - z) + h(\zeta)$ mit einer in D harmonischen Funktion h . Für hinreichend klein gewähltes $\varepsilon_0 > 0$ gilt

$$K := \{\zeta : |\zeta - z| \leq \varepsilon_0\} \subset D$$

und die Funktionen $h(\zeta), w(\zeta), \partial_\nu h(\zeta), \partial_\nu w(\zeta)$ sind in K beschränkt. Die Randintegrale mit diesen Integranden können wie $I_1(\varepsilon)$ im Beweis zu Lemma 2.4 abgeschätzt werden und streben für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen null. Also ist

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} (K_1(\zeta, z) \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) - w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} K_1(\zeta, z)) ds_\zeta \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} (\Gamma(\zeta - z) \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) - w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} \Gamma(\zeta - z)) ds_\zeta \end{aligned}$$

und der Grenzwert rechter Hand ist nach Lemma 2.4 $w(z)$. \square

Theorem 2.6: Sei $K_1(z, \zeta)$ eine generische harmonische Green-Funktion auf dem Gebiet D . Jede Funktion $w \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ kann dargestellt werden durch

$$w(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta)) K_1(\zeta, z) d\xi d\eta - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} [w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} K_1(\zeta, z) - K_1(\zeta, z) \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta)] ds_\zeta. \quad (2.23)$$

Beweis: w erfülle die Voraussetzungen des Satzes. Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= w(\zeta) \partial_\zeta K_1(\zeta, z) - K_1(\zeta, z) \partial_\zeta w(\zeta) \quad \text{und} \\ \varphi_2(\zeta) &= w(\zeta) \partial_{\bar{\zeta}} K_1(\zeta, z) - K_1(\zeta, z) \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta) \end{aligned}$$

und wenden den Gauß'schen Integralsatz (2.12) auf φ_1 bzw. (2.13) auf φ_2 an. Als Gebiet verwenden wir

$$D_\varepsilon = D \setminus \{\zeta : |\zeta - z| \leq \varepsilon\},$$

so dass $K_1(\zeta, z)$ als Funktion von ζ in D_ε harmonisch ist. Das Ergebnis addieren wir. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_{D_\varepsilon} \underbrace{w(\zeta) \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} K_1(\zeta, z) - K_1(\zeta, z) \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta)}_{=0} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} w(\zeta) \partial_\zeta K_1(\zeta, z) - K_1(\zeta, z) \partial_\zeta w(\zeta) d\zeta \\ & \quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} w(\zeta) \partial_{\bar{\zeta}} K_1(\zeta, z) - K_1(\zeta, z) \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta) d\bar{\zeta}. \quad (2.24) \end{aligned}$$

Verwenden wir (2.11) für die äußere Normalenableitung ∂_ν und das Streckenelement ds der Bogenlängenparametrisierung, so können wir die Randintegrale rechter Hand zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} K_1(\zeta, z) - K_1(\zeta, z) \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) ds_\zeta \\ & \quad - \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} K_1(\zeta, z) - K_1(\zeta, z) \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) ds_\zeta. \quad (2.25) \end{aligned}$$

Das zweite Randintegral wird mit Korollar 2.5 im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ zu $2w(z)$.
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\pi} \int_D K_1(\zeta, z) \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta) d\xi d\eta \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} K_1(\zeta, z) - K_1(\zeta, z) \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) ds_\zeta + 2w(z). \end{aligned}$$

Das Umstellen nach $w(z)$ liefert (2.23). □

Diese Integraldarstellung legt eine Lösung der Laplace-Gleichung (2.14) mit entsprechenden Randdaten nahe, wenn wir im Gebietsintegral $\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta)$ durch $f(\zeta)$ ersetzen und in den Randintegralen entsprechend die vorgegebenen Randwerte einsetzen. Ist w eine solche Lösung, so genügt sie sicher der Integraldarstellung (2.23) mit den entsprechenden Randdaten. Die Frage der Existenz dieser Lösung ist jedoch noch offen. Die Aufgabe mit Dirichlet-Randbedingungen (2.18) ist für regulären Rand bereits eindeutig lösbar, d.h. die zusätzlichen Randterme $\partial_\nu w$ stellen die Existenz der Lösung wieder in Frage. Für Neumann-Randbedingungen (2.19) ist eine zusätzliche Lösbarkeitsbedingung gegeben. Die Lösung hängt aber nicht von den Randdaten der Funktion w selbst ab.

Die Integraldarstellung (2.23) ist zwar für jede generische Green-Funktion $K_1(z, \zeta)$ unabhängig von deren Randverhalten gültig. Da sie mehr Randterme enthält, als in den Randwertaufgaben gefordert wird, um diese eindeutig lösbar zu machen, ist sie als Lösungsformel ungeeignet. Wir definieren nun zu den konkreten Randwertaufgaben Green-Funktionen, deren Randverhalten wir so vorgeben, dass sich die Randintegrale vereinfachen und nur noch von den Daten abhängen, die in der Randwertaufgabe vorgegeben werden. Wir definieren dazu die Robin-Funktion.

Definition 2.7 (harmonische Robin-Funktion [BV13]): Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Parameter mit $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Eine reellwertige Funktion $R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta)$ mit $z, \zeta \in \bar{D}$, $z \neq \zeta$, heißt (harmonische) Robin-Funktion, falls sie für jedes $\zeta \in D$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

- $R_{1;\alpha,\beta}(\cdot, \zeta)$ ist harmonisch in $D \setminus \{\zeta\}$ und stetig differenzierbar in $\bar{D} \setminus \{\zeta\}$.
- $h(z, \zeta) = R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) + \log |\zeta - z|^2$ ist harmonisch für alle $z \in D$.
- Für Randpunkte $z \in \partial D$ genügt $R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta)$ der Randbedingung

$$(\alpha + \beta \partial_{\nu_z}) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \beta \sigma(z) \quad (2.26)$$

mit einer reellwertigen, stetigen, stückweise konstanten Funktion $\sigma : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$.

- $R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta)$ genügt der Normalisierungsbedingung

$$\beta \int_{\partial D} \sigma(z) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) ds_z = 0. \quad (2.27)$$

Die harmonische Robin-Funktion mit homogenen Randbedingungen

$$(\alpha + \beta \partial_{\nu_z}) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = 0 \text{ für } z \in \partial D$$

wurde in [BH06, BV10] untersucht. Die direkte Lösung des entsprechenden harmonischen Randwertproblems mit Robin-Randbedingungen führt in natürlicher Weise auf die Robin-Funktion mit homogenen Randbedingungen (siehe dazu z.B. [BH06]). Eine Modifikation der harmonischen Robin-Funktion durch die Randbedingung

$$(\alpha + \beta \partial_{\nu_z}) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \beta \sigma(z) \text{ für } z \in \partial D$$

wurde in [BV13] eingeführt. Dabei ist σ eine stetige, stückweise konstante Funktion, die auf dem Rand ∂D definiert ist. Sie ist also auf jedem zusammenhängenden Randstück konstant. Wir erhalten σ , indem wir bei der nicht modifizierten Robin-Funktion die konstanten Anteile, die $\frac{\beta}{\alpha}$ enthalten, in die Randwerte verschieben. σ tritt entsprechend auch in den Randbedingungen der harmonischen Neumann-Funktion auf.

Durch die Modifikation der Randbedingungen wird die harmonische Robin-Funktion eine Interpolation zwischen der harmonischen Neumann- und der harmonischen Green-Funktion (für Dirichlet-Randbedingungen), die wir für die Parameterwerte $\alpha = 0$ bzw. $\beta = 0$ aus der harmonischen Robin-Funktion erhalten:

$$N_1(z, \zeta) := R_{1;0,1}(z, \zeta) \quad \text{und} \quad (2.28)$$

$$G_1(z, \zeta) := R_{1;1,0}(z, \zeta). \quad (2.29)$$

Die Randbedingung (2.26) für $z \in \partial D$ geht dabei entsprechend über in

$$\partial_{\nu_z} N_1(z, \zeta) = \sigma(z) \quad \text{und} \quad (2.30)$$

$$G_1(z, \zeta) = 0. \quad (2.31)$$

Die Normalisierungsbedingung (2.27) für $G_1(z, \zeta)$ entfällt.

Lemma 2.8 ([BV13]): *Die harmonische Robin-Funktion ist symmetrisch:*

$$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z). \quad (2.32)$$

Beweis: Wir betrachten die Integraldarstellung (2.25) mit $w(\tilde{\zeta}) = R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, \zeta)$ und $K_1(z, \tilde{\zeta}) = R_{1;\alpha,\beta}(z, \tilde{\zeta})$ auf dem Gebiet

$$D_\varepsilon = D \setminus \{\tilde{\zeta} : |\tilde{\zeta} - \zeta| \leq \varepsilon, |\tilde{\zeta} - z| \leq \varepsilon\}.$$

In D_ε wurden die Singularitäten $\tilde{\zeta} = \zeta$ bzw. $\tilde{\zeta} = z$ von $R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, \zeta)$ bzw. $R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, z)$, als Funktionen ihres ersten Arguments betrachtet, entfernt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D_\varepsilon} \left(R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, \zeta) \partial_{\nu_{\tilde{\zeta}}} R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, z) - R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, z) \partial_{\nu_{\tilde{\zeta}}} R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, \zeta) \right) ds_{\tilde{\zeta}} \\ &= 4 \int_{D_\varepsilon} \left(R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, \zeta) \partial_{\tilde{\zeta}} \partial_{\bar{\tilde{\zeta}}} R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, z) - R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, z) \partial_{\tilde{\zeta}} \partial_{\bar{\tilde{\zeta}}} R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, \zeta) \right) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} = 0. \end{aligned}$$

Das Flächenintegral auf der rechten Seite verschwindet, da die Robin-Funktion auf D_ε harmonisch ist. Wir erhalten mit Korollar 2.5 für $\varepsilon \rightarrow 0$ aus dem Randintegral

$$\begin{aligned} A &= 4\pi (R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) - R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta)) \\ &= \int_{\partial D} \left(R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, \zeta) \partial_{\nu_{\tilde{\zeta}}} R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, z) - R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, z) \partial_{\nu_{\tilde{\zeta}}} R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, \zeta) \right) ds_{\tilde{\zeta}}. \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $\beta = 0$. Die Robin-Randbedingung wird dann zu einer Dirichlet-Randbedingung: $R_{1;\alpha,0}(z, \zeta) = G_1(z, \zeta) = 0$ für $z \in \partial D$. Damit wird die rechte Seite null. Daraus können wir $G_1(z, \zeta) = G_1(\zeta, z)$ folgern.

Nun verwenden wir, dass $\beta \neq 0$ gilt, und setzen auf der rechten Seite die nach $\partial_{\nu_{\zeta}} R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, \zeta)$ bzw. $\partial_{\nu_{\zeta}} R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, z)$ umgestellte Robin-Randbedingung ein:

$$\begin{aligned} \beta A &= \int_{\partial D} \left(R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, \zeta) (\beta \sigma(s_{\tilde{\zeta}}) - \alpha R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, z)) \right. \\ &\quad \left. - R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, z) (\beta \sigma(s_{\tilde{\zeta}}) - \alpha R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, \zeta)) \right) ds_{\tilde{\zeta}} \\ &= \beta \int_{\partial D} \sigma(s_{\tilde{\zeta}}) (R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, \zeta) - R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{\zeta}, z)) ds_{\tilde{\zeta}} = 0. \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist aufgrund der Normalisierungsbedingung (2.27) der harmonischen Robin-Funktion null. Also gilt die Symmetrie auch für $\beta \neq 0$. \square

Die Randbedingungen der Robin-Funktion wurden so gewählt, dass in der Integraldarstellung (2.23) nur die Randintegrale mit bekannten Randdaten aus der entsprechenden Randwertaufgabe (2.20) erhalten bleiben. Setzen wir das Randverhalten (2.26) in (2.23) ein, erhalten wir geeignete Integraldarstellungen bezüglich der harmonischen Robin-Funktion.

Korollar 2.9 ([BV13]): *Jede Funktion $w \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ kann dargestellt werden durch*

$$\begin{aligned} w(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_D (\partial_{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta)) R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) d\xi d\eta - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) w(\zeta) ds_{\zeta} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\beta} \int_{\partial D} R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) (\alpha + \beta \partial_{\nu_{\zeta}}) w(\zeta) ds_{\zeta}, \quad \text{falls } \beta \neq 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} w(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_D (\partial_{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta)) R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) d\xi d\eta + \frac{\beta}{4\pi\alpha} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) \partial_{\nu_{\zeta}} w(\zeta) ds_{\zeta} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\alpha} \int_{\partial D} (\alpha + \beta \partial_{\nu_{\zeta}}) w(\zeta) \partial_{\nu_{\zeta}} R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) ds_{\zeta}, \quad \text{falls } \alpha \neq 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Beweis: Ist $\beta \neq 0$, können wir (2.26) nach $\partial_{\nu_z} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta)$ auflösen:

$$\partial_{\nu_z} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \sigma(z) - \frac{\alpha}{\beta} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta).$$

Setzen wir dies in (2.23) ein, erhalten wir (2.33).

Ist $\alpha \neq 0$, können wir (2.26) nach $R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta)$ auflösen:

$$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \frac{\beta}{\alpha} (\sigma(z) - \partial_{\nu_z} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta)).$$

Setzen wir dies in (2.23) ein, erhalten wir (2.34). \square

Für $\alpha = 0$ geht (2.33) in die Integraldarstellung für die Neumann-Funktion N_1 , für $\beta = 0$ geht (2.34) in die Integraldarstellung für die Green-Funktion G_1 über.

Korollar 2.10: Jede Funktion $w \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ kann dargestellt werden durch

$$w(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta)) N_1(\zeta, z) d\xi d\eta - \frac{1}{4\pi i} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} N_1(\zeta, z) \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) ds_\zeta \quad \text{und} \quad (2.35)$$

$$w(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta)) G_1(\zeta, z) d\xi d\eta - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} G_1(\zeta, z) ds_\zeta. \quad (2.36)$$

Für (2.36) können wir die Forderung nach der Differenzierbarkeit auf dem Rand entfallen lassen, da die Normalenableitung dort nicht mehr vorkommt. In diesem Fall ist $w \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ ausreichend.

Kapitel 3

Polyharmonische Randwertprobleme und Green-Funktionen

In diesem Kapitel entwickeln wir die Theorie der iterierten polyharmonischen Randwertprobleme und der zugehörigen Green-Funktionen. Wir verallgemeinern das Vorgehen im harmonischen Fall des vorherigen Kapitels und führen hybride Robin-Funktionen ein, die dem allgemeinen Fall der iterierten Randbedingungen entsprechen. Schließlich geben wir eine Integraldarstellung mittels hybrider Robin-Funktionen an.

3.1 Polyharmonische Randwertprobleme

Durch Iteration des Laplace-Operators $\partial_z \partial_{\bar{z}}$ erhalten wir die *Poly-Poisson-Gleichung*

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w = f. \quad (3.1)$$

Analog zum harmonischen Fall erhalten wir durch die Faltung der rechten Seite f mit der Fundamentallösung

$$\Gamma_n(z) = -\frac{|z|^{2(n-1)}}{(n-1)!^2} \left(\log |z|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) \quad (3.2)$$

eine Lösung. Die Funktion $\Gamma_n(z)$ entspricht den Integrationskernen $K_{n,n}(z)$ für $n \geq 1$ in [BH97]. Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\Gamma_n(z) = \partial_z \partial_{\bar{z}} \Gamma_{n+1}(z) \quad (3.3)$$

ist. $\Gamma_1(z) = \Gamma(z)$ ist die Fundamentallösung der harmonischen Gleichung (2.15). Damit erhalten wir die partikuläre Lösung

$$w_p(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) \Gamma_n(z - \zeta) d\xi d\eta. \quad (3.4)$$

Auch hier definieren wir für $n \geq 0$ einen Integraloperator

$$T_{0,D}w \equiv w \text{ und } T_{n,D}w(z) := -\frac{1}{\pi} \int_D \Gamma_n(z - \zeta) w(\zeta) d\xi d\eta \quad (n \geq 1). \quad (3.5)$$

Damit ist $w_p = T_{n,D}f$. Für $n = 1$ stimmt die Definition mit $T_{1,D}$ aus (2.17) überein. Der Operator $T_{n,D}$ entspricht dem Integraloperator $T_{n,n,D}$ aus [BH97] für $n \geq 1$. Wir haben wieder jeweils die beiden Differentialoperatoren ∂_z und $\partial_{\bar{z}}$ zu einem Laplace-Operator zusammengefasst, während diese in [BH97] einzeln betrachtet werden.

Theorem 3.1: *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $w \in L_1(D)$ eine komplexwertige Funktion, die wir außerhalb von D durch $w \equiv 0$ fortsetzen. Dann gilt für die verallgemeinerten Ableitungen im Sobolev'schen Sinne*

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} T_{n,D}w = T_{n-1,D}w \text{ für } n \geq 1. \quad (3.6)$$

Außerdem besitzt $T_{n,D}w$ für $n \geq 1$ die verallgemeinerten Ableitungen $\partial_z T_{n,D}w$ und $\partial_{\bar{z}} T_{n,D}w$.

Beweis: Die Aussage folgt unmittelbar aus Theorem 5.3 in [BH97]. □

Eine beliebige Lösung von (3.1) erhalten wir wieder als Superposition von w_p mit einer polyharmonischen Funktion h_n , die der homogenen Gleichung $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n h_n = 0$ genügt.

Um die Gleichung eindeutig lösbar zu machen, werden Randwerte vorgegeben. Für die Auswahl dieser Randwerte gibt es zahlreiche Möglichkeiten. Einen Überblick dazu gibt z.B. [BVZ06, Beg15, Ac10b]. Wir interessieren uns für ein iteriertes Vorgehen, durch das wir ein System von harmonischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_z \partial_{\bar{z}} w_k &= w_{k+1}, \quad 0 \leq k < n, \\ w_0 &= w \text{ und } w_n = f \end{aligned} \quad (3.7)$$

erhalten. Für jede dieser harmonischen Gleichungen können wir eine Randbedingung angeben. Dabei sind noch immer zahlreiche unterschiedliche Kombinationen möglich.

Für uns sind folgende Fälle mit einheitlichen Randbedingungen von besonderem Interesse:

1. Das *polyharmonische Riquier-Problem*

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^k w = \gamma_k, \quad 0 \leq k < n. \quad (3.8)$$

2. Das *polyharmonische Neumann-Problem*

$$\partial_\nu (\partial_z \partial_{\bar{z}})^k w = \gamma_k, \quad 0 \leq k < n. \quad (3.9)$$

3. Das *polyharmonische Robin-Problem*

$$(\alpha + \beta \partial_\nu) (\partial_z \partial_{\bar{z}})^{k-1} w = \gamma_k, \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.10)$$

mit den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

Analog zum harmonischen Fall geht das Robin-Problem für $\beta = 0$ ins Riquier-, für $\alpha = 0$ ins Neumann-Problem über.

Den allgemeinen Fall beschreiben wir durch das *allgemeine* oder *hybride polyharmonische Robin-Problem*

$$(\alpha_k + \beta_k \partial_\nu) (\partial_z \partial_{\bar{z}})^{k-1} w = \gamma_k, \quad 1 \leq k \leq n \quad (3.11)$$

mit den Parametern $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$, $1 \leq k \leq n$. Für $\alpha_k \equiv \alpha$, $\beta_k \equiv \beta$ geht dies ins polyharmonische Robin-Problem über.

Wir können das iterierte System (3.7) lösen, indem wir sukzessive die Funktionen w_{n-1}, w_{n-2}, \dots bestimmen. Allerdings werden diese Funktionen nur für die Randwerte, also auf ∂D , benötigt. Durch geeignete Wahl polyharmonischer Green-Funktionen werden wir die Lösung direkt bestimmen, so dass wir nur ein Gebietsintegral auf D auswerten müssen.

3.2 Polyharmonische Green-Funktionen

Wie bereits im harmonischen Fall, ist die Faltung (3.4) nicht geeignet für das Lösen von Randwertaufgaben. Wir gehen analog zum harmonischen Fall vor und definieren zunächst in generischer Form polyharmonische Green-Funktionen. Diese erhalten wir durch Überlagerung der Fundamentallösung Γ_n aus (3.2) mit einer polyharmonischen Funktion h , die die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt. Wir folgen dabei dem Konzept in [Beg11, Beg15].

Wir bezeichnen die (generischen) Randbedingungen mit B_m . Für den polyharmonischen Poisson-Operator der Ordnung m benötigen wir m solche Bedingungen. Wir definieren die *polyharmonische Green-Funktion* $K_m(z, \zeta)$ der Ordnung $m > 0$ auf $D \times D$, $z \neq \zeta$, durch die folgenden Eigenschaften:

- $K_m(\cdot, \zeta)$ ist polyharmonisch vom Grad m in $D \setminus \{\zeta\}$.
- $K_m(z, \zeta) - \Gamma_m(\zeta - z)$ ist polyharmonisch vom Grad m in D für jedes $\zeta \in D$.
- $K_m(z, \zeta)$ erfüllt die Randbedingung B_m für $z \in \partial D$, $\zeta \in D$.

Wir interessieren uns dabei speziell für iterierte polyharmonische Green-Funktionen. Die Green-Funktionen K_m bilden eine iterierte Folge, wenn gilt

$$K_m = \partial_z \partial_{\bar{z}} K_{m+1}. \quad (3.12)$$

Zusätzlich können wir dies auch für die Randbedingung fordern:

$$B_m = \partial_{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}} B_{m+1}, \quad (3.13)$$

wobei wir hier den Laplace-Operator bezüglich der Variablen ζ anwenden, die in D liegt, während z die Variable auf dem Rand ∂D ist. Es ist auch möglich, die Randbedingung auf jeder Iterationsstufe neu festzulegen. Dann erhalten wir *hybride Green-Funktionen*. In [Beg06] wurden für $n = 2$ und $D = \mathbb{D}$ die sechs Möglichkeiten berechnet, die sich aus den unterschiedlichen Kombinationen von Dirichlet-, Neumann- und Robin-Randbedingungen (mit $\alpha = \beta = 1$) ergeben.

Wählen wir Robin-Randbedingungen für feste Werte der Parameter α und β , so können wir die iterierten polyharmonischen Robin-Funktionen $R_{n;\alpha,\beta}(z, \zeta)$ bilden, die für $n \geq 1$ durch die folgende Faltung definiert werden:

$$R_{n+1;\alpha,\beta}(z, \zeta) := -\frac{1}{\pi} \int_D R_{1;\alpha,\beta}(z, \tilde{z}) R_{n;\alpha,\beta}(\tilde{z}, \zeta) d\tilde{x} d\tilde{y}. \quad (3.14)$$

Geben wir im allgemeinen polyharmonischen Robin-Problem (3.11) die Parameter α_k und β_k mit $1 \leq k \leq n$ auf jeder Iterationsstufe einzeln an, so erhalten wir eine *hybride polyharmonische Robin-Funktion*. Wir führen dafür zunächst eine geeignete Schreibweise für die Multiindizes ein.

Wir schreiben

$$\underline{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \text{und} \quad \underline{\beta} := (\beta_1, \dots, \beta_n). \quad (3.15)$$

Der *Unterstrich* zeigt stets an, dass es sich um einen Multiindex handelt. Mit der *Länge* des Index $\underline{\alpha}$ bezeichnen wir die Anzahl n der Elemente. Diese sei immer stillschweigend an die Anforderung (d.h. Ordnung n) der Robin-Funktion $R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}$ angepasst. Auch die Bedingung $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ sei stets für alle $1 \leq k \leq n$ erfüllt.

Zunächst definieren wir dafür vier Operationen auf den Multiindizes:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)' := (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), \quad (3.16)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^* := (\alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (3.17)$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot \alpha_{n+1} := (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \quad \text{bzw.} \quad (3.18)$$

$$\alpha_1 \cdot (\alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad \text{und} \quad (3.19)$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T := (\alpha_n, \dots, \alpha_1). \quad (3.20)$$

Mit dem *Hochkomma* entfernen wir das letzte Element, mit dem *Stern* das erste, mit dem *Infixoperator* fügen wir ein Element am Anfang oder am Ende an. Die *Transposition* kehrt die Reihenfolge um.

Wir definieren die *hybriden polyharmonischen Robin-Funktionen* durch die Faltung

$$R_{n+1;\underline{\alpha} \cdot \alpha_{n+1}, \underline{\beta} \cdot \beta_{n+1}}(z, \zeta) := -\frac{1}{\pi} \int_D R_{1;\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}}(z, \tilde{z}) R_{n;\underline{\alpha}, \underline{\beta}}(\tilde{z}, \zeta) d\tilde{x} d\tilde{y}. \quad (3.21)$$

Die Parameter $\underline{\alpha} \cdot \alpha_{n+1}$ und $\underline{\beta} \cdot \beta_{n+1}$ linker Hand ergeben sich dabei durch das Aneinanderfügen der Parameter der Robin-Funktionen im Faltungsintegral.

Gilt $\alpha_k = \alpha$ und $\beta_k = \beta$ für $1 \leq k \leq n$, so ist

$$R_{n,\alpha,\beta}(z, \zeta) = R_{n,\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta).$$

Die hybriden Robin-Funktionen sind nicht mehr symmetrisch im einfachen Sinn, dass $R_n(z, \zeta) = R_n(\zeta, z)$ gilt. Die Bedeutung der Parameter $\underline{\alpha}$ und $\underline{\beta}$ hängt davon ab, ob wir z.B. den Laplace-Operator auf z oder auf ζ anwenden. Berücksichtigen wir dies, erhalten wir eine verallgemeinerte Symmetrie.

Lemma 3.2: Die hybriden polyharmonischen Robin-Funktionen erfüllen die Symmetrie

$$R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) = R_{n;\underline{\alpha}^T, \underline{\beta}^T}(\zeta, z). \quad (3.22)$$

Beweis: Für $n = 1$ wurde die Symmetrie in Lemma 2.8 gezeigt. Für $n = 2$ erhalten wir unter Verwendung der Symmetrie für $n = 1$

$$\begin{aligned} R_{2;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) &= -\frac{1}{\pi} \int_D R_{1;\alpha_2, \beta_2}(z, \tilde{z}) R_{1;\alpha_1, \beta_1}(\tilde{z}, \zeta) d\tilde{x}d\tilde{y} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_D R_{1;\alpha_2, \beta_2}(\tilde{z}, z) R_{1;\alpha_1, \beta_1}(\zeta, \tilde{z}) d\tilde{x}d\tilde{y} = R_{2;\underline{\alpha}^T, \underline{\beta}^T}(\zeta, z). \end{aligned}$$

Für $n \geq 2$ gilt unter der Annahme, dass die Induktionsbehauptung für $k \leq n$ erfüllt ist,

$$\begin{aligned} R_{n+1;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) &= -\frac{1}{\pi} \int_D R_{1;\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}}(\tilde{z}, z) R_{n;(\underline{\alpha}')^T, (\underline{\beta}')^T}(\zeta, \tilde{z}) d\tilde{x}d\tilde{y} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_D R_{1;\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}}(\tilde{z}, z) \\ &\quad \times \left(-\frac{1}{\pi} \int_D R_{1;\alpha_1, \beta_1}(\zeta, \hat{z}) R_{n-1;(\underline{\alpha}')^{T'}, (\underline{\beta}')^{T'}}(\hat{z}, \tilde{z}) d\hat{x}d\hat{y} \right) d\tilde{x}d\tilde{y} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_D R_{1;\alpha_1, \beta_1}(\zeta, \hat{z}) \\ &\quad \times \left(-\frac{1}{\pi} \int_D R_{1;\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}}(z, \tilde{z}) R_{n-1;((\underline{\alpha}')^T)^T, ((\underline{\beta}')^T)^T}(\tilde{z}, \hat{z}) d\tilde{x}d\tilde{y} \right) d\hat{x}d\hat{y} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_D R_{1;\alpha_1, \beta_1}(\zeta, \hat{z}) R_{n;(\underline{\alpha}^T)', (\underline{\beta}^T)'}(\hat{z}, z) d\hat{x}d\hat{y} \\ &= R_{n+1;\underline{\alpha}^T, \underline{\beta}^T}(\zeta, z). \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsbeweis vollständig. □

Wir zeigen die wichtigsten Eigenschaften der hybriden Robin-Funktionen.

Theorem 3.3: Die hybride polyharmonische Robin-Funktion $R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta)$ mit $1 \leq n$, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ hat folgende Eigenschaften:

1. $R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\cdot, \zeta)$ ist polyharmonisch vom Grad n in $D \setminus \{\zeta\}$.
2. $R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) - \Gamma_n(z - \zeta)$ ist polyharmonisch vom Grad n in D für alle $\zeta \in D$.
3. Für $z \in \partial D$ erfüllt sie die Randbedingung

$$(\alpha_n + \beta_n \partial_{\nu_z}) R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) = \beta_n \sigma(z) \tau_{n-1}(\zeta), \quad (3.23)$$

wobei die auf D definierte Funktion τ_n der folgenden Rekursion genügt:

$$\tau_0 = 1 \text{ und } \tau_n(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_D \tau_{n-1}(\tilde{z}) R_{1;\alpha_1, \beta_1}(\tilde{z}, \zeta) d\tilde{x} d\tilde{y}. \quad (3.24)$$

Wie zuvor erwähnt, sind α_1 bzw. β_1 die ersten Parameter in $\underline{\alpha}$ bzw. $\underline{\beta}$.

4. $R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta)$ genügt der Normalisierungsbedingung

$$\beta_n \int_{\partial D} \sigma(z) R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) ds_z = 0. \quad (3.25)$$

Außerdem gilt

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) = R_{n-1;\underline{\alpha}',\underline{\beta}'}(z, \zeta) \text{ in } D \text{ mit } 1 < n. \quad (3.26)$$

Beweis: Für $n = 1$ sind dies die definierenden Eigenschaften der harmonischen Robin-Funktion und sind deshalb erfüllt. Dies bildet die Basis unseres Induktionsbeweises.

Wir beweisen zunächst die Randbedingung (3.23). Dafür verwenden wir die Symmetrie (3.22), die Faltung (3.21) und die rekursive Definition (3.24) für $\tau_n(\zeta)$. Dann gilt für $n + 1$ unter der Annahme, dass die Induktionsbehauptung für n erfüllt ist:

$$\begin{aligned} & (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \partial_{\nu_z}) R_{n+1;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) \\ &= -\frac{1}{\pi} (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \partial_{\nu_z}) \int_D R_{1,\alpha_1, \beta_1}(\zeta, \tilde{z}) R_{n;(\underline{\alpha}^T)', (\underline{\beta}^T)' }(\tilde{z}, z) d\tilde{x} d\tilde{y} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_D R_{1,\alpha_1, \beta_1}(\tilde{z}, \zeta) (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \partial_{\nu_z}) R_{n;((\underline{\alpha}^T)^T)', ((\underline{\beta}^T)^T)' }(\tilde{z}, z) d\tilde{x} d\tilde{y} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_D R_{1,\alpha_1, \beta_1}(\tilde{z}, \zeta) \beta_{n+1} \sigma(z) \tau_{n-1}(\tilde{z}) d\tilde{x} d\tilde{y} \\ &= \beta_{n+1} \sigma(z) \tau_n(\zeta). \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsbeweis für (3.23) vollständig. Zum Beweis der Normalisierungsbedingung verwenden wir die Faltung (3.21). Es ist

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} \int_{\partial D} \sigma(z) R_{n+1;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) ds_z &= -\frac{1}{\pi} \int_D \underbrace{\left[\beta_{n+1} \int_{\partial D} \sigma(z) R_{1;\alpha_{n+1},\beta_{n+1}}(z, \tilde{z}) ds_z \right]}_{=0} R_{n;\underline{\alpha}',\underline{\beta}'}(\tilde{z}, \zeta) d\tilde{x}d\tilde{y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist (3.25) gezeigt.

Um (3.26) zu zeigen, betrachten wir das Faltungsintegral (3.21), mit dem $R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta)$ definiert wurde. Es gilt

$$\begin{aligned} R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) &= -\frac{1}{\pi} \int_D R_{1;\alpha_n,\beta_n}(z, \tilde{z}) R_{n-1;\underline{\alpha}',\underline{\beta}'}(\tilde{z}, \zeta) d\tilde{x}d\tilde{y} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_D (R_{1;\alpha_n,\beta_n}(z, \tilde{z}) - \Gamma(z - \tilde{z})) R_{n-1;\underline{\alpha}',\underline{\beta}'}(\tilde{z}, \zeta) d\tilde{x}d\tilde{y} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_D \Gamma(z - \tilde{z}) R_{n-1;\underline{\alpha}',\underline{\beta}'}(\tilde{z}, \zeta) d\tilde{x}d\tilde{y}. \end{aligned}$$

Dabei ist $R_{1;\alpha_n,\beta_n}(z, \tilde{z}) - \Gamma(z - \tilde{z})$ eine auf ganz D in z harmonische Funktion. Also ist auch das erste Integral der rechten Seite als Funktion von z harmonisch. Das zweite Integral auf der rechten Seite ist nach (2.16) eine Lösung der inhomogenen Poisson-Gleichung

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} w(z) = R_{n-1;\underline{\alpha}',\underline{\beta}'}(z, \zeta)$$

in D . Damit ist auch die Summe der Integrale, also die linke Seite $R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta)$, eine Lösung dieser Differentialgleichung. Somit ist (3.26) erfüllt.

Es folgt sofort, dass $R_{n+1;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\cdot, \zeta)$ polyharmonisch vom Grad $n+1$ in $D \setminus \{\zeta\}$ ist, da nach Induktionsannahme $R_{n;\underline{\alpha}',\underline{\beta}'}(\cdot, \zeta) = (\partial_z \partial_{\bar{z}}) R_{n+1;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta)$ polyharmonisch vom Grad n in $D \setminus \{\zeta\}$ ist.

Die zweite Aussage folgt dann aus (3.3). □

Lemma 3.4: *Seien $\zeta \in D$ und $n > 1$. Dann gilt für die Funktion $\tau_n(\zeta)$*

$$(\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}}) \tau_n(\zeta) = \tau_{n-1}(\zeta). \quad (3.27)$$

Dies folgt sofort aus der Definition von τ_n , da $R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta)$ eine (generische) harmonische Green-Funktion ist.

Bemerkung 3.5: *Die Randbedingung (3.23) der polyharmonischen Robin-Funktion erfüllt die Bedingung (3.13).*

Es gilt

$$\begin{aligned} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \partial_{\nu_z}) R_{n+1; \underline{\alpha}, \underline{\beta}}(z, \zeta) &= (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \partial_{\nu_z}) R_{n; \underline{\alpha}^*, \underline{\beta}^*}(z, \zeta) \\ &= \beta_{n+1} \sigma(z) \tau_{n-1}(\zeta) \\ &= (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})(\beta_{n+1} \sigma(z) \tau_n(\zeta)). \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit ergibt sich aus (3.22) und (3.26), die zweite ist die Randbedingung (3.23) und die dritte folgt aus (3.27).

Wir formulieren die Aussagen nochmals für die polyharmonische Robin-Funktion mit einheitlichen Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Korollar 3.6: *Die polyharmonische Robin-Funktion ist symmetrisch:*

$$R_{n; \alpha, \beta}(z, \zeta) = R_{n; \alpha, \beta}(\zeta, z).$$

Beweis: Gilt $\alpha_i = \alpha$ und $\beta_i = \beta$ für $1 \leq i \leq n$, so ist $\underline{\alpha}^T = \underline{\alpha}$ und $\underline{\beta}^T = \underline{\beta}$. Damit folgt die Aussage sofort aus Lemma 3.2. \square

Die Aussagen von Theorem 3.3 übertragen sich direkt. Wir geben sie hier nochmals an, da die nicht-hybride Robin-Funktion eine eigenständige Bedeutung hat.

Korollar 3.7: *Die polyharmonische Robin-Funktion $R_{n; \alpha, \beta}(z, \zeta)$ mit $1 \leq n$ hat folgende Eigenschaften:*

1. $R_{n; \alpha, \beta}(\cdot, \zeta)$ ist polyharmonisch vom Grad n in $D \setminus \{\zeta\}$.
2. $R_{n; \alpha, \beta}(z, \zeta) - \Gamma_n(z - \zeta)$ ist polyharmonisch vom Grad n in D für alle $\zeta \in D$.
3. Für $z \in \partial D$ erfüllt sie die Randbedingung

$$(\alpha + \beta \partial_{\nu_z}) R_{n; \alpha, \beta}(z, \zeta) = \beta \sigma(z) \tau_{n-1}(\zeta), \quad (3.28)$$

wobei die auf D definierte Funktion τ_n der folgenden Rekursion genügt:

$$\tau_0 = 1 \text{ und } \tau_n(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_D \tau_{n-1}(\tilde{z}) R_{1; \alpha, \beta}(\tilde{z}, \zeta) d\tilde{x} d\tilde{y}. \quad (3.29)$$

4. $R_{n; \alpha, \beta}(z, \zeta)$ genügt der Normalisierungsbedingung

$$\beta \int_{\partial D} \sigma(z) R_{n; \alpha, \beta}(z, \zeta) ds_z = 0. \quad (3.30)$$

Außerdem gilt

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} R_{n; \alpha, \beta}(z, \zeta) = R_{n-1; \alpha, \beta}(z, \zeta) \text{ in } D \text{ mit } 1 < n. \quad (3.31)$$

3.3 Integraldarstellungen

Analog zum harmonischen Fall erhalten wir zu den polyharmonischen Green-Funktionen Integraldarstellungen.

Theorem 3.8: *Seien $K_m(z, \zeta)$ für $m \leq n$ generische polyharmonische Green-Funktionen für das Gebiet D , die eine iterierte Folge bilden, d.h.*

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} K_{m+1}(z, \zeta) = K_m(z, \zeta)$$

für $1 \leq m < n$. Dann gilt: Jede Funktion $w \in C^{2n}(D) \cap C^{2n-1}(\bar{D})$ kann dargestellt werden durch

$$\begin{aligned} w(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_D K_n(\zeta, z) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^n w(\zeta) d\xi d\eta \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} ((\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} K_{k+1}(\zeta, z) - K_{k+1}(\zeta, z) \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta)) ds_\zeta. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Beweis: Wir schreiben $w_m(z) := (\partial_z \partial_{\bar{z}})^m w(z)$ und definieren

$$\begin{aligned} \varphi_1(z, \zeta) &:= \sum_{k=0}^{n-1} (w_k(z) \partial_{\bar{z}} K_{k+1}(z, \zeta) - K_{k+1}(z, \zeta) \partial_{\bar{z}} w_k(z)) \text{ und} \\ \varphi_2(z, \zeta) &:= \sum_{k=0}^{n-1} (w_k(z) \partial_z K_{k+1}(z, \zeta) - K_{k+1}(z, \zeta) \partial_z w_k(z)). \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\partial_z \varphi_1(z, \zeta) + \partial_{\bar{z}} \varphi_2(z, \zeta) = 2(w(z) \partial_z \partial_{\bar{z}} K_1(z, \zeta) - K_n(z, \zeta) (\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w(z))$$

ist. Wir wählen nun zu ζ ein hinreichend kleines $\varepsilon_0 > 0$, so dass

$$K := \{z : |z - \zeta| \leq \varepsilon_0\} \subset D \quad (3.33)$$

gilt. Wenden wir den Gauß'schen Integralsatz (2.13) auf φ_1 und (2.12) auf φ_2 an, so erhalten wir für $D_\varepsilon := D \setminus \{z : |z - \zeta| \leq \varepsilon\}$ mit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{D_\varepsilon} (\partial_z \varphi_1(z, \zeta) + \partial_{\bar{z}} \varphi_2(z, \zeta)) dx dy = \frac{1}{4\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} (\varphi_2(z, \zeta) dz - \varphi_1(z, \zeta) d\bar{z})$$

bzw.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{D_\varepsilon} (w(z) \partial_z \partial_{\bar{z}} K_1(z, \zeta) - K_n(z, \zeta) (\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w(z)) dx dy \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} [w_k(z) (\partial_z K_{k+1}(z, \zeta) dz - \partial_{\bar{z}} K_{k+1}(z, \zeta) d\bar{z}) \\ &\quad - K_{k+1}(z, \zeta) (\partial_z w_k(z) dz - \partial_{\bar{z}} w_k(z) d\bar{z})]. \end{aligned}$$

Im Flächenintegral linker Hand wird der erste Summand null, da $K_1(z, \zeta)$ in D_ε harmonisch ist. Das Randintegral auf der rechten Seite schreiben wir mit (2.9) um und teilen das Integral für die Randstücke ∂D und $\{|z - \zeta| = \varepsilon\}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{D_\varepsilon} (K_n(z, \zeta)(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w(z)) \, dx dy \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} (w_k(z) \partial_{\nu_z} K_{k+1}(z, \zeta) - K_{k+1}(z, \zeta) \partial_{\nu_z} w_k(z)) \, ds_z \\ & \quad - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4\pi} \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} (w_k(z) \partial_{\nu_z} K_{k+1}(z, \zeta) - K_{k+1}(z, \zeta) \partial_{\nu_z} w_k(z)) \, ds_z. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Randintegrale für $|z - \zeta| = \varepsilon$. Für $k > 0$ sind die Integranden in dem – in (3.33) definierten – Kompaktum $K \subset D$ beschränkt, da sie zumindest stetig sind. Also streben die Integrale für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen null. Im Fall $k = 0$ wenden wir Korollar 2.5 an und erhalten

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} (w(z) \partial_{\nu_z} K_1(z, \zeta) - K_1(z, \zeta) \partial_{\nu_z} w(z)) \, ds_z = -w(\zeta).$$

Damit folgt nach der Grenzwertbildung $\varepsilon \rightarrow 0$ insgesamt

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_D K_n(z, \zeta)(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w(z) \, dx dy \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} (w_k(z) \partial_{\nu_z} K_{k+1}(z, \zeta) - K_{k+1}(z, \zeta) \partial_{\nu_z} w_k(z)) \, ds_z + w(\zeta). \end{aligned}$$

Nach einem Variablentausch zwischen z und ζ ist dies (3.32). □

Bemerkung 3.9: Die Integraldarstellung (3.32) wurde in [BV06], Theorem 4.5, für die polyharmonische Neumann-Funktion $N_n(z, \zeta) = R_{n,0,1}(z, \zeta)$ und $D = \mathbb{D}$ hergeleitet. Da weder das Randverhalten des Integrationskerns $K_n(z, \zeta)$ noch besondere Eigenschaften des Gebiets D in den Beweis eingehen, konnten wir die Darstellung auf beliebige Green-Funktionen verallgemeinern.

Wie schon bei der Integraldarstellung (2.23) für harmonische Green-Funktionen, ist diese allgemeine Form für das Lösen iterierter Randwertprobleme nicht geeignet, da mehr Randdaten erforderlich sind, als für die Randwertaufgaben verlangt werden. Ist das Randverhalten der Green-Funktion bekannt, so ist es eventuell möglich, einen Teil der Randintegrale in (3.32) zu eliminieren.

Ist $R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta)$ eine hybride polyharmonische Robin-Funktion mit den Parametern $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, so genügt für $1 \leq k \leq n$

$$R_k(z, \zeta) := (\partial_z \partial_{\bar{z}})^{n-k} R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta)$$

der Randbedingung

$$(\alpha_k + \beta_k \partial_{\nu_z}) R_k(z, \zeta) = \beta_k \sigma(z) \tau_{k-1}(\zeta) \quad \text{für } z \in \partial D, \zeta \in D. \quad (3.34)$$

Dies folgt, weil R_k eine polyharmonische hybride Robin-Funktion der Ordnung k mit den Parametern $(\alpha_1, \cdot, \alpha_k)$ und $(\beta_1, \cdot, \beta_k)$ ist, die der Randbedingung (3.23) genügt. Die Randbedingungen (3.34) können wir in gleicher Weise nutzen, wie wir dies bereits im harmonischen Fall getan haben, um die Integraldarstellungen (2.33) und (2.34) herzuleiten.

Falls $\beta_k \neq 0$ ist, so erhalten wir aus (3.34)

$$\partial_{\nu_z} R_k(z, \zeta) = \sigma(z) \tau_{k-1}(\zeta) - \frac{\alpha_k}{\beta_k} R_k(z, \zeta). \quad (3.35)$$

Ist $\alpha_k \neq 0$, so erhalten wir

$$R_k(z, \zeta) = \frac{\beta_k}{\alpha_k} (\sigma(z) \tau_{k-1}(\zeta) - \partial_{\nu_z} R_k(z, \zeta)). \quad (3.36)$$

Betrachten wir die Integraldarstellung (3.32) mit $K_n(z, \zeta) = R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}$, so können wir das Randintegral im k -ten Summanden umformen. Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} ((\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_{k+1}(\zeta, z) - R_{k+1}(\zeta, z) \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta)) ds_\zeta \\ &= \frac{\tau_k(z)}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) ds_\zeta \\ & - \frac{1}{4\pi \beta_{k+1}} \int_{\partial D} R_{k+1}(\zeta, z) (\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} \partial_{\nu_\zeta}) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) ds_\zeta, \quad (3.37) \end{aligned}$$

falls $\beta_{k+1} \neq 0$ ist, und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} ((\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_{k+1}(\zeta, z) - R_{k+1}(\zeta, z) \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta)) ds_\zeta \\ &= -\frac{\beta_{k+1} \tau_k(z)}{\alpha_{k+1} 4\pi} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) ds_\zeta \\ & + \frac{1}{4\pi \alpha_{k+1}} \int_{\partial D} \partial_{\nu_\zeta} R_{k+1}(\zeta, z) (\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} \partial_{\nu_\zeta}) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) ds_\zeta, \quad (3.38) \end{aligned}$$

falls $\alpha_{k+1} \neq 0$ ist. Damit können wir für jedes k mit $0 \leq k < n$ eine der Darstellungen (3.37), (3.38) auswählen, sofern jeweils die Voraussetzung $\beta_{k+1} \neq 0$ bzw. $\alpha_{k+1} \neq 0$ erfüllt ist. Wir fassen dies zusammen.

Korollar 3.10: Seien $R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta)$ eine hybride polyharmonische Robin-Funktion für das Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, $R_k(z, \zeta) := (\partial_z \partial_{\bar{z}})^{n-k} R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta)$ und $M \subset \{0, \dots, n-1\}$, so dass $\alpha_{i+1} \neq 0$, falls $i \in M$, und $\beta_{i+1} \neq 0$, falls $i \notin M$. Dann gilt: Jede Funktion $w \in C^{2n}(D) \cap C^{2n-1}(\bar{D})$ kann dargestellt werden durch

$$\begin{aligned}
 w(z) = & -\frac{1}{\pi} \int_D R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\zeta, z) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^n w(\zeta) d\xi d\eta \\
 & + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin M}}^{n-1} \frac{1}{4\pi \beta_{k+1}} \int_{\partial D} R_{k+1}(\zeta, z) (\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} \partial_{\nu_\zeta}) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) ds_\zeta \\
 & - \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin M}}^{n-1} \frac{\tau_k(z)}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) ds_\zeta \\
 & - \sum_{\substack{k=0 \\ k \in M}}^{n-1} \frac{1}{4\pi \alpha_{k+1}} \int_{\partial D} (\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} \partial_{\nu_\zeta}) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_{k+1}(\zeta, z) ds_\zeta \\
 & + \sum_{\substack{k=0 \\ k \in M}}^{n-1} \frac{\tau_k(z)}{4\pi} \frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1}} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) ds_\zeta. \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

Beweis: Wir setzen in die Integraldarstellung (3.32) aus Theorem 3.8 für die Randintegrale mit $k \in M$ die Darstellung (3.38) ein. Die Voraussetzung $\alpha_{k+1} \neq 0$ für die Gültigkeit der Darstellung ist für alle $k \in M$ erfüllt. Für $k \notin M$ setzen wir die Darstellung (3.37) ein. Auch hier ist die Voraussetzung $\beta_{k+1} \neq 0$ für die Gültigkeit der Darstellung für alle $k \notin M$ erfüllt. \square

Verwenden wir die polyharmonischen Robin-Funktionen $R_{k;\alpha,\beta}$ mit $k \leq n$ und setzen deren Randverhalten (3.28) ein, erhalten wir die spezifischen Integraldarstellungen für das polyharmonische Robin-Problem.

Korollar 3.11: Jede Funktion $w \in C^{2n}(D) \cap C^{2n-1}(\bar{D})$ kann dargestellt werden durch

$$\begin{aligned}
 w(z) = & -\frac{1}{\pi} \int_D R_{n;\alpha,\beta}(\zeta, z) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^n w(\zeta) d\xi d\eta \\
 & + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4\pi\beta} \int_{\partial D} R_{k+1;\alpha,\beta}(\zeta, z) (\alpha + \beta \partial_{\nu_\zeta}) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) ds_\zeta \\
 & - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau_k(z)}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) ds_\zeta, \text{ falls } \beta \neq 0,
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

und

$$\begin{aligned}
 w(z) = & -\frac{1}{\pi} \int_D R_{n;\alpha,\beta}(\zeta, z) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^n w(\zeta) d\xi d\eta \\
 & - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4\pi\alpha} \int_{\partial D} (\alpha + \beta \partial_{\nu_\zeta}) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_{k+1;\alpha,\beta}(\zeta, z) ds_\zeta \\
 & + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau_k(z)}{4\pi} \frac{\beta}{\alpha} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) ds_\zeta, \text{ falls } \alpha \neq 0.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Beweis: Wir setzen $\alpha_k = \alpha, \beta_k = \beta$ für $k = 1, \dots, n$. Ist $\beta \neq 0$, so können wir $M = \emptyset$ wählen und erhalten dann aus (3.39) die Darstellung (3.40). Ist $\alpha \neq 0$, so können wir $M = \{0, \dots, n-1\}$ wählen und erhalten dann aus (3.39) die Darstellung (3.41). \square

Für $\alpha = 0$ geht die erste Integraldarstellung in die spezifische Integraldarstellung des n -Neumann-Problems über, für $\beta = 0$ die zweite in die des n -Riquier-Problems.

Korollar 3.12: Jede Funktion $w \in C^{2n}(D; \mathbb{C}) \cap C^{2n-1}(\bar{D}; \mathbb{C})$ kann dargestellt werden durch

$$\begin{aligned}
 w(z) = & -\frac{1}{\pi} \int_D N_n(\zeta, z) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^n w(\zeta) d\xi d\eta \\
 & + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} N_{k+1}(\zeta, z) \partial_{\nu_\zeta} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) ds_\zeta \\
 & - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tau_k(z)}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) ds_\zeta
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

und

$$\begin{aligned}
 w(z) = & -\frac{1}{\pi} \int_D G_n(\zeta, z) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^n w(\zeta) d\xi d\eta \\
 & - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^k w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} G_{k+1}(\zeta, z) ds_\zeta.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Die Integraldarstellung (3.43) wurde zuerst in [BV08b] angegeben. Für die Neumann-Randbedingungen wurde die Integraldarstellung (3.32) für die polyharmonische Neumann-Funktion in [BV06] hergeleitet (siehe dazu auch Bemerkung 3.9). Für iterierte Robin-Funktionen mit homogenen Randbedingungen wurde eine der Integraldarstellung (3.41) entsprechende Formel in [Ac14] dadurch abgeleitet, dass die entsprechende harmonische Integraldarstellung aus [BV10] iteriert wurde.

Kapitel 4

Die Robin-Funktionen für den Einheitskreis

In diesem Kapitel berechnen wir die hybriden polyharmonischen Robin-Funktionen für die Kreisscheibe $D = \mathbb{D}$ für $n = 2$ und $n = 3$. Zunächst benötigen wir dafür die harmonische Robin-Funktion $R_{1;\alpha,\beta}$ für \mathbb{D} aus [BV13]. Ausgehend davon bestimmen wir die weiteren Funktionen durch das Auswerten des Faltungsintegrals (3.21).

4.1 Einige Hilfsmittel

In diesem und den folgenden Kapiteln werden wir uns ausschließlich mit der Einheitskreisscheibe befassen. Daher sei im Folgenden, wenn nicht explizit anders angegeben, das offene Gebiet D immer der Einheitskreis, d.h.

$$D = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Auf dem Rand $|z| = 1$ ist

$$\frac{d\bar{z}}{\bar{z}} = -\frac{dz}{z}, \quad (4.1)$$

da $\bar{z} = \frac{1}{z}$ für $|z| = 1$ gilt. Also folgt

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = -\frac{1}{z^2} = -\frac{\bar{z}}{z}. \quad (4.2)$$

Dadurch erhalten wir für die Normalenableitung ∂_ν und das Streckenelement ds der Bogenlängenparametrisierung die Darstellung

$$\partial_\nu w ds = \frac{1}{i} (\partial_z w dz - \partial_{\bar{z}} w d\bar{z}) = \frac{1}{i} (z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}}) w \frac{dz}{z}, \quad (4.3)$$

von der wir Gebrauch machen werden, um eine ästhetisch ansprechendere Darstellung der Formeln zu erlangen. Insbesondere gelten $\partial_\nu = z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}}$ und $ds = \frac{dz}{iz} = -\frac{d\bar{z}}{i\bar{z}}$.

Theorem 4.1 (Schwarz'sches Randwertproblem): *Die Lösung des Schwarz'schen Randwertproblems*

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} w &= 0 \text{ in } \mathbb{D}, \\ \operatorname{Re} w &= \gamma \text{ auf } \partial\mathbb{D}, \\ \operatorname{Im} w(0) &= c \end{aligned}$$

ist für $c \in \mathbb{R}$, $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{R})$ eindeutig gegeben durch

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + ic. \quad (4.4)$$

Für den Beweis siehe z.B. [Beg05a].

Zunächst betrachten wir die harmonische Green- und Neumann-Funktion für \mathbb{D} und bestimmen σ .

Lemma 4.2: *Die harmonische Green-Funktion zu den Dirichlet-Randbedingungen für die Einheitskreisscheibe \mathbb{D} ist*

$$G_1(z, \zeta) = \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2. \quad (4.5)$$

Die harmonische Neumann-Funktion für die Einheitskreisscheibe \mathbb{D} ist

$$N_1(z, \zeta) = -\log |(z - \zeta)(1 - z\bar{\zeta})|^2. \quad (4.6)$$

Für die stückweise konstante Funktion $\sigma : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\sigma = -2. \quad (4.7)$$

$G_1(z, \zeta)$ und $N_1(z, \zeta)$ sind bekannte Funktionen, die in der Literatur zu finden sind, siehe z.B. [Beg05b].

Beweis: Wir prüfen für G_1 und N_1 die definierenden Eigenschaften aus Definition 2.7 für $\beta = 0$ bzw. $\alpha = 0$ nach.

Zunächst ist klar, dass $\log |1 - z\bar{\zeta}|^2$ für $z, \zeta \in \mathbb{D}$ harmonisch ist, da

$$\log |1 - z\bar{\zeta}|^2 = \log(1 - z\bar{\zeta}) + \log(1 - \bar{z}\zeta)$$

und die Summanden auf der rechten Seite nur von z bzw. nur von \bar{z} abhängen. Damit bleibt für beide Funktionen nur das Randverhalten zu überprüfen. Für $|z| = 1$ ist $\log |z - \zeta|^2 = \log |1 - z\bar{\zeta}|^2$ und somit $G_1(z, \zeta)|_{|z|=1} = 0$. Weiter ist für $|z| = 1$

$$\begin{aligned} \partial_{\nu_z} N_1(z, \zeta) &= (z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}})N_1(z, \zeta) \\ &= -\frac{z}{z - \zeta} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}} + \frac{z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} + \frac{\bar{z}\zeta}{1 - \bar{z}\zeta} \\ &= -2, \end{aligned}$$

wobei wir die ersten beiden Brüche mit \bar{z} bzw. z erweitert haben. Damit erfüllt $N_1(z, \zeta)$ die Randbedingung genau dann, wenn $\sigma = -2$ ist. Damit ist (4.7) gezeigt.

Für die Neumann-Funktion ist noch die Normierungsbedingung $\int_{\partial\mathbb{D}} N_1(z, \zeta) ds_z = 0$ zu zeigen. Diese folgt aus der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen, da für $z \in \partial\mathbb{D}$

$$|z - \zeta|^2 = (z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta}) = z\bar{z}(1 - z\bar{\zeta})(1 - \bar{z}\zeta) = |1 - z\bar{\zeta}|^2$$

ist, also die Darstellung $N_1(z, \zeta) = -2\log |1 - z\bar{\zeta}|^2$ gilt. Die rechte Seite ist aber harmonisch in \mathbb{D} und wird null für $z = 0$. \square

Wenn in der Integraldarstellung (2.36) $z \in \partial D$ gilt, so wird aufgrund der Randbedingung $G_1(z, \zeta) = 0$ für $z \in \partial D$ das Gebietsintegral null. Damit erhalten wir auf dem Rand die Integraldarstellung

$$w(z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} w(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} G_1(\zeta, z) ds_\zeta \quad \text{für } z \in \partial D. \quad (4.8)$$

$-\frac{1}{2}\partial_{\nu_z} G_1(z, \zeta)$ heißt der *Poisson-Kern*. Die Umnormierung entspricht der Konvention. Speziell erhalten wir für den Einheitskreis mit der Green-Funktion (4.5)

$$g_1(z, \zeta) := -\frac{1}{2}\partial_{\nu_z} G_1(z, \zeta)|_{|z|=1} = \frac{z}{z - \zeta} + \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}} - 1 \quad (4.9)$$

und setzen in die Integraldarstellung (2.36) die Werte für $D = \mathbb{D}$ ein:

$$\begin{aligned} w(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta)) G_1(z, \zeta) d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} w(\zeta) g_1(z, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta)) \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} w(\zeta) \left(\frac{1}{1 - z\bar{\zeta}} + \frac{1}{1 - \bar{z}\zeta} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ist h eine in \mathbb{D} harmonische Funktion, also $\partial_z \partial_{\bar{z}} h(z) = 0$ in \mathbb{D} , so erhalten wir aus (4.10) die Darstellung (4.8) auch für $z \in \mathbb{D}$:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} h(\zeta) g_1(z, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (4.11)$$

Ist $\varphi \in C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{C})$ eine auf $\partial\mathbb{D}$ stetige Funktion, so definieren wir durch

$$P[\varphi](z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(z_1) g_1(z_1, z) \frac{dz_1}{z_1} \quad (4.12)$$

eine auf \mathbb{D} harmonische Funktion, da g_1 in \mathbb{D} harmonisch ist. Besitzt φ auf $\partial\mathbb{D}$ eine punktweise konvergente Fourierreihe

$$\varphi(s) = a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k \exp(iks) + \sum_{l \geq 1} b_l \exp(-ils),$$

so ist mit $z = \exp(is)$ für $|z| = 1$

$$P[\varphi](z) = a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k z^k + \sum_{l \geq 1} b_l \bar{z}^l. \quad (4.13)$$

Diese Darstellung werden wir im Weiteren häufig für die Auswertung des Randintegrals in (4.10) verwenden.

Aus (4.12) folgern wir sofort, dass die Reproduktionseigenschaft (4.8) für alle auf $\partial\mathbb{D}$ stetigen Funktionen mit konvergenter Fourierreihe gilt. Für $z = 0$ erhalten wir aus (4.13) eine Auswertung des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = P[w](0) = a_0, \quad (4.14)$$

also die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.

4.2 Der harmonische Fall

Bevor wir uns der Berechnung der Robin-Funktionen höherer Ordnung durch Auswertung der Iteration (3.14) zuwenden, bestimmen wir hier die Robin-Funktion erster Ordnung für den Einheitskreis \mathbb{D} . Die Robin-Funktion $R_{1,\alpha,\beta}$ ist als Faltungskern ein wesentlicher Bestandteil der Iteration zur Bestimmung der Robin-Funktionen höherer Ordnung. Da diese Funktion nicht durch eine bloße Faltung gewonnen werden kann, sind zusätzliche allgemeine Vorbetrachtungen nötig. Die Robin-Funktion wurde zunächst für $\alpha = \beta = 1$ in [BH06] bestimmt, für allgemeines $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in [BV10] für die nicht modifizierte Randbedingung. Schließlich wurde $R_{1,\alpha,\beta}$ für den Einheitskreis in der hier angegebenen Form in [BV13] bestimmt. Wir geben hier nochmals eine Herleitung an, da $R_{1,\alpha,\beta}(z, \zeta)$ zentral für die weitere Arbeit ist.

Theorem 4.3: Die harmonische Robin-Funktion $R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta)$ für den Einheitskreis \mathbb{D} ist gegeben durch

$$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 + 2\beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha + \beta k}, \text{ falls } -\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{N}, \quad (4.15)$$

$$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 + 2\beta \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha + \beta k} \\ + 2(z\bar{\zeta})^m \log(z\bar{\zeta}) + 2(\bar{z}\zeta)^m \log(\bar{z}\zeta), \text{ falls } -\frac{\alpha}{\beta} = m \in \mathbb{N}. \quad (4.16)$$

Beweis: Die reellwertige harmonische Funktion

$$h(z, \zeta) = R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) + \log |z - \zeta|^2$$

ist in \mathbb{D} als Realteil einer analytischen Funktion $\varphi(z, \zeta)$ darstellbar, die bis auf eine additive Konstante ic eindeutig bestimmt ist und der Cauchy-Riemann-Differentialgleichung $\partial_{\bar{z}}\varphi(z, \zeta) = 0$ genügt:

$$h(z, \zeta) = \operatorname{Re} \varphi(z, \zeta) = \frac{1}{2}(\varphi(z, \zeta) + \overline{\varphi(z, \zeta)}). \quad (4.17)$$

Wenden wir die Randbedingung (2.26) mit (4.7) auf (4.17) an, erhalten wir für $|z| = 1$

$$(\alpha + \beta \partial_{\nu_z})h(z, \zeta) = (\alpha + \beta \partial_{\nu_z}) \log |z - \zeta|^2 - 2\beta \\ = \alpha \log |z - \zeta|^2 + \beta \left(\frac{z}{z - \zeta} + \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}} - 2 \right) \\ = \alpha \log |1 - z\bar{\zeta}|^2 + \beta \left(\frac{\zeta}{z - \zeta} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{z} - \bar{\zeta}} \right). \quad (4.18)$$

Dies führt mit (4.17) auf das Schwarz'sche Randwertproblem

$$\operatorname{Re} (\alpha + \beta z \partial_z) \varphi(z, \zeta) = \alpha \log |1 - z \bar{\zeta}|^2 + \beta \left(\frac{\zeta}{z - \zeta} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{z} - \bar{\zeta}} \right), \quad (4.19)$$

dessen Lösung mit (4.4) für $c = 0$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta z \partial_z) \varphi(z, \zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \left(\alpha \log |1 - z_1 \bar{\zeta}|^2 + \beta \left(\frac{\zeta}{z_1 - \zeta} + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{z}_1 - \bar{\zeta}} \right) \right) \frac{z_1 + z}{z_1 - z} \frac{dz_1}{z_1} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \left(-\alpha \sum_{k \geq 1} \frac{(z_1 \bar{\zeta})^k + (\bar{z}_1 \zeta)^k}{k} + \beta \sum_{k \geq 1} ((z_1 \bar{\zeta})^k + (\bar{z}_1 \zeta)^k) \right) \\ &\quad \times \left(1 + 2 \sum_{l \geq 1} (\bar{z}_1 z)^l \right) \frac{dz_1}{z_1} \\ &= -2\alpha \sum_{k \geq 1} \frac{(z \bar{\zeta})^k}{k} + 2\beta \sum_{k \geq 1} (z \bar{\zeta})^k \\ &= 2\alpha \log(1 - z \bar{\zeta}) + 2\beta \frac{z \bar{\zeta}}{1 - z \bar{\zeta}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

ist. Dabei tragen in der zweiten Zeile beim Ausmultiplizieren der Summen nur diejenigen Produkte zum Integral bei, die nicht mehr von z_1 abhängen. Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung für φ ist gegeben durch

$$\varphi(z, \zeta) = \frac{1}{\beta} z^{-\frac{\alpha}{\beta}} \int z^{\frac{\alpha}{\beta} - 1} \left(2\alpha \log(1 - z \bar{\zeta}) + 2\beta \frac{z \bar{\zeta}}{1 - z \bar{\zeta}} \right) dz. \quad (4.21)$$

Die Lösung des unbestimmten Integrals ist

- für $-\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 & \int z^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(2\alpha \log(1 - z\bar{\zeta}) + 2\beta \frac{z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right) dz \\
 &= \int z^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(2 \sum_{k \geq 1} \frac{\beta k - \alpha}{k} (z\bar{\zeta})^k \right) dz \\
 &= 2\beta z^{\frac{\alpha}{\beta}} \sum_{k \geq 1} \frac{\beta k - \alpha}{k(\alpha + \beta k)} (z\bar{\zeta})^k + c \\
 &= 2\beta z^{\frac{\alpha}{\beta}} \left(\log(1 - z\bar{\zeta}) + 2\beta \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k}{\alpha + \beta k} \right) + c
 \end{aligned}$$

- bzw. für $-\frac{\alpha}{\beta} = m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 & 2 \int z^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \sum_{k \geq 1} \frac{\beta k - \alpha}{k} (z\bar{\zeta})^k dz \\
 &= 2\beta z^{\frac{\alpha}{\beta}} \left(\sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \neq m}} \frac{\beta k - \alpha}{k(\alpha + \beta k)} (z\bar{\zeta})^k + 2(z\bar{\zeta})^m \log(z\bar{\zeta}) \right) + c \\
 &= 2\beta z^{\frac{\alpha}{\beta}} \left(\log(1 - z\bar{\zeta}) + \frac{(z\bar{\zeta})^m}{m} + 2\beta \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \neq m}} \frac{(z\bar{\zeta})^k}{\alpha + \beta k} + 2(z\bar{\zeta})^m \log(z\bar{\zeta}) \right) + c.
 \end{aligned}$$

Somit ist $\varphi(z, \zeta)$ bis auf eine additive Konstante, die sich für h bzw. $R_{1;\alpha,\beta}$ aus der Randbedingung (2.26) ergibt, bestimmt:

$$\varphi(z, \zeta) = \begin{cases} 2 \log(1 - z\bar{\zeta}) + 4\beta \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k}{\alpha + \beta k} + c & \text{für } -\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{N}, \\ 2 \log(1 - z\bar{\zeta}) + 2 \frac{(z\bar{\zeta})^m}{m} \\ \quad + 4\beta \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \neq m}} \frac{(z\bar{\zeta})^k}{\alpha + \beta k} + 4(z\bar{\zeta})^m \log(z\bar{\zeta}) + c & \text{für } -\frac{\alpha}{\beta} = m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Damit erhalten wir die in (4.17) definierte Funktion $h(z, \zeta) = \frac{1}{2}(\varphi(z, \zeta) + \overline{\varphi(z, \zeta)})$ und setzen dies in

$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = -\log |z - \zeta|^2 + h(z, \zeta)$ ein:

$$R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = \begin{cases} \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 + 2\beta \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha + \beta k} + \frac{c + \bar{c}}{2} & \text{für } -\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{N}, \\ \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 + \frac{(z\bar{\zeta})^m + (\bar{z}\zeta)^m}{m} + 2\beta \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \neq m}} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha + \beta k} \\ + 2(z\bar{\zeta})^m \log(z\bar{\zeta}) + 2(\bar{z}\zeta)^m \log(\bar{z}\zeta) + \frac{c + \bar{c}}{2} & \text{für } -\frac{\alpha}{\beta} = m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Aus der Randbedingung (2.26) mit (4.7) erhalten wir $c = 0$. Dann liegt für $-\frac{\alpha}{\beta} = m$ der Summand $\frac{(z\bar{\zeta})^m + (\bar{z}\zeta)^m}{m}$ im Kern des Operators $\alpha + \beta(z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}})$, weshalb wir ihn weglassen. Damit haben wir die angegebene Form der Robin-Funktion hergeleitet. \square

4.3 Der biharmonische Fall

Wir berechnen zunächst die hybride biharmonische Robin-Funktion mit den Indizes

$$\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{und} \quad \underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2).$$

Danach setzen wir $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$, um die „normale“ biharmonische Robin-Funktion zu erhalten. Wir beschränken uns auf den Fall, dass $-\frac{\alpha_i}{\beta_i} \notin \mathbb{N}$, $i = 1, 2$ ist. Dies sei im Folgenden stets vorausgesetzt.

Wir erhalten die hybride biharmonische Robin-Funktion $R_{2;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta)$, indem wir das Faltungsintegral (3.21) auswerten:

$$R_{2;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} R_{1;\alpha_2,\beta_2}(z, z_1) R_{1;\alpha_1,\beta_1}(z_1, \zeta) dx_1 dy_1. \quad (4.22)$$

Wir schreiben

$$R_{1;\alpha_i,\beta_i}(z, \zeta) = G_1(z, \zeta) + h_{1,i}(z, \zeta) = \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 + 2\beta_i \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha_i + \beta_i k} \quad (4.23)$$

und teilen das Faltungsintegral (4.22) in vier Teilintegrale

$$G_2(z, \zeta) := -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} G_1(z, z_1) G_1(z_1, \zeta) dx_1 dy_1, \quad (4.24)$$

$$I_1^{(i)}(z, \zeta) := -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} G_1(z, z_1) h_{1,i}(z_1, \zeta) dx_1 dy_1, \quad i = 1, 2, \quad (4.25)$$

$$I_2^{(i)}(z, \zeta) := I_1^{(i)}(\zeta, z), \quad i = 1, 2, \quad (4.26)$$

und

$$I_3(z, \zeta) := -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} h_{1,2}(z, z_1) h_{1,1}(z_1, \zeta) dx_1 dy_1. \quad (4.27)$$

Dann ist

$$R_{2;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) = G_2(z, \zeta) + I_1^{(1)}(z, \zeta) + I_2^{(2)}(z, \zeta) + I_3(z, \zeta). \quad (4.28)$$

Für die Bestimmung von (4.24) und (4.25) verwenden wir die Integraldarstellung (2.36), womit die Berechnung des Faltungsintegrals auf das Auffinden einer geeigneten Stammfunktion w mit $\partial_z \partial_{\bar{z}} w = G_1(z, \zeta)$ bzw. $= h_{1,i}(z, \zeta)$ und die Auswertung des Randintegrals zurückgeführt wird. Das Faltungsintegral (4.27) führen wir anhand des Gauß'schen Integralsatzes (2.12) und (2.13) auf ein Randintegral zurück.

Die biharmonische Green-Funktion für den Einheitskreis ist bereits bekannt, siehe etwa [Beg06]. Dort findet sich auch $R_{2;1,1}$ für \mathbb{D} .

Wir setzen in die Integraldarstellung (2.36) die Werte für $D = \mathbb{D}$ ein, substituieren z_1 für ζ , da wir ζ bereits als zweite Variable in w nutzen, und stellen nach dem Gebietsintegral um. Damit erhalten wir mit dem Poisson-Kern g_1 aus (4.9)

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \partial_{z_1} \partial_{\bar{z}_1} w(z_1) G_1(z, z_1) dx_1 dy_1 = w(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} w(z_1) g_1(z, z_1) \frac{dz_1}{z_1}. \quad (4.29)$$

Beginnen wir zunächst mit der Berechnung der Green-Funktion G_2 aus (4.24).

Lemma 4.4: Sei $\Gamma_2(z)$ die Fundamentallösung aus (3.2) und $G_1(z, \zeta)$ die Green-Funktion des Einheitskreises \mathbb{D} aus (4.5). Für

$$\hat{G}_2(z, \zeta) := \Gamma_2(z - \zeta) - |z|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k(k+1)} \quad (4.30)$$

gilt

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \hat{G}_2(z, \zeta) = G_1(z, \zeta). \quad (4.31)$$

Beweis: Die Fundamentallösung Γ_n genügt der Rekursionsformel (3.3). Der zweite Teil folgt durch Nutzung der Reihenentwicklung $\log |1 - z\bar{\zeta}|^2 = -\sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k}$ für den Logarithmus. \square

Lemma 4.5: Für das Randintegral gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \hat{G}_2(z_1, \zeta) g_1(z_1, z) \frac{dz_1}{z_1} &= 2(1 - z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta) + |\zeta|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k} \\ &+ (1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k+1} - \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k+1} + (\bar{z}\zeta)^{k+1}}{k}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Beweis: Für $|z_1| = 1$ entwickeln wir $\Gamma_2(\zeta - z_1)$ als Potenzreihe in z_1 bzw. $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_2(\zeta - z_1) &= |z_1 - \zeta|^2 (2 - \log |z_1 - \zeta|^2) \\ &= (1 + |\zeta|^2 - z_1\bar{\zeta} - \bar{z}_1\zeta) \left[2 + \sum_{k \geq 1} \frac{(z_1\bar{\zeta})^k + (\bar{z}_1\zeta)^k}{k} \right] \\ &= 2(1 + |\zeta|^2 - z_1\bar{\zeta} - \bar{z}_1\zeta) + (1 + |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z_1\bar{\zeta})^k + (\bar{z}_1\zeta)^k}{k} \\ &\quad - \sum_{k \geq 1} \frac{(z_1\bar{\zeta})^{k+1} + (\bar{z}_1\zeta)^{k+1}}{k} - |\zeta|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z_1\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}_1\zeta)^{k-1}}{k}. \end{aligned}$$

Das Anwenden der Kürzungsregel $z_1\bar{z}_1 = 1$ sowie der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

für den zweiten Summanden liefert die Reihendarstellung des Integranden. Mit (4.13) folgt die Behauptung. \square

Theorem 4.6: Für den Einheitskreis \mathbb{D} ist die biharmonische Green-Funktion gegeben durch

$$G_2(z, \zeta) = |z - \zeta|^2 \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k}. \quad (4.33)$$

Beweis: Wir verwenden (4.29) mit $w(z) = \hat{G}_2(z, \zeta)$, die Zwischenergebnisse (4.30) aus Lemma 4.4 und (4.32) aus Lemma 4.5. Damit haben wir

$$\begin{aligned} G_2(z, \zeta) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} G_1(z_1, \zeta) G_1(z, z_1) dx_1 dy_1 \\ &\stackrel{(4.31)}{=} -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \partial_{z_1} \partial_{\bar{z}_1} \hat{G}_2(z_1, \zeta) G_1(z, z_1) dx_1 dy_1 \\ &\stackrel{(4.29)}{=} \hat{G}_2(z, \zeta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \hat{G}_2(z_1, \zeta) g_1(z, z_1) \frac{dz_1}{z_1} \\ &= \Gamma_2(z - \zeta) - |z|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k(k+1)} \\ &\quad - \left(2(1 - z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta) + |\zeta|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k} \right. \\ &\quad \left. + (1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k+1} - \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k+1} + (\bar{z}\zeta)^{k+1}}{k} \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Führen wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

für die erste Summe der rechten Seite durch, fassen wir die Terme zusammen und benutzen wir die Reihenentwicklung

$$\log 1 - x = - \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k},$$

so erhalten wir die Darstellung (4.33). □

Lemma 4.7: Für das Integral $I_1^{(i)}(z, \zeta)$ gilt

$$I_1^{(i)}(z, \zeta) = 2\beta_i(|z|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_i + \beta_i k)(k + 1)}. \quad (4.35)$$

Beweis: Für die Funktion $h_{1,i}(z, \zeta)$ aus (4.23) und die Funktion

$$\hat{h}_2(z, \zeta) = 2\beta_i|z|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_i + \beta_i k)(k + 1)} \quad (4.36)$$

ist

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \hat{h}_2(z, \zeta) = h_{1,i}(z, \zeta).$$

Für das Randintegral folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \hat{h}_2(z_1, \zeta) g_1(z_1, z) \frac{dz_1}{z_1} = 2\beta_1 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_i + \beta_i k)(k + 1)}, \quad (4.37)$$

da

$$\hat{h}_2(z, \zeta)|_{|z|=1} = 2\beta_i \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_i + \beta_i k)(k + 1)}$$

gilt und (4.13) anwendbar ist. Das Einsetzen von (4.36) und (4.37) in (4.29) liefert

$$I_1^{(i)}(z, \zeta) = 2\beta_i(|z|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_i + \beta_i k)(k + 1)},$$

also (4.35). □

Korollar 4.8: Für die Integrale $I_1^{(1)}(z, \zeta)$ und $I_2^{(2)}(z, \zeta)$ aus (4.25) gilt

$$\begin{aligned} I_1^{(1)}(z, \zeta) + I_2^{(2)}(z, \zeta) &= 2\beta_1(|z|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(k + 1)} \\ &\quad + 2\beta_2(|\zeta|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Beweis: Wir verwenden (4.35) für $I_1^{(1)}$ und $I_2^{(2)}(z, \zeta) = I_1^{(2)}(\zeta, z)$. □

Lemma 4.9: Für das Integral $I_3(z, \zeta)$ aus (4.27) gilt

$$I_3(z, \zeta) = -4\beta_1\beta_2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)}. \quad (4.39)$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} I_3(z, \zeta) &= -\frac{4\beta_1\beta_2}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \sum_{k \geq 1} \frac{(z_1\bar{\zeta})^k + (\bar{z}_1\zeta)^k}{\alpha_1 + \beta_1 k} \sum_{l \geq 1} \frac{(z\bar{z}_1)^l + (\bar{z}z_1)^l}{\alpha_2 + \beta_2 l} dx_1 dy_1 \\ &= -\frac{4\beta_1\beta_2}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \sum_{k, l \geq 1} \frac{(z_1\bar{\zeta})^k (z\bar{z}_1)^l + (\bar{z}_1\zeta)^k (z\bar{z}_1)^l + (z_1\bar{\zeta})^k (\bar{z}z_1)^l + (\bar{z}_1\zeta)^k (\bar{z}z_1)^l}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 l)} dx_1 dy_1 \\ &= -4\beta_1\beta_2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \sum_{k, l \geq 1} \frac{\bar{\zeta}^k z^l \bar{z}_1^{l-k}}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 l)(l + 1)} \frac{dz_1}{z_1} \\ &\quad - 4\beta_1\beta_2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \sum_{k, l \geq 1} \frac{\zeta^k z^l \bar{z}_1^{l+k}}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 l)(l + k + 1)} \frac{dz_1}{z_1} \\ &\quad - 4\beta_1\beta_2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \sum_{k, l \geq 1} \frac{\bar{\zeta}^k \bar{z}^l z_1^{l+k}}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 l)} \frac{dz_1}{z_1} \\ &\quad - 4\beta_1\beta_2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \sum_{k, l \geq 1} \frac{\zeta^k \bar{z}^l \bar{z}_1^{k-l}}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 l)(k + 1)} \frac{dz_1}{z_1} \\ &= -4\beta_1\beta_2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)}. \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir den Gauß'schen Integralsatz (2.12) angewandt und das letzte Integral mit der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen bestimmt, indem wir den Integranden bei $z_1 = 0$ ausgewertet haben. Dabei werden im zweiten und dritten Integral alle Summanden null. Im ersten und vierten Integral sind nur die Summanden mit $l = k$ nicht null. \square

Theorem 4.10: Die hybride biharmonische Robin-Funktion für den Einheitskreis \mathbb{D} mit den Parametern $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, für die $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = 1, 2$, und $-\frac{\alpha_i}{\beta_i} \notin \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, gelten, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 R_{2;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) &= |z - \zeta|^2 \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \\
 &+ 2\beta_1(|z|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(k + 1)} + 2\beta_2(|\zeta|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)} \\
 &- 4\beta_1\beta_2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)}. \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

Beweis: Aus der Faltung (4.22) und der Zerlegung (4.24), (4.25), (4.26) und (4.27) folgt

$$R_{2;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) = G_2(z, \zeta) + I_1^{(1)}(z, \zeta) + I_2^{(2)}(z, \zeta) + I_3(z, \zeta).$$

Bilden wir diese Summe mit den Darstellungen (4.33) für G_2 , (4.38) für $I_1^{(1)} + I_2^{(2)}$ und (4.39) für I_3 , erhalten wir (4.40). \square

Mit der hybriden Robin-Funktion können wir nun flexibel Integraldarstellungen den unterschiedlichen Randbedingungen anpassen. Wir betrachten die in [Beg06] angegebenen Fälle, zunächst die einheitlichen Randbedingungen. Die biharmonische Green-Funktion G_2 für Riquier-Randbedingungen haben wir bereits in (4.33) angegeben.

Korollar 4.11 ([Eme21]): Die biharmonische Robin-Funktion für den Einheitskreis \mathbb{D} mit den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für die $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ und $-\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{N}$ gilt, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 R_{2;\alpha,\beta}(z, \zeta) &= |z - \zeta|^2 \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \\
 &+ 2\beta(|z|^2 + |\zeta|^2 - 2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + \beta k)(k + 1)} - 4\beta^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + \beta k)^2(k + 1)}. \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

Beweis: Setzen wir in (4.40) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ und $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, so erhalten wir (4.41). \square

Für $\alpha = 0$ ergibt sich aus (4.41) die biharmonische Neumann-Funktion N_2 .

Korollar 4.12 ([BV06, Bur09]): Die biharmonische Neumann-Funktion für den Einheitskreis \mathbb{D} ist gegeben durch

$$\begin{aligned} N_2(z, \zeta) &= -|z - \zeta|^2 \log |(z - \zeta)(1 - z\bar{\zeta})|^2 - 2(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) \log |1 - z\bar{\zeta}|^2 \\ &\quad + 4(|z|^2 + |\zeta|^2) - 4 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k^2} \\ &\quad - (1 + |z|^2)(1 + |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Beweis: Das Einsetzen von $\alpha = 0$ in (4.41) ergibt

$$\begin{aligned} N_2(z, \zeta) &= R_{2;0,\beta} = |z - \zeta|^2 \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \\ &\quad + 2(|z|^2 + |\zeta|^2 - 2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k(k+1)} - 4 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k^2(k+1)}. \end{aligned}$$

Verwenden wir die Partialbruchzerlegungen

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{k^2(k+1)} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$$

für die beiden letzten Summen, nutzen wir die Reihenentwicklung

$$\log |1 - z\bar{\zeta}|^2 = - \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k}$$

und fassen wir dann die Terme zusammen, so ergibt sich hieraus (4.42). \square

Mit den Bezeichnungen aus [Beg06] haben wir zusätzlich zu $G_2, N_2, R_{2,\alpha,\beta}$ die drei hybriden biharmonischen Funktionen

$$G_{22}(z, \zeta) := -\frac{1}{\pi} \int_D G_1(z, \tilde{z}) N_1(\tilde{z}, \zeta) d\tilde{x}d\tilde{y} = R_{2;(0,1),(1,0)}(z, \zeta), \quad (4.43)$$

$$G_{23}(z, \zeta) := -\frac{1}{\pi} \int_D G_1(z, \tilde{z}) R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{z}, \zeta) d\tilde{x}d\tilde{y} = R_{2;(\alpha,1),(\beta,0)}(z, \zeta) \quad \text{und} \quad (4.44)$$

$$G_{25}(z, \zeta) := -\frac{1}{\pi} \int_D N_1(z, \tilde{z}) R_{1;\alpha,\beta}(\tilde{z}, \zeta) d\tilde{x}d\tilde{y} = R_{2;(\alpha,0),(\beta,1)}(z, \zeta). \quad (4.45)$$

Weitere drei Hybride mit umgekehrter Reihenfolge der harmonischen Green-Funktionen erhalten wir aufgrund der Symmetrie (3.22) jeweils durch Tausch der Variablen z und ζ .

Korollar 4.13 ([Beg06, Bur09]): Die hybriden biharmonischen Green-Funktionen (4.43), (4.44) und (4.45) für den Einheitskreis $D = \mathbb{D}$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} G_{22}(z, \zeta) &= R_{2;(0,1),(1,0)}(z, \zeta) \\ &= |z - \zeta|^2 \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 - 2(1 - |z|^2)(2 - \log |1 - z\bar{\zeta}|^2) \\ &\quad + (1 + |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} G_{23}(z, \zeta) &= R_{2;(\alpha,1),(\beta,0)}(z, \zeta) \\ &= |z - \zeta|^2 \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \\ &\quad + 2\beta(|z|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + \beta k)(k + 1)} \quad \text{und} \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} G_{25}(z, \zeta) &= R_{2;(\alpha,0),(\beta,1)}(z, \zeta) \\ &= |z - \zeta|^2 \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 - 2(1 - |\zeta|^2)(2 - \log |1 - z\bar{\zeta}|^2) \\ &\quad + (1 - |\zeta|^2)(1 + |z|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \\ &\quad + 2\beta(1 + |z|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + \beta k)(k + 1)} - 4\beta \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + \beta k)k}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Beweis: Wir setzen die konkreten Werte für $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ in (4.40) ein. G_{23} ergibt sich sofort, wenn wegen $\beta_2 = 0$ die entsprechenden Terme gestrichen und dann $\alpha_1 = \alpha$ sowie $\beta_1 = \beta$ gesetzt werden. G_{22} können wir noch weiter vereinfachen. Es ist

$$\begin{aligned} G_{22}(z, \zeta) &= G_2(z, \zeta) + 2(|z|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k(k + 1)} \\ &= G_2(z, \zeta) - 2(|z|^2 - 1) \left(\log |1 - z\bar{\zeta}|^2 + \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k + 1} \right) \\ &= G_2(z, \zeta) - 2(|z|^2 - 1) \left(\log |1 - z\bar{\zeta}|^2 - 2 + \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \right), \end{aligned}$$

woraus (4.46) folgt. Für G_{25} setzen wir $\alpha_1 = \alpha, \beta_1 = \beta$ sowie $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 1$. Für den nur von β_2 abhängigen Summanden erhalten wir dann analog zu G_{22} die Vereinfachung

$$2(|z|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k(k + 1)} = -2(|z|^2 - 1) \left(\log |1 - z\bar{\zeta}|^2 + 2 + \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \right).$$

Fassen wir diese mit den Termen aus $G_2(z, \zeta)$ zusammen, so erhalten wir (4.48). \square

4.4 Der triharmonische Fall

Den triharmonischen Fall bestimmen wir nur für Parameter $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ mit $-\frac{\alpha_i}{\beta_i} \notin \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3$.

Wir erhalten die triharmonische Robin-Funktion $R_{3;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta)$ für den Einheitskreis \mathbb{D} , indem wir das Faltungsintegral (3.21) mit der biharmonischen Robin-Funktion $R_{2;\underline{\alpha}',\underline{\beta}'}(z, \zeta)$ aus (4.40) auswerten:

$$R_{3;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} R_{1;\alpha_3,\beta_3}(z, z_1) R_{2;\underline{\alpha}',\underline{\beta}'}(z_1, \zeta) dx_1 dy_1. \quad (4.49)$$

Wir schreiben wieder wie in (4.23)

$$R_{1;\alpha_3,\beta_3}(z, \zeta) = G_1(z, \zeta) + h_1(z, \zeta) = \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 + 2\beta_3 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha_3 + \beta_3 k} \quad (4.50)$$

und für $R_{2;\underline{\alpha}',\underline{\beta}'}(z, \zeta)$

$$R_{2;\underline{\alpha}',\underline{\beta}'}(z, \zeta) = G_2(z, \zeta) + h_2(z, \zeta) \quad (4.51)$$

mit $G_2(z, \zeta)$ aus (4.33)

$$G_2(z, \zeta) = |z - \zeta|^2 \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 + (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \left(\frac{\log(1 - z\bar{\zeta})}{z\bar{\zeta}} + \frac{\log(1 - \bar{z}\zeta)}{\bar{z}\zeta} \right)$$

und

$$\begin{aligned} h_2(z, \zeta) &= 2\beta_1(|z|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(k + 1)} \\ &\quad + 2\beta_2(|\zeta|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)} \\ &\quad - 4\beta_1\beta_2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Wir teilen nun das Faltungsintegral (4.49) auf und berechnen zunächst die triharmonische Green-Funktion $G_3(z, \zeta)$:

$$G_3(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} G_2(z_1, \zeta) G_1(z_1, z) dx_1 dy_1. \quad (4.53)$$

Die weiteren Teilintegrale sind

$$I_1(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} h_2(z_1, \zeta) G_1(z_1, z) dx_1 dy_1, \quad (4.54)$$

$$I_2(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} G_2(z_1, \zeta) h_1(z, z_1) dx_1 dy_1 \quad \text{und} \quad (4.55)$$

$$I_3(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} h_2(z_1, \zeta) h_1(z_1, z) dx_1 dy_1. \quad (4.56)$$

Lemma 4.14: Für die Funktion $\hat{G}_3(z, \zeta)$, $z, \zeta \in \mathbb{D}$, definiert durch

$$\hat{G}_3(z, \zeta) := \Gamma_3(z - \zeta) + \hat{h}_3(z, \zeta) \quad (4.57)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{h}_3(z, \zeta) &:= \frac{|z|^4}{4} + \frac{5}{4}|z|^2(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) - 2|z\zeta|^2 \\ &\quad - \frac{|z|^4}{4} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k+1} + \frac{2|z\zeta|^2 - |z|^2 + |z|^4}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k+1} \\ &\quad - \left(|z\zeta|^2 + \frac{|z|^4}{4} \right) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k} + \frac{|z|^2}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k+1} + (\bar{z}\zeta)^{k+1}}{k} \\ &\quad - (1 - |\zeta|^2)|z|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k^2} \end{aligned} \quad (4.58)$$

und der Fundamentallösung $\Gamma_3(z)$ aus (3.2), gilt

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \hat{G}_3(z, \zeta) = G_2(z, \zeta). \quad (4.59)$$

Beweis: Für die biharmonische Green-Funktion gilt mit (4.33):

$$\begin{aligned} G_2(z, \zeta) &= |z - \zeta|^2 \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \\ &= \Gamma_2(z - \zeta) - |z - \zeta|^2 \left(2 + \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k} \right) \\ &\quad - (1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Für $\Gamma_3(z - \zeta)$ folgt die Behauptung wegen (3.3). Für den Rest von $G_2(z, \zeta)$ sortieren wir zunächst die Summen nach Potenzen von z und \bar{z} , um \hat{G}_3 einfach bestimmen zu können. Es ist

$$\begin{aligned} G_2(z, \zeta) &= \Gamma_2(z - \zeta) - 2(|z|^2 - (z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) + |\zeta|^2) \\ &\quad - (|\zeta|^2 + |z|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k} + \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k+1} + (\bar{z}\zeta)^{k+1}}{k} \\ &\quad + |z|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} - (1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k}. \end{aligned}$$

Wir rechnen termweise nach, dass

$$\begin{aligned}
 \hat{G}_3(z, \zeta) &= \Gamma_3(z - \zeta) - \frac{|z|^4}{2} + |z|^2(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) - 2|z\zeta|^2 \\
 &\quad - |z\zeta|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k(k+1)} - \frac{|z|^4}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k(k+2)} \\
 &\quad + |z|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k+1} + (\bar{z}\zeta)^{k+1}}{k(k+2)} + \frac{|z|^4}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k(k+1)} \\
 &\quad - (1 - |\zeta|^2)|z|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k^2} \tag{4.61}
 \end{aligned}$$

die Gleichung (4.59) erfüllt. Mit den Partialbruchzerlegungen und Indexverschiebungen

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k(k+1)} &= \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k} - \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k+1}, \\
 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k+1} + \frac{1}{2}, \\
 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k+1} + (\bar{z}\zeta)^{k+1}}{k(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k+1} + (\bar{z}\zeta)^{k+1}}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k+1} \\
 &\quad + \frac{1}{4}(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) \quad \text{und} \\
 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k(k+1)} &= \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k+1} - \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k+1} + 2
 \end{aligned}$$

sowie anschließendem Zusammenfassen erhalten wir aus (4.61) die Form (4.57). \square

Lemma 4.15: Für den Operator P aus (4.12) gilt

$$\begin{aligned}
 P[\Gamma_3(z - \zeta)](z) &= \frac{3}{4}(1 + 4|\zeta|^2 + |\zeta|^4 - 2(1 + |\zeta|^2)(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) + (z\bar{\zeta})^2 + (\bar{z}\zeta)^2) \\
 &\quad + \frac{1 + 4|\zeta|^2 + |\zeta|^4}{4} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k} \\
 &\quad - \frac{1 + |\zeta|^2}{2} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k+1} + (\bar{z}\zeta)^{k+1}}{k} + |\zeta|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \right) \\
 &\quad + \frac{|\zeta|^2}{4}(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) + \frac{1}{4} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k+2} + (\bar{z}\zeta)^{k+2}}{k} + \frac{|\zeta|^4}{4} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k+1}, \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

wobei wir $\Gamma_3(z - \zeta)$ als Funktion von z betrachten.

Beweis: Es ist für $|z| = 1$:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_3(z - \zeta) &= \frac{|z - \zeta|^4}{4} (3 - \log |z - \zeta|^2) \\
 &= + \frac{1 + 4|\zeta|^2 + |\zeta|^4 - 2(1 + |\zeta|^2)(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) + (z\bar{\zeta})^2 + (\bar{z}\zeta)^2}{4} \\
 &\quad \times \left(\sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k} + 3 \right).
 \end{aligned}$$

Für

$$\begin{aligned}
 w_1(z) &:= \frac{3}{4}(1 + 4|\zeta|^2 + |\zeta|^4 - 2(1 + |\zeta|^2)(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) + (z\bar{\zeta})^2 + (\bar{z}\zeta)^2) \quad \text{und} \\
 w_2(z) &:= \frac{1 + 4|\zeta|^2 + |\zeta|^4}{4} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k}
 \end{aligned}$$

gilt $P[w_1](z) = w_1(z)$ und $P[w_2](z) = w_2(z)$, da w_1 und w_2 harmonisch sind. Für den Vorfaktor

$$\frac{1}{4}(-2(1 + |\zeta|^2)(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) + (z\bar{\zeta})^2 + (\bar{z}\zeta)^2)$$

und $|z| = 1$ definieren wir die harmonischen Funktionen

$$\begin{aligned}
 w_3(z) &:= (z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k+1} + (\bar{z}\zeta)^{k+1}}{k} + |\zeta|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \quad \text{und} \\
 w_4(z) &:= ((z\bar{\zeta})^2 + (\bar{z}\zeta)^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k} \\
 &= |\zeta|^2(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) + \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k+2} + (\bar{z}\zeta)^{k+2}}{k} + |\zeta|^4 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k+1}.
 \end{aligned}$$

Wieder gilt $P[w_3](z) = w_3(z)$ und $P[w_4](z) = w_4(z)$. Es ist

$$\Gamma_3(z - \zeta)|_{|z|=1} = w_1 + w_2 - \frac{1}{2}(1 + |\zeta|^2)w_3 + \frac{1}{4}w_4.$$

Wegen der Linearität des Poisson-Operators P gilt

$$P[\Gamma_3(z - \zeta)](z) = P[w_1](z) + P[w_2](z) - \frac{1}{2}(1 + |\zeta|^2)P[w_3](z) + \frac{1}{4}P[w_4](z),$$

wobei wir $\Gamma_3(z - \zeta)$ wieder als Funktion von z betrachten. Das Aufsummieren der Teilergebnisse liefert (4.62). \square

Lemma 4.16: *Für die in (4.58) definierte Funktion $\hat{h}_3(z, \zeta)$ gilt:*

$$\begin{aligned} P[\hat{h}_3](z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \hat{h}_3(z_1, \zeta) g_1(z_1, z) \frac{dz_1}{z_1} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{5}{4}(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) - 2|\zeta|^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k+1} + |\zeta|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k+1} \\ &\quad - \left(|\zeta|^2 + \frac{1}{4} \right) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k+1} + (\bar{z}\zeta)^{k+1}}{k} \\ &\quad - (1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k^2}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition von $\hat{h}_3(z, \zeta)$, wenn wir die Kürzungsregel $|z|^2 = 1$ anwenden. \square

Theorem 4.17 ([Bur09]): *Für die triharmonische Green-Funktion des Einheitskreises \mathbb{D} gilt:*

$$\begin{aligned} G_3(z, \zeta) &= \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta - 4)}{4} + \frac{|z - \zeta|^4}{4} \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 \\ &\quad - \frac{(|z|^2 + |\zeta|^2)(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \\ &\quad + \frac{(1 - |z|^4)(1 - |\zeta|^4)}{4} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k+1} \\ &\quad + (1 - |\zeta|^2)(1 - |z|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k^2}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Beweis: $G_3(z, \zeta)$ ist durch das Faltungsintegral (4.53) definiert. Die Integraldarstellung (4.29) zusammen mit (4.59) aus Lemma 4.14 liefert

$$G_3(z, \zeta) = \hat{G}_3(z, \zeta) - P[\hat{G}_3](z) = \Gamma_3(z - \zeta) + \hat{h}_3(z, \zeta) - (P[\Gamma_3(z - \zeta)](z) + P[\hat{h}_3](z))$$

mit

$$\hat{G}_3(z, \zeta) = \Gamma_3(z - \zeta) + \hat{h}_3(z, \zeta)$$

aus (4.57) und

$$P[\hat{G}_3](z) = P[\Gamma_3(z - \zeta)](z) + P[\hat{h}_3](z)$$

aus (4.62) und (4.58). Die Addition der vier Funktionsterme und das Zusammenfassen liefern (4.64), wenn wir

$$\begin{aligned} w_1(z, \zeta) &= \frac{|z - \zeta|^4}{4} \log |1 - z\bar{\zeta}|^2 \\ &= -\frac{1}{4} (|z|^4 + 4|z\zeta|^2 + |\zeta|^4 + (z\bar{\zeta})^2 + (\bar{z}\zeta)^2 - 2(|z|^2 + |\zeta|^2)(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta)) \quad (4.65) \\ &\quad \times \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k} \\ &= -\frac{|z|^4 + 4|z\zeta|^2 + |\zeta|^4}{4} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k} - \frac{|z\zeta|^2}{4} (z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k+2} + (\bar{z}\zeta)^{k+2}}{k} - \frac{|z\zeta|^4}{4} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k+1} \\ &\quad + \frac{|z|^2 + |\zeta|^2}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k+1} + (\bar{z}\zeta)^{k+1}}{k} \\ &\quad + \frac{(|z|^2 + |\zeta|^2)|z\zeta|^2}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \end{aligned}$$

berücksichtigen, wobei wir beim Multiplizieren der Vorfaktoren in die Potenzreihen

$$(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta)((z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k) = (z\bar{\zeta})^{k+1} + (\bar{z}\zeta)^{k+1} + |z\zeta|^2((z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1})$$

beachten. Wir führen die Berechnung von $G_3(z, \zeta)$ getrennt nach den verschiedenen Potenzreihen durch und bestimmen jeweils deren Vorfaktoren. Die rechte Seite von $w_1(z, \zeta)$ ziehen wir dabei ab, da wir diese Terme im Logarithmus zusammenfassen werden. Dabei nutzen wir zunächst die Indexverschiebung

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k+1} = \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} - 2,$$

um eine einheitliche Darstellung zu erhalten. Zunächst fassen wir die Terme zusammen, die keine Potenzreihe enthalten:

$$\begin{aligned}
 w_2(z, \zeta) &= \overbrace{\frac{3}{4}(|z|^4 + 4|z\zeta|^2 + |\zeta|^4 + (z\bar{\zeta})^2 + (\bar{z}\zeta)^2 - 2(|z|^2 + |\zeta|^2)(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta))}^{\Gamma_3} \\
 &\quad + \overbrace{\frac{5}{4}|z|^2(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) - \frac{3}{4}|z|^4 - 4|z\zeta|^2 + |z|^2}^{\hat{h}_3} \\
 &\quad - \overbrace{\frac{3}{4}(1 + 4|\zeta|^2 + |\zeta|^4 + (z\bar{\zeta})^2 + (\bar{z}\zeta)^2) + \frac{6 + 5|\zeta|^2}{4}(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta)}^{P[\Gamma_3]} \\
 &\quad - \overbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) - 4|\zeta|^2\right)}^{P[\hat{h}_3]} + \overbrace{\frac{|z\zeta|^2}{4}(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta)}^{w_1} \\
 &= \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta - 4)}{4}.
 \end{aligned}$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned}
 w_3(z, \zeta) &= \left(\overbrace{-\frac{|z|^4}{4}}^{\hat{h}_3} - \overbrace{\frac{|\zeta|^4}{4}}^{P[\Gamma_3]} + \overbrace{\frac{1}{4}}^{P[\hat{h}_3]} + \overbrace{\frac{|z\zeta|^4}{4}}^{w_1} \right) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k+1} \\
 &= \frac{(1 - |z|^4)(1 - |\zeta|^4)}{4} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k+1}, \\
 w_4(z, \zeta) &= \left(\overbrace{\frac{2|z\zeta|^2 - |z|^2 + |z|^4}{2}}^{\hat{h}_3} + \overbrace{\frac{|\zeta|^2 + |\zeta|^4}{2}}^{P[\Gamma_3]} - \overbrace{\frac{P[\hat{h}_3]}{|\zeta|^2}}^{P[\hat{h}_3]} - \overbrace{\frac{(|z|^2 + |\zeta|^2)|z\zeta|^2}{2}}^{w_1} \right) \\
 &\quad \times \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \\
 &= -\frac{(|z|^2 + |\zeta|^2)(1 - |\zeta|^2)(1 - |z|^2)}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 w_5(z, \zeta) &= -\left(\overbrace{(1 - |\zeta|^2)|z|^2}^{\hat{h}_3} - \overbrace{(1 - |\zeta|^2)}^{P[\hat{h}_3]} \right) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k^2} \\
 &= -(1 - |\zeta|^2)(1 - |z|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k^2}.
 \end{aligned}$$

Die weiteren Potenzreihen liefern in der Summe keinen Beitrag. Addieren wir die Hilfsfunktionen w_1 bis w_5 , erhalten wir die Darstellung (4.64) für $G_3(z, \zeta)$. \square

Lemma 4.18: Für das Integral $I_1(z, \zeta)$ aus (4.54) gilt:

$$\begin{aligned}
 I_1(z, \zeta) &= 2\beta_1(1 - |z|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(k + 1)^2} \\
 &\quad + \beta_1(|z|^4 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(k + 1)(k + 2)} \\
 &\quad + 2\beta_2(|z|^2 - 1)(|\zeta|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)^2} \\
 &\quad + 4\beta_1\beta_2(1 - |z|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)^2}. \tag{4.66}
 \end{aligned}$$

Beweis: Zur Berechnung von $I_1(z, \zeta)$ verwenden wir die Integraldarstellung (4.29). Für $h_2(z, \zeta)$ aus (4.52) und

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_3(z, \zeta) &:= -2\beta_1|z|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(k + 1)^2} + \beta_1|z|^4 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(k + 1)(k + 2)} \\
 &\quad + 2\beta_2|z|^2(|\zeta|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)^2} \\
 &\quad - 4\beta_1\beta_2|z|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)^2} \tag{4.67}
 \end{aligned}$$

gilt

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \tilde{h}_3(z, \zeta) = h_2(z, \zeta).$$

Damit ist

$$I_1(z, \zeta) = \tilde{h}_3(z, \zeta) - P[\tilde{h}_3](z). \tag{4.68}$$

Zur Berechnung von $P[\tilde{h}_3](z)$ wenden wir erneut die Kürzungsregel $|z|^2 = 1$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_3(z, \zeta)|_{|z|=1} &:= -2\beta_1 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(k + 1)^2} + \beta_1 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(k + 1)(k + 2)} \\
 &\quad + 2\beta_2(|\zeta|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)^2} \\
 &\quad - 4\beta_1\beta_2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)^2}. \tag{4.69}
 \end{aligned}$$

Der Funktionsterm auf der rechten Seite ist eine in z harmonische Funktion, stimmt also auch für $|z| < 1$ mit $P[\tilde{h}_3](z)$ überein. Setzen wir (4.67) und (4.69) in (4.68) ein und fassen wir dann zusammen, so erhalten wir (4.66). \square

Zur Berechnung von $I_2(z, \zeta)$ nutzen wir die Integraldarstellung (3.43) für $D = \mathbb{D}$ und $n = 2$. Wir führen dafür den biharmonischen Poisson-Kern ein.

Definition 4.19 ([BDW08, DGW10]): Der biharmonische Poisson-Kern $g_2(z, \zeta)$ des Einheitskreises \mathbb{D} ist definiert durch

$$g_2(z, \zeta) := (1 - |\zeta|^2) \left(1 - \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \right). \quad (4.70)$$

Dabei ist $z \in \partial\mathbb{D}$ und $\zeta \in \mathbb{D}$.

Dieser liefert erneut einen Operator $P_2 : C(\partial\mathbb{D}) \rightarrow C(\mathbb{D})$ durch

$$P_2[w](z) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} w(z_1) g_2(z_1, z) \frac{dz_1}{z_1}. \quad (4.71)$$

Im Gegensatz zu g_1 ist g_2 nicht mehr symmetrisch in z und ζ . Wir wählen das erste Argument auf dem Rand, das zweite im Inneren.

Lemma 4.20: Für die biharmonische Green-Funktion des Einheitskreises aus (4.33) gilt

$$\partial_{\nu_z} G_2(z, \zeta)|_{|z|=1} = -2 g_2(z, \zeta). \quad (4.72)$$

Beweis: Wir wenden den Operator $\partial_{\nu_z} = z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}}$ der äußeren Normalenableitung des Einheitskreises auf $G_2(z, \zeta)$ an und benutzen dann die Produktregel:

$$\begin{aligned} \partial_{\nu_z} G_2(z, \zeta) &= |z - \zeta|^2 \overbrace{\partial_{\nu_z} G_1(z, \zeta)}{=-2g_1} + (\partial_{\nu_z} |z - \zeta|^2) \overbrace{G_1(z, \zeta)}{=0} \\ &\quad - \underbrace{(\partial_{\nu_z} (1 - |z|^2))}_{=-2} (1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \\ &\quad - \underbrace{(1 - |z|^2)}_{=0} \partial_{\nu_z} (1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \\ &= -2|z - \zeta|^2 g_1(z, \zeta) + 2(1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k}. \end{aligned}$$

Mit dem Poisson-Kern $g_1(z, \zeta)$ aus (4.9) erhalten wir unter Berücksichtigung von $|z| = 1$

$$\begin{aligned} |z - \zeta|^2 g_1(z, \zeta) &= (z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta}) \left(\frac{z}{z - \zeta} + \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}} - 1 \right) \\ &= 1 - z\bar{\zeta} + 1 - \bar{z}\zeta - (1 - (z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta) + |\zeta|^2) \\ &= 1 - |\zeta|^2. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die erste Rechnung ein, erhalten wir

$$\partial_{\nu_z} G_2(z, \zeta) = -2(1 - |\zeta|^2) \left(1 - \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^{k-1} + (\bar{z}\zeta)^{k-1}}{k} \right) = -2g_2(z, \zeta).$$

□

Durch Einsetzen von (4.9) und (4.72) in (3.43) und Umstellen erhalten wir

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} (\partial_{z_1} \partial_{\bar{z}_1})^2 w(z_1) G_2(z_1, z) dx_1 dy_1 = w(z) - P_2[\partial_z \partial_{\bar{z}} w](z) - P[w](z). \quad (4.73)$$

Dabei gilt auf dem Einheitskreis $z = e^{is}$ für den Bogenlängenparameter s , woraus sich $ds = \frac{dz}{iz}$ ergibt.

Bemerkung 4.21: Für $w \in C(\partial\mathbb{D})$ ist $P_2[w](z)$ biharmonisch auf \mathbb{D} . Das heißt: $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^2 w = 0$.

Beweis: Ist w stetig auf $\partial\mathbb{D}$, so ist

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} P_2[w](z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} w(z_1) \partial_z \partial_{\bar{z}} g_2(z_1, z) \frac{dz_1}{z_1} = P[w](z),$$

also harmonisch. Somit ist $P_2[w](z)$ biharmonisch. □

Lemma 4.22: Für das Integral $I_2(z, \zeta)$ aus (4.55) gilt:

$$\begin{aligned} I_2(z, \zeta) = & -2\beta_3(1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)^2} \\ & + \beta_3(1 - |\zeta|^4) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)(k+2)}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Beweis: Für die Funktionen

$$\begin{aligned} \check{h}_2(z, \zeta) &= 2\beta_3 |\zeta|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)} \quad \text{und} \\ \check{h}_3(z, \zeta) &= \beta_3 |\zeta|^4 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)(k+2)} \end{aligned} \quad (4.75)$$

gelten

$$\partial_{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}} \check{h}_3(z, \zeta) = \check{h}_2(z, \zeta) \quad \text{und} \quad \partial_{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}} \check{h}_2(z, \zeta) = h_1(z, \zeta),$$

wobei h_1 in (4.50) definiert wurde.

Das Einsetzen in die Operatoren P und P_2 , wobei wir \check{h}_3 als Funktion von ζ auffassen, liefert

$$P[\check{h}_3](\zeta) = \beta_3 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)(k+2)} \quad \text{und} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} P_2[\check{h}_2](\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \check{h}_2(z, z_1) g_2(z_1, \zeta) \frac{dz_1}{z_1} \\ &= 2\beta_3(1 - |\zeta|^2) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \sum_{k \geq 1} \frac{(z_1\bar{\zeta})^k + (\bar{z}_1\zeta)^k}{(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)} \\ &\quad \times \left(1 - \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{z}_1)^{l-1} + (\bar{z}\zeta_1)^{l-1}}{l} \right) \frac{dz_1}{z_1} \\ &= -2\beta_3(1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)^2}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Für $P_2[\check{h}_2](\zeta)$ haben wir zunächst die Kürzungsregel $|z_1|^2 = 1$ angewandt und dadurch eine in \mathbb{D} harmonische Funktion als Integrand erhalten. Das Integral haben wir dann mit der Mittelwertegenschaft harmonischer Funktionen berechnet, indem wir den Integranden bei $z_1 = 0$ ausgewertet haben.

Setzen wir (4.75), (4.76) und (4.77) für (4.55) in (4.73) ein, erhalten wir die Behauptung. \square

Lemma 4.23: *Für das Faltungsintegral I_3 aus (4.56) gilt:*

$$\begin{aligned} I_3(z, \zeta) &= 4\beta_1\beta_3 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)^2} \\ &\quad - 4\beta_1\beta_3 \cdot \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)(k+2)} \\ &\quad - 4\beta_2\beta_3(|\zeta|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_2 + \beta_2 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)^2} \\ &\quad + 8\beta_1\beta_2\beta_3 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)^2}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Beweis: Wir berechnen

$$I_3(z, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} h_2(z_1, \zeta) h_1(z_1, z) dx_1 dy_1$$

mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes (2.12). Zur Auswertung des Randintegrals bilden wir Potenzreihen in z_1 und \bar{z}_1 . Diese sind harmonisch, so dass wir das Integral mit der Mittelwertegenschaft harmonischer Funktionen berechnen, indem wir die Potenzreihen für $z_1 = \bar{z}_1 = 0$ auswerten. Wir müssen also nur solche Produkte mit Faktoren aus h_1 aus (4.50) und h_2 aus (4.52) betrachten, in denen z_1 und \bar{z}_1 mit gleichen Exponenten vorkommen. Wir teilen dafür h_2 in vier Summanden auf, die das Integrieren der Produkte erleichtern:

$$\begin{aligned} f_1(z, \zeta) &= -2\beta_1 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(k+1)}, \\ f_2(z, \zeta) &= 2\beta_1 |z|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(k+1)}, \\ f_3(z, \zeta) &= 2\beta_2 (|\zeta|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_2 + \beta_2 k)(k+1)} \quad \text{und} \\ f_4(z, \zeta) &= -4\beta_1 \beta_2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 k)(k+1)}. \end{aligned}$$

Die Summanden der Produkte $f_i(z_1, \zeta) h_1(z_1, z)$, $i = 1, 2, 3, 4$, die einen Beitrag zum Integral liefern, sind dann

$$\begin{aligned} f_1(z_1, \zeta) \star h_1(z_1, z) &:= -4\beta_1 \beta_3 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{z}_1 z_1 \bar{\zeta})^k + (\bar{z} z_1 \bar{z}_1 \zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)}, \\ f_2(z_1, \zeta) \star h_1(z_1, z) &:= 4\beta_1 \beta_3 |z_1|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{z}_1 z_1 \bar{\zeta})^k + (\bar{z} z_1 \bar{z}_1 \zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)}, \\ f_3(z_1, \zeta) \star h_1(z_1, z) &:= 4\beta_2 \beta_3 (|\zeta|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{z}_1 z_1 \bar{\zeta})^k + (\bar{z} z_1 \bar{z}_1 \zeta)^k}{(\alpha_2 + \beta_2 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)} \quad \text{und} \\ f_4(z_1, \zeta) \star h_1(z_1, z) &:= -8\beta_1 \beta_2 \beta_3 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{z}_1 z_1 \bar{\zeta})^k + (\bar{z} z_1 \bar{z}_1 \zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)}. \end{aligned}$$

Die Integration liefert

$$\begin{aligned}
 F_1(z_1) &= -\bar{z}_1 4\beta_1\beta_3 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{z}_1 z_1 \bar{\zeta})^k + (\bar{z}z_1 \bar{z}_1 \zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)^2}, \\
 F_2(z_1) &= \bar{z}_1 4\beta_1\beta_3 |z_1|^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{z}_1 z_1 \bar{\zeta})^k + (\bar{z}z_1 \bar{z}_1 \zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)(k+2)}, \\
 F_3(z_1) &= \bar{z}_1 4\beta_2\beta_3 (|\zeta|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{z}_1 z_1 \bar{\zeta})^k + (\bar{z}z_1 \bar{z}_1 \zeta)^k}{(\alpha_2 + \beta_2 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)^2} \quad \text{und} \\
 F_4(z_1) &= -\bar{z}_1 8\beta_1\beta_2\beta_3 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{z}_1 z_1 \bar{\zeta})^k + (\bar{z}z_1 \bar{z}_1 \zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)^2}
 \end{aligned}$$

mit $\partial_{\bar{z}_1} F_i(z_1) = f_i(z_1, \zeta) \star h_1(z_1, z)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Das Einsetzen in I_3 und Anwenden des Gauß'schen Integralsatzes ergibt

$$\begin{aligned}
 I_3(z, \zeta) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} (z_1 F_1(z_1) + z_1 F_2(z_1) + z_1 F_3(z_1) + z_1 F_4(z_1)) \frac{dz_1}{z_1} \\
 &= 4\beta_1\beta_3 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)^2} \\
 &\quad - 4\beta_1\beta_3 \cdot \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)(k+2)} \\
 &\quad - 4\beta_2\beta_3 (|\zeta|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_2 + \beta_2 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)^2} \\
 &\quad + 8\beta_1\beta_2\beta_3 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k+1)^2},
 \end{aligned}$$

also (4.78). □

Theorem 4.24: Die hybride triharmonische Robin-Funktion $R_{3;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta)$ mit den Parametern $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, so dass $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$ und $-\frac{\alpha_i}{\beta_i} \notin \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3$, gelten, ist für den Einheitskreis gegeben durch

$$R_{3;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(z, \zeta) = G_3(z, \zeta) + h_3(z, \zeta) \quad (4.79)$$

mit der triharmonischen Green-Funktion

$$\begin{aligned} G_3(z, \zeta) &= \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)(z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta - 4)}{4} + \frac{|z - \zeta|^4}{4} \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 \\ &\quad - \frac{(|z|^2 + |\zeta|^2)(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k + 1} \\ &\quad + \frac{(1 - |z|^4)(1 - |\zeta|^4)}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{k + 2} \\ &\quad + (1 - |\zeta|^2)(1 - |z|^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(k + 1)^2} \end{aligned}$$

und der triharmonischen Funktion

$$\begin{aligned}
 h_3(z, \zeta) &= 2\beta_1(1 - |z|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(k + 1)^2} \\
 &\quad - \beta_1(1 - |z|^4) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(k + 1)(k + 2)} \\
 &\quad + 2\beta_2(|z|^2 - 1)(|\zeta|^2 - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)^2} \\
 &\quad + 4\beta_1\beta_2(1 - |z|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 k)(k + 1)^2} \\
 &\quad + 2\beta_3(1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_3 + \beta_3 k)(k + 1)^2} \\
 &\quad - \beta_3(1 - |\zeta|^4) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_3 + \beta_3 k)(k + 1)(k + 2)} \\
 &\quad + 4\beta_1\beta_3 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k + 1)^2} \\
 &\quad - 4\beta_1\beta_3 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k + 1)(k + 2)} \\
 &\quad + 4\beta_2\beta_3(1 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_2 + \beta_2 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k + 1)^2} \\
 &\quad + 8\beta_1\beta_2\beta_3 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha_1 + \beta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 k)(\alpha_3 + \beta_3 k)(k + 1)^2}. \tag{4.80}
 \end{aligned}$$

Beweis: Die triharmonische Green-Funktion haben wir bereits in Theorem 4.17 hergeleitet. Die Funktion h_3 ist durch $h_3(z, \zeta) = I_1(z, \zeta) + I_2(z, \zeta) + I_3(z, \zeta)$ gegeben, wobei I_1 in (4.66), I_2 in (4.74) und I_3 in (4.78) angegeben wurden. Das Aufsummieren dieser drei Faltungsintegrale liefert die angegebene Form. \square

Setzen wir $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, $i = 1, 2, 3$, so erhalten wir $R_{3;\alpha,\beta}$, wobei wir in h_3 noch einige Summanden zusammenfassen können.

Korollar 4.25 ([Eme21]): Die triharmonische Robin-Funktion $R_{3;\alpha,\beta}(z, \zeta)$ des Einheitskreises $D = \mathbb{D}$ mit $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ und $-\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$R_{3;\alpha,\beta}(z, \zeta) = G_3(z, \zeta) + h_3(z, \zeta) \quad (4.81)$$

mit der triharmonischen Green-Funktion $G_3(z, \zeta)$ aus (4.64) und der triharmonischen Funktion

$$\begin{aligned} h_3(z, \zeta) &= 2\beta(3 - 2|z|^2 - 2|\zeta|^2 + |z\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + \beta k)(k + 1)^2} \\ &+ \beta(|z|^4 + |\zeta|^4 - 2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + \beta k)(k + 1)(k + 2)} \\ &+ 4\beta^2(3 - |z|^2 - |\zeta|^2) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + \beta k)^2(k + 1)^2} \\ &- 4\beta^2 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + \beta k)^2(k + 1)(k + 2)} + 8\beta^3 \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{(\alpha + \beta k)^3(k + 1)^2}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Setzen wir in (4.81) $\beta = 0$, erhalten wir wieder $G_3(z, \zeta)$, für $\alpha = 0$ die triharmonische Neumann-Funktion.

Korollar 4.26 ([Bur09, Wan10]): Die triharmonische Neumann-Funktion $N_3(z, \zeta)$ des Einheitskreises $D = \mathbb{D}$ ist

$$N_3(z, \zeta) = R_{3;0,\beta}(z, \zeta). \quad (4.83)$$

Gegenüber [Bur09] haben wir eine Darstellung erreicht, in der sämtliche Integrale ausgewertet wurden. Für die in [Wan10] angegebene Darstellung der triharmonischen Neumann-Funktion sind nach dem Einsetzen des Parameters $\alpha = 0$ noch Terme zusammenzufassen.

Auch die beiden weiteren hybriden Green-Neumann-Funktionen, die in [Bur09], Definition 3.4.4 bzw. 3.4.6, untersucht wurden, können wir für den Einheitskreis explizit angeben:

$$H_3(z, \zeta) := -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} G_2(z, z_1) N_1(z_1, \zeta) dx_1 dy_1 = R_{3;(1,1,0),(0,0,1)}(z, \zeta) \quad \text{und} \quad (4.84)$$

$$\tilde{H}_3(z, \zeta) := -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} N_2(z, z_1) G_1(z_1, \zeta) dx_1 dy_1 = R_{3;(1,0,0),(0,1,1)}(z, \zeta). \quad (4.85)$$

Kapitel 5

Lösung des Robin-Randwertproblems

In diesem Kapitel bestimmen wir die Lösung mit den zugehörigen Lösbarkeitsbedingungen für das hybride Robin-Randwertproblem in allgemeiner Form und spezialisieren diese anschließend für den Einheitskreis. Für $n = 2$ und $n = 3$ betrachten wir spezielle Werte für die Parameter $\underline{\alpha}$ und $\underline{\beta}$ des Robin-Problems, die bisher schon einzeln untersucht wurden ([Bur09, Beg06]). Ausgangspunkt der Untersuchung ist auch hier wieder der harmonische Fall, der in [BV13, BBS17] untersucht wurde.

5.1 Problemstellung

Die Integraldarstellung (3.39) legt nahe, als Lösungsformel für die hybride polyharmonische Robin-Randwertaufgabe genutzt zu werden.

Sei w eine (klassische) Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w &= f \quad \text{in } D, \\ (\alpha_k + \beta_k \partial_\nu) (\partial_z \partial_{\bar{z}})^{k-1} w &= \gamma_k \quad \text{auf } \partial D \text{ für } k = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{5.1}$$

$M \subset \{1, \dots, n\}$, so dass $\alpha_i \neq 0$, falls $i \in M$, und $\beta_i \neq 0$, falls $i \notin M$, und sei $R_{n; \underline{\alpha}, \underline{\beta}}(z, \zeta)$ die zugehörige hybride polyharmonische Robin-Funktion für das Gebiet D . Dann können wir die Daten f und γ_k für $1 \leq k \leq n$ in die Integraldarstellung

(3.39) von w einsetzen. Es gilt mit $R_k(z, \zeta) := (\partial_z \partial_{\bar{z}})^{n-k} R_{n, \underline{\alpha}, \underline{\beta}}(z, \zeta)$:

$$\begin{aligned}
 w(z) = & -\frac{1}{\pi} \int_D R_{n; \underline{\alpha}, \underline{\beta}}(\zeta, z) f(\zeta) d\xi d\eta \\
 & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin M}}^n \frac{1}{4\pi\beta_k} \int_{\partial D} R_k(\zeta, z) \gamma_k(\zeta) ds_\zeta \\
 & - \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin M}}^n \frac{\tau_{k-1}(z)}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{k-1} w(\zeta) ds_\zeta \\
 & - \sum_{\substack{k=1 \\ k \in M}}^n \frac{1}{4\pi\alpha_k} \int_{\partial D} \gamma_k(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_k(\zeta, z) ds_\zeta \\
 & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \in M}}^n \frac{\tau_{k-1}(z)}{4\pi} \frac{\beta_k}{\alpha_k} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{k-1} \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) ds_\zeta.
 \end{aligned}$$

Allerdings treten in den Randintegralen der zweiten und vierten Summe noch immer die Funktion w selbst und ihre Ableitungen auf. Um eine Funktion w durch (5.2) zu definieren, ersetzen wir in (5.2) diese Terme durch die Konstanten $c_k, k = 1, \dots, n$:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{k-1} w(\zeta) ds_\zeta, & \text{für } k \notin M, \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{k-1} \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) ds_\zeta, & \text{für } k \in M. \end{cases} \quad (5.2)$$

Damit definieren wir

$$\begin{aligned}
 w(z) := & -\frac{1}{\pi} \int_D R_{n; \underline{\alpha}, \underline{\beta}}(\zeta, z) f(\zeta) d\xi d\eta \\
 & - \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin M}}^n \left(c_k \tau_{k-1}(z) - \frac{1}{4\pi\beta_k} \int_{\partial D} \gamma_k(\zeta) R_k(\zeta, z) ds_\zeta \right) \\
 & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \in M}}^n \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} c_k \tau_{k-1}(z) - \frac{1}{4\pi\alpha_k} \int_{\partial D} \gamma_k(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_k(\zeta, z) ds_\zeta \right). \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

Lemma 5.1: Seien $f \in L_p(D)$ mit $2 < p$ und $\gamma_k \in C(\partial D)$ für $k = 1, \dots, n$, dann gilt für die in (5.3) definierte Funktion w

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w(z) = f(z) \quad \text{in } D \quad (5.4)$$

im Sinne der verallgemeinerten Ableitung.

Beweis: Die Terme $\tau_{k-1}(z)$ sind polyharmonisch vom Grad k nach Lemma 3.4, liefern also keinen Beitrag zu $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w(z)$. Gleiches gilt für die Integranden der Randintegrale

$$\int_{\partial D} R_k(\zeta, z) \gamma_k(\zeta) ds_\zeta \quad \text{und} \\ \int_{\partial D} \gamma_k(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_k(\zeta, z) ds_\zeta.$$

Dies folgt, weil $R_k(z, \zeta)$ für $z \in D$ und $\zeta \in \partial D$ als Funktion von z polyharmonisch vom Grad k ist und die Integration in ζ sowie die Differentiation in z für in ζ stetiges γ_k und stetig (in beiden Variablen) nach z partiell differenzierbares R_k vertauschbar sind. Es bleibt also nur der Term

$$-\frac{1}{\pi} \int_D R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\zeta, z) f(\zeta) d\xi d\eta$$

zu untersuchen. Es ist

$$R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\zeta, z) = h(z, \zeta) + \Gamma_n(z - \zeta)$$

mit einer Funktion h , die in D polyharmonisch vom Grad n ist. Nach Theorem 3.1 gilt

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n \left(-\frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) \Gamma_n(z - \zeta) d\xi d\eta \right) = (\partial_z \partial_{\bar{z}})^n T_{n,D} f(z) = f(z)$$

im Sinne der verallgemeinerten Ableitung. Es bleibt also nur

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n \left(-\frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) h(z, \zeta) d\xi d\eta \right) = 0$$

zu zeigen. Wir benötigen dafür die Vertauschbarkeit von Integration in ζ und Differentiation in z . Wir nutzen dafür, dass $C^\infty(D)$ dicht in $L_p(D)$ mit $1 \leq p$ ist. Sei $\varphi_n \in C^\infty(D)$ für $n \geq 0$ eine Folge glatter Funktionen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = f$ in $L_1(D)$. Dann gilt

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n \int_D \varphi_n(\zeta) h(z, \zeta) d\xi d\eta = \int_D \varphi_n(\zeta) (\partial_z \partial_{\bar{z}})^n h(z, \zeta) d\xi d\eta = 0$$

und somit

$$(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n \int_D f(\zeta) h(z, \zeta) d\xi d\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^n \int_D \varphi_n(\zeta) h(z, \zeta) d\xi d\eta = 0.$$

□

Damit haben wir eine Lösung der Differentialgleichung gefunden. Ob es gelingt, die Konstanten c_k so zu bestimmen, dass w auch eine Lösung der Randwertaufgabe wird, ist noch zu untersuchen. Für das Riquier-Problem (3.8) gibt es keine weiteren Lösbarkeitsbedingungen. Da $M = \{1, \dots, n\}$ und alle $\beta_k = 0$ sind, gehen die Konstanten c_k nicht in w ein. Die Lösung ist dann durch (5.3) gegeben, sofern eine Green-Funktion für D bekannt ist. Betrachten wir dagegen das Neumann-Problem (3.9), so ist bereits für $n = 1$ die Lösbarkeitsbedingung

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \gamma(\zeta) ds_\zeta = \frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) d\xi d\eta$$

gegeben, die sich direkt aus dem Gauß'schen Integralsatz ergibt, da für das Neumann-Problem $\partial_\nu w = \gamma$ und $\partial_z \partial_{\bar{z}} w = f$ ist.

Die Lösbarkeitsbedingung des harmonischen Robin-Problems wurde für $D = \mathbb{D}$ in [BV13] untersucht. Dieses Ergebnis wurde in [BBS17] für beliebige Gebiete $D \subset \mathbb{C}$ verallgemeinert. Für polyharmonische Randwertaufgaben wurde zunächst das Neumann-Problem in [BV06] untersucht. Für verschiedene hybride biharmonische Probleme der Einheitskreisscheibe \mathbb{D} wurden die Lösbarkeitsbedingungen in [Beg06] untersucht. Hybride triharmonische Aufgaben wurden in [Bur09] betrachtet. Schließlich wurden die Lösbarkeitsbedingungen für das polyharmonische Robin-Problem in [Ac14] für eine Robin-Funktion mit homogenen Randbedingungen, also für $\tau_k \equiv 0$ und $\alpha, \beta \neq 0$ untersucht. Wir geben zunächst die Resultate für die harmonische Robin-Randwertaufgabe wieder und verallgemeinern diese Ergebnisse für die polyharmonische Randwertaufgabe (5.1) mit hybriden Robin-Randbedingungen.

5.2 Der harmonische Fall

Im harmonischen Fall $n = 1$ vereinfacht sich die Integraldarstellung (3.39) zu (2.33) bzw. (2.34). Die Randwertaufgabe wird zu

$$\begin{aligned} \partial_z \partial_{\bar{z}} w &= f \quad \text{in } D, \quad f \in L_p(D), \quad 2 < p, \\ (\alpha + \beta \partial_\nu) w &= \gamma \quad \text{auf } \partial D, \quad \gamma \in C(\partial D), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Theorem 5.2 ([BBS17]):

(a) Für $\beta \neq 0$ ist die Robin-Randwertaufgabe (5.5) genau dann lösbar, falls für $z \in \partial D$ die Lösbarkeitsbedingung

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{4\pi\beta} \int_{\partial D} \gamma(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) ds_\zeta - \frac{\alpha}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) w(\zeta) ds_\zeta \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \gamma(\zeta) (\partial_{\nu_z} R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) + \partial_{\nu_\zeta} G_1(z, \zeta)) ds_\zeta = \frac{\sigma(z)\beta}{\pi} \int_D f(\zeta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.6)$$

erfüllt ist. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{4\pi\beta} \int_{\partial D} \gamma(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) ds_\zeta - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) w(\zeta) ds_\zeta \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (5.7)$$

(b) Für $\alpha \neq 0$ ist die Robin-Randwertaufgabe (5.5) genau dann lösbar, falls für $z \in \partial D$ die Lösbarkeitsbedingung

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \gamma(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} \left\{ R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) - G_1(z, \zeta) + \frac{\beta}{\alpha} \partial_{\nu_z} R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) \right\} ds_\zeta \\ - \frac{\beta}{4\pi\beta} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) \partial_\nu w(\zeta) ds_\zeta = \frac{\sigma(z)\beta}{\pi} \int_D f(\zeta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.8)$$

erfüllt ist. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} w(z) &= -\frac{1}{4\pi\alpha} \int_{\partial D} \gamma(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) ds_\zeta + \frac{\beta}{4\pi\alpha} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) \partial_\nu w(\zeta) ds_\zeta \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_D f(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Beweis: Aus Lemma 5.1 folgt, dass die durch (5.7) bzw. (5.9) definierten Funktionen die Differentialgleichung $\partial_z \partial_{\bar{z}} w = f$ für $f \in L_p(D)$, $1 \leq p$, in D lösen. Ist umgekehrt w eine Lösung der Robin-Randwertaufgabe, so genügt w sicher der Integraldarstellung (5.7) oder (5.9), sofern β bzw. α nicht verschwinden. Wir müssen also in beiden Fällen nur das Randverhalten untersuchen.

Sei zunächst $\beta \neq 0$ vorausgesetzt. Wenden wir den Operator $\alpha + \beta \partial_{\nu}$ auf w an, so erhalten wir unter Verwendung der Randbedingung (2.26) der Robin-Funktion zur Vereinfachung des Gebietsintegrals

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta \partial_{\nu})w(z)|_{z \in \partial D} &= \frac{1}{4\pi\beta} \int_{\partial D} \gamma(\zeta)(\alpha + \beta \partial_{\nu_z})R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) ds_{\zeta} - \frac{\alpha}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma(\zeta)w(\zeta) ds_{\zeta} \\ &\quad - \frac{\sigma(z)\beta}{\pi} \int_D f(\zeta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Benutzen wir die Reproduktionseigenschaft des Poisson-Kerns (4.8) für $z \in \partial D$

$$\gamma(z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \gamma(\zeta) \partial_{\nu_{\zeta}} G_1(z, \zeta) ds_{\zeta},$$

so sehen wir, dass w genau dann die Randbedingung $(\alpha + \beta \partial_{\nu})w(z) = \gamma$ erfüllt, also Lösung der Randwertaufgabe ist, wenn die Lösbarkeitsbedingung (5.6) erfüllt ist.

Die Rechnung für $\alpha \neq 0$ ist analog und liefert die zweite Aussage des Satzes. \square

5.2.1 Der harmonische Fall für $D = \mathbb{D}$

Ist nun $D = \mathbb{D}$, so gilt mit (4.7) $\sigma = -2$. Für den Bogenlängenparameter s gilt dann $\zeta = e^{is}$, also $ds = -i \frac{d\zeta}{\zeta}$. Damit vereinfachen sich (2.33) und (2.34) zu

$$\begin{aligned} w(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi i \beta} \int_{\partial \mathbb{D}} R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, \text{ falls } \beta \neq 0, \text{ und} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} w(z) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) d\xi d\eta - \frac{\beta}{2\pi i \alpha} \int_{\partial \mathbb{D}} \partial_{\nu_{\zeta}} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi i \alpha} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma(\zeta) \partial_{\nu_{\zeta}} R_{1;\alpha,\beta}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta}, \text{ falls } \alpha \neq 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Zur Auswertung der Randintegrale in den Lösbarkeitsbedingungen nutzen wir die Kenntnis der Robin-Funktion.

Lemma 5.3 ([BV13]): Für $|z| = |\zeta| = 1$ gilt

$$(\alpha + \beta \partial_{\nu_z}) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = 2\beta(g_1(z, \zeta) - 1). \quad (5.12)$$

Ist zusätzlich noch $\alpha \neq 0$, so gilt auch

$$(\alpha + \beta \partial_{\nu_z}) \partial_{\nu_\zeta} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = -2\alpha g_1(z, \zeta). \quad (5.13)$$

Beweis: Wir beginnen mit (5.12). Zunächst ist für $|\zeta| = 1$

$$\log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 = 0.$$

Für $D = \mathbb{D}$ ist $\partial_{\nu_z} = z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}}$ und für $-\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{N}$ gilt

$$(\alpha + \beta \partial_{\nu_z}) [(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k] = (\alpha + \beta k) [(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k],$$

also mit dem Poisson-Kern g_1 aus (4.9)

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta \partial_{\nu_z}) \sum_{k \geq 1} \frac{(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k}{\alpha + \beta k} &= \sum_{k \geq 1} [(z\bar{\zeta})^k + (\bar{z}\zeta)^k] \\ &= \frac{1}{1 - z\bar{\zeta}} + \frac{1}{1 - \bar{z}\zeta} - 2 = g_1(z, \zeta) - 1. \end{aligned}$$

Für $-\frac{\alpha}{\beta} = m \in \mathbb{N}$ ist

$$(\alpha + \beta \partial_{\nu_z}) [(z\bar{\zeta})^m \log(z\bar{\zeta}) + (\bar{z}\zeta)^m \log(\bar{z}\zeta)] = \beta [(z\bar{\zeta})^m + (\bar{z}\zeta)^m],$$

da $\alpha + \beta m = 0$ ist. Damit erhalten wir auch in diesem Fall die angegebene Form. Dann ist (5.12) erfüllt.

Betrachten wir nun (5.13). Für $\beta = 0$ ist $R_{1;\alpha,0} = G_1$ und wir erhalten in (5.13) genau die Definition (4.9) des Poisson-Kerns. Nehmen wir also an, dass $\beta \neq 0$ sei. Dann erhalten wir für $\sigma = -2$ aus der Randbedingung (2.26), dass die Gleichung $\partial_{\nu_\zeta} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) = -2 - \frac{\alpha}{\beta} R_1(z, \zeta)$ erfüllt ist. Also ist unter Verwendung des vorherigen Ergebnisses

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta \partial_{\nu_z}) \partial_{\nu_\zeta} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) &= (\alpha + \beta \partial_{\nu_z}) \left(-2 - \frac{\alpha}{\beta} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) \right) \\ &= -2\alpha - 2\alpha(g_1(z, \zeta) - 1) = -2\alpha g_1(z, \zeta). \end{aligned}$$

Damit ist auch (5.13) erfüllt. □

Korollar 5.4 ([BV13]): Sei $f \in L_p(\mathbb{D})$, $2 < p, \gamma \in C(\partial\mathbb{D})$. Die harmonische Robin-Randwertaufgabe

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} w = f \text{ in } \mathbb{D}, \quad (5.14)$$

$$(\alpha + \beta \partial_\nu) w = \gamma \text{ auf } \partial\mathbb{D} \quad (5.15)$$

ist

(a) für $\beta \neq 0$ genau dann lösbar, wenn

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{2\beta}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) d\xi d\eta \quad (5.16)$$

gilt. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{4\pi i \beta} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (5.17)$$

(b) für $\alpha \neq 0$ genau dann lösbar, wenn

$$\frac{\beta}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \partial_\nu w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2\beta}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) d\xi d\eta \quad (5.18)$$

gilt. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} w(z) &= -\frac{1}{4\pi i \alpha} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{\beta}{2\pi i \alpha} \int_{\partial\mathbb{D}} \partial_\nu w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) R_{1;\alpha,\beta}(z, \zeta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Beweis: Wir setzen in die Lösbarkeitsbedingungen (5.6) und (5.8) sowie die Lösungen (5.7) und (5.9) aus Theorem 5.2 $\sigma = -2$ und $ds = -i \frac{d\zeta}{\zeta}$ ein, die für den Einheitskreis gelten. Weiter verwenden wir die eben hergeleiteten Eigenschaften (5.12) bzw. (5.13), um die Terme weiter zu vereinfachen. Damit erhalten wir die Lösbarkeitsbedingungen (5.16) und (5.18) und die Lösungen (5.17) und (5.19). \square

5.3 Der polyharmonische Fall

Ist $n > 1$ und w eine Lösung der Randwertaufgabe (5.1), so ist $w' = \partial_z \partial_{\bar{z}} w$ eine Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^{n-1} w' &= f && \text{in } D, \\ (\alpha_k + \beta_k \partial_{\nu_z}) (\partial_z \partial_{\bar{z}})^{k-2} w' &= \gamma_k && \text{auf } \partial D \text{ für } k = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Wir nutzen dies, um die Lösbarkeitsbedingungen induktiv anzugeben.

Lemma 5.5: *Sei $n > 1$. Eine notwendige Bedingung dafür, dass w die Randwertaufgabe (5.1) löst, ist, dass $w' = \partial_z \partial_{\bar{z}} w$ die Lösbarkeitsbedingungen der Randwertaufgabe (5.20) erfüllt.*

Beweis: Ist w eine Lösung der Randwertaufgabe (5.1), so ist $w' = \partial_z \partial_{\bar{z}} w$ eine Lösung der Randwertaufgabe (5.20) und erfüllt somit deren Lösbarkeitsbedingungen. \square

Lemma 5.6: *Sei w durch (5.3) definiert und $w' = \partial_z \partial_{\bar{z}} w$ Lösung der Randwertaufgabe (5.20). Dann ist w genau dann eine Lösung der Randwertaufgabe (5.1), wenn für $z \in \partial D$ die Lösbarkeitsbedingung*

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{k=1 \\ k \in M}}^n \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} c_k (\alpha_1 + \beta_1 \partial_{\nu_z}) \tau_{k-1}(z) - \frac{1}{4\pi \alpha_k} \int_{\partial D} \gamma_k(\zeta) (\alpha_1 + \beta_1 \partial_{\nu_z}) \partial_{\nu_\zeta} R_k(\zeta, z) ds_\zeta \right) \\ &- \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin M}}^n \left(c_k (\alpha_1 + \beta_1 \partial_{\nu_z}) \tau_{k-1}(z) - \frac{1}{4\pi \beta_k} \int_{\partial D} \gamma_k(\zeta) (\alpha_1 + \beta_1 \partial_{\nu_z}) R_k(\zeta, z) ds_\zeta \right) \\ &= \gamma_1(z) + \frac{\beta_1 \sigma(z)}{\pi} \int_D \tau_{n-1}(\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta \quad (5.21) \end{aligned}$$

mit den in (5.2) definierten Konstanten c_k erfüllt ist.

Beweis: Die durch (5.3) definierte Funktion w ist in D eine Lösung der polyharmonischen Gleichung $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w = f$. Wegen der Voraussetzung, dass w' die Randwertaufgabe (5.20) löst, sind auch die Randbedingungen $(\alpha_k + \beta_k \partial_{\nu_z}) (\partial_z \partial_{\bar{z}})^{k-1} w = \gamma_k$ auf ∂D für $k = 2, \dots, n$ erfüllt. Es bleibt also nur die Randbedingung für $k = 1$ zu untersuchen. Wir wenden den Operator $\alpha_1 + \beta_1 \partial_{\nu_z}$ auf w , d.h. auf (5.3) an:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \beta_1 \partial_{\nu_z}) w(z)|_{z \in \partial D} &= -\frac{\beta_1 \sigma(z)}{\pi} \int_D \tau_{n-1}(\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta \\ &- \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin M}}^n \left(c_k (\alpha_1 + \beta_1 \partial_{\nu_z}) \tau_{k-1}(z) - \frac{1}{4\pi \beta_k} \int_{\partial D} \gamma_k(\zeta) (\alpha_1 + \beta_1 \partial_{\nu_z}) R_k(\zeta, z) ds_\zeta \right) \\ &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \in M}}^n \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} c_k (\alpha_1 + \beta_1 \partial_{\nu_z}) \tau_{k-1}(z) - \frac{1}{4\pi \alpha_k} \int_{\partial D} \gamma_k(\zeta) (\alpha_1 + \beta_1 \partial_{\nu_z}) \partial_{\nu_\zeta} R_k(\zeta, z) ds_\zeta \right). \end{aligned}$$

Dabei haben wir im Flächenintegral für $(\alpha_1 + \beta_1 \partial_{\nu_z}) R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\zeta, z)$ zur Vereinfachung die Identität (3.23) und die Symmetrieeigenschaft (3.22) verwendet. Die Funktion w ist genau dann eine Lösung, wenn $(\alpha_1 + \beta_1 \partial_{\nu_z})w(z)|_{z \in \partial D}$ unter den gegebenen Voraussetzungen auf ∂D mit γ_1 übereinstimmt, also wenn (5.21) erfüllt ist. \square

Um nun die allgemeine Lösbarkeitsbedingung anzugeben, vereinbaren wir eine weitere Notation: Für $1 \leq m \leq k \leq n$ sei

$$R_{(k,m)}(\zeta, z) = (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{n-k} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^{m-1} R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\zeta, z). \quad (5.22)$$

Dabei beziehen sich die Indizes k und m selbstverständlich immer auf die Position, nicht auf den Namen der Variable. k wirkt auf die erste, m auf die zweite Variable. Die Wirkung von $\partial_z \partial_{\bar{z}}$ ist durch (3.26) beschrieben. Der Grad von R_n wird um eins verringert, die Polyindizes $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ werden verkürzt, wobei der letzte Eintrag entfernt wird. Die Wirkung von $\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}}$ ergibt sich ebenso, wenn wir vor und nach dem Differenzieren die Symmetrie (3.22) benutzen, um die Reihenfolge der Variablen z und ζ zu tauschen. Die Verkürzung der Polyindizes ergibt sich dann durch das Entfernen des ersten Eintrags. Iterieren wir diese Schritte, so erhalten wir für

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= (\alpha_m, \dots, \alpha_k) \quad \text{und} \\ \tilde{\beta} &= (\beta_m, \dots, \beta_k) \end{aligned}$$

die Darstellung

$$R_{(k,m)}(\zeta, z) = R_{k-m+1;\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(\zeta, z).$$

Theorem 5.7: *Die Robin-Randwertaufgabe*

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w &= f \quad \text{in } D, \\ (\alpha_k + \beta_k \partial_{\nu_z})(\partial_z \partial_{\bar{z}})^{k-1} w &= \gamma_k \quad \text{auf } \partial D \text{ für } k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

für $f \in L_p(D)$, $2 < p$, und $\gamma_k \in C(\partial D)$ sowie $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ für $k = 1, \dots, n$ und $M \subset \{1, \dots, n\}$, so dass $\alpha_i \neq 0$, falls $i \in M$, und $\beta_i \neq 0$, falls $i \notin M$, ist genau dann lösbar, wenn für $z \in \partial D$ und $m = 1, \dots, n$ die Lösbarkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k=m \\ k \in M}}^n \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} c_k (\alpha_m + \beta_m \partial_{\nu_z}) \tau_{k-m}(z) - \frac{1}{4\pi \alpha_k} \int_{\partial D} (\alpha_m + \beta_m \partial_{\nu_z}) \partial_{\nu_\zeta} R_{(k,m)}(\zeta, z) \gamma_k(\zeta) ds_\zeta \right) \\ & - \sum_{\substack{k=m \\ k \notin M}}^n \left(c_k (\alpha_m + \beta_m \partial_{\nu_z}) \tau_{k-m}(z) - \frac{1}{4\pi \beta_k} \int_{\partial D} (\alpha_m + \beta_m \partial_{\nu_z}) R_{(k,m)}(\zeta, z) \gamma_k(\zeta) ds_\zeta \right) \\ & = \gamma_m(z) + \frac{\beta_m \sigma(z)}{\pi} \int_D \tau_{n-m}(\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta \quad (5.23) \end{aligned}$$

erfüllt sind, wobei die Konstanten c_k , $1 \leq k \leq n$, durch

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{k-1} \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) ds_\zeta & \text{für } k \in M, \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \sigma(\zeta) (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{k-1} w(\zeta) ds_\zeta & \text{für } k \notin M \end{cases}$$

bestimmt sind. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} w(z) := & -\frac{1}{\pi} \int_D R_{n,\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\zeta, z) f(\zeta) d\xi d\eta \\ & - \sum_{\substack{k=1 \\ k \in M}}^n \frac{1}{4\pi\alpha_k} \int_{\partial D} \gamma_k(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_k(\zeta, z) ds_\zeta + \sum_{\substack{k=1 \\ k \in M}}^n \frac{\beta_k}{\alpha_k} c_k \tau_{k-1}(z) \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin M}}^n \frac{1}{4\pi\beta_k} \int_{\partial D} R_k(\zeta, z) \gamma_k(\zeta) ds_\zeta - \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin M}}^n c_k \tau_{k-1}(z). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über n . Zunächst erhalten wir für $n = 1$ die Behauptung aus Theorem 5.2, wenn wir für γ_1 (4.8) benutzen. Nehmen wir also an, dass die Aussage für $\nu < n$ wahr sei. Ist w eine Lösung der Randwertaufgabe, so genügt w sicher der Darstellung (5.24), da diese aus der Integraldarstellung (3.39) durch Einsetzen der Daten für die Randwertaufgabe gewonnen wurde. Wir müssen nun zeigen, dass w auch die Lösbarkeitsbedingungen erfüllt. Ist umgekehrt die Funktion w durch (5.24) gegeben, so ist sie sicher eine Lösung der Differentialgleichung $(\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w = f$ in D . In diesem Fall ist zu zeigen, dass aus den Lösbarkeitsbedingungen folgt, dass w auch die Randwertaufgabe löst. In beiden Fällen erfüllt $w' = \partial_z \partial_{\bar{z}} w$ die Induktionsvoraussetzung für die Randwertaufgabe (5.20), d.h. w' ist genau dann eine Lösung der Randwertaufgabe (5.20), wenn die Lösbarkeitsbedingungen (5.23) für $m = 2, \dots, n$ erfüllt sind. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 5.6 erfüllt und die Lösbarkeitsbedingung (5.21) aus Lemma 5.6 ist genau die noch fehlende Bedingung aus (5.23) für $m = 1$. Damit ist der Induktionsbeweis vollständig. \square

5.4 Der polyharmonische Fall für $D = \mathbb{D}$

Für die Einheitskreisscheibe können wir die Integraldarstellung (3.39) und somit auch die Darstellung der Lösung (5.24) vereinfachen. Auch die Lösbarkeitsbedingung (5.23) kann vereinfacht werden.

Zunächst ist auf einige Hilfsmittel zu verweisen. Wir haben bereits (5.12) und (5.13).

Lemma 5.8: *Für den Einheitskreis \mathbb{D} ist der Randterm $\tau_1(\zeta)$ gegeben durch*

$$\tau_1(\zeta) = |\zeta|^2 - 1. \quad (5.25)$$

Beweis: Die Definition von τ_k in (3.29) liefert

$$\tau_1(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} (G_1(z, \zeta) + h_1(z, \zeta)) dx dy$$

mit der harmonischen Robin-Funktion aus (4.15) bzw. (4.16), für die wir an dieser Stelle $R_{1,\alpha,\beta}(z, \zeta) = G_1(z, \zeta) + h_1(z, \zeta)$ setzen, wobei $G_1(z, \zeta)$ die harmonische Green-Funktion aus (4.5) und $h_1(z, \zeta)$ eine in der Variablen z für ganz \mathbb{D} harmonische Funktion mit $h_1(0, \zeta) = 0$ ist. Damit verschwindet das Integral des zweiten Terms aufgrund der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.

Den ersten Term berechnen wir mit der Integraldarstellung (4.29) für ein w mit $w_{z\bar{z}}(z) = 1$ in \mathbb{D} :

$$\tau_1(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} w_{z\bar{z}}(z) \log \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^2 dx dy = w(\zeta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} w(z) g_1(\zeta, z) \frac{dz}{z}.$$

Für $w(\zeta) = |\zeta|^2$ erhalten wir $\tau_1(\zeta) = |\zeta|^2 - 1$. Da $w|_{|z|=1} \equiv 1$ ist, wird das Randintegral aufgrund der Reproduktionseigenschaft (4.11) des Poisson-Kerns konstant 1. \square

Lemma 5.9: *Für $n \geq 1$ und $|z| = 1$ ist*

$$\tau_n(z) = 0. \quad (5.26)$$

Damit ist insbesondere für $n \geq 2$ und $|z| = |\zeta| = 1$ auch

$$(\alpha_n + \beta_n \partial_{\nu_z}) R_{n,\alpha,\beta}(z, \zeta) = -2\beta_n \tau_{n-1}(\zeta) = 0. \quad (5.27)$$

Beweis: Da für $|z| = 1$ aus (5.25) $\tau_1(z) = 0$ folgt, ergibt sich die erste Behauptung durch Induktion nach n , wenn wir die Definition (3.24) von τ_n für den Induktionsschritt verwenden.

Die erste Gleichung der zweiten Behauptung ist die Eigenschaft (3.23) der Robin-Funktion, die zweite Gleichung eine unmittelbare Konsequenz aus der ersten Behauptung. \square

Lemma 5.10: *Sei*

$$A_0 = 1 \quad \text{und für } 1 < n \quad A_n = - \sum_{k=1}^n \frac{A_{(n-k)}}{(k!)^2}.$$

Dann ist $\tau_n(z)$ in \mathbb{D} gegeben durch

$$\tau_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(z\bar{z})^k}{(k!)^2} A_{(n-k)}. \quad (5.28)$$

Beweis: Durch (3.27) und (5.26) ist $\tau_n(z)$, $n > 0$, als Lösung der harmonischen Dirichlet-Randwertaufgabe in \mathbb{D} eindeutig bestimmt. Damit genügt es für (5.28) $\tau_0 \equiv 1$ und für $n > 0$ die Beziehungen $\partial_z \partial_{\bar{z}} \tau_n(z) = \tau_{n-1}(z)$ und $\tau_n(z) = 0$ auf $\partial\mathbb{D}$ zu prüfen. Beides kann nachgerechnet werden. \square

Damit erhalten wir für die Normalenableitung $\partial_\nu = z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}}$ des Einheitskreises mit den Bezeichnungen aus Lemma 5.10

$$B_n := \partial_\nu \tau_n|_{|z|=1} = \sum_{k=1}^n \frac{2A_{(n-k)}}{k!(k-1)!}, \quad (5.29)$$

wobei für $n = 0$ die Summe null gesetzt wird, also $B_0 := 0$. Daraus folgt mit (3.23) und der Symmetrieeigenschaft (3.22) für $|z| = |\zeta| = 1$:

$$(\alpha_1 + \beta_1 \partial_{\nu_z}) \partial_{\nu_\zeta} R_{n;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\zeta, z) = -2\beta_1 B_{n-1}. \quad (5.30)$$

Wir definieren wie üblich die charakteristische Funktion χ_M einer Menge M durch

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.31)$$

Korollar 5.11: *Die Robin-Randwertaufgabe*

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^n w &= f \quad \text{in } \mathbb{D}, \\ (\alpha_k + \beta_k \partial_\nu)(\partial_z \partial_{\bar{z}})^{k-1} w &= \gamma_k \quad \text{auf } \partial\mathbb{D} \text{ für } k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

für $f \in L_p(\mathbb{D})$, $2 < p$, und $\gamma_k \in C(\partial\mathbb{D})$ sowie $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ für $k = 1, \dots, n$ und $M \subset \{1, \dots, n\}$, so dass $\alpha_i \neq 0$, falls $i \in M$, und $\beta_i \neq 0$, falls $i \notin M$, ist genau dann lösbar, wenn für $z \in \partial\mathbb{D}$ und $m = 1, \dots, n$ die Lösbarkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \chi_M(m) \beta_m c_m - (1 - \chi_M(m)) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_m(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \alpha_m c_m \right) \\ + \beta_m \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \in M}}^n \left(\frac{B_{(k-m)}}{2\pi i \alpha_k} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_k(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\beta_k}{\alpha_k} c_k B_{(k-m)} \right) - \beta_m \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \notin M}}^n c_k B_{(k-m)} \\ = -\frac{2\beta_m}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \tau_{(n-m)}(\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta \quad (5.32) \end{aligned}$$

erfüllt sind, wobei die Konstanten c_k , $1 \leq k \leq n$, durch

$$c_k = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{k-1} \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} & \text{für } k \in M, \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{k-1} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} & \text{für } k \notin M \end{cases}$$

bestimmt sind. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} w(z) &:= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} R_{n;\alpha,\beta}(\zeta, z) f(\zeta) d\xi d\eta \\ &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \in M}}^n \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} c_k \tau_{k-1}(z) - \frac{1}{4\pi i \alpha_k} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_k(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_k(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\ &- \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin M}}^n \left(c_k \tau_{k-1}(z) - \frac{1}{4\pi i \beta_k} \int_{\partial\mathbb{D}} R_k(\zeta, z) \gamma_k(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right). \quad (5.33) \end{aligned}$$

Beweis: Wir setzen in die Lösbarkeitsbedingungen (5.23) und die Lösung (5.24) aus Theorem 5.7 die speziellen Werte für $D = \mathbb{D}$ ein. In den Randintegralen gilt für den Bogenlängenparameter $\zeta = e^{is\zeta}$, also $ds_\zeta = \frac{d\zeta}{i\zeta}$.

Beginnen wir mit den Lösbarkeitsbedingungen (5.23). Im Flächenintegral auf der rechten Seite ist $\sigma = -2$.

Betrachten wir zunächst die Summanden ohne Integrale auf der linken Seite. Aus (5.26) folgt $\tau_{k-m}(z) = 0$ für $k > m$ und wegen (3.24) ist $\tau_0 = 1$. Für die Normalenableitung von τ erhalten wir $\partial_{\nu_z}\tau_0 = 0$ für $k = m$ wegen $\tau_0 = 1$ und für $k > m$ ist $\partial_{\nu_z}\tau_{k-m} = B_{(k-m)}$ wegen (5.29).

Betrachten wir jetzt die Randintegrale. Für $k = m$ verwenden wir (5.12) bzw. (5.13) und erhalten für $m \in M$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi\alpha_m} \int_{\partial\mathbb{D}} (\alpha_m + \beta_m \partial_{\nu_z}) \partial_{\nu_\zeta} R_{(m,m)}(\zeta, z) \gamma_m(\zeta) ds_\zeta \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} g_1(z, \zeta) \gamma_m(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ = \gamma_m(z) \end{aligned}$$

und für $m \notin M$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi\beta_m} \int_{\partial\mathbb{D}} (\alpha_m + \beta_m \partial_{\nu_z}) R_{(m,m)}(\zeta, z) \gamma_m(\zeta) ds_\zeta \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} (g_1(z, \zeta) - 1) \gamma_m(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ = \gamma_m(z) - \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_m(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned}$$

Für $k > m$, $k \in M$ verwenden wir (5.30) und erhalten

$$-\frac{1}{4\pi\alpha_k} \int_{\partial D} (\alpha_m + \beta_m \partial_{\nu_z}) \partial_{\nu_\zeta} R_{(k,m)}(\zeta, z) \gamma_k(\zeta) ds_\zeta = \frac{\beta_m B_{(k-m)}}{\alpha_k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_k(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Für $k > m$, $k \notin M$ verwenden wir (3.23) und (5.26) und sehen, dass das Randintegral verschwindet.

Bringen wir nun alles zusammen, so erhalten wir für die linke Seite von (5.23)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{k=m \\ k \in M}}^n \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} c_k (\alpha_m + \beta_m \partial_{\nu_z}) \tau_{k-m}(z) - \frac{1}{4\pi\alpha_k} \int_{\partial D} (\alpha_m + \beta_m \partial_{\nu_z}) \partial_{\nu_\zeta} R_{(k,m)}(\zeta, z) \gamma_k(\zeta) ds_\zeta \right) \\
 & - \sum_{\substack{k=m \\ k \notin M}}^n \left(c_k (\alpha_m + \beta_m \partial_{\nu_z}) \tau_{k-m}(z) - \frac{1}{4\pi\beta_k} \int_{\partial D} (\alpha_m + \beta_m \partial_{\nu_z}) R_{(k,m)}(\zeta, z) \gamma_k(\zeta) ds_\zeta \right) \\
 = & \gamma_m(z) + \chi_M(m) \beta_m c_m - (1 - \chi_M(m)) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma_m(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \alpha_m c_m \right) \\
 & + \beta_m \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \in M}}^n \left(\frac{B_{(k-m)}}{2\pi i \alpha_k} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma_k(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\beta_k}{\alpha_k} c_k B_{(k-m)} \right) - \beta_m \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \notin M}}^n c_k B_{(k-m)}.
 \end{aligned}$$

Für die rechte Seite von (5.23) erhalten wir

$$\gamma_m(z) + \frac{\beta_m \sigma(z)}{\pi} \int_D \tau_{n-m}(\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta = \gamma_m(z) - \frac{2\beta_m}{\pi} \int_D \tau_{n-m}(\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten $\gamma_m(z)$ ab, so erhalten wir (5.32). Ersetzen wir in (5.24) den Bogenlängenparameter ds_ζ durch $\frac{d\zeta}{i\zeta}$, so erhalten wir (5.33). \square

5.4.1 Der biharmonische Fall

Wir formulieren zunächst explizit die Lösbarkeitsbedingungen für $n = 2$ und $D = \mathbb{D}$.

Korollar 5.12: *Die Robin-Randwertaufgabe*

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^2 w &= f \quad \text{in } \mathbb{D}, \\ (\alpha_1 + \beta_1 \partial_\nu) w &= \gamma_1 \quad \text{und } (\alpha_2 + \beta_2 \partial_\nu) \partial_z \partial_{\bar{z}} w = \gamma_2 \quad \text{auf } \partial \mathbb{D}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

für $f \in L_p(\mathbb{D})$, $2 < p$, und $\gamma_k \in C(\partial \mathbb{D})$ sowie $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ für $k = 1, 2$ und $M \subset \{1, 2\}$, so dass $\alpha_i \neq 0$, falls $i \in M$, und $\beta_i \neq 0$, falls $i \notin M$, ist genau dann lösbar, wenn für $z \in \partial \mathbb{D}$ die Lösbarkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \chi_M(1) \beta_1 \left(c_1 + \frac{2\beta_2}{\alpha_2} c_2 + \frac{1}{\pi i \alpha_2} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\ - (1 - \chi_M(1)) \left(\alpha_1 c_1 + 2\beta_1 c_2 + \frac{\beta_1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma_1(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\ = -\frac{2\beta_1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \tau_1(\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.35)$$

und

$$\chi_M(2) \beta_2 c_2 - (1 - \chi_M(2)) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \alpha_2 c_2 \right) = -\frac{2\beta_2}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) d\xi d\eta \quad (5.36)$$

erfüllt sind, wobei die Konstanten c_k für $k = 1, 2$ durch

$$c_k = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{k-1} \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} & \text{für } k \in M, \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{k-1} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} & \text{für } k \notin M \end{cases}$$

bestimmt sind. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} w(z) &:= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} R_{2;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\zeta, z) f(\zeta) d\xi d\eta \\ &+ \chi_M(1) \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} c_1 - \frac{1}{4\pi i \alpha_1} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma_1(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_{1;\alpha_1,\beta_1}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\ &+ \chi_M(2) \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} c_2 \tau_1(z) - \frac{1}{4\pi i \alpha_2} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma_2(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_{2;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\ &- (1 - \chi_M(1)) \left(c_1 - \frac{1}{4\pi i \beta_1} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma_1(\zeta) R_{1;\alpha_1,\beta_1}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\ &- (1 - \chi_M(2)) \left(c_2 \tau_1(z) - \frac{1}{4\pi i \beta_2} \int_{\partial \mathbb{D}} \gamma_2(\zeta) R_{2;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} \right). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Beweis: Wir setzen in Korollar 5.11 $n = 2$ und schreiben die Summen explizit aus. \square

Betrachten wir nun noch zwei spezielle biharmonische Green-Funktionen, die wir im vorherigen Kapitel bestimmt haben. Die biharmonische Green-Funktion $G_2(z, \zeta)$ für Riquier-Randbedingungen wurde in (4.33) angegeben. Wir wählen dafür $\underline{\alpha} = (1, 1)$ und $\underline{\beta} = (0, 0)$, also $M = \{1, 2\}$. Dann gibt es keine Lösbarkeitsbedingung. Die Lösung erhalten wir aus (5.37) durch das Einsetzen der Parameter.

Korollar 5.13: Für $\underline{\alpha} = (1, 1)$ und $\underline{\beta} = (0, 0)$ ist die Randwertaufgabe (5.34) stets lösbar. Die Lösung ist gegeben durch

$$w(z) := -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} G_2(\zeta, z) f(\zeta) d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} (\gamma_1(\zeta) g_1(\zeta, z) + \gamma_2(\zeta) g_2(\zeta, z)) \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (5.38)$$

Für die in (4.42) definierte biharmonische Neumann-Funktion $N_2(z, \zeta)$ setzen wir $\underline{\alpha} = (0, 0)$ und für die Neumann-Randwertaufgabe $\underline{\beta} = (1, 1)$. Die Lösbarkeitsbedingungen und die Lösung ergeben sich wieder aus Korollar 5.12.

Korollar 5.14 ([BV06, Beg06]): Für $\underline{\alpha} = (0, 0)$ und $\underline{\beta} = (1, 1)$ ist die Randwertaufgabe (5.34) genau dann lösbar, wenn

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{4\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_1(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \tau_1(\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta \quad (5.39)$$

und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) d\xi d\eta \quad (5.40)$$

erfüllt sind. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$w(z) := -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} N_2(\zeta, z) f(\zeta) d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{4\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_1(\zeta) N_1(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\tau_1(z)}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{4\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_2(\zeta) N_2(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (5.41)$$

5.4.2 Der triharmonische Fall

Wir formulieren zunächst wieder explizit die Lösbarkeitsbedingungen für $n = 3$ und $D = \mathbb{D}$.

Korollar 5.15: *Die Robin-Randwertaufgabe*

$$\begin{aligned} (\partial_z \partial_{\bar{z}})^3 w &= f \quad \text{in } \mathbb{D}, \\ (\alpha_k + \beta_k \partial_\nu)(\partial_z \partial_{\bar{z}})^{k-1} w &= \gamma_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad \text{auf } \partial\mathbb{D}, \end{aligned}$$

für $f \in L_p(\mathbb{D})$, $2 < p$, und $\gamma_k \in C(\partial\mathbb{D})$ sowie $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ für $k = 1, 2, 3$ und $M \subset \{1, 2, 3\}$, so dass $\alpha_i \neq 0$, falls $i \in M$, und $\beta_i \neq 0$, falls $i \notin M$, ist genau dann lösbar, wenn für $z \in \partial\mathbb{D}$ die Lösbarkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \chi_M(1) \beta_1 \left(c_1 + \frac{2\beta_2}{\alpha_2} c_2 - \frac{\beta_3}{\alpha_3} c_3 + \frac{1}{\pi i \alpha_2} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i \alpha_3} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_3(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\ - (1 - \chi_M(1)) \left(\alpha_1 c_1 + 2\beta_1 c_2 - \beta_1 c_3 + \frac{\beta_1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_1(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\ = -\frac{2\beta_1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \tau_2(\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta, \quad (5.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_M(2) \beta_2 \left(c_2 + \frac{2\beta_3}{\alpha_3} c_3 + \frac{1}{\pi i \alpha_3} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_3(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\ - (1 - \chi_M(2)) \left(\alpha_2 c_2 + 2\beta_2 c_3 + \frac{\beta_2}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\ = -\frac{2\beta_2}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \tau_1(\zeta) f(\zeta) d\xi d\eta \quad (5.43) \end{aligned}$$

und

$$\chi_M(3) \beta_3 c_3 - (1 - \chi_M(3)) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_3(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \alpha_3 c_3 \right) = -\frac{2\beta_3}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) d\xi d\eta \quad (5.44)$$

erfüllt sind, wobei die Konstanten c_k für $k = 1, 2, 3$ durch

$$c_k = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{k-1} \partial_{\nu_\zeta} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} & \text{für } k \in M, \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} (\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}})^{k-1} w(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} & \text{für } k \notin M \end{cases}$$

bestimmt sind. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
 w(z) := & -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} R_{3;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\zeta, z) f(\zeta) d\xi d\eta \\
 & + \chi_M(1) \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} c_1 - \frac{1}{4\pi i \alpha_1} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_1(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_{1;\alpha_1,\beta_1}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\
 & + \chi_M(2) \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} c_2 \tau_1(z) - \frac{1}{4\pi i \alpha_2} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_2(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_{2;\underline{\alpha}',\underline{\beta}'}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\
 & + \chi_M(3) \left(\frac{\beta_3}{\alpha_3} c_3 \tau_2(z) - \frac{1}{4\pi i \alpha_3} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_3(\zeta) \partial_{\nu_\zeta} R_{3;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\
 & - (1 - \chi_M(1)) \left(c_1 - \frac{1}{4\pi i \beta_1} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_1(\zeta) R_{1;\alpha_1,\beta_1}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\
 & - (1 - \chi_M(2)) \left(c_2 \tau_1(z) - \frac{1}{4\pi i \beta_2} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_2(\zeta) R_{2;\underline{\alpha}',\underline{\beta}'}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\
 & - (1 - \chi_M(3)) \left(c_3 \tau_2(z) - \frac{1}{4\pi i \beta_3} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_3(\zeta) R_{3;\underline{\alpha},\underline{\beta}}(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} \right).
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Beweis: Wir setzen in Korollar 5.11 $n = 3$ und schreiben die Summen explizit aus. \square

Wir betrachten das Randwertproblem zur hybriden Green-Neumann-Funktion H_3 aus [Bur09], die wir in (4.84) definiert haben. H_3 hat die Parameter $\underline{\alpha} = (1, 1, 0)$ und $\underline{\beta} = (0, 0, 1)$. Die zugehörige Randwertaufgabe ist

$$\begin{aligned}
 (\partial_z \partial_{\bar{z}})^3 w &= f \quad \text{in } \mathbb{D}, \\
 (\partial_z \partial_{\bar{z}})^{k-1} w &= \gamma_k, \quad k = 1, 2, \\
 (\partial_z \partial_{\bar{z}})^2 \partial_\nu w &= \gamma_3, \quad \text{auf } \partial\mathbb{D},
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

wobei erneut $f \in L_p(\mathbb{D})$, $1 \leq p$, und $\gamma_k \in C(\partial\mathbb{D})$ mit $k = 1, 2, 3$ sei. Das Einsetzen der Randdaten in Korollar 5.15 liefert die Lösbarkeitsbedingungen und die Lösung. Für $k = 1, 2$ haben wir Dirichlet- bzw. Riquier-Randbedingungen und es gibt keine weiteren Bedingungen. Für $k = 3$ erhalten wir die Neumann-Bedingung.

Korollar 5.16 ([Bur09]): Die Randwertaufgabe (5.46) ist genau dann lösbar, wenn

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_3(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) d\xi d\eta \quad (5.47)$$

gilt. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} w(z) := & -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} H_3(\zeta, z) f(\zeta) d\xi d\eta \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_1(\zeta) g_1(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_2(\zeta) g_2(z, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ & + \frac{1}{4\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \gamma_3(\zeta) H_3(\zeta, z) \frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned} \quad (5.48)$$

mit dem harmonischen Poisson-Kern g_1 aus (4.9) und dem biharmonischen Poisson-Kern g_2 aus (4.70).

Kapitel 6

Fazit

Die iterierten polyharmonischen Green-Funktionen entstehen durch fortgesetzte Iteration von harmonischen Green-Funktionen, wobei unterschiedliche Randverhalten vorgegeben werden können. Diese wurden bereits intensiv erforscht [Ac18, Ac10a, Ac10b, Beg11, BV08a, BV08b, BV06, Bur09, BVZ06, Wan10]. Green-Funktionen führen auf Integraldarstellungen und auf Lösungsformeln für die entsprechenden Randwertaufgaben. Dieses Vorgehen lässt sich auf die iterierten Randwertaufgaben übertragen.

Robin-Randbedingungen und Robin-Funktionen stellen eine parametrisierte Interpolation zwischen Green- und Neumann-Randbedingungen bzw. -Funktionen dar, welche dann als Spezialfälle zu festen Parameterwerten auftreten [BV13]. In dieser Arbeit wurden Robin-Randbedingungen iteriert und dadurch eine einheitliche Darstellung der bereits bekannten Spezialfälle erreicht.

Im Kapitel 3 wurde eine systematische Darstellung der iterierten Robin-Randbedingungen und -Funktionen angegeben und mit diesen die zugehörigen Integraldarstellungen hergeleitet. Frühere Ergebnisse zu festen Randbedingungen ergeben sich aus Korollar 3.10 als Spezialfälle.

Im Kapitel 4 wurden die iterierten Robin-Funktionen für den Einheitskreis \mathbb{D} und den biharmonischen (Theorem 4.10) bzw. den triharmonischen (Theorem 4.24) Fall konkret berechnet. Bereits früher bekannte bi- und triharmonische hybride iterierte Green-Funktionen konnten als Spezialfälle zu entsprechenden Parameterwerten reproduziert werden.

Schließlich wurden in Kapitel 5 Lösungsformeln und Lösbarkeitsbedingungen für das polyharmonische Randwertproblem hergeleitet (Theorem 5.7). Für den Einheitskreis \mathbb{D} konnte diese Darstellung nochmal deutlich vereinfacht werden (Korollar 5.11). Die Lösungsformeln erfordern allerdings die Kenntnis der konkreten Robin-Funktion. Für den bi- und triharmonischen Fall haben wir diese bereits angegeben.

Bereits bekannte Ergebnisse zu hybriden iterierten Randbedingungen konnten auch bei den Lösungsformeln als Spezialfälle zu konkreten Parameterwerten reproduziert werden.

In allen drei Bereichen, die untersucht wurden – Integraldarstellung, Berechnung der Robin-Funktionen, Lösungsformeln und Lösbarkeitsbedingungen für die polyharmonische Robin-Randwertaufgabe – konnten bereits bekannte Ergebnisse verallgemeinert und in einer einheitlichen Form dargestellt werden. Eine Vielzahl älterer Ergebnisse konnte dadurch allein durch die Wahl geeigneter Parameter ohne weiteren Aufwand reproduziert werden.

Literaturverzeichnis

- [Ac10a] AKSOY, Ümit ; ÇELEBI, Ahmet O.: Dirichlet Problems for Generalized n -Poisson Equation. In: *Operator Th. Adv. Appl.* (2010), Nr. 205, S. 129–142.
- [Ac10b] AKSOY, Ümit ; ÇELEBI, Ahmet O.: A Survey on Boundary Value Problems for Complex Partial Differential Equations. In: *Adv. Dynamical Sys. Appl.* (2010), Nr. 5, S. 133–158.
- [Ac14] AKSOY, Ümit ; ÇELEBI, Ahmet O.: Polyharmonic Robin Problem for Complex Linear Partial Differential Equations. In: *Complex Var. Elliptic Equ.* (2014), Nr. 12, S. 1679–1695.
- [Ac18] AKSOY, Ümit ; ÇELEBI, Ahmet O.: Neumann Problem for Generalized n -Poisson Equations. In: *J. Math. Anal. Appl.* (2018), Nr. 357, S. 438–446.
- [BBS17] BEGEHR, Heinrich ; BURGUMBAYEVA, Saule ; SHUPEYEVA, Bibinur: Remark on Robin Problem for Poisson Equation. In: *Complex Variables and Elliptic Equations* 62 (2017), S. 1589–1599.
- [BDW08] BEGEHR, Heinrich ; DU, Jinyuan ; WANG, Yufeng: A Dirichlet Problem for Polyharmonic Functions. In: *Ann. Math. Pura Appl.* (2008), Nr. 187, S. 435–457.
- [Beg94] BEGEHR, Heinrich: *Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations. An Introductory Text.* World Scientific, 1994.
- [Beg05a] BEGEHR, Heinrich: Boundary Value Problems in Complex Analysis I. In: *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* XII (2005), S. 65–85.
- [Beg05b] BEGEHR, Heinrich: Boundary Value Problems in Complex Analysis II. In: *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* XII (2005), S. 217–250.
- [Beg06] BEGEHR, Heinrich: Biharmonic Green Functions. In: *Le Matematiche* (2006), Nr. LXI, S. 395–405.

- [Beg11] BEGEHR, Heinrich: Iterated Polyharmonic Green Functions for Plane Domains. In: *Acta Mathematica Vietnamica* 36 (2011), S. 169–181.
- [Beg15] BEGEHR, Heinrich: Integral representations related to complex partial differential operators. In: MOHAPATRA, R. (Hrsg.) ; CHOWDHURY, D. (Hrsg.) ; GIRI, D. (Hrsg.): *Mathematics and computing. Selected papers based on the presentations at the 2nd international conference, ICMC, Haldia, India, January 5–10, 2015*. New Delhi: Springer, 2015, S. 1–17.
- [BH97] BEGEHR, Heinrich ; HILE, G. N.: A Hierarchy of Integral Operators. In: *Rocky Mountain J. Math.* (1997), Nr. 27, S. 669–706.
- [BH06] BEGEHR, Heinrich ; HARUTYUNYAN, Gohar: Robin Boundary Value Problem for the Poisson Equation. In: *Journal of Analysis and Applications* 4 (2006), Nr. 3, S. 201–213.
- [Bur09] BURGUMBAYEVA, Saule: *Boundary Value Problems for Triharmonic Functions in the Unit Disc*, Freie Universität Berlin, Diss., 2009.
- [BV06] BEGEHR, Heinrich ; VANEGAS, Carmen J.: Iterated Neumann Problem for the Higher Order Poisson Equation. In: *Math. Nachr.* (2006), Nr. 279, S. 38–57.
- [BV08a] BEGEHR, Heinrich ; VAITEKHOVICH, Tatsiana: Green Functions in Complex Plane Domains. In: *Uzbek Math. J.* (2008), Nr. 4, S. 29–34.
- [BV08b] BEGEHR, Heinrich ; VAITEKHOVICH, Tatsiana: Iterated Dirichlet Problem for Higher Order Poisson Equation. In: *Le Matematiche* (2008), Nr. LXIII, S. 139–154.
- [BV10] BEGEHR, Heinrich ; VAITEKHOVICH, Tatsiana: Some Harmonic Robin Functions in the Complex Plane. In: *Adv. Pure Appl. Math.* (2010), S. 19–34.
- [BV13] BEGEHR, Heinrich ; VAITEKHOVICH, Tatsiana: Modified Harmonic Robin Functions. In: *Complex Variables and Elliptic Equations* 58 (2013), S. 483–496.
- [BVZ06] BEGEHR, Heinrich ; VU, T. N. H. ; ZHANG, Z. X.: Polyharmonic Dirichlet Problems. In: *Proc. Steklov Inst. Math.* (2006), Nr. 255, S. 13–34.
- [DGW10] DU, Zhihua ; GUO, Guoan ; WANG, Ning: Decompositions of functions and Dirichlet problems in the unit disc. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 362 (2010), Nr. 1, S. 1 – 16.
- [Eme21] EMEK, Serkan: Iterated Robin Problem for the Higher-Order Poisson Equation. In: *Complex Variables and Elliptic Equations* 66 (2021), Nr. 1, S. 35–52.

LITERATURVERZEICHNIS

- [Sob08] SOBOLEV, S.L.: *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*. American Mathematical Soc., 2008 (Translations of Mathematical Monographs).
- [Vek62] VEKUA, I. N.: Generalized Analytic Functions. In: *Pergamon Press* (1962).
- [Wan10] WANG, Ying: *Boundary Value Problems for Complex Partial Differential Equations in Fan-shaped Domains*, Freie Universität Berlin, Diss., 2010.

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre gegenüber der Freien Universität Berlin, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Die vorliegende Arbeit ist frei von Plagiaten. Alle Ausführungen, die wörtlich oder inhaltlich aus anderen Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Diese Dissertation wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch in keinem früheren Promotionsverfahren eingereicht.

Mit einer Prüfung meiner Arbeit durch ein Plagiatsprüfungsprogramm erkläre ich mich einverstanden.

Berlin, 29.09.2022

Serkan Emek