Vorbemerkungen zur Notation

Hier werden die Symbole und Begriffe erläutert, deren Bedeutung nicht aus dem laufendenText hervorgeht.

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen ohne Berücksichtigung der Zahl 0
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}^+$	Menge der reellen Zahlen ohne Berücksichtigung der Zahl 0
$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	Menge aller reellen Zahlenfolgen.
(Ω, A)	meßbarer Raum mit einer Menge Ω und einer in Ω definierten σ - Algebra A
(Ω, A, μ)	Maßraum mit einer Menge Ω, einer in Ω definierten σ - Algebra A und einem Maß μ auf A
$\mathcal{B}$	σ - Algebra der Borel-Mengen in $\mathbb{R}$
A, $\mathcal{B}$ - meßbare Funktion f	es gibt einen meßbaren Raum (Ω, A), so dass $f^{-1}(U) \in A$ für alle $U \in \mathcal{B}$; $f: \Omega \to \mathbb{R}$
$\mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$	Menge aller $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ - meßbaren Funktionen, für die mit einem $p \in \mathbb{N}$ gilt: $\int_{\mathbb{R}} \lvert f \rvert^p \, d\mu < +\infty$

Das Integral

Sei (Ω, A, μ) ein Maßraum, $h: \Omega \to \mathbb{R}$ eine A, $\mathcal{B}$ - meßbare Funktion.

$h^+ := \max\{h; 0\}$, $h^- := \min\{h; 0\}$.

Sofern $\int_\Omega h^+ \, d\mu < +\infty$ und $(-1) \cdot \int_\Omega h^- \, d\mu < +\infty$ erfüllt ist, heißt h integrierbar bezüglich μ (kurz: μ - integrierbar).

Falls nur eine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, heißt h quasi-integrierbar bezüglich μ.

$\int_\Omega h \, d\mu$ heißt im Falle seiner Existenz „μ-Integral von h über Ω“.

Spezielle Integrale:

$(\Omega, \mathrm{A}, \mathcal{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine $\mathrm{A},\mathcal{B}$ - meßbare, $\mathcal{P}$ - integrierbare Zufallsgröße mit der Verteilung $\mathcal{F} =: \mathcal{P}\, X^{-1}$ und der zugehörigen Verteilungsfunktion F.

(i) $\int_\Omega X \, d\mathcal{P} =: E_F(X)$ ist der Erwartungswert von X ; wenn klar ist, welche Verteilungsfunktion F gemeint ist, schreibt man kurz: $E(X) := E_F(X)$

(ii) Sofern X^2 $\mathcal{P}$ - integrierbar ist, wird mit $VAR_F(X) := E_F([X - E_F(X)]^2)$ die Varianz von X bezeichnet, kurz: $VAR(X) := VAR_F(X)$.

Eigenschaften, die $\mathcal{P}$-fast sicher gelten

Sei $(\Omega, \mathrm{A}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Für jedes $\omega \in \Omega$ sei festgelegt, ob ω eine vorgegebene Eigenschaft besitzt oder nicht.

Es existiere eine Menge $\mathcal{N} \subset \Omega$ mit $\mathcal{P}(\mathcal{N}) = 0$ derart, so dass alle $\omega \in \{\Omega \setminus \mathcal{N}\}$ diese Eigenschaft besitzen. Eine solche Tatsache wird gekennzeichnet durch die Formulierung „die Eigenschaft besteht $\mathcal{P}$-fast sicher“.

Stochastische Versionen der Landau - Symbole

Sei $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge echt-positiver reller Zahlen.

$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge $\mathrm{A},\mathcal{B}$ - meßbarer Zufallsgrößen, (Ω, A, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $Y_n: \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$.

$Y_n = O(\delta_n)$ fast sicher bedeutet: $\frac{Y_n}{\delta_n}$ ist fast sicher beschränkt.

$Y_n = o(\delta_n)$ fast sicher bedeutet: $\frac{Y_n}{\delta_n}$ strebt mit $n \to +\infty$ fast sicher gegen Null.

$Y_n = O_P(\delta_n)$ bedeutet: $\frac{Y_n}{\delta_n}$ ist straff, d.h. $\lim\limits_{t\to+\infty} \limsup\limits_{n\to+\infty} P\left(\frac{|Y_n|}{\delta_n} > t\right) = 0$.

Im Falle $Y_n = O_P(\delta_n)$ heißt $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ „von der Ordnung δ_n“ (oder auch „von der Ordnung $O_P(\delta_n)$“).

$Y_n = o_P(\delta_n)$ bedeutet: $\frac{Y_n}{\delta_n}$ strebt in Wahrscheinlichkeit gegen Null.

Anmerkung: Wenn $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Verteilung gegen eine Zufallsgröße Y konvergiert, dann folgt $Y_n = O_P(1)$ (J.Shao / D.Tu 1996, S. 449).

Träger eines Wahrscheinlichkeitsmaßes

Sei $(\Omega, A, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine A, $\mathcal{B}$ - meßbare Zufallsgröße mit der Verteilung $\mathcal{F} := \mathcal{P}X^{-1}$. Die Menge supp $(\mathcal{F}) \subset \mathbb{R}$ heißt Träger von $\mathcal{F}$; jedes der Elemente $x \in$ supp $(\mathcal{F})$ besitzt eine der folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathcal{P}(X = x) = 0$

(ii) $\mathcal{P}(X \in U) > 0$ für jede offene Umgebung U von x .

Zusatz: Sofern $\mathcal{F}$ eine Dichte f besitzt, gilt: supp $(\mathcal{F}) = \{ x : f(x) > 0 \}$.

Verteilungskonvergenz für reellwertige, meßbare Zufallsgrößen

Sei $(\Omega_n, A_n, \mathcal{P}_n)$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsräumen, $n \in \mathbb{N}_0$.

Sei $(W_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Zufallsgrößen , W_n ist $A_n, \mathcal{B}$ -meßbar $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ wird mit $\mathcal{G}_n := \mathcal{P}_n W_n^{-1}$ die Verteilung und mit G_n die Verteilungsfunktion von W_n symbolisiert..

Die Folge $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt verteilungskonvergent gegen W_0 , falls eine (und damit beide) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist (R.J.Serfling 1980, S. 16):

(i) $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{\Omega_n} f \circ W_n \, d\mathcal{P}_n = \int\limits_{\Omega_0} f \circ W_0 \, d\mathcal{P}_0$ für alle $f, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f beschränkt und stetig.

(ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(t) = G_0(t)$, für jedes Argument $t \in \mathbb{R}$, in dem die Verteilungsfunktion G_0 stetig ist.

Durch zwei Schreibweisen wird die Verteilungskonvergenz von $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen W_0 gekennzeichnet:

(a) $W_n \xrightarrow{d} W_0$

(b) $G_n \Rightarrow G_0$, und man spricht von der „schwachen Konvergenz von $\mathcal{P}_n$ gegen $\mathcal{P}_0$“ (R.J.Serfling 1980, S. 8).

Realisation einer Stichprobenfunktion

$Z_1 , \ldots , Z_N$ seien identisch gemäß $\mathcal{F}$ verteilte Stichprobenvariablen, $N \in \mathbb{N}$.

Sei $V_N = V(Z_1 , \ldots , Z_N)$ eine Stichprobenfunktion.

Setzt man anstelle von Z_k eine Realisation $z_k \in \mathbb{R}$ in V ein ($k = 1 \ldots N$), entsteht eine Realisation der Stichprobenfunktion: $v_N := V(z_1 , \ldots , z_N)$.