Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematik

Umsetzung der KMK Bildungsstandards in Abituraufgaben im Fach Mathematik - Ein Vergleich der Länder Bayern und Berlin

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Education (M. Ed.)

Autorin: Lisa Hofbauer

Erstgutachterin: Prof. Dr. Brigitte Lutz-Westphal

Zweitgutachter: Dr. Benedikt Weygandt

Abgabedatum: 10.05.2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

„Ergebnisse im Berliner Matheabitur noch schlechter als 2019" (VE20), so lautete die Überschrift eines Zeitungsartikels über das Berliner Mathematikabitur 2020.
Bereits im Jahr 2019 gab es Beschwerden über das Berliner Mathematikabitur, es sei zu schwer. Den gleichen Vorwurf hörte man auch im vergangenen Jahr über das Abitur 2020, wobei sich auch Lehrkräfte äußerten, welche das Problem eher in der vorgesehenen Bearbeitungszeit sahen als in der Schwierigkeit der Aufgaben. So soll es zwar ausreichend einfache Aufgaben gegeben haben, um eine mittlere Note zu erreichen, aber für das Erzielen einer guten oder sehr guten Note hätten nahezu alle Aufgaben bewältigt werden müssen, was nach Angaben der Lehrkräfte aufgrund der Zeit kaum möglich gewesen sei (VE20).
Auch Professor Andreas Filler und Professorin Luise Fehlinger der Mathematikdidaktik der Humboldt-Universität zu Berlin äußerten sich zum Abitur 2019 und teilten in dem Zuge mit, dass sie eher eine positive Entwicklung sehen, da der Fokus in den Aufgaben mehr auf Begründungen und Argumentationen gelegt wurde. Außerdem sei mehr Wissen aus der Sekundarstufe I vorausgesetzt sowie mehr Aufgaben vorhanden, die „nicht nur das Abarbeiten von bekannten Routinen erfordern" (VE19).
Auch die erreichten Ergebnisse der Berliner Schülerinnen und Schüler deuten darauf hin, dass das Berliner Mathematikabitur in den Jahren 2019 und 2020 schwieriger war. Dem Ergebnisbericht des Instituts für Schulqualität der Länder Berlin und Brandenburg für das Abitur 2020 ist zu entnehmen, dass die durchschnittlich erreichte Punktzahl im Leistungskursabitur Mathematik mit 7,4 Punkten im Vergleich zu den Vorjahren weiter gesunken ist, so lag diese im Jahr 2016 noch bei 9,4 Punkten (PE20).
Die Frage ist jedoch, ob es nicht sogar wünschenswert ist, dass das Abitur an Schwierigkeit gewinnt, zumal 2018 noch darüber gesprochen wurde, das Abitur in Berlin sei vor allem im Vergleich mit anderen Bundesländern zu leicht. Im Rahmen des Vergleichs durch Wenzeck stellte sich als Resultat heraus, dass das bayerische Mathematikabitur schwerer ist als das des Berliner Leistungskurses, und das obwohl in Bayern für alle Abiturientinnen und Abiturienten die Pflicht besteht, das Mathematikabitur zu schreiben (VE18).

Ausgehend von diesem Ergebnis und in Verbindung mit den Beschwerden über zu hohe Anforderungen des Berliner Abiturs im Jahr 2020 soll in dieser Arbeit überprüft

werden, ob es tatsächlich an Anspruch gewonnen hat und somit auf ein gleiches Niveau mit dem bayerischen Abitur gestellt werden kann.
Zudem ist es das Ziel dieser Arbeit, zu untersuchen inwieweit die Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (KMK) von 2012 (vgl. Kul12a) in den Abiturprüfungen der beiden Bundesländer Bayern und Berlin erfüllt werden und damit zu einer einheitlicheren Abschlussprüfung verhelfen. Dazu erfolgt eine Untersuchung der Abiturprüfungen der Bundesländer Berlin und Bayern des Jahres 2020.
Zunächst werden dazu die Unterschiede der beiden Schullaufbahnen näher erläutert sowie die Regelungen in den Abiturprüfungen aufgezeigt und diese miteinander verglichen. Darauf aufbauend werden die Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife erklärt und davon ausgehend Kriterien entwickelt, auf welche Weise der Vergleich der Abituraufgaben erfolgt. Im Zuge dessen wird auch auf die länderübergreifenden Aufgabenpools eingegangen, welche seit 2017 vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) entwickelt und den Bundesländern zur Verfügung gestellt werden.
Anschließend werden in Kapitel 5 die Abiturprüfungen der beiden Länder anhand der getroffenen Kriterien genauer unter die Lupe genommen und hinsichtlich der geprüften Kompetenzen aus den Bildungsstandards eingeordnet.
Zur Überprüfung der Fragestellung hinsichtlich der vergleichbaren Anforderungen beider Abiturprüfungen erfolgt abschließend eine Gegenüberstellung anhand der analysierten Ergebnisse für die Abituraufgaben des Jahres 2020.

2 Rahmenbedingungen

In diesem Kapitel werden die verschiedenen Rahmenbedingungen der schulischen Laufbahnen in beiden Ländern analysiert sowie die wesentlichen Unterschiede erläutert. Außerdem wird der Ablauf und Aufbau der Abiturprüfung erklärt und ebenso auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede untersucht.

2.1 Unterschiede in der schulischen Laufbahn

In der Regel besucht man das Gymnasium in Bayern bereits ab der 5. Jahrgangsstufe und beendet es mit dem Abitur in der 12. Klasse (Sta04).
Die Berliner Schülerinnen und Schüler besuchen bis zur 6. Klasse eine Grundschule, sodass sie erst ab der 7. Jahrgangsstufe das Gymnasium besuchen. Jedoch gibt es auch in Berlin Gymnasien, bei denen ein Übertritt bereits nach der 4. Klasse erfolgen kann. Ein weiterer wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Ländern liegt darin, dass Bayern keine Grund- und Leistungskurse mehr anbietet. Diese wurden mit der Einführung des achtjährigen Gymnasiums abgeschafft (Sta08, S. 7). Außerdem wurde im Zuge dieser Veränderung das Abitur im Fach Mathematik als verpflichtend eingeführt, sodass alle Schülerinnen und Schüler an der schriftlichen Prüfung teilnehmen müssen, während die Berliner Schülerinnen und Schüler wählen können, ob sie eine Abiturprüfung im Fach Mathematik ablegen. Laut § 23 des Berliner Schulgesetzes muss in zwei der drei Fächer Mathematik, Deutsch und Fremdsprache eine Prüfung geschrieben werden (Sch20, S. 27).
Wählt man in Berlin den Leistungskurs Mathematik, so beträgt die Unterrichtszeit fünf Stunden pro Woche, im Grundkurs Mathematik sind es drei Stunden pro Woche. Die Schülerinnen und Schüler der bayerischen Oberstufe haben wöchentlich vier Stunden Mathematikunterricht (Bay07, S. 43).
In den Vereinbarungen zur gymnasialen Oberstufe der KMK unterscheidet man Fächer auf grundlegendem und erhöhtem Anforderungsniveau (Kul21, S. 9). Nach diesen Vereinbarungen müssen zwei bis vier Fächer auf erhöhtem Niveau belegt werden, wobei ein Fach dem erhöhten Anforderungsniveau entspricht, sofern mindestens vier Unterrichtsstunden in der Woche stattfinden (Kul21, S. 9). Dazu gehört in Berlin also der Leistungskurs Mathematik mit fünf Stunden und ebenso entspricht der Mathematikunterricht in Bayern mit vier Wochenstunden dem erhöhten Niveau, auch wenn hier eine

Stunde weniger als in Berlin unterrichtet wird.
Aus diesem Grund bezieht sich der Abiturvergleich im Folgenden auf die Berliner Leistungskursprüfung.

2.2 Aufbau der Abiturprüfung

Beide Länder bieten an, die Prüfung mit Hilfe von Computeralgebrasystemen (CAS) zu absolvieren, wofür eine separate Prüfung geschrieben wird. Diese wird im Folgenden nicht berücksichtigt, da hierbei in den Bundesländern unterschiedliche Voraussetzungen gelten (Kul12a, S. 26).

Die Unterschiede der Abschlussprüfung zwischen Berlin und Bayern wurden in den letzten Jahren deutlich reduziert. So hat beispielsweise Berlin seit 2019 ebenso wie Bayern einen hilfsmittelfreien Teil. Nachfolgend werden die dennoch bestehenden Unterschiede erläutert und dadurch Schlussfolgerungen für den anschließenden Vergleich der Abiturprüfungen abgeleitet.

In beiden Ländern besteht die Prüfung aus zwei Prüfungsteilen, wobei Teil A aus Aufgaben besteht, welche ohne die Verwendung von Hilfsmitteln bearbeitet werden müssen und Teil B aus Aufgaben, bei denen solche erlaubt sind. Zu diesen Hilfsmitteln zählt ein einfacher wissenschaftlicher, nicht programmierbarer Taschenrechner (WTR), sowie ein Tabellenwerk und eine Formelsammlung (Kul12a, S. 26).
Beide Prüfungsteile beinhalten jeweils Aufgaben zu den drei Themenbereichen Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Stochastik. Der hilfsmittelfreie Prüfungsteil A war in Berlin erstmals im Jahr 2019 Bestandteil der Abiturprüfung (Sen17, S. 4). Im Gegensatz zu den hilfsmittelfreien Aufgaben in Bayern gibt es im Berliner Teil A keine Auswahlmöglichkeit zwischen zwei Aufgabengruppen. Das heißt, es müssen alle sechs Aufgaben bearbeitet werden, wovon jeweils zwei zu jedem Themengebiet gehören und je 10 Bewertungseinheiten (BE) zu erreichen sind (Sen17, S. 5 f.). Insgesamt gibt es also 30 BE und die Bearbeitungszeit dieses Teils ist wie in Bayern auf 70 Minuten festgelegt (Sen20, S. 6).
Bezüglich der Auswahlmöglichkeit gilt für das bayerische Abitur, dass jeweils zwei Aufgabengruppen pro Themengebiet vorgeschlagen werden, wobei je eine vom Fachausschuss, welcher aus mindestens zwei Lehrkräften besteht, ausgewählt wird. Die Auswahl

der Aufgabengruppe bezieht sich auf das Themengebiet in beiden Prüfungsteilen A und B. Wenn sich der Fachausschuss beispielsweise in Analysis für die Aufgabengruppe 1 entscheidet, so muss diese sowohl in Teil A als auch in Teil B bearbeitet werden. Die Schülerinnen und Schüler bekommen nur die bereits ausgewählte Aufgabengruppe und haben keinen Einfluss auf die Auswahl (Bay10, S. 1).

Im Zuge der Anpassung an die bundesweit geltenden Regelungen, welche von der Kultusministerkonferenz beschlossen wurden, ergaben sich für das bayerische Abitur ab dem Jahr 2020 einige Veränderungen hinsichtlich der Anzahl an Bewertungseinheiten und Bearbeitungszeiten. Für den aus hilfsmittelfreien Aufgaben bestehenden Prüfungsteil A sind nun 30 BE statt vorher 40 BE vorgesehen, wodurch sich auch eine Zeitverkürzung von 90 auf 70 Minuten ergibt. Zudem gilt von nun an, dass Teil A von allen Schülerinnen und Schülern ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss (Sta19, S. 4). In den vorherigen Jahren war es möglich, sich für diesen Teil für die Verwendung von Hilfsmitteln zu entscheiden, wobei in diesem Fall 30 Minuten weniger Zeit zur Verfügung standen.
Im Gegensatz dazu erhöhte sich die Bearbeitungszeit für den Prüfungsteil B von 180 auf 200 Minuten. Des Weiteren besteht die Gesamtpunktzahl für Teil B nun aus 90 BE statt vorher 80 BE, sodass dies auch der Punkteverteilung der Berliner Abiturprüfung entspricht (Sta19, S. 4 f.).
In Tabelle 2.1 werden die soeben ausgeführten Unterschiede in Bezug auf die Punkteverteilung und Bearbeitungszeit in Bayern und Berlin gegenübergestellt. Dabei ist zu erkennen, dass vor allem Teil B im Zuge der Veränderungen der bayerischen Rahmenbedingungen für das Jahr 2020 gut miteinander zu vergleichen ist. So ist in beiden Ländern eine Gesamtpunktzahl von 90 BE zu erreichen, wobei die Aufteilung dieser auf die drei Themengebiete kongruent ist. Anders sieht es für den Prüfungsteil A aus, welcher zwar eine identische Gesamtpunktzahl aufweist, sich aber in der Punkteverteilung deutlich unterscheidet.
Demnach entfallen für den Themenbereich Analysis in Bayern mit 20 BE doppelt so viele Punkte, während die Themengebiete Stochastik und Geometrie mit jeweils 5 BE verglichen mit den 10 BE der Berliner Prüfung nur die Hälfte der Punktezahl aufweist. Hier zeigt sich bereits der hohe Stellenwert der Analysis im bayerischen Abitur. So entfallen zwei Drittel aller Punkte des Teils A auf diesen Themenbereich.

	Prüfungsteil A		**Prüfungsteil B**	
Themenbereich	**Berlin**	**Bayern**	**Berlin**	**Bayern**
Analysis	10 BE	20 BE	40 BE	40 BE
Geometrie	10 BE	5 BE	25 BE	25 BE
Stochastik	10 BE	5 BE	25 BE	25 BE
Gesamt	30 BE	30 BE	90 BE	90 BE
Bearbeitungszeit	70 Minuten	70 Minuten	200 Minuten	200 Minuten

Tab. 2.1: Vergleich der Punkteverteilung und Bearbeitungszeit in den Prüfungsteilen A und B

Betrachtet man jeweils die Bearbeitungszeiten der beiden Prüfungsteile, so ist festzustellen, dass diese aufgrund der Anpassung der Prüfung in Bayern ebenso identisch sind. Dabei ist zu sagen, dass den Berliner Prüflingen zusätzlich zur Bearbeitungszeit eine Auswahlzeit von 30 Minuten zur Verfügung steht (Kul21, S. 14). Diese zusätzliche Zeit fällt in Bayern weg, da die Auswahl durch die Lehrkräfte bzw. den Fachausschuss erfolgt und nicht durch die Prüflinge selbst. Da in der Tabelle die Bearbeitungszeit relevant ist, wurde die Auswahlzeit hier nicht berücksichtigt.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass für den Prüfungsteil B, welcher den Schwerpunkt der Abiturprüfung darstellt, in beiden Ländern die gleiche Punktzahl sowie Zeit vorgesehen ist. Den einzigen Unterschied stellt die Auswahlmöglichkeit dar, welche aber keine weiteren Auswirkungen auf die Analyse der Abituraufgaben mit sich bringt. Daraus kann gefolgert werden, dass ein exakter Vergleich des Prüfungsteils B möglich ist, da hier keinerlei gravierende Unterschiede bestehen.
Für den Teil A ist zu bemerken, dass dieser vermutlich nur schwer zu vergleichen ist, da die Punkteverteilung in Bezug auf die drei Themengebiete in beiden Ländern doch sehr unterschiedlich ist.

3 Die Bedeutung der Bildungsstandards

3.1 Überblick

Im Zuge der Vereinheitlichung der Abschlüsse in Deutschland wurden bereits im Jahr 2003 die Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (MSA) beschlossen, welche von allen Bundesländern seit dem Schuljahr 2004/05 als Grundlage für die Ansprüche der Abschlussprüfung in den Fächern Mathematik, Deutsch sowie der ersten Fremdsprache dienen (Kul03, S. 4). In Ergänzung dazu wurden 2004 solche Regelstandards auch für die naturwissenschaftlichen Fächer Biologie, Chemie und Physik entwickelt, welche seit dem Schuljahr 2005/06 gelten (Kul04, S. 3).

In Bezug auf die allgemeine Hochschulreife wurden diese Regelungen im Jahr 2012 von der Kultusministerkonferenz (KMK) beschlossen und sollen demnach zu einer einheitlichen und vergleichbaren gymnasialen Abschlussprüfung verhelfen. Bereits vorher existierten einheitliche Prüfungsanforderungen (EPA) für die Abiturprüfung (vgl. Kul02), welche nun weiterentwickelt und durch die Bildungsstandards ersetzt wurden. Diese Bildungsstandards legen für alle Fächer fest, welche Kompetenzen geprüft werden und sind den Rahmenlehrplänen der einzelnen Länder übergeordnet. Ziel war es, dass die Abiturprüfungen der Bundesländer ab dem Schuljahr 2016/17 auf den Bildungsstandards beruhen (Kul12a, S. 8). Als Hilfestellung dazu diente unter anderem auch der Aufgabenpool des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB), mit dem erstmals für den Abschlussjahrgang 2017 Aufgaben zur Orientierung veröffentlicht wurden und welcher in Kapitel 3.4 näher erläutert wird.
Um die Bildungsstandards in den Schulsystemen zu integrieren, mussten in einigen Bundesländern Veränderungen vorgenommen werden. Diese beziehen sich nicht nur auf die Durchführungsbestimmungen der Abiturprüfung, sondern auch auf die gegebenenfalls notwendige Anpassung der Lehrpläne sowie der Lehramtsausbildung. Dem *Bericht über den Verfahrensstand zur Implementation der Bildungsstandards* sind diese Veränderungen, welche bis 2015 von den Ländern getroffen wurden, zu entnehmen (vgl. Kul15). Hinsichtlich des Rahmenlehrplans Berlin ist anzumerken, dass dieser zusammen mit dem Land Brandenburg 2015 erneuert wurde und daher bereits auf den Bildungsstandards basiert (Kul15, S. 4). Der bayerische Lehrplan für das Fach Mathematik wies bereits ein hohes Maß an Übereinstimmung mit den Bildungsstandards

auf. Einzig die allgemeinen mathematischen Kompetenzen wurden hier als Neuerung stärker integriert (siehe Sta17) und zusätzliche inhaltsbezogene Kompetenzen wurden berücksichtigt (Kul15, S. 4).
Die durch die KMK beschlossenen Standards für die Allgemeine Hochschulreife untergliedern sich nochmals in die für das grundlegende und das erhöhte Anforderungsniveau. Sofern ein Fach eine wöchentliche Unterrichtszeit von mindestens vier Stunden umfasst, so greifen die Standards für das erhöhte Anforderungsniveau (Kul12a, S. 6). Wie bereits erwähnt zählt der bayerische Mathematikunterricht zum erhöhten Anforderungsniveau, sodass im Folgenden ausschließlich dieses betrachtet wird.

3.2 Allgemeine mathematische Kompetenzen

Für das Fach Mathematik werden die zu erwerbenden Kompetenzen in die fünf Leitideen, wobei es sich um *inhaltsbezogene Kompetenzen* handelt, und die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* unterteilt (Kul12a, S. 11). Diese Kompetenzen werden als das Kompetenzstrukturmodell bezeichnet und sind mitsamt ihren Anforderungsbereichen (AFB) bereits in den Lehrplänen beider Länder beschrieben und integriert (siehe Lan15, Sta17). Die inhaltsbezogenen Kompetenzen werden in der kommenden Analyse außer Acht gelassen, dennoch seien sie an dieser Stelle erwähnt.
Bei den für den Mathematikunterricht vorgesehenen Leitideen handelt es sich um die folgenden Inhalte (vgl. Kul12a, S. 11):

L1 Algorithmus und Zahl
L2 Messen
L3 Raum und Form
L4 Funktionaler Zusammenhang
L5 Daten und Zufall

Das Lösen von mathematischen Problemstellungen erfordert stets eine Verknüpfung von prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen sind außerdem nicht auf die drei mathematischen Themengebiete Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik beschränkt, sondern sollen vielmehr eine Unterstützung dafür sein, diese drei Sachgebiete untereinander zu verbinden (Kul12a, S. 18).

Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen sind also immer direkt mit den Leitideen verbunden sowie auch die sechs Kompetenzen untereinander nicht streng voneinander abgegrenzt werden. Demnach werden in der Regel mehrere Kompetenzen gleichzeitig angesprochen. Außerdem sind diese in unterschiedlichen Schwierigkeiten vorzufinden, dies erfolgt innerhalb einer Unterteilung in die Anforderungsbereiche I bis III (Kul12a, S. 14 ff.).
Der Fokus in der nachfolgenden Analyse in Kapitel 5 liegt auf den allgemeinen mathematischen Kompetenzen und den Anforderungsbereichen, welche nun genauer erläutert werden (vgl. Kul12a, S. 14 ff.).

K1 Mathematisch argumentieren:
Als *mathematisches Argumentieren* versteht man neben dem Entwickeln selbstständiger Argumentationen und Vermutungen auch das Bewerten von gegebenen mathematischen Aussagen. Dies kann einfache Routineargumentationen, aber auch inhaltlich-anschauliche Begründungen und sogar formale mathematische Beweise beinhalten (Kul12a, S. 14).

K2 Probleme mathematisch lösen:
Das *mathematische Problemlösen* beinhaltet das „Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme, das Auswählen geeigneter Lösungsstrategien sowie das Finden und das Ausführen geeigneter Lösungswege" (Kul12a, S. 15). Hierzu gehört das Anwenden von bekannten Strategien, aber auch das Ausführen von komplexen und neuartigen, welche das Nutzen von Heurismen erfordern (Kul12a, S. 15).

K3 Mathematisch modellieren:
Das *mathematische Modellieren* erfordert den Übergang von realen Situationen in mathematische Objekte. Unter anderem beinhaltet dies das „Konstruieren passender mathematischer Modelle", aber auch das „Verstehen oder Bewerten vorgegebener Modelle" (Kul12a, S. 15). Dabei involvieren Teilschritte des Modellierens „das Strukturieren und Vereinfachen gegebener Realsituationen, das Übersetzen realer Gegebenheiten in mathematische Modelle, das Interpretieren mathematischer Ergebnisse in Bezug auf Realsituationen und das Überprüfen von Ergebnissen im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bezogen auf die Realsituation" (Kul12a, S. 15).

K4 Mathematische Darstellungen verwenden:
Die Kompetenz des *Verwendens mathematischer Darstellungen* meint einerseits das Auswählen und das Erzeugen dieser und andererseits den Umgang mit bereits gegebenen Darstellungen. Dies können sowohl Diagramme und Graphen als auch Tabellen oder Formeln sein. Außerdem beinhaltet dies das selbstständige Erstellen von Darstellungen, welche als Hilfe zur Struktur eigener Überlegungen dienen (Kul12a, S. 16).

K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen:
Im Vordergrund dieser Kompetenz steht „das Ausführen von Operationen mit mathematischen Objekten wie Zahlen, Größen, Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen sowie Vektoren und geometrischen Objekten" (Kul12a, S. 16). Hierzu zählen einfache Routineverfahren sowie auch das Anwenden von komplexen Verfahren. Ansonsten fällt auch das Fakten- und Regelwissen für ein effizientes Erarbeiten von Lösungen unter diese Kompetenz, wozu auch der Umgang mit Hilfsmitteln und digitalen Mathematikwerkzeugen gehört (Kul12a, S. 16).

K6 Mathematisch kommunizieren:
Unter *mathematischem Kommunizieren* wird das „Entnehmen von Informationen aus schriftlichen Texten, mündlichen Äußerungen oder sonstigen Quellen als auch das Darlegen von Überlegungen und Resultaten unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache" verstanden (Kul12a, S. 17). Dazu zählt das Notieren einfacher Lösungsschritte, aber auch das sinnentnehmende Erfassen fachsprachlicher Texte sowie das strukturierte Präsentieren eigener Überlegungen (Kul12a, S. 17).

3.3 Einteilung der Anforderungsbereiche

Jede der soeben erläuterten Kompetenzen kann in verschiedenen Abstufungen in Aufgaben erforderlich sein. Dazu werden diese jeweils in drei Anforderungsbereiche eingeteilt. Durch diese Einteilung kann gewährleistet werden, dass die Abiturprüfung verschiedene Leistungsanforderungen anspricht. Im Zentrum steht dabei der Anforderungsbereich II. Ein Unterschied zwischen erhöhtem und grundlegendem Niveau bzw. Leistungs- und Grundkurs liegt darin, dass in einem Prüfungsfach des erhöhten Niveaus die Bereiche II und III im Vordergrund stehen, während im grundlegenden Niveau die Bereiche I

und II mehr hervorzuheben sind (Kul12a, S. 22).
Dennoch ist der Anforderungsbereich einer Aufgabe nicht mit der Schwierigkeit einer solchen gleichzusetzen. Vielmehr beschreiben die Anforderungsbereiche ein „kognitiv orientiertes Komplexitätsmaß“ (Sen14, S. 14) einer Aufgabe, welches logischerweise ein Anzeichen für den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe darstellt. Dennoch hängt dies ebenso wie der Bekanntheitsgrad einer Aufgabe vom vorangegangenen Mathematikunterricht ab (Sen14, S. 18).
Im Folgenden werden nun die Stufen der drei Anforderungsbereiche gemäß den Bildungsstandards näher erläutert (Kul12a, S. 22).

AFB I: Anforderungsbereich I beschreibt neben der Wiedergabe von gelerntem Wissen auch das Anwenden und Beschreiben von eingeübten Verfahren (Kul12a, S. 22).

AFB II: Anforderungsbereich II beinhaltet einerseits das eigenständige Auswählen, Erklären sowie Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten und andererseits das Überführen und Anwenden von gelerntem Wissen auf ähnliche, aber unbekannte Angelegenheiten (Kul12a, S. 22).

AFB III: Zum Anforderungsbereich III zählt das Verarbeiten von komplexen Problemstellungen mit der Intention, selbstständige Lösungen, Folgerungen, Verallgemeinerungen und Argumentationen zu entwickeln, wobei eigenständig passende Methoden und Verfahren zur Lösung der Aufgabe genutzt und auf eine neue Problematik angewendet werden. Zudem erfolgt eine Reflektion der eigenen Vorgehensweise (Kul12a, S. 22).

Ein Bestandteil der Analyse ist zudem, wie sich die Anzahl der Bewertungseinheiten auf die drei Anforderungsbereiche aufteilt. Da für das bayerische Abitur bei der Recherche keine Regelungen in Bezug auf die Verteilung der Anforderungsbereiche gefunden werden konnten, basiert die Festlegung auf den Regelungen der Berliner Vorschriften. Diese sind innerhalb der *Ausführungsvorschriften über schulische Prüfungen* geregelt und geben die in Tabelle 3.1 aufgeführte Verteilung vor (Sen19, S. 120).

Anforderungsbereich	**I**	**II**	**III**
Prozentualer Anteil	24-34 %	35-50 %	26-30 %

Tab. 3.1: Prozentuale Verteilung der Anforderungsbereiche (Sen19, S. 120)

Im Fachbrief Nr. 18 wurde eine Anpassung der Verteilung der Anforderungsbereiche vorgestellt, wobei das Verhältnis

$$\text{AFB I} : \text{II} : \text{III} \approx 34 : 40 : 26$$

als neue Gültigkeit ab dem Jahr 2017 festgelegt wurde (Sen14, S. 17). Dabei ist anzumerken, dass sich der Anteil für den Anforderungsbereich III mit 26 % an der unteren Grenze des in Tabelle 3.1 vorgegebenen Bereichs befindet, während der des Anforderungsbereichs I dem Maximum entspricht. Es wird daher wie in Lang eine veränderte Referenzverteilung für die kommenden Analysen festgelegt (Lan21, S. 56). Dabei wird der Anteil des Anforderungsbereichs III auf 30 % erhöht, was auch im Zuge der Analyse von Leistungskurs-Abituren als sinnvoll erscheint. Demzufolge ergibt sich als Verteilung das Verhältnis

$$\text{AFB I} : \text{II} : \text{III} \approx 25 : 45 : 30,$$

welches als Referenzverteilung für die Analyse der Abituraufgaben zugrunde gelegt wird und anhand dessen der Vergleich erfolgt. Damit liegt der Schwerpunkt weiterhin auf dem Anforderungsbereich II wie es in den Bildungsstandards vorgegeben ist. Zudem wird dadurch der Anforderungsbereich III stärker angesprochen wie es für Prüfungen auf erhöhtem Anforderungsniveau notwendig ist (Kul12a, S. 22).

Die folgenden Tabellen 3.2 und 3.3 enthalten für jede der sechs Kompetenzen eine genaue Erläuterung, welche Ansprüche an die verschiedenen Anforderungsbereiche gestellt werden (vgl. Kul12a, S. 14 ff.). Diese Beschreibungen dienen dem Verständnis der einzelnen Abstufungen und sollen ebenfalls zur Einordnung der Abituraufgaben genutzt werden.

AFB	K1 Mathematisch argumentieren	K2 Probleme mathematisch lösen	K3 Mathematisch modellieren
I	• Routineargumentationen (bekannte Sätze, Verfahren, Herleitungen usw.) wiedergeben und anwenden • einfache rechnerische Begründungen geben oder einfache logische Schlussfolgerungen ziehen • Argumentationen auf der Basis von Alltagswissen führen	• einen Lösungsweg einer einfachen mathematischen Aufgabe durch Identifikation und Auswahl einer naheliegenden Strategie, z. B. durch Analogiebetrachtung, finden	• vertraute und direkt erkennbare Modelle anwenden • eine Realsituation direkt in ein mathematisches Modell überführen • ein mathematisches Resultat auf eine gegebene Realsituation übertragen
II	• überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse nachvollziehen, erläutern oder entwickeln	• einen Lösungsweg zu einer Problemstellung, z. B. durch ein mehrschrittiges, strategiegestütztes Vorgehen, finden	• mehrschrittige Modellierungen mit wenigen und klar formulierten Einschränkungen vornehmen • Ergebnisse einer solchen Modellierung interpretieren • ein mathematisches Modell an veränderte Umstände anpassen
III	• Beweise und anspruchsvolle Argumentationen nutzen, erläutern oder entwickeln • verschiedene Argumente nach Kriterien wie Reichweite und Schlüssigkeit bewerten	• eine Strategie zur Lösung eines komplexeren Problems, z. B. zur Verallgemeinerung einer Schlussfolgerung, durch Anwenden mehrerer Heurismen oder zur Beurteilung verschiedener Lösungswege, entwickeln und anwenden	• eine komplexe Realsituation modellieren, wobei Variablen und Bedingungen festgelegt werden müssen • mathematische Modelle im Kontext einer Realsituation überprüfen, vergleichen und bewerten

Tab. 3.2: Beschreibung der drei Anforderungsbereiche der Kompetenzen K1, K2 und K3 (vgl. Kul12a, S. 14 f.)

AFB	K4 Mathematische Darstellungen verwenden	K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	K6 Mathematisch kommunizieren
I	• Standarddarstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen und nutzen	• elementare Lösungsverfahren verwenden • Formeln und Symbole direkt anwenden • mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge direkt nutzen	• einfache mathematische Sachverhalte darlegen • Informationen aus kurzen Texten mit mathematischem Gehalt identifizieren und auswählen, wobei die Ordnung der Informationen im Text die Schritte der mathematischen Bearbeitung nahelegt
II	• gegebene Darstellungen verständig interpretieren oder verändern • zwischen verschiedenen Darstellungen wechseln	• formale mathematische Verfahren anwenden • mit mathematischen Objekten im Kontext umgehen • mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge je nach Situation und Zweck gezielt auswählen und effizient einsetzen	• mehrschrittige Lösungswege, Überlegungen und Ergebnisse verständlich darlegen • Äußerungen (auch fehlerhafte) anderer Personen zu mathematischen Aussagen interpretieren • mathematische Informationen aus Texten identifizieren und auswählen, wobei die Ordnung der Informationen nicht unmittelbar den Schritten der mathematischen Bearbeitung entsprechen muss
III	• mit unvertrauten Darstellungen und Darstellungsformen sachgerecht und verständig umgehen • eigene Darstellungen problemadäquat entwickeln • verschiedene Darstellungen und Darstellungsformen zweckgerichtet beurteilen	• komplexe Verfahren durchführen • verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren bewerten • die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Verfahren, Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge reflektieren	• eine komplexe mathematische Lösung oder Argumentation kohärent und vollständig darlegen oder präsentieren • mathematische Fachtexte sinnentnehmend erfassen • mündliche und schriftliche Äußerungen mit mathematischem Gehalt von anderen Personen miteinander vergleichen, sie bewerten und ggf. korrigieren

Tab. 3.3: Beschreibung der drei Anforderungsbereiche der Kompetenzen K4, K5 und K6 (vgl. Kul12a, S. 15 f.)

3.4 Länderübergreifende Aufgabenpools

Mit der Einführung des gemeinsamen Aufgabenpools haben sich auch die Abiturprüfungen der Bundesländer immer mehr vereinheitlicht in dem Sinne, dass diese in den Abiturprüfungen der Länder verwendet werden können. Ziel dieses Pools ist es, das Abitur deutschlandweit besser vergleichen zu können und es auf einem hohen Niveau zu halten.
Die Aufgabenvorschläge sind unterteilt in Aufgaben für das erhöhte und solche für das grundlegende Anforderungsniveau. Wie bereits erwähnt zählt der Mathematikunterricht beider Länder zum erhöhten Anforderungsniveau, sodass im Folgenden ausschließlich diese Aufgaben betrachtet werden.
Die vier Fächer, für die Aufgaben aus diesem Pool ausgewählt werden können, sind aktuell Mathematik, Deutsch, Französisch und Englisch. Seit dem Jahr 2017 können die Länder auf diesen Aufgabenpool zurückgreifen, welche vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) entwickelt werden (vgl. Inse).
Der Aufgabenpool für das Fach Mathematik beinhaltet Aufgaben zu allen drei Themenbereichen Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Stochastik, welche von den Bundesländern ohne oder auch mit Abwandlung in der Abiturprüfung integriert werden können. Das Ziel ist dabei, dass bis 2021 die schulischen Voraussetzung aller Länder so angepasst sind, dass die Aufgaben des Pools in unveränderter Form übernommen werden können (vgl. Inse). Dies trägt nochmals zu einer höheren Vergleichbarkeit der Abiturprüfungen bei.
Um außerdem eine uneingeschränkte Nutzung dieses Aufgabenpools zu ermöglichen, wurden auch die Prüfungstermine für die betreffenden Fächer angepasst und finden sofern möglich zur gleichen Zeit statt. Aufgrund der pandemiebedingten Verschiebung des Prüfungstermins im Jahr 2020 musste in Bayern kurzfristig auf landeseigene Aufgaben umgestiegen werden, sodass keine der Aufgaben dem IQB Pool zu entnehmen sind (Sta20c, S. 3).
Erstellt werden die Aufgaben von Arbeitsgruppen, welche unter anderem aus Lehrkräften der Bundesländer bestehen und zusätzlich von wissenschaftlichen Experten der entsprechenden Fächern unterstützt werden (Insd).
Die Aufgaben des Pools werden jeweils nach der Abiturprüfung veröffentlicht, sofern diese von mindestens einem Bundesland in der Prüfung verwendet werden (Sta19, S. 4).

Die Einteilung des IQB ist die Basis der Analyse der Aufgaben, welche in Kapitel 5 folgt. Dazu wird in Kapitel 4.3 für jeden Themenbereich eine Übersicht erstellt, bei der typische Aufgaben in die einzelnen Kompetenzen eingeordnet werden. Dies dient zur Orientierung der im Anschluss folgenden Einteilung der Prüfungsaufgaben des Jahres 2020.

4 Vorgehensweise bei der Analyse von Abituraufgaben

In diesem Kapitel wird genau erklärt, welche Methodik der Aufgabenanalyse zugrunde liegt. Zunächst wird dabei erläutert, welche Analysen es bisher zu dieser Thematik gab. Dabei werden zum einen Masterarbeiten, welche an der Humboldt-Universität zu Berlin erstellt wurden, aufgegriffen und zum anderen wird eine Studie in Bezug auf die Bildungsstandards des mittleren Schulabschlusses vorgestellt.
Zusätzlich werden Eigenschaften von Aufgaben näher betrachtet, welche für die Einschätzung des Schwierigkeitsgrades relevant sind. Abschließend erfolgt eine Zuordnung der Kompetenzen auf Basis der länderübergreifenden Aufgabenpools, welche ein Hilfsmittel für die Einschätzung der Aufgaben aus dem Jahr 2020 darstellt.

4.1 Stand der Forschung

Die Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (MSA) wurden bereits Ende 2003 beschlossen und gelten seit dem Schuljahr 2004/05 (Kul03).
In Bezug auf den MSA gab es dabei eine Untersuchung, bei der die Qualität und Vergleichbarkeit von Prüfungsaufgaben bundesweit analysiert wurde (vgl. KDN13). Dabei wurden insgesamt 77 Abschlussprüfungen der Jahre 2007 bis 2011 aus 15 Bundesländern betrachtet und die Übereinstimmung der Aufgaben mit den geltenden Bildungsstandards überprüft (KDN13, S. 919). Ergebnisse dieser Studie waren unter anderem, dass der höchste Anforderungsbereich (AFB III) kaum in den Aufgaben vertreten ist und auch, dass eine hohe Heterogenität der Verteilung der Leitideen in den einzelnen Bundesländern besteht (KDN13, S. 927 ff.).

Hinsichtlich der Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife gab es bereits Untersuchungen in den Bereichen Analysis und Stochastik, welche die Analyse der Berliner Abituraufgaben in Bezug auf die KMK Bildungsstandards beleuchten. Herr

Lang erforschte in seiner Masterarbeit, inwiefern die Abituraufgaben zur Stochastik im Leistungskurs des Landes Berlin den Anforderungen der KMK genügen und betrachtete dabei die Jahrgänge 2014 bis 2019 (vgl. Lan21). Außerdem wurde eine ähnliche Analyse im Rahmen einer Masterarbeit von Herrn Kretzschmar durchgeführt, der sich auf den Themenbereich Analysis spezialisierte und die Aufgaben für den Leistungskurs der Jahrgänge 2014 bis 2018 untersuchte (vgl. Kre19).
Eine zusätzliche Analyse der Aufgaben für den Themenbereich Analysis existiert auch für die Abiturprüfung des Berliner Grundkurses, welche in der Masterarbeit von Frau Ganseko zu finden ist (vgl. Gan19).
Des Weiteren gab es im Rahmen der Masterarbeit von Herrn Wenzeck einen Vergleich zwischen den Abiturprüfungen der Länder Berlin und Bayern (vgl. Wen18). Herr Wenzeck untersuchte dabei die Schwierigkeit der Abiturprüfungen im Themenbereich Analysis der Jahre 2011 bis 2017, wobei er unter anderem die Anzahl der Aufgaben, Themeninhalte, notwendige Vorkenntnisse sowie das Vorkommen der drei Anforderungsbereiche in den Prüfungsaufgaben der beiden Länder gegenüberstellte (Wen18, S. 21).
Aufbauend auf diesen Arbeiten soll in dieser Arbeit das gesamte Abitur in Berlin und Bayern 2020 untersucht und hinsichtlich der Umsetzung der Bildungsstandards verglichen werden.

Die Analyse im Folgenden gestaltet sich ähnlich wie die Untersuchung von Herrn Lang und Frau Ganseko. Dabei werden die Aufgaben jeweils in die mathematischen Kompetenzen eingeordnet, um festzustellen, welche Kompetenzen benötigt werden, um die jeweilige Aufgabe zu lösen. Eine solche Einordnung ist auch zu einigen Aufgaben des Jahres 2020 innerhalb des Pools bereits auf den entsprechenden Seiten des IQB hinterlegt.

4.2 Eigenschaften von Aufgaben

Zunächst werden wichtige Eigenschaften und Merkmale von Aufgaben erläutert, welche teilweise auch zur Einschätzung der Schwierigkeit von Aufgaben im Folgenden beitragen. Büchter und Leuders spezifizieren die drei Merkmale *Authentizität*, *Offenheit* und *Differenzierungsvermögen* als Eigenschaften, welche eine wichtige Rolle für die Qualität von Aufgaben spielen (BL05, S. 73).

In Hinblick auf die Analyse der Abituraufgaben erscheint die Offenheit dieser als ein relevantes Kriterium zur Einschätzung des Schwierigkeitsgrads. Wann eine Aufgabe als „offen“ gilt, ist am einfachsten zu erklären, indem solche anhand des Gegenteils – der „geschlossenen“ Aufgaben – abgegrenzt werden. Demnach zeichnet sich eine geschlossene Aufgabe dadurch aus, dass in der Aufgabenstellung bereits erkennbar ist, mit welchem Verfahren diese gelöst werden kann, das heißt, es gibt also nur den einen eindeutigen Lösungsweg zur Auswahl (BL05, S. 89). Offene Aufgaben lassen sich hinsichtlich der folgenden Bestandteile unterscheiden, wie offen sie in Bezug auf

- die Informationen über die Ausgangssituation (**Start**),
- die Methode bzw. das Lösungsverfahren (**Weg**) und
- ihre Lösung bzw. Ergebnis (**Ziel**)

sind (BL05, S. 92).
Daraus ergibt sich das in Tabelle 4.1 dargestellte Klassifikationsschema nach Büchter und Leuders, aus dem acht verschiedene Aufgabentypen entstehen. Hierbei sind die aus der Aufgabenstellung bekannten Komponenten mit „✗” gekennzeichnet.

Fall	**Aufgabentyp**	**Start**	**Weg**	**Ziel**
(1)	Beispielaufgabe	✗	✗	✗
(2)	geschlossene Aufgabe	✗	✗	
(3)	Begründungsaufgabe	✗		✗
(4)	Problemaufgabe	✗		
(5)	offene Situation			
(6)	Umkehraufgabe		✗	✗
(7)	Problemumkehr			✗
(8)	Anwendungssuche		✗	

Tab. 4.1: Klassifikationsschema für Offenheit von Aufgaben (vgl. BL05, S. 93)

Die Fälle (3) bis (8) werden von Büchter und Leuders als offene Aufgabentypen eingestuft. Im Beschluss der KMK zu den einheitlichen Anforderungen in der Abiturprüfung (EPA) wird bezüglich der Offenheit von Aufgaben erwähnt, dass offenere Aufgabenstellungen im Allgemeinen den Anforderungsbereichen II oder III entsprechen, da sie zur Lösung mehr als nur „formales Anwenden von Begriffen und Verfahren“ erfordern

(Kul02, S. 11).
Zusätzlich ist dies aber in jedem Fall abhängig vom Sachkontext der jeweiligen Aufgabe, es kann aber dennoch festgehalten werden, dass eine offene Aufgabe in der Regel mit einer höheren Komplexität verbunden ist als eine geschlossenen Aufgabe.
Im Falle einer Problemaufgabe (4), bei der die Anfangssituation bekannt ist, nicht aber der Lösungsweg oder das Verfahren, welches zur Lösung führt, kann die Kompetenz des mathematischen Problemlösens (K2) vorausgesetzt werden. Dabei wird im Anforderungsbereich II vom „Finden eines Lösungswegs zu einer Problemstellung" gesprochen (vgl. Tabelle 3.2).
Innerhalb der oben genannten offenen Aufgabentypen zählen die Umkehraufgabe, Problemumkehr und die Anwendungssuche zu den „unauthentischen" Aufgaben, welche rein für das schulische Lernen konstruiert werden (BL05, S. 95). Diese drei Formate finden keine Anwendung innerhalb des Abiturs, da Abituraufgabenstellungen in der Regel Informationen über die Ausgangssituation enthalten. Generell wird in der kommenden Analyse das Kriterium der Authentizität vernachlässigt, auch wenn dies für die Mathematik in der Schule wichtig ist, um den Schülerinnen und Schülern anhand von authentischen Aufgaben ein glaubwürdiges Bild der Mathematik zu übermitteln (BL05, S. 86).
Des Weiteren wird auch das Differenzierungsvermögen von Aufgaben nicht weiter beachtet, da die Rahmenbedingungen des Abiturs festgelegt sind und somit kein wirkliches Differenzieren möglich ist. Lediglich die Möglichkeit im Berliner Abitur, aus zwei verschiedenen Aufgabenvorschlägen einen auszuwählen, könnte man als eine Art „Differenzierung durch parallele Aufgaben" ansehen (BL05, S. 107).
Weitere Aspekte zur Einschätzung kognitiver Anforderungen an eine Aufgabe sind der *Bekanntheitsgrad* und der *Abstraktionsgrad* (Ris08, S. 94). Bestehen Aufgaben aus bereits bekannten Sachverhalten oder erfolgt der Lösungsweg anhand eines eingeübten Verfahrens, so fällt es den Schülerinnen und Schülern leichter, diese zu bewerkstelligen, da sie eine gewisse Routine vorweisen. Dies spiegelt auch die Beschreibung der Anforderungsbereiche der Kompetenzen wider. So wird in Tabelle 3.2 das Ausführen einer „Routineargumentation" mit Hilfe von bekannten Sätzen innerhalb der Kompetenz des mathematischen Argumentierens (K1) dem Anforderungsbereich I zugeteilt. Im Gegensatz dazu wird hinsichtlich der Kompetenz zur Verwendung mathematischer Darstellungen (K4) eine Aufgabe dem Anforderungsbereich III zugewiesen, sofern ein Umgang mit „unvertrauten Darstellungen" notwendig ist (vgl. Tabelle 3.3). Hierbei hat

unter anderem der Mathematikunterricht eine große Bedeutung, denn es ist abhängig vom Unterricht, in welchen Sachverhalten und Problemstellungen die Schülerinnen und Schüler Routine haben oder auch nicht.
Hinsichtlich des Abstraktionsgrads beschreiben auch die Bildungsstandards, dass darin neben der Komplexität ein wesentlicher Unterschied zwischen dem grundlegenden und dem erhöhten Anforderungsniveau besteht (Kul12a, S. 22).
Angesichts der Komplexität einer Aufgabe lässt sich auch hier der entsprechende Zusammenhang zum Anforderungsbereich III anhand der Beschreibungen der einzelnen Kompetenzen in Tabelle 3.2 und 3.3 erkennen. So wird im Anforderungsbereich III beispielsweise ein „komplexes Verfahren" (K5), eine „komplexe mathematische Lösung" (K6) oder auch „eine Strategie zur Lösung eines komplexeren Problems" (K2) erwartet. Dennoch sei an dieser Stelle erwähnt, dass das Empfinden der Komplexität eines Sachverhalts oder einer Aufgabenstellung subjektiv ist und je nach Vorwissen und Vorerfahrung von Person zu Person unterschiedlich eingeschätzt wird.

4.3 Einordnung von Abituraufgaben auf Basis der Aufgabenpools

Neben den soeben erläuterten Eigenschaften von Aufgaben und der daraus resultierenden Einschätzung der Schwierigkeit von Abituraufgaben spielt die Einordnung in die allgemeinen mathematischen Kompetenzen seitens des IQB eine wichtige Rolle. Diese Zuordnungen erfolgen in Bezug auf die zur Bearbeitung einer Aufgabe benötigten Kompetenzen sowie den dabei infrage kommenden Anforderungsbereich.
Es folgt nun eine tabellarische Übersicht zu verschiedenen Aufgabentypen in jedem der drei Themengebiete, welche in den vergangenen Jahren innerhalb der Aufgabenpools veröffentlicht wurden. Es erfolgt dabei die Betrachtung einer Auswahl an Aufgaben, welche in Bezug auf die Abiturprüfungen für das Jahr 2020 eine Ähnlichkeit aufweisen, sodass sie eine bessere Einschätzung dieser ermöglichen.
Die folgenden Tabellen zeigen, welcher Aufgabentyp jeweils welcher Kompetenz und welchem Anforderungsbereich zugeordnet werden kann. Die Zuordnung wurde aus Beispielaufgaben des IQB Aufgabenpools entnommen, sodass die Klassifikation der Kompetenzen nach den Bildungsstandards für typische Aufgaben deutlich wird. Dies stellt ein Hilfsmittel dar, um eine möglichst genaue Einordnung nach den Ansprüchen der Bildungsstandards zu erzielen.
Die Beschreibungen der Aufgabenstellungen wurden den Pools aus den Jahren 2017 bis

2020 sowie der Aufgabensammlung zur Orientierung entnommen (vgl. Ins17a, Ins18a, Ins19a, Insa).
Die letzte Spalte beschreibt jeweils die Einordnung der gesamten Aufgabe, welche sich aus dem am höchsten vorkommenden Anforderungsbereich der jeweiligen Teilaufgabe ergibt.
Sofern die eigene Einschätzung von der des IQB abweicht, ist die ursprüngliche Zuordnung seitens des IQB in Klammern vermerkt.
Da sich die Aufgaben jedoch in Komplexität und auch in Verbindung mit verschiedenen Sachzusammenhängen unterscheiden, kann damit nur ein Hinweis auf die Kompetenzeinordnung bezüglich der Abituraufgaben aus dem Jahr 2020 gegeben werden.

4.3.1 Einordnung von Aufgaben zum Themenbereich Analysis

Für den Bereich der Analysis ergab sich eine Änderung für den Aufgabentyp „Nachweisen, dass $f'(x)$ eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion ist", sodass dieser Typ von Aufgabe folglich in Tabelle 4.2 dem Anforderungsbereich I statt II zugeteilt wird, da es sich hierbei um das Ausführen einer Routinestrategie handelt und sich demnach in der Kompetenz des *Umgangs mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik* (K5) im Anforderungsbereich I wiederfindet.
Hinsichtlich des Aufgabentyps „Angeben des Grenzwertverhaltens" ist es durchaus möglich, dass eine Zuordnung zum Anforderungsbereich II erfolgt, sofern es sich um eine komplexere Funktionsgleichung handelt. Dies kann sich beispielsweise darin äußern, dass aufgrund eines Parameters eine Fallunterscheidung gemacht werden muss. Dies ist in der Beispielaufgabe in Tabelle 4.2 nicht der Fall, sodass die Zuordnung zum Anforderungsbereich I übernommen wurde.
Gleiches gilt auch für die Aufgabe des „Berechnens des Steigungswinkels einer linearen Funktion", wobei je nach Aufgabenstellung ein unterschiedlich hoher Komplexitätsgrad auftreten kann.

Allgemein trifft dies auf alle Aufgabentypen zu, sodass in Kapitel 5 die Aufgabenstellungen genau betrachtet werden, um eine möglichst korrekte Zuordnung der Anforderungsbereiche zu gewährleisten.

Aufgabenstellung	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**AFB**
Angeben des Definitionsbereichs von f (*hier*: $f(x) = ln(e^2 - x)$) (vgl. Insb, 1a)					I		I
Begründen der Achsen-/Punktsymmetrie (*hier*: $f_k(x) = k^2x^3 - 6kx^2 + 9x$ mit $k \in \mathbb{R}^+$) (vgl. Ins17c, 1c)	I				I	I	I
Angeben des Grenzwertverhaltens von f_k für $x \to \pm\infty$ (*hier*: $f_k(x) = k^2x^3 - 6kx^2 + 9x$, mit $k \in \mathbb{R}^+$) (vgl. Ins17c, 1a)					I		I
Einzeichnen des Graphen G_g für $-1,5 \leq x \leq 0,5$ (*hier*: $g(x) = \frac{5}{2}x^2(2x+3)$) (vgl. Ins19c, 1b)				I			I
Bestimmen der Koordinaten und Art der Extrempunkte von G_f (*hier*: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 5$) (vgl. Insc, 1a)	I				I		I
Berechnen des Steigungswinkels einer linearen Funktion g (vgl. Ins17d, 2f)					I		I
Nachweisen, dass $f'_k(x) = 3(kx-1)(kx-3)$ eine Gleichung der Ableitungsfunktion von f_k mit $f_k(x) = k^2x^3 - 6kx^2 + 9x$ ist (vgl. Ins17c, 1d)					I (II)		I (II)
Angeben der Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$ (*hier*: $f_k(x) = -x^4 + 6kx^2$) (vgl. Ins17d, 1a)	II	I				I	II
Rechnerisches Bestimmen der Fläche, den G_f, die $x-$Achse und die Gerade mit $y = -3$ einschließen (*hier*: $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$) (vgl. Ins19b, 1b)		II		I	II		II
Angeben wie der Graph von mit $k : x \mapsto 3,3 \cdot sin(\frac{\pi}{6}x) + 406$ aus dem Graphen der Funktion $s : x \mapsto sin(x)$ hervorgeht und beurteilen, ob die Reihenfolge der einzelnen Schritte von Bedeutung ist (vgl. Ins20g, 3c)	II			II		II	II
Berechnen der Koordinaten von $Q(u\|f(u))$ mit $u > 0$, durch welchen die Tangente an G_f verläuft und mit den Koordinatenachsen ein gleichschenkliges Dreieck einschließt (*hier*: $f(x) = \frac{4}{x^2}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) (vgl. Ins18b, 1b)	III	III			II		III

Tab. 4.2: Einordnung von Aufgabentypen im Themenbereich Analysis

4.3.2 Einordnung von Aufgaben zum Themenbereich Geometrie

Für das Sachgebiet der Analytischen Geometrie ist in Tabelle 4.3 eine Auswahl an Aufgabentypen einzusehen. Die Durchsuchung ergab für dieses Sachgebiet nur eine geringe Anzahl an Aufgaben, welche mit denen aus dem Jahr 2020 in Verbindung gebracht werden können. Außerdem wurde eine Aufgabe im Prüfungsteil B des Berliner Abiturs aus dem IQB Pool des Jahres 2020 entnommen (siehe Tabelle 5.4), welche in Kapitel 5 ausführlicher dargestellt wird.

Aufgabenstellung	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**AFB**
Begründen, dass $OPQR$ ein Rechteck ist (vgl. Ins20h, 1c)	I				I	I	I
Einzeichnen eines Vierecks in eine Abbildung (vgl. Ins19d, 1a)				I			I
Berechnen des Volumens eines Körpers (*hier*: Zylinder) (vgl. Ins19e, 1d)					I		I
Ermitteln einer Ebenengleichung in Koordinatenform, in der sich das Rechteck $ABCD$ befindet (vgl. Ins17e, 1c)					II		II
Berechnen der Größe des Neigungswinkels gegenüber der x_1x_2-Ebene (vgl. Ins19e, 1c)			I		II		II
Berechnen der Koordinaten des Schnittpunktes einer Ebene mit einer Gerade (vgl. Ins17b, 1b)					II		II
Ermitteln von Koordinaten eines Punktes (vgl. Ins20i, 1c)		II			II	I	II

Tab. 4.3: Einordnung von Aufgabentypen im Themenbereich Geometrie

Die Zuteilung des Aufgabentyps „Ermitteln von Koordinaten eines Punktes” hängt stark von der Komplexität der Aufgabenstellung ab. So kann es beispielsweise vorkommen, dass die Koordinaten ohne große Herausforderungen anhand einer Skizze ablesbar sind, wobei eine Zuordnung zum Anforderungsbereich I erfolgen würde. Anders aber kann dafür eine komplexe Lösungsstrategie notwendig sein, sodass eine Zuordnung zum Anforderungsbereich II oder III ebenso erdenkbar ist.

4.3.3 Einordnung von Aufgaben zum Themenbereich Stochastik

Tabelle 4.4 zeigt die Einordnung von Aufgaben zum Themenbereich Stochastik auf Basis der Aufgabenpools.

Aufgabenstellung	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**AFB**
Bestimmen der Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse (Binomialverteilung) (vgl. Ins17f, 1c)			I		I		I
Berechnen der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mittels Baumdiagramm (*Ziehen mit Zurücklegen*) (vgl. Ins20j, 1a)		I	I		I		I
Untersuchen, ob zwei Defekte unabhängig voneinander auftreten (stochastische Unabhängigkeit) (vgl. Ins18d, 1c)	I		II		I		II
Berechnen der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (hypergeometrische Verteilung) (vgl. Lan21, S. 54)			I		I	I	I
Berechnen einer bedingten Wahrscheinlichkeit (vgl. Ins20k, 1d)		II			I	I	II
Darstellen des Sachverhalts in einer Vierfeldertafel (vgl. Ins18d, 1b)		II		II		II	II
Bestimmen der zugehörigen Entscheidungsregel für den Signifikanztest (vgl. Ins20j, 2b)	II	II	II		II		II
Beschreiben eines Zufallsexperiments im Sachzusammenhang und Angabe des Ereignisses, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $1 - 0,6^{10} - 10 \cdot 0,4 \cdot 0,6^9$ berechnet werden kann (vgl. Ins20k, 1b)	II		II	II		II	II
„3-Mindestens-Aufgabe" mit $P(X \geq 1)$ (vgl. Lan21, S. 54)		I	II		II		II
„3-Mindestens-Aufgabe" mit $P(X \geq 3)$, wobei die Lösung durch „Ausprobieren" erfolgt (vgl. Ins18c, 1b)	I	III	II				III
Bestimmen der Anzahl an Möglichkeiten, einen Blumenstrauß zusammenzustellen (Kombinatorik) (vgl. Ins20e, 1b)		III	II				III
Ermitteln des Bereichs, sodass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art kleiner als 25 % ist (vgl. Ins20j, 2c)	II (III)	III	III		II	II	III

Tab. 4.4: Einordnung von Aufgabentypen im Themenbereich Stochastik

Hierbei wurde zusätzlich eine Aufgabe zur hypergeometrischen Verteilung aufgenommen, zu welcher die Zuordnung nach Lang übernommen wurde (Lan21, S. 54). Dies liegt daran, dass nach aktuellem Stand keine der in den Pools vorhandenen Aufgaben die hypergeometrische Verteilung beinhaltet. Dennoch sind Aufgaben dieser Art relevant, da sie speziell im Jahr 2020 in Bayern (Teil A und B) sowie auch in Berlin (Teil B) vorkommen. Zudem konnte in der Analyse der Stochastik-Aufgaben festgestellt werden, dass die hypergeometrische Verteilung in Berlin seit 2014 jedes Jahr außer 2015 vertreten war (vgl. Lan21, S. 92).
Die Aufgabe innerhalb der Kombinatorik zur Bestimmung der Anzahl an Möglichkeiten wird laut IQB dem Anforderungsbereich III zugewiesen. Man könnte diese auch dem Anforderungsbereich II zuweisen, da es sich hierbei nicht um eine besonders komplexe Darstellung handelt. Jedoch lässt sich dies auch dadurch rechtfertigen, dass Zählprinzipien häufig eine große Herausforderung für Schülerinnen und Schüler darstellt, sodass wiederum eine Zuordnung zum Anforderungsbereich III als sinnvoll erscheint. Es kommt dabei auch immer auf den vorangegangen Unterricht an, denn oft wird dieses Thema nur sehr kurz behandelt, sodass es für die Schülerinnen und Schüler eine große Schwierigkeit darstellt. Auch im Hinblick auf eigene Erfahrungen bezüglich des Mathematikunterrichtes wurde dieses Thema nicht sehr stark thematisiert, sodass die Zuordnung zum Anforderungsbereich III übernommen wird.

4.4 Bedeutung der Operatoren

Außerdem relevant für die Einschätzung der Anforderungen einer Aufgabe ist die Wahl der Operatoren. Diese spielen eine wichtige Rolle für das verständliche und konkrete Formulieren von Arbeitsanweisungen. Gemäß der KMK muss es einen Zusammenhang der verwendeten Operatoren mit dem jeweiligen Anforderungsbereich der Aufgabe geben, welcher dennoch zusätzlich in Verbindung mit dem Sachverhalt der jeweiligen Aufgabe steht (Kul12a, S. 23).
Eine solche Operatorenliste wurde bereits 2006 im Rahmen des Fachbriefes Nr. 4 für Mathematik von der Senatsverwaltung Berlin veröffentlicht, welche als Hilfestellung für die Formulierung von Aufgabenstellungen in Abiturprüfungen dient (Sen06, S. 6). In Tabelle 4.5 erfolgt eine ausgewählte Darstellung von häufig verwendeten Operatoren sowie eine Beschreibung dieser und eine Zuordnung zu den drei Anforderungsbereichen. Dabei sei jedoch anzumerken, dass diese Zuteilung abweichen kann und je nach Aufga-

benstellung der Anforderungsbereich angepasst werden muss, da dieser nicht alleine von den jeweils verwendeten Operatoren abhängig ist.

Operator	**Erklärung**	**AFB**
Angeben, Nennen	Angeben eines Ergebnisses ohne Rechnung oder Begründung	I
Beschreiben	Formulieren einer Beschreibung, ohne dass eine Begründung erforderlich ist	I
Skizzieren	Darstellen wesentlicher Eigenschaften eines Objektes	I
Berechnen	Darstellen einer Berechnung ausgehen von einem Lösungsansatz	I
Bestimmen, Ermitteln	Darstellen eines Lösungswegs und Angabe des Ergebnisses	I, II
Zeigen, Nachweisen	Bestätigen von mathematischen Aussagen unter Nutzung von Regeln, Berechnungen oder logischen Begründungen	I, II
Erläutern	Veranschaulichen eines Sachverhalts durch zusätzliche Informationen (z. B. mit Hilfe eines Beispiels)	II
Erklären	Verständliches Darlegen und nachvollziehbar machen von Sachverhalten mit Hilfe von eigenen Kenntnissen sowie Einordnen dieser in verschiedene Zusammenhänge	II
Begründen	Formulieren eines geschlossenen Textes unter Verwendung mathematischer Regeln und Gesetzmäßigkeiten	II, III
Untersuchen	Darlegung von Eigenschaften oder Beziehungen zwischen Objekten	II, III
Interpretieren, Deuten	Erklären von Strukturen oder Ergebnissen in Bezug auf eine Fragestellung oder einen Sachzusammenhang	II, III
Beurteilen, Bewerten	Formulieren und Begründen einer eigenen Einschätzung zu einem Sachverhalt unter Verwendung von Fachwissen	III
Beweisen	Verifizieren von mathematischen Aussagen ausgehend von Voraussetzungen und unter Verwendung mathematischer Sätze	III

Tab. 4.5: Liste der häufig verwendeten Operatoren (vgl. Kul19, Kul12b, Insf)

So werden Aufgaben mit dem Operator *Berechnen* vorwiegend dem Anforderungsbereich I zugeteilt, da bei einer Berechnung primär das Ausführen eines Algorithmus im Vordergrund steht. Dennoch können diese auch sehr komplex sein, sodass nicht immer eine Zuweisung zum Anforderungsbereich I erfolgt. Gleiches gilt auch für das *Skizzieren*, wobei es sich meist um das Einzeichnen einfacher mathematischer Objekte handelt und damit dem Anforderungsbereich I entspricht. Nichtsdestotrotz kann aber

auch hier je nach Kontext ein komplexes Vorgehen notwendig sein.
Die Tatsache, dass die Operatoren *Beweisen* und *Zeigen* im Fachbrief Nr. 4 gleichgesetzt werden, wird in Tabelle 4.5 differenzierter betrachtet, da diese beiden Handlungsaufforderungen sich deutlich in der Komplexität der Lösungsdarstellung unterscheiden.
So wird der Operator *Zeigen* beispielsweise verwendet, sofern gezeigt werden soll, dass eine bestimmte Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion entspricht. Dies kann durch einfaches Bestimmen der Ableitungsfunktion direkt gezeigt werden, während ein Beweis eine komplexere Darstellung und auch eine Verallgemeinerung einer Aussage nach sich zieht, sodass diese beiden Operatoren im Allgemeinen nicht gleichzusetzen sind. Zudem wurde im Rahmen der Prüfungsschwerpunkte festgelegt, dass in den Abituraufgaben keine Beweise erläutert oder entwickelt werden müssen (Sen20, S. 1).
Der Operator *Untersuchen* wird seitens des IBQ so beschrieben, dass dabei ein eigenes Vorgehen gewählt werden kann, sofern es nicht vorgegeben ist (Insf). In diesem Fall handelt es sich schließlich um eine offene Aufgabenstellung, welche sehr komplex sein kann und bei der es notwendig ist, eine eigene Lösungsstrategie zu entwickeln wie es beispielsweise bei einer Problemaufgabe der Fall ist (vgl. Tabelle 4.1). Demnach kommen hierbei vorwiegend die Anforderungsbereiche II und III infrage.

In obiger Tabelle wurden bereits für einige Operatoren mehrere Möglichkeiten zur Zuordnung der Anforderungsbereiche ausgewiesen und es kann auch trotzdem noch eine abweichende Einteilung bei der Analyse von Aufgaben auftreten. Dennoch sind die Operatoren ein nützliches Kriterium für die Klassifizierung des Anforderungsbereichs. Anders sieht es dabei für die Einordnung in die allgemeinen mathematischen Kompetenzen aus. Es gibt zwar einige Operatoren die typisch sind, sodass beispielsweise das *Begründen* meist dem mathematischen Argumentieren (K1) entspricht (vgl. Tabelle 3.2) oder der Operator *Skizzieren* auf die Kompetenz zur Verwendung mathematischer Darstellungen (K4) deutet (vgl. Tabelle 3.3). Dennoch muss die Aufgabe in jedem Fall als Ganzes betrachtet werden, um eine möglichst genaue Zuordnung vorzunehmen.

5 Analyse der Abituraufgaben

Dieses Kapitel beinhaltet die Analyse der Abituraufgaben des Jahres 2020. Dabei unterteilt sich die Analyse zum einen in die beiden Länder Berlin und Bayern und zum anderen zusätzlich in die drei Themengebiete Analysis, Geometrie und Stochastik.
Wie bereits erwähnt werden die Aufgaben für das Abitur mit dem CAS hierbei nicht betrachtet. Außerdem bezieht sich die Untersuchung auf die Prüfungen zum ersten Termin, das heißt, das Abitur der jeweiligen Nachholtermine wird ebenso nicht betrachtet.
Der Fokus der Analyse liegt in der Einordnung der jeweiligen Aufgaben in die allgemeinen mathematischen Kompetenzen sowie die dazu gehörigen Anforderungsbereiche.
Zur Vereinfachung der Darstellung werden die Kompetenzen und Anforderungsbereiche im Folgenden abgekürzt: z. B. K1-II steht für die allgemeine mathematische Kompetenz *Mathematisch argumentieren* (K1) mit Anforderungsbereich II. Außerdem werden im folgenden Kapitel die Abkürzungen K1-K6 der Kompetenzen verwendet:

K1 Mathematisch argumentieren
K2 Probleme mathematisch lösen
K3 Mathematisch modellieren
K4 Mathematische Darstellungen verwenden
K5 Mit symbolischen, technischen und formalen Elementen der Mathematik umgehen
K6 Mathematisch kommunizieren

5.1 Das Berliner Abitur 2020

Es folgt nun eine detaillierte Betrachtung der Berliner Abituraufgaben für das Jahr 2020. Die Aufgaben sind entweder ausschließlich dem Stark Buch für das Jahr 2021 zu entnehmen (vgl. Sta20d) oder teilweise durch die Veröffentlichung infolge des IQB Aufgabenpools frei zugänglich (vgl. Ins20a).

5.1.1 Aufgaben zum Themenbereich Analysis

Im Gegensatz zum bayerischen Abitur, in dem es jeweils verschiedene Aufgabenvorschläge gibt, müssen die Berliner Schülerinnen und Schüler alle Aufgaben des hilfsmittelfreien Teils bearbeiten. Dabei existieren pro Themenbereich je zwei Aufgaben.

Teil A - Analysis 1 & 2

Beide Aufgaben im Prüfungsteil des Themenbereichs Analysis sind im IQB Aufgabenpool gelistet (vgl. Ins20c, Ins20b), sodass an dieser Stelle eine kurze tabellarische Zusammenfassung der Aufgabenstellung und der Kompetenzeinordnung erfolgt (vgl. Tabelle 5.1). „TA" steht dabei für die jeweilige Teilaufgabe.

TA	Aufgabenstellung (Kurzform)	K1	K2	K3	K4	K5	K6	AFB	BE
1a	Begründen, dass der Flächeninhalt jedes Dreiecks mit dem Term $\frac{1}{2}a^2e^{-a}$ bestimmt werden kann		I		I	I		I	2
1b	Bestimmen des Wertes für a, für den das Dreieck den größten Flächeninhalt hat	I	II			II		II	3
2a	Zeigen, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^4 + 3$ eine Stammfunktion von f_2 ist					I		I	1
2b	Untersuchen (anhand von Skizzen), für welche Werte a sich unter den Stammfunktionen von f_a solche befinden, die nur negative Funktionswerte besitzen	III	III		II	II	III	III	4

Tab. 5.1: Standardbezug der Aufgaben 1 und 2 zum Themenbereich Analysis im Prüfungsteil A des Berliner Abiturs 2020 (vgl. Ins20c, Ins20b)

Teil B - Aufgabe 2.1 (Eingangstor)

In dieser Aufgabe wird eine Funktionenschar f_a betrachtet mit $f_a(x) = -ax^4 + x^2 + \frac{a}{2}$, wobei $a \in \mathbb{R}$ (Sta20d, S. 2020-11 f.).
Dabei soll in Aufgabe a zunächst gezeigt werden, dass alle Graphen G_a achsensymmetrisch zur $y-$Achse verlaufen. Zur Lösung muss ausschließlich $f_a(-x)$ bestimmt werden, sodass diese Aufgabe wie auch in Tabelle 4.2 der Kompetenz K5-I zugeordnet wird und damit mit 1 BE dem Anforderungsbereich I entspricht.
Für Aufgabe b soll das Grenzwertverhalten von f_a für $x \to \pm\infty$ angegeben werden. Die Lösung erfordert wie die vorherige Aufgabe das Anwenden eines Routineverfahrens, womit sie die Kompetenz K5-I erfordert. Im Gegenteil zur Beispielaufgabe dieser Art

(vgl. Tabelle 4.2) muss hierbei eine Fallunterscheidung durchgeführt werden, bei der die Fälle $a > 0$, $a < 0$ und $a = 0$ betrachtet werden müssen. Es handelt sich dabei um das Darlegen einer mehrschrittige Überlegung, welche innerhalb der Kompetenz des mathematischen Argumentierens (K6) dem Anforderungsbereich II entspricht (vgl. Tabelle 3.3). Insgesamt erfolgt eine Zuordnung der Aufgabe mit 4 BE zum Anforderungsbereich II.
In Aufgabe c sollen für den Graphen der Funktion $f_{0,5}$ die Koordinaten und Art der lokalen Extrempunkte bestimmt werden. Im Vordergrund liegt hier das Anwenden von geübten Rechenverfahren durch das Bilden der Ableitungsfunktionen sowie das Erkennen der Art der Extrema. Damit erfordert der Lösungsweg die Kompetenzen K1-I sowie K5-I (vgl. Tabelle 4.2) und wird demnach mit 9 BE dem Anforderungsbereich I zugeordnet.
In Aufgabe d wird zunächst das Berechnen des Schnittpunktes mit der $y-$Achse geprüft, wobei ausschließlich $f_a(0)$ berechnet werden muss und damit die Kompetenz K5-I benötigt wird. Anschließend soll nachgewiesen werden, dass der soeben berechnete Punkt stets ein lokaler Tiefpunkt der Graphen G_a ist. Dazu muss die erste und zweite Ableitung bestimmt und es muss gezeigt werden, dass die zweite Ableitung in diesem Punkt größer als 0 ist. Demnach kann diese Aufgabe K5-I sowie K1-II zugeordnet und folglich mit 5 BE in den Anforderungsbereich II eingeordnet werden.
Aufgabe e verlangt das Angeben der Anzahl der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a, wobei eine Begründung auf Basis der Ergebnisse aus den vorherigen Teilaufgaben gegeben werden soll. Diese Aufgabe erfordert eine Fallunterscheidung, da jeweils die Anzahl der Nullstellen für $a = 0$, $a > 0$ sowie $a < 0$ ermittelt werden soll. Aufgrund dessen handelt es sich im Gegensatz zur Beispielaufgabe in Tabelle 4.2 um eine komplexere Darlegung der Argumentation (vgl. Tabelle 3.3), sodass die Kompetenz K6-III erforderlich ist. Zudem beinhaltet diese Aufgabe K1-II, K2-II sowie K5-I und wird letztendlich mit 5 BE dem Anforderungsbereich III zugeteilt.
In Aufgabe f soll begründet werden, dass es ein zur $y-$Achse symmetrisches Quadrat geben muss, von dem zwei Eckpunkte auf der $x-$Achse und zwei auf $G_{0,5}$ liegen. Als Hilfestellung wird der zugehörige Graph $G_{0,5}$ in der Aufgabe dargestellt (Sta20d, S. 2020-11), anhand dessen die Begründung erfolgen soll. Diese Aufgabe wird mit 3 BE dem Anforderungsbereich III zugewiesen. Dies begründet sich darin, dass hierbei zunächst eine Lösungsstrategie gefunden (K2-II) sowie anschließend eine anspruchsvolle Argumentation (K1-III) mit Hilfe der Abbildung des Graphen (K4-I) formuliert werden

muss.
Anschließend wird ein achsenparalleles Rechteck betrachtet, wobei ein Punkt auf dem Graphen $G_{0,5}$ im ersten Quadranten sowie der Koordinatenursprung die diagonal gegenüberliegenden Eckpunkte des Rechtecks bilden. Die waagrechte Seite des Rechtecks ist 0,8 LE lang und der Graph $G_{0,5}$ teilt dieses in zwei Teilflächen. Die Aufgabe g besteht nun darin, das Verhältnis der Flächeninhalte dieser Teilflächen zu ermitteln. Diese Aufgabe erfordert das Berechnen der Flächeninhalte (K5-II), welche zunächst mit Hilfe einer Skizze verdeutlicht werden müssen, sodass die Kompetenzen K2-I und K4-I gefordert sind. Damit wird diese Teilaufgabe mit 5 BE dem Anforderungsbereich II zugeteilt.
In Aufgabe h ist eine Tangente t im Punkt $U(1|f_a(1))$ gegeben, welche mit der zu t senkrechten Geraden mit der $x-$Achse ein Dreieck einschließen. Es soll ein Parameterwert a so ermittelt werden, dass das Dreieck gleichschenklig ist und die Basis auf der $x-$Achse liegt. Eine ähnliche Aufgabe findet sich im Aufgabenpool von 2017 (vgl. Tabelle 4.2), sodass diese Aufgabe die Kompetenzen K1-III, K2-III und K5-II benötigt und letztlich mit 4 BE dem Anforderungsbereich III zuzuweisen ist.
Aufgabe i betrachtet die Funktion f_2 mit $f_2(x) = -2x^4 + x^2 + 1$ für $x \in \mathbb{R}$. Der Graph beschreibt im Intervall $[-1; 1]$ die Profillinie für das Eingangstor eines Vergnügungsparks und ist als Hilfestellung abgebildet (Sta20d, S. 2020-12). Dabei gilt, dass die $x-$Achse im Profil die untere Begrenzung darstellt und 1 LE $\widehat{=}$ 3 m. Die Aufgabe besteht anschließend darin, dass ermittelt werden soll, welche Breite ein quaderförmiges Fahrzeug unterschreiten muss, damit es bei Ausnutzung der maximalen Durchfahrtshöhe gerade noch mittig das Eingangstor passieren kann. Dabei müssen die Schnittpunkte des Graphen mit der Geraden $y = 1$ bestimmt und anschließend das Ergebnis im Sachzusammenhang erläutert werden. Damit erfordert es die Kompetenzen K5-I, K2-II sowie K3-II, sodass diese Aufgabe mit 4 BE dem Anforderungsbereich II entspricht.

Teil B - Aufgabe 2.2 (Funktionenschar)

Aufgabe 1 betrachtet die gebrochen-rationale Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{2}{x-2} = \frac{x^2 + 2x - 4}{2(x-2)} \text{ (Sta20d, S. 2020-20).}$$

In Aufgabe 1a soll zum einen der maximale Definitionsbereich von f sowie die Gleichung der Asymptote des Graphen von f angegeben werden. Beides entspricht jeweils der

Kompetenz K5-I, sodass diese Aufgabe mit 2 BE dem Anforderungsbereich I zugeteilt wird.
Aufgabe 1b erfordert eine Begründung dafür, dass der Graph von f eine Polstelle hat sowie auch das Angeben der Art dieser Polstelle. Die Begründung erfolgt in Form einer „überschaubaren mehrschrittigen Argumentation” und entspricht K1-II (vgl. Tabelle 3.2). Für das Angeben der Art erfordert es zusätzlich K5-I, sodass die Aufgabe mit 3 BE dem Anforderungsbereich II zugeteilt wird.
Aufgabe 1c besteht darin, die Schnittpunkte des Graphens von f mit den Koordinatenachsen zu ermitteln. Dabei gilt es, lediglich $f(0)$ zu berechnen sowie die Gleichung $f(x) = 0$ zu lösen, sodass diese Aufgabe die K5-I zugeordnet wird und schließlich mit 3 BE dem Anforderungsbereich I zugehört.
Das Einzeichnen der Asymptote von f wird in Aufgabe 1d gefordert und wird zusammen mit dem Vervollständigen der Skizze des Graphens für $-5 \leq x \leq 8$ der Kompetenz K4-I zugewiesen, da es sich hierbei um das „Anfertigen von Standarddarstellungen mathematischer Objekte” handelt (vgl. Tabelle 3.3). Demnach erfolgt eine Zuordnung der 3 BE zum Anforderungsbereich I.
Für Aufgabe 1e ist die Gerade g mit $g(x) = -x + 6$ abgebildet (Sta20d, S. 2021-21), welche mit den senkrechten Geraden $x = 4$ und $x = 6$ sowie dem Graphen von f eine Fläche einschließen. Den besagten Flächeninhalt gilt es in dieser Aufgabe zu bestimmen. Wie auch in der Beispielaufgabe dieser Art in Tabelle 4.2 erfolgt eine Zuordnung zu K2-II, K4-I und K5-II, sodass die Aufgabe mit 5 BE dem Anforderungsbereich II zugeteilt wird.
In Aufgabe 1f soll die $x-$Koordinate des Punktes P ermittelt werden, welcher auf dem Graphen von f liegt und als einziger Punkt einen minimalen Abstand zur Gerade g hat. Es handelt sich hierbei um eine komplexe Problemstellung, sodass die Kompetenz K2-III notwendig ist. Zusätzlich ist K5-I für den Rechenweg erforderlich sowie K1-I und K4-I, da am Ende die gesuchte $x-$Koordinate aus den zwei Ergebnissen anhand der Skizze ermittelt werden muss. Es folgt eine Zuteilung der 4 BE zum Anforderungsbereich III.

In Aufgabe 2 wird die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{x}{a} + a + \frac{a}{x-a}$ für $a > 0$ betrachtet, wobei die Graphen mit G_a bezeichnet werden (Sta20d, S. 2020-20).
In Aufgabe 2a sollen die möglichen Extremstellen der Funktionen f_a berechnet werden, wobei die erste Ableitung ohne Nachweis verwendet werden darf. Folglich ist nur das

Lösen der Gleichung $f_a'(x) = \frac{1}{a} - \frac{a}{(x-a)^2} = 0$ notwendig. Daher wird die Aufgabe K5-I zugeteilt und entspricht mit 3 BE dem Anforderungsbereich I.
Schließlich wird in Aufgabe 2b das Ermitteln der Koordinaten und die Art der relativen Extrempunkte erwartet. Dies ähnelt der in Tabelle 4.2 aufgeführten Aufgabe zur Bestimmung der Koordinaten und Art der Extrempunkte. Jedoch handelt es sich hier um eine Funktionenschar, sodass der Parameter a berücksichtigt werden muss und es folgt damit eine Zuteilung zu K1-II sowie K5-II, sodass die Aufgabe mit 4 BE dem Anforderungsbereich II entspricht.
Für Aufgabe 2c soll untersucht werden, ob für eine Schar f_a gilt, dass der Abstand zwischen Hoch- und Tiefpunkt genau 5 LE beträgt. Dies erfordert die Kompetenz des mathematischen Problemlösens, denn es wird ein strategiegestütztes Vorgehen erwartet (K2-II). Zudem sind die Kompetenzen K5-I sowie K1-II und K6-II notwendig, sodass die Aufgabe mit 4 BE dem Anforderungsbereich II zugeteilt wird.
Durch die Extrempunkte des Graphen G_a verläuft für $a > 0$ eine Gerade h_a. Aufgabe 2d verlangt das Ermitteln des Parameters a, für den die Gerade h_a in einem $30°-$Winkel zur $x-$Achse ansteigt. Hierbei handelt es sich zunächst um ein komplexeres mathematisches Problem, sodass die Aufgabe in K2-III verordnet wird. Die Berechnung der Lösung anschließend stellt keine besonderen Herausforderungen dar und kann anhand der Steigung der Gerade h_a, welche mit Hilfe der Koordinaten der Extrempunkte durch $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a-1-(3+a)}{0-2a}$ berechnet werden kann. Hierbei werden die Kompetenzen K6-II sowie K5-I vorausgesetzt und es folgt eine Zuordnung der Aufgabe mit 4 BE zum Anforderungsbereich III.
Jeder Graph G_a besitzt für $a > 1$ zwei Schnittpunkte mit der Winkelhalbierenden w mit $w(x) = x$. Der Graph G_3 schneidet die Winkelhalbierende in einem der Schnittpunkte im $90°-$Winkel. In Aufgabe 2e gilt es, die Koordinaten des anderen Schnittpunktes zu ermitteln. Auch hier handelt es sich um eine Problemlöse-Aufgabe, wobei ein mehrschrittiges Vorgehen zur Lösung genutzt werden muss und damit K2-II erforderlich ist (vgl. Tabelle 3.2). Das Berechnen der Schnittstellen erfordert zunächst K5-I. Anschließend muss mit Hilfe von $f_3'(x) = -1$ bestimmt werden, bei welchen der beiden Schnittstellen es sich um denjenigen handelt, der die Winkelhalbierende nicht in einem $90°-$Winkel schneidet. Hierbei erfordert es die Kompetenz K6-II. Insgesamt wird die Aufgabe mit 5 BE dem Anforderungsbereich II zugeteilt.

Zusammenfassung der Ergebnisse für den Themenbereich Analysis

Für eine Übersicht der erforderlichen Kompetenzen der Aufgaben zum Themenbereich Analysis werden die soeben erläuterten Ergebnisse nochmals tabellarisch dargestellt. Die Tabelle 5.2 fasst alle Kompetenzen und Anforderungsbereiche im Themenbereich Analysis des Berliner Abiturs sowie die Punkteverteilung auf die einzelnen Anforderungsbereiche zusammen.
Dabei steht die erste Spalte der Tabelle für den jeweiligen Prüfungsteil und die Aufgabengruppe (AG), sofern es mehrere Aufgabengruppen gibt.

Teil/AG	TA	K1	K2	K3	K4	K5	K6	AFB I (BE)	AFB II (BE)	AFB III (BE)
A	1a		I		I	I		2		
	1b	I	II			II			3	
	2a					I		1		
	2b	III	III		II	II	III			4
B/AG 1	a					I		1		
	b					I	II		4	
	c	I				I		9		
	d	II				I			5	
	e	II	II			I	III			5
	f	III	II		I					3
	g		I		I	II			5	
	h	III	III			II				4
	i		II	I		I			4	
B/AG 2	1a					I		2		
	1b	II				I			3	
	1c					I		3		
	1d				I			3		
	1e		II		I	II			5	
	1f		III		I	I				4
	2a					I		3		
	2b	II				II			4	
	2c	II	II			I	II		4	
	2d		III			I	II			4
	2e	II	II			I	II		5	

Tab. 5.2: Zuordnung der Kompetenzen und Anforderungsbereiche für den Themenbereich Analysis des Berliner Abiturs 2020

5.1.2 Aufgaben zum Themenbereich Geometrie

Teil A - Geometrie 1 & 2

Aufgabe 2 ist in diesem Fall im IQB Pool vorzufinden (vgl. Ins20d), für Aufgabe 1 (vgl. Sta20d, S. 2020-1) erfolgt eine auf den Kriterien basierte Zuteilung. In Tabelle 5.3 findet sich eine Zusammenfassung der Aufgabenstellungen sowie eine Auflistung der Kompetenzzuordnung. Zunächst wird die eigens vorgenommene Zuteilung für Aufgabe 1 näher beschrieben.
Gegeben sind in dieser Aufgabe der Punkt $C(2|3|3)$ und die Gerade g mit
$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$, wobei die Gerade durch die Punkte $A(6|3|-1)$ und B verläuft.
In Aufgabe 1a soll zunächst gezeigt werden, dass der Punkt C nicht auf der Geraden g liegt. Die Lösung hierbei erfolgt durch ein Gleichungssystem, welches nicht lösbar ist. Demnach erfordert die Aufgabe die Kompetenzen K5-I für das Berechnen sowie K1-I für die Schlussfolgerung, dass der Punkt nicht auf der Gerade liegt. Die Aufgabe entspricht mit 2 BE dem Anforderungsbereich I.
Für Aufgabe 1b sollen die Koordinaten des Punktes B, der auf g liegt und gleich weit

TA	Aufgabenstellung (Kurzform)	K1	K2	K3	K4	K5	K6	AFB	BE
1a	Zeigen, dass der Punkt C nicht auf g liegt	I				I		I	2
1b	Bestimmen der Koordinaten des Punktes B, der gleich weit wie der Punkt A von C entfernt ist.	II	III			I		III	3
2a	Nachweisen, dass ein Punkt $P(5|1|0)$ auf dem Rand der Grundfläche eines Zylinders liegt	I	II			I		II	2
2b	Angeben der Koordinaten eines Punktes S auf dem Rand, der den kleinsten Abstand von P hat, Bestimmen der Koordinaten des Punktes T auf dem Rand, welcher den größten Abstand zu P hat	II	II			I		II	3

Tab. 5.3: Standardbezug der Aufgaben 1 und 2 zum Themenbereich Geometrie im Prüfungsteil A des Berliner Abiturs 2020 (vgl. Ins20d)

wie der Punkt A von C entfernt ist, bestimmt werden. Hierbei handelt es sich um eine ähnliche Aufgabe wie 2b, welche jedoch einen deutlich komplexeren Lösungsweg nach sich zieht. Die Lösung kann hierbei entweder mit Hilfe einer Hilfsebene ermittelt werden oder aber auch durch das Lösen einer Gleichung, welche sich durch die Abstandsberechnungen ergibt. Demnach erfolgt hierbei eine Zuteilung zu K2-III, K1-II sowie K5-I, sodass die Aufgabe mit 3 BE dem Anforderungsbereich III zugeordnet wird.

Teil B - Aufgabe 3.1 (Podest)

Diese Aufgabe ist im IQB Aufgabenpool hinterlegt (vgl. Ins20i), daher folgt an dieser Stelle ausschließlich eine kurze Zusammenfassung in Tabelle 5.4, wobei die Aufgabenstellung in Kurzform erläutert und die Kompetenzeinordnung dargestellt wird.

TA	**Aufgabenstellung (Kurzform)**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**AFB**	**BE**
1a	Bestimmen einer Ebenengleichung der Ebene H in Koordinatenform, die drei gegebene Punkte enthält					II		II	4
1b	Begründen, dass eine Gerade in der $xy-$Ebene und in der Ebene H liegt	I				I	I	I	2
1c	Ermitteln der Koordinaten eines Punktes E		II			II	I	II	5
1d	Begründen, dass zwei Vierecke den gleichen Flächeninhalt haben	III			II		III	III	3
2a	Zeigen, dass eine dreieckige Fläche rechtwinklig ist; Berechnen dieses Flächeninhalts			I	I	I		I	3
2b	Ermitteln der Höhe des Scheinwerfers, der durch den Punkt $(5\|-3\|z)$ dargestellt wird und dessen Licht unter einem Winkel der Größe 47° auf den Boden auftrifft		II	II		II		II	4
2c	Ermitteln eines Parameters μ; Treffen einer Aussage über den Abstand eines zweiten Scheinwerfers und Begründen dieser ohne Rechnung	II	III	II	I		III	III	4

Tab. 5.4: Standardbezug der Aufgabe 3.1 (Podest) zum Themenbereich Geometrie im Prüfungsteil B des Berliner Abiturs 2020 (vgl. Ins20i)

Teil B - Aufgabe 3.2 (Würfel)

Für diese Aufgabe ist ein Würfel abgebildet und vier seiner Eckpunkte sind gegeben: $A(0|0|0)$, $B(3|-3|3)$, $G(0|0|9)$ und $H(-3|3|6)$. Zusätzlich beinhaltet die Aufgabenstellung in einer Abbildung eine Skizze dieses Würfels (Sta20d, S. 2020-39).
In Aufgabe a soll zunächst das Volumen des Würfels berechnet werden. Dazu muss eine Kantenlänge mit Hilfe zweier gegebener Punkte bestimmt und diese in die Formel für das Volumen eines Würfels eingesetzt und berechnet werden. Gemäß Tabelle 4.3 handelt es sich um eine Aufgabe des Typs „Berechnen des Volumens eines Körpers", welche mit 2 BE der Kompetenz K5-I zuzuordnen ist und damit in den Anforderungsbereich I fällt.
Aufgabe b fordert eine Begründung dafür, weshalb das Viereck $ABGH$ ein Rechteck ist. Zudem soll dieses Rechteck in die vorhandene Abbildung des Würfels eingezeichnet werden. Wie auch in Tabelle 4.3 erwähnt, sind für die Begründung die Kompetenzen K1-I, K5-I und K6-I und für das Einzeichnen die Kompetenz K4-I erforderlich, sodass diese Teilaufgabe mit 3 BE dem Anforderungsbereich I zugeteilt wird.
In Aufgabe c soll eine Ebenengleichung in Parameter- und Koordinatenform für die Ebene L, in der das Viereck $ABGH$ liegt, bestimmt werden. Dies entspricht der Aufgabe des Typs „Ermitteln einer Ebenengleichung in Koordinatenform" (vgl. Tabelle 4.3) mit dem Zusatz, dass hierbei auch eine Parameterform bestimmt werden soll. Beides entspricht der Kompetenz K5-II, sodass die Aufgabe mit 5 BE dem Anforderungsbereich II zugeordnet wird.
Für Aufgabe d soll die Größe des Winkels bestimmt werden, den die Ebene L mit der $xy-$Ebene einschließt. Diese Aufgabe ähnelt der in Tabelle 4.3 aufgeführten Aufgabe mit dem Unterschied, dass es sich hierbei nicht um einen Sachzusammenhang handelt und aus diesem Grund nicht die Kompetenz des mathematischen Modellierens voraussetzt. Demnach ist lediglich die Kompetenz K5-II notwendig und die Aufgabe entspricht folglich mit 2 BE dem Anforderungsbereich II.
Aufgabenteil e besteht aus dem Ermitteln der Koordinaten des Punktes F. Dieser ist nicht sehr leicht zu bestimmen, da der Lösungsweg mit Hilfe des Satzes des Pythagoras erfolgt und ein komplexes Lösungsverfahren durchgeführt werden muss, sodass die Kompetenzen K2-III sowie K5-II und K6-II notwendig sind. Zudem unterstützt das Nutzen der Skizze den Lösungsweg, sodass die Kompetenz K4-I ebenso erforderlich ist. Insgesamt folgt eine Zuteilung der Aufgabe mit 5 BE zum Anforderungsbereich III.

In Aufgabe f wird die Ebene beschrieben, welche durch die Mittelpunkte der Kanten $\overline{BC}$, $\overline{CG}$, $\overline{AD}$ und $\overline{DH}$ verläuft und den Würfel in zwei Teilkörper teilt. Die Aufgabe besteht darin, anhand einer Skizze zu begründen, dass das Volumen des kleineren Teilkörpers $\frac{1}{8}$ des Volumens des Würfels ist. Es handelt sich hierbei um eine mehrschrittige Argumentation (vgl. Tabelle 3.2), welche das eigenständige Anfertigen einer Skizze erfordert (vgl. Tabelle 3.3) und damit die Kompetenzen K1-II und K4-I voraussetzt. Diese Aufgabe entspricht mit 5 BE dem Anforderungsbereich II.
In der letzten Aufgabe g ist eine Schar von Ebenen mit $z = k$ für $k \in \mathbb{R}$ gegeben. Es sollen nun in Abhängigkeit von k die unterschiedlichen Arten der Figuren angegeben werden, in denen die Ebenen für $0 < k < 9$ den Würfel schneiden. Diese Aufgabe erfordert eine gute Vorstellungskraft des dreidimensionalen Körpers und ist aufgrund der Komplexität und des hohen Abstraktionsgrades dem Anforderungsbereich III zuzuweisen. Die vorausgesetzten Kompetenzen betreffen zum einen den Umgang mit Darstellungen (K4-III) und zum anderen das Problemlösen (K2-III), da eine Strategie gefunden werden muss, um herauszufinden welche unterschiedlichen Figuren es geben kann. Es folgt daher eine Zuteilung der 3 BE zum Anforderungsbereich III.

Zusammenfassung der Ergebnisse für den Themenbereich Geometrie

Die Tabelle 5.5 fasst alle Kompetenzen und Anforderungsbereiche im Themenbereich Geometrie des Berliner Abiturs sowie die Punkteverteilung auf die einzelnen Anforderungsbereiche zusammen.

Teil/AG	**TA**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**AFB I (BE)**	**AFB II (BE)**	**AFB III (BE)**
A	1a					I		2		
	1b	II	III			I				3
	2a	I	II			I			2	
	2b	II	II			I			3	
B/AG 1	1a					II			4	
	1b	I				I	I	2		
	1c		II			II	I		5	
	1d	III			II		III			3
	2a			I	I	I		3		
	2b		II	II		II			4	
	2c	II	III	II	I		III			4
B/AG 2	a					I		2		
	b	I			I	I	I	3		
	c					II			5	
	d					II			2	
	e		III		I	II	II			5
	f	II			I				5	
	g		III		III					3

Tab. 5.5: Zuordnung der Kompetenzen und Anforderungsbereiche für den Themenbereich Geometrie des Berliner Abiturs 2020

5.1.3 Aufgaben zum Themenbereich Stochastik

Teil A - Stochastik 1 & 2

Die beiden Aufgaben zum Themenbereich Stochastik sind ebenfalls im IQB Aufgabenpool zu finden (vgl. Ins20f, Ins20e), sodass an dieser Stelle wieder eine kurze Zusammenfassung in Form einer Tabelle erfolgt.

TA	Aufgabenstellung (Kurzform)	K1	K2	K3	K4	K5	K6	AFB	BE
1a	Zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit bei einmaliger Durchführung des Spiels mindestens einmal die Zahl 3 zu erzielen, $\frac{3}{8}$ beträgt			I		I	I	I	2
1b	Ermitteln der Höhe der Auszahlung		II	II		I		II	3
2a	Beschreiben der Bedeutung der Faktoren im Sachzusammenhang			II	I		I	II	2
2b	Bestimmen der Anzahl der Möglichkeiten, einen Strauß zusammenzustellen, welcher zu jeder der drei Farben mindestens vier und höchstens sechs Tulpen enthalten soll		III	II				III	3

Tab. 5.6: Standardbezug der Aufgaben 1 und 2 zum Themenbereich Stochastik im Prüfungsteil A des Berliner Abiturs 2020 (vgl. Ins20f, Ins20e)

Teil B - Aufgabe 4.1 (Blumensamen)

Aufgabe 4.1 handelt von einer Lieferung Pflanzensamen, welche aus den zwei Sorten Rotblüher und Blaublüher besteht und wovon einige nicht keimen. Die beiden Samen können äußerlich nicht voneinander unterschieden werden. Der Anteil an Rotblühern in der Samenmischung beläuft sich auf 80 % und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Samen der Rotblüher keimt, beträgt 95 % (Sta20d, S. 2020-45).
Aufgabe a erfordert einen Nachweis dafür, dass die Wahrscheinlichkeit eines zufällig entnommenen Samens, der ein Rotblüher ist und keimt, $0,76$ beträgt. Hierbei handelt es sich um das Berechnen einer Wahrscheinlichkeit, welche beispielsweise mittels Baumdiagramm bestimmt werden kann. Demnach sind dabei die Kompetenzen K2-I,

K3-I und K5-I erforderlich (vgl. Tabelle 4.4), sodass diese Teilaufgabe mit 1 BE dem Anforderungsbereich I zugeordnet werden kann.
Aufgabe b fordert das Berechnen der Wahrscheinlichkeit für zwei Ereignisse:

A : „Unter 10 zufällig ausgewählten Samen sind genau 7 Samen, die Rotblüher sind und keimen werden."

B : „Unter 10 zufällig ausgewählten Samen sind mindestens 9 Samen, die Rotblüher sind und keimen werden."

Der Lösungsweg erfordert damit das Berechnen der Wahrscheinlichkeit, wobei der Sachzusammenhang als Binomialverteilung erkannt werden muss. Dabei sind nach Tabelle 4.4 die Kompetenzen K3-I sowie K5-I nötig und die Aufgabe kann schließlich mit 4 BE dem Anforderungsbereich I zugeteilt werden.
In Aufgabe c muss bestimmt werden, wie viele Samen höchstens aus dem Behälter entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 99 % mindestens ein keimender Rotblüher vorhanden ist. Dabei handelt es sich um eine „3-Mindestens-Aufgabe" der Form, dass die Ungleichung $P(X \geq 1) \leq 0,99$ gelöst werden muss. Nach Tabelle 4.4 erfordert dies die Kompetenzen K2-I, K3-II sowie K5-II, sodass die Aufgabe mit 3 BE dem Anforderungsbereich II entspricht.
In Aufgabe d wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Samen keimt, 0,9 beträgt. Bezüglich der Blaublüher gibt es keine Information über die Keimung. Es soll nun die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass ein Blaublüher keimt. Hier gilt es die bedingte Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, sodass nach Tabelle 4.4 die Kompetenzen K2-II, K5-I und K6-I erforderlich sind. Demnach erfolgt eine Einstufung dieser Aufgabe mit 3 BE in den Anforderungsbereich II.
Nun wird die Zufallsgröße R : „Anzahl der Rotblühersamen in einer Tüte" betrachtet und es werden jeweils 5 Samen der Mischung in einer Tüte verpackt.
Für Aufgabe e soll nun in einer Tabelle die fehlende Wahrscheinlichkeit der Zufallsgröße R für den Wert $r = 3$ ergänzt werden. Außerdem sollen zwei verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit erläutert werden. Das Berechnen erfordert zunächst die Kompetenz K5-I und für das Erläutern ist zusätzlich die Kompetenz K1-II erforderlich, sodass diese Aufgabe mit 4 BE dem Anforderungsbereich II zugeordnet wird.
In Aufgabe f soll gezeigt werden, dass der Erwartungswert der Zufallsgröße R gleich 4

ist. Dabei muss die Formel für den Erwartungswert der Binomialverteilung angewendet werden, sodass dies lediglich die Kompetenzen K1-I sowie K5-I voraussetzt und die Aufgabe folglich mit 1 BE dem Anforderungsbereich I zugeteilt wird.
Die nächste Teilaufgabe g erfordert das Entscheiden, ob folgende drei Aussagen aufgrund des in Aufgabe f gezeigten Erwartungswertes richtig oder falsch sind (vgl. Sta20d, S. 2020-46).

① *Kauft man eine Tüte, sind in dieser mindestens 4 Rotblüher.*

② *Wenn man 100 Tüten kauft, sind unter diesen mit Sicherheit mindestens 4 Tüten, in denen mindestens ein Samen der Rotblüher ist und der Rest ist Blaublüher.*

③ *Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Tüte höchstens 4 Samen von Rotblühern sind, beträgt mehr als 50 %.*

Für Aussage ① soll zusätzlich begründet werden, weshalb diese falsch ist, bei den restlichen Aussagen ist das Ankreuzen ausreichend. Aufgrund dieser Begründung sind hierbei die Kompetenzen K1-II sowie K6-II erforderlich und die Aufgabe entspricht mit 5 BE dem Anforderungsbereich II.
Für Aufgabe h soll die Anzahl an Rotblühern ermittelt werden, die unter den 10 Samen mindestens sein muss, sodass unter den 4 vom Kunden ausgewählten Samen mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 70 % mindestens 3 Rotblüher sind. Dies entspricht dem Aufgabentyp „3-Mindestens-Aufgabe" mit $P(X \geq 3)$ und erfordert gemäß Tabelle 4.4 die Kompetenzen K1-I, K2-III sowie K3-II, sodass diese 4 BE dem Anforderungsbereich III zugewiesen werden.

Teil B - Aufgabe 4.2 (Spam-Mail)

In diesem Aufgabenvorschlag geht es um unerwünschte Werbe-E-Mails, dessen Anteil über einen längeren Zeitraum konstant 30 % beträgt. Dabei wird angenommen, dass die Spam-Mails zufällig und unabhängig voneinander eingehen (Sta20d, S. 2020-52).
Aufgabe a erfordert das Berechnen der Wahrscheinlichkeiten für die zwei Ereignisse A und B.

A : „Von fünf eingegangenen E-Mails ist keine eine Spam-Mail."

B : „Von fünf eingegangenen E-Mails ist nur genau die letzte eine Spam-Mail."

Das Berechnen erfolgt anhand eines Baumdiagramms, sodass dies den Kompetenzen K2-I, K3-I sowie K5-I entspricht und die Aufgabe mit 3 BE dem Anforderungsbereich I zugeteilt wird.
In einer Woche befinden sich 50 Mails im Posteingang. Es soll nun in Aufgabe b die Wahrscheinlichkeit dafür ermittelt werden, dass die Anzahl der Spam-Mails in dieser Woche um mehr als 20 % über dem Erwartungswert liegt. Das Berechnen des Erwartungswertes der Binomialverteilung durch $E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0,3 = 15$ entspricht K5-I. Weiterhin entsprechen 18 Mails der Anzahl, dass die Spam-Mails 20 % über dem Erwartungswert liegen, sodass schlussendlich der Wert $P(X \geq 19) = 1 - P(X \leq 18)$ anhand der Tabelle für die Binomialverteilung abgelesen werden kann. Hierbei ist zusätzlich zu K5-I die Kompetenz K1-I erforderlich und es folgt, dass diese 3 BE dem Anforderungsbereich I zuzuschreiben sind.
Aufgabe c verlangt das Darstellen des Sachverhalts in einer Vierfeldertafel. Dies wird gemäß Tabelle 4.4 den Kompetenzen K2-II, K4-II sowie K6-II zugeteilt und es folgt die Zuweisung der 4 BE zum Anforderungsbereich II.
Aufgabe d fordert das Ermitteln der Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine vom Spam-Filter durch das Wort „sale“ aussortierte E-Mail keine Spam-Mail ist. Es muss also die bedingte Wahrscheinlichkeit berechnet werden, welche mittels der bereits aufgestellten Vierfeldertafel bestimmt werden kann. Dies erfordert gemäß Tabelle 4.4 die Kompetenzen K2-II, K5-I sowie K6-I, sodass eine Einordnung der 2 BE in den Anforderungsbereich II erfolgt.
Paul behauptet, dass der Anteil der E-Mails, die durch die Worte „sale“ oder „season“ als Spam erkannt werden, 55 % beträgt. In Aufgabe e gilt es, ohne Rechnung zu begründen, dass diese Behauptung im Allgemeinen falsch ist. Dabei handelt es sich um das Interpretieren von mathematischen Äußerungen, sodass nach Tabelle 3.3 die Kompetenz K6-II gefordert ist. Die Begründung besteht darin, dass Paul den Fall nicht berücksichtigt, dass beide Wörter vorkommen. Dies stellt eine einfache logische Schlussfolgerung dar, sodass K1-I notwendig ist (vgl. Tabelle 3.2). Insgesamt folgt eine Zuweisung der 2 BE in den Anforderungsbereich II.
Der Anteil der Spam-Mails, die durch die Worte „sale“ oder „season“ als Spam erkannt werden, beträgt 45 %. Schließlich muss in Aufgabenteil f der Anteil an Mails berechnet werden, in denen beide Wörter vorkommen. Dabei sind die Kompetenzen K2-II, K3-I sowie K5-I erforderlich und es ergibt sich eine Zuteilung der 3 BE zum Anforderungsbereich II.

Nach einem Jahr wird behauptet, dass sich der Anteil der Spam-Mails an den eingehenden E-Mails verändert hat. Jemand will das für den Anteil von ursprünglich 30 % Spam-Mails im E-Mail-Eingang mit einem Signifikanztest auf dem Niveau $\alpha = 0,05$ für eine Stichprobe von $n = 50$ zufällig ausgewählten E-Mails untersuchen, wobei folgende Hypothesen festgelegt werden (vgl. Sta20d, S. 2020-53).

H_0 : Der Anteil der Spam-Mails an den eingegangenen E-Mails beträgt 30 %.

H_1 : Der Anteil der Spam-Mails an den eingegangenen E-Mails hat sich verändert.

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Spam-Mails.
Aufgabe g erfordert das Entscheiden, welche Art von Entscheidungsregel dabei geeignet ist und eine Begründung dafür.

Entscheidungsregel 1: Wenn $X \geq k$ gilt, dann wird H_0 abgelehnt.
Entscheidungsregel 2: Wenn $k_u < x < k_o$ gilt, dann wird H_0 nicht abgelehnt.

Diese Aufgabe ist vergleichbar zum Aufgabentyp „Bestimmen einer Entscheidungsregel" (vgl. Tabelle 4.4), sodass die Kompetenzen K1-II, K2-II und K5-II erforderlich sind. Dadurch, dass diese Aufgabe erfordert, beide Entscheidungsregeln zu vergleichen, handelt es sich um einen Vergleich eines mathematischen Modells in Bezug auf eine reale Situation, sodass statt K3-II hier K3-III notwendig ist. Demnach erfolgt eine Einstufung dieser Aufgabe mit 3 BE in den Anforderungsbereich III.
Nun wird behauptet, dass sich der Anteil an Spam-Mails vergrößert hat. In Teilaufgabe h soll unter Annahme der Binomialverteilung berechnet werden, in welchem Bereich die Anzahl der Spam-Mails in einer Stichprobe von $n = 50$ E-Mails sein muss, um die Vermutung des Nutzers auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ zu stützen. Zur Bewältigung dieser Aufgabe muss der kleinste Wert für k_o berechnet werden, für den gilt: $P(X \geq k_o) \leq 0,05$. Dies erfolgt in ähnlicher Weise wie die in Tabelle 4.4 aufgeführte Aufgabe „Bestimmen des Bereichs, sodass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art kleiner als 25 % ist". Dabei sind die Kompetenzen K1-II, K2-III, K3-III, K5-II sowie K6-II notwendig und es folgt eine Zuteilung dieser Aufgabe mit 5 BE zum Anforderungsbereich III.

Zusammenfassung der Ergebnisse für den Themenbereich Stochastik

Die Tabelle 5.7 fasst alle Kompetenzen und Anforderungsbereiche im Themenbereich Stochastik des Berliner Abiturs sowie die Punkteverteilung auf die einzelnen Anforderungsbereiche zusammen.

Teil/AG	TA	K1	K2	K3	K4	K5	K6	AFB I (BE)	AFB II (BE)	AFB III (BE)
A	1a			I		I	I	2		
	1b		II	II		I			3	
	2a			II	I		I		2	
	2b		III	II						3
B/AG 1	a		I	I		I		1		
	b			I		I		4		
	c		I	II		II			3	
	d		II			I	I		3	
	e	II				I			4	
	f	I				I		2		
	g	II					II		5	
	h	I	III	II						4
B/AG 2	a		I	I		I		3		
	b	I				I		3		
	c		II		II		II		4	
	d		II			I	I		2	
	e	I					II		2	
	f		II	I		I			3	
	g	II	II	III		II				3
	h	II	III	III		II	II			5

Tab. 5.7: Zuordnung der Kompetenzen und Anforderungsbereiche für den Themenbereich Stochastik des Berliner Abiturs 2020

5.2 Das bayerische Abitur 2020

Die bayerische Abiturprüfung wird seitens des Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) veröffentlicht, sodass die folgenden Beschreibungen der Aufgaben für Teil A und B daraus entnommen sind (vgl. Sta20a, Sta20b). Zusätzlich können die Aufgaben im Anhang eingesehen werden (siehe A.1).
Wie bereits erwähnt, gibt es im bayerischen Abitur auch für die hilfsmittelfreien Aufgaben jeweils für jedes Themengebiet zwei verschiedene Aufgabengruppen, sodass pro Themengebiet vier verschiedene Aufgabengruppen vorhanden sind.

5.2.1 Aufgaben zum Themenbereich Analysis

Teil A - Aufgabengruppe 1

In Aufgabe 1 wird die Funktion $h : x \mapsto x \cdot ln(x^2)$ betrachtet (Sta20a, S. 2).
Aufgabe 1a erfordert zum einen das Angeben des Definitionsbereiches für die Funktion h und damit die Kompetenz K5-I und zum anderen soll gezeigt werden, dass $h'(x) = ln(x^2) + 2$ die Gleichung der Ableitungsfunktion von h ist. Dies wiederum entspricht ebenso der Kompetenz K5-I. Damit wird die Aufgabe mit 2 BE dem Anforderungsbereich I zugeteilt.
In 1b sollen die Koordinaten des Hochpunktes bestimmt werden, sodass gemäß Tabelle 4.2 die Kompetenz K5-I notwendig ist. Die Kompetenz K1-I ist hierbei aus dem Grund erforderlich, dass zwar die Art des Extremums gegeben ist, jedoch bestimmt werden muss, welcher der beiden vorhandenen Extrema der gesuchte Hochpunkt ist. Insgesamt folgt eine Zuordnung zum Anforderungsbereich I mit 3 BE.

In Aufgabe 2 ist der Graph $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f gegeben. Der Graph besitzt waagrechte Tangenten in den Punkten $(-4|f'(-4))$ und $(5|f'(5))$ (Sta20a, S. 2).
Aufgabe 2a erfordert eine Begründung dafür, dass der Graph von f genau eine Wendestelle besitzt. Diese Begründung erfolgt in Form einer mehrschrittigen Argumentation, bei der das Wissen über den Zusammenhang von f und f' in Bezug auf Extrema genutzt werden muss. Demnach erfolgt eine Zuteilung zu K1-II sowie K4-I, da für diese Argumentation die Abbildung von $G_{f'}$ genutzt wird. Folglich wird die Aufgabe mit 2 BE dem Anforderungsbereich II zugeordnet.

Aufgabe 2b handelt von den Tangenten am Graphen von f, welche parallel zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten verlaufen. Es sollen dabei anhand des Graphens $G_{f'}$ Näherungswerte für die $x-$Koordinaten ermittelt werden, in denen der Graph eine solche Tangente besitzt. Hierbei handelt es sich um eine Problemlöse-Aufgabe, da zur Lösung eine Strategie gefunden werden muss, sodass dies K2-II entspricht (vgl. Tabelle 3.2). Die Berechnung kann anhand der Abbildung abgeleitet werden, sodass die Kompetenzen K4-I und K5-I erforderlich sind. Demnach entspricht die Aufgabe mit 2 BE dem Anforderungsbereich II.

Für Aufgabe 3 sind die Funktionen $f : x \mapsto x^2 + 4$ und $g_m : x \mapsto m \cdot x$ mit $m \in \mathbb{R}$, dessen Graph mit G_m bezeichnet wird, gegeben (Sta20a, S. 3).
In Aufgabe 3a soll der Graph G_f von f in einem Koordinatensystem skizziert werden. Gemäß Tabelle 4.2 erfolgt auch hier die Einordnung in K4-I. Zudem sollen die Koordinaten des gemeinsamen Punktes der Graphen G_f und G_4 berechnet werden, sodass hierfür ein elementares Lösungsverfahren angewendet wird, wobei K5-I erforderlich ist (vgl. Tabelle 3.3). Es folgt also eine Einteilung der Aufgabe mit 3 BE zum Anforderungsbereich I.
Für Aufgabe 3b ist gefordert, die Werte für m anzugeben, für welche die Graphen G_f und G_m keinen gemeinsamen Schnittpunkt aufweisen.
Dies erfordert zunächst das Aufstellen der Gleichung $x^2 + 4 = mx$ und das Lösen dieser mit Hilfe der $abc-$Formel [1]:

$$x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4 \cdot 4}}{2}$$

Dann muss erkannt werden, dass diese Gleichung keine Lösung besitzt, sofern die Diskriminante negativ ist und schließlich erfolgt eine Umformung der Ungleichung

$$m^2 - 16 < 0,$$

wobei die Werte $-4 < m < 4$ ermittelt werden können. Aufgrund des Lösungsweg ist zunächst für das Erkennen der Vorgehensweise K2-II erforderlich. Ein alternativer Lösungsweg besteht in der Argumentation anhand der in Aufgabe 3a erstellten Skizze (K4-I). Zusätzlich werden die Kompetenzen K5-I sowie K6-II benötigt. Deshalb erfolgt

[1] Während im Berliner Unterricht die $pq-$Formel unterrichtet wird, lernen die bayerischen Schülerinnen und Schüler die Mitternachtsformel bzw. $abc-$Formel für das Lösen quadratischer Gleichungen (PPR97, S. 44)

eine Zuteilung dieser Aufgabe mit 2 BE zum Anforderungsbereich II.

In Aufgabe 4 ist die umkehrbare Funktion g mit $g(x) = 0,7e^{0,5x} - 0,7$ gegeben. Dazu ist der Graph G_g abgebildet sowie ein Teil des Graphens G_h der Umkehrfunktion h (Sta20a, S. 3).
Aufgabe 4a erfordert das Einzeichnen des fehlenden Teils der Umkehrfunktion. Dies erfordert das Vervollständigen einer vorhandenen Darstellung, sodass gemäß Tabelle 3.3 K4-II erforderlich ist. Demnach fällt die Aufgabe mit 2 BE in den Anforderungsbereich II.
Aufgabe 4b betrachtet das von G_g und G_h eingeschlossene Flächenstück. Die Aufgabe besteht darin, den Teil dieses Flächeninhalts in der Abbildung zu schraffieren, welches durch den Term $2 \cdot \int_0^{2,5} (x - g(x))dx$ berechnet werden kann. Dies erfordert das Wechseln zwischen verschiedenen Darstellungen (vgl. Tabelle 3.3), sodass K4-II vorausgesetzt wird. Demnach wird die Aufgabe mit 2 BE in den Anforderungsbereich II verordnet.
Zuletzt soll in Aufgabe 4c der Term einer Stammfunktion der Funktion $k : x \mapsto x - g(x)$ angegeben werden. Es soll also eine Stammfunktion zu $k(x) = x - 0,7e^{0,5x} + 0,7$ gebildet werden. Dies entspricht der Kompetenz K5-II, sodass eine Zuteilung von 2 BE in den Anforderungsbereich II erfolgt.

Teil A - Aufgabengruppe 2

Betrachtet wird in Aufgabe 1 die Funktion $g : x \mapsto ln(2 - x^2)$ (Sta20a, S. 4).
Aufgabe 1a erfordert zum einen das Skizzieren der Parabel mit $y = 2 - x^2$ und zum anderen das Angeben der Definitionsmenge $\mathbb{D}_g$ von g. Wie in Tabelle 4.2 wird das Skizzieren der Kompetenz K4-I zugewiesen und das Angeben der Definitionsmenge K5-I zugeteilt, sodass die Aufgabe mit 3 BE in den Anforderungsbereich I fällt.
Das Ermitteln der Ableitungsfunktion g' erfordert K5-I, da es sich um das Verwenden elementarer Regeln handelt (vgl. Tabelle 3.3). Demnach wird Aufgabe 1b dem Anforderungsbereich I zugeteilt.
Innerhalb der Aufgabe 2 wird in einer Abbildung ein Teil des Graphens G_h einer in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ definierten gebrochen-rationalen Funktion h gegeben (Sta20a, S. 4). Es ist bekannt, dass diese Funktion bei $x = 2$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel sowie die Gerade mit $y = x - 7$ als schräge Asymptote besitzt.
Das Einzeichnen der Asymptoten und Skizzieren des Verlaufs von G_h für $x < 2$ ent-

spricht aufgrund des Vervollständigens der gegebenen Skizze K4-II, sodass Aufgabe 2a mit 3 BE dem Anforderungsbereich II zugeteilt wird.
In Aufgabe 2b soll unter Berücksichtigung des asymptotischen Verhaltens ein Näherungswert für $\int\limits_{10}^{20} h(x)dx$ berechnet werden. Dabei muss als Lösungsweg das bestimmte Integral $\int\limits_{10}^{20}(x-7)dx$ berechnet werden, wobei die Kompetenz K5-II erforderlich ist. Zudem handelt es sich hierbei um die Auswahl einer naheliegenden Strategie, was K2-I entspricht (vgl. Tabelle 3.2). Damit erfolgt die Zuordnung der 2 BE zum Anforderungsbereich II.

In Aufgabe 3 ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $k : x \mapsto \dfrac{-x^2+2x}{2x^2+4}$ gegeben (Sta20a, S. 5). Dabei sollen in Aufgabe 3a die Nullstellen angegeben sowie begründet werden, dass $y = -0,5$ eine waagrechte Asymptote ist. Das Angeben der Nullstellen stellt ein elementares Lösungsverfahren dar (vgl. Tabelle 3.3) und benötigt demnach K5-I. Die Begründung erfordert zunächst K2-I, da als naheliegende Lösungsstrategie das Berechnen des Grenzwertes ausgeführt wird. Für die anschließende Begründung erfordert es K6-II sowie K1-I. Demnach entfallen die 3 BE in den Anforderungsbereich II.
Aufgabe 3b verlangt das Berechnen der $x-$Koordinate des Schnittpunktes von G_k mit der Asymptote. Die Lösung der Aufgabe erfolgt also durch das Lösen der Gleichung

$$\frac{-x^2+2x}{2x^2+4} = -\frac{1}{2},$$

welches ein elementares Lösungsverfahren darstellt und demnach K5-I zugeteilt wird (vgl. Tabelle 3.3). Folglich werden diese 2 BE dem Anforderungsbereich I zugewiesen.

Aufgabe 4 zeigt den Graphen G_f einer in $[0,8;+\infty]$ definierten Funktion f, wobei zusätzlich die Integralfunktion $J : x \mapsto \int\limits_{2}^{x} f(t)dt$ betrachtet wird (Sta20a, S. 5). Mit Hilfe dieser Abbildung wird zunächst eine Begründung dafür gefordert, dass $J(1) \approx -1$ gilt. Dies erfordert eine anspruchsvolle Argumentation, sodass K1-III notwendig ist (vgl. Tabelle 3.2). Zudem ist aufgrund der mehrschrittigen Lösung K6-II notwendig. Ein weiterer Teil der Aufgabe besteht darin, einen Näherungswert für den Funktionswert $J(4,5)$ anzugeben. Hierbei erfordert es K2-II sowie K4-I. Zuletzt setzt die Aufgabe das Skizzieren des Graphens von J voraus. Dabei handelt es sich um das Ergänzen der bereits vorhandenen Skizze von G_f, sodass hierbei K4-II erforderlich ist. Insgesamt wird Aufgabe 4 mit 5 BE dem Anforderungsbereich III zugeteilt.

Teil B - Aufgabengruppe 1

In dieser Aufgabe wird die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ betrachtet, dessen Graph zusätzlich abgebildet ist (Sta20b, S. 2).

Aufgabe 1a lässt sich in drei Teile gliedern. Zunächst muss rechnerisch bestätigt werden, dass der Graph von f symmetrisch zur $y-$Achse ist. Dies entspricht nach Tabelle 4.2 den Kompetenzen K1-I, K5-I sowie K6-I. Anschließend soll anhand des Funktionsterms das Grenzwertverhalten von f für $x \to \infty$ untersucht werden, was nach Tabelle 4.2 ebenso die Kompetenz K5-I erfordert. Zudem sollen diejenigen $x-$Werte bestimmt werden, für die gilt: $f(x) = 0,96$. Dies entspricht der Kompetenz K5-I, da hierbei lediglich eine Gleichung aufgestellt und diese nach x aufgelöst werden muss. Es ist also ausschließlich K5-I erforderlich, sodass die Teilaufgabe demnach mit 5 BE dem Anforderungsbereich I zuzuordnen ist.
In Aufgabe 1b soll das Monotonieverhalten von G_f rechnerisch untersucht werden, wobei zur Kontrolle die erste Ableitung angegeben wird. Es muss also anhand der Gleichung der ersten Ableitungsfunktion geprüft werden, für welche Werte diese größer bzw. kleiner Null ist. Dies erfordert die Kompetenzen K5-I sowie K1-I. Demnach kann die Aufgabe mit 4 BE dem Anforderungsbereich I zugeteilt werden.
Für Aufgabe 1c soll rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt $(3|f(3))$ bestimmt werden. Dies stellt das Anwenden eines elementaren Lösungsverfahrens dar und wird demzufolge K2-I und K5-I zugeteilt. Zudem soll die Größe des Winkels berechnet werden, unter dem t die $x-$Achse schneidet und die Tangente in die Abbildung eingezeichnet werden. Das Berechnen des Winkels erfordert nach Tabelle 4.2 die Kompetenz K5-I und das Einzeichnen entspricht der Kompetenz K4-I, sodass die Aufgabe insgesamt mit 4 BE dem Anforderungsbereich I zuzuordnen ist.

In Aufgabe 2 ist die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F : x \mapsto \int\limits_0^x f(t)dt$, dessen Graph mit G_F bezeichnet wird, gegeben (Sta20b, S. 2).
Aufgabe 2a lässt sich in zwei Teile unterteilen, wobei zuerst begründet werden muss, dass F bei $x = 0$ eine Nullstelle hat und zusätzlich mit Hilfe des Graphen G_f plausibel gemacht werden soll, dass F im Intervall $[1; 3]$ eine weitere Nullstelle besitzt. Dass F bei $x = 0$ eine Nullstelle hat, kann damit begründet werden, dass jede Integralfunktion eine Nullstelle hat, sofern die obere und untere Grenze identisch ist, was in diesem

Fall für $x = 0$ erfüllt ist. Als Begründung für die weitere Nullstelle kann aufgezeigt werden, dass es im Intervall zwei flächengleiche Stücke gibt, wovon sich eines oberhalb und das andere unterhalb der $x-$Achse befindet und welche sich beim Integrieren gegenseitig aufheben, sodass man als Ergebnis Null erhält. Hierbei handelt es sich um komplexe mathematische Argumentationen, welche die Kompetenzen K6-III sowie K1-II voraussetzen. Als zweiten Punkt erfordert die Aufgabe das Angeben der besonderen Eigenschaft von G_F im Punkt $(-1|F(-1))$ und zusätzlich eine Begründung dieser Angabe. Hierbei muss erkannt werden, dass F einen Hochpunkt hat, da die Ableitungsfunktion f an dieser Stelle Null ist. Dabei sind die Kompetenzen K1-I sowie K2-II notwendig. Die Aufgabe wird letztlich mit 5 BE dem Anforderungsbereich III zugeteilt.
In Aufgabe 2b wird das Dreieck betrachtet, welches von der Gerade mit $y = x - 1$ und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird. Die Aufgabe besteht nun darin, den Flächeninhalt dieses Dreiecks sowie den sich daraus ergebenen Näherungswert für $F(1)$ anzugeben. Dies entspricht der Kompetenz K2-II sowie K5-I, sodass die 2 BE der Aufgabe dem Anforderungsbereich II zugewiesen werden.
Aufgabe 2c zeigt den Graphen G_f und den Graphen G_g der Funktion $g : \mapsto -\cos(\frac{\pi}{2}x)$. Die Aufgabe besteht darin, zu beschreiben, wie der Graph G_g aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto \cos(x)$ hervorgeht. Dies kann zurückgeführt werden auf die Aufgabe in Tabelle 4.2, sodass die Kompetenzen K1-II und K4-II notwendig sind. Da in dieser Aufgabe keine Beurteilung über die Reihenfolge der Schritte verlangt wird, ist K6-II hierbei nicht notwendig. Außerdem soll in dieser Aufgabe durch Integration von g ein weiterer Näherungswert für $F(1)$ berechnet werden, sodass hierbei K5-II erforderlich ist. Demnach entspricht diese Aufgabe mit 5 BE dem Anforderungsbereich II.
In 2d soll nun das arithmetische Mittel der beiden Näherungswert aus den Aufgaben 2b und 2c berechnet werden (K5-I) sowie anschließend der Graph der Funktion F für $0 \leq x \leq 3$ unter Bezugnahme der bisherigen Erkenntnisse skizziert werden, was wiederum K4-II entspricht. Demnach folgt eine Zuordnung dieser 4 BE zum Anforderungsbereich II.

In der letzten Aufgabe 3 wird ein gleichschenkliges Dreieck P_kQ_kR betrachtet, welches durch die auf G_f liegenden Punkte $P_k(-k|f(-k))$, $Q_k(k|f(k))$ und $R(0|1)$ für $k > 0$ festgelegt ist (Sta20b, S. 3).
Für Aufgabe 3a soll der Flächeninhalt dieses Dreiecks für $k = 2$ berechnet werden. Dies

erfordert zunächst die Kompetenz K5-I. Anschließend soll gezeigt werden, dass der Flächeninhalt allgemein durch den Term $A(k) = \frac{2k}{k^2+1}$ beschrieben werden kann. Dies erfordert das Finden eines Lösungswegs, sodass nach Tabelle 3.2 die Kompetenz K2-II notwendig ist. Zudem werden die Kompetenzen K6-II sowie K5-I benötigt, sodass eine Zuordnung der 5 BE zum Anforderungsbereich II erfolgt.
In Aufgabe 3b soll gezeigt werden, dass es einen Wert $k > 0$ gibt, für den $A(k)$ maximal ist. Dazu soll der Wert für k sowie der zugehörige Flächeninhalt berechnet werden. Diese Aufgabe erfordert ebenso einen problemorientierten Lösungsweg, sodass sie die Kompetenz K2-II voraussetzt. Schließlich erfordert das Bestimmen der Ableitungsfunktion K5-I und das Darlegen der komplexen mathematischen Lösung K6-III (vgl. Tabelle 3.3) und K1-II. Demnach werden die 6 BE dem Anforderungsbereich III zugeteilt.

Teil B - Aufgabengruppe 2

Die Aufgabengruppe 2 betrachtet die Funktion $f : x \mapsto 1 + 7e^{-0{,}2x}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_0^+$, dessen Graph zusätzlich abgebildet wird (Sta20b, S. 4).
Aufgabe 1a besteht zunächst aus einer Begründung dafür, dass die Gerade mit $y = 1$ waagrechte Asymptote von G_f ist, wobei K5-I und K1-I erforderlich sind. Anschließend soll rechnerisch gezeigt werden, dass f streng monoton fallend ist. Das Untersuchen des Monotonieverhaltens entspricht ebenso K1-I und K5-I, sodass die Aufgabe mit 3 BE dem Anforderungsbereich I zugeteilt wird.
Die Punkte $(0|1), (s|1), (s|f(s))$ und $(0|f(s))$ legen jeweils für $s > 0$ ein Rechteck mit Flächeninhalt $R(s)$ fest (Sta20b, S. 4).
In Aufgabe 1b soll solch ein Rechteck für den Wert $s = 5$ in die vorhandene Abbildung eingezeichnet werden, was der Kompetenz K4-I zugeteilt wird. Außerdem soll gezeigt werden, dass $R(s)$ für einen bestimmten Wert von s maximal ist und dieser angegeben werden. Dies ähnelt Aufgabe 3b aus Aufgabengruppe 1, sodass diese Aufgabe ebenso den Kompetenzen K1-II, K2-II, K5-I und K6-III entspricht. Demnach erfolgt eine Zuteilung der 7 BE in den Anforderungsbereich III.
Aufgabe 1c erfordert das Berechnen des Flächeninhalts, welcher von G_f, der $y-$Achse sowie den Geraden mit $y = 1$ und $x = 5$ eingegrenzt ist. Für diese Berechnung ist die Skizze hilfreich, sodass K4-I sowie K2-II erforderlich ist. Die Berechnung des Integrals wird schließlich K5-II zugeordnet. Zudem soll in dieser Aufgabe der prozentuale Anteil des zu $s = 5$ gehörigen Rechtecks an dem Flächeninhalt bestimmt werden. Dies

erfordert wiederum die Kompetenz K5-I. Folglich wird die Aufgabe mit 7 BE dem Anforderungsbereich II zugeteilt.

Aufgabe 2 betrachtet die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $A : x \mapsto \frac{8}{f(x)}$, welche modellhaft die zeitliche Entwicklung des Flächeninhalts eines Algenteppichs beschreibt (Sta20b, S. 4). Dabei steht x für die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Tagen und $A(x)$ für den Flächeninhalt in Quadratmetern.
Das Bestimmen von $A(0)$ und des Grenzwertverhaltens $\lim\limits_{x\to\infty} A(x)$ wie in Aufgabe 2a beschrieben, entspricht der Kompetenz K5-I. Das zusätzliche Angeben der Bedeutung der Ergebnisse im Sachzusammenhang erfordert K3-I. Anschließend soll mithilfe des Monotonieverhaltens von f begründet werden, dass der Flächeninhalt im Laufe der Beobachtung ständig zunimmt. Hierbei handelt es sich um das Interpretieren des Ergebnisses einer Modellierung, sodass K3-II notwendig ist. Für das Untersuchen des Monotonieverhaltens werden wie auch in Aufgabe 1b der Aufgabengruppe 1 die Kompetenzen K1-I und K5-I benötigt. Folglich werden die 5 BE dem Anforderungsbereich II zugeteilt.
Das Bestimmen des Wertes x_0 mit $A(x_0) = 4$ aus Aufgabe 2b erfordert zunächst das Lösen der Gleichung $\frac{8}{1+7e^{-0,2x}} = 4$ und damit K5-I sowie das anschließende Interpretieren des Ergebnisses im Sachzusammenhang. Dabei sind K1-I und K3-II nötig, sodass die Aufgabe mit 4 BE dem Anforderungsbereich II entspricht.
Das Bestimmen der momentanen Änderungsrate des Flächeninhalts zu Beobachtungsbeginn erfolgt anhand einer naheliegenden Lösungsstrategie (K2-I) und beansprucht aufgrund des Berechnens der Ableitungsfunktion sowie $A'(0)$ die Kompetenz K5-I, sodass Aufgabe 2c dem Anforderungsbereich I entspricht.
Zum Zeitpunkt x_0, welcher in Aufgabe 1b berechnet wurde, nimmt die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts den größten Wert an. Es soll nun in Aufgabe 2d eine besondere Eigenschaft des Graphens von A im Punkt $(x_0|A(x_0))$ angegeben und diese begründet werden. Dies erfordert das Darlegen mehrschrittiger Überlegungen (K6-II), wobei die Kompetenz K1-II erforderlich ist.
Aufgabe 2e verlangt das Skizzieren des Graphens von A unter der Verwendung bisheriger Ergebnisse, was der Kompetenz K4-II zugeteilt wird. Demnach entspricht die Aufgabe mit 3 BE dem Anforderungsbereich II.
Für einen weiteren Algenteppich wird nun der Term $A(x)$ so geändert, dass die im Exponenten zur Basis e enthaltene Zahl $-0,2$ durch eine kleinere Zahl ersetzt wird.

Aufgabe 2f besteht in einem Vergleich der beiden Algenteppiche in Bezug auf folgende Eigenschaften:

- die durch $A(0)$ und $\lim_{x \to \infty} A(x)$ beschriebenen Eigenschaften (vgl. Aufg. 2a)
- momentane Änderungsrate des Flächeninhalts zu Beobachtungsbeginn (vgl. Aufg. 2c)

Zusätzlich soll ausgehend von diesem Vergleich ein möglicher Verlauf des Graphens skizziert werden, der die zeitliche Entwicklung des zweiten Algenteppichs beschreibt. Demnach erfolgt ein Vergleich mathematischer Modelle (vgl. Tabelle 3.2), sodass die Kompetenz K3-III notwendig ist. Zudem werden die Kompetenzen K6-II, K4-II und K1-II benötigt, sodass sich eine Zuteilung dieser 5 BE zum Anforderungsbereich III ergibt.

Zusammenfassung der Ergebnisse für den Themenbereich Analysis

Die Tabelle 5.8 fasst alle Kompetenzen und Anforderungsbereiche im Themenbereich Analysis des bayerischen Abiturs sowie die Punkteverteilung auf die einzelnen Anforderungsbereiche zusammen.

Teil/AG	TA	K1	K2	K3	K4	K5	K6	AFB I (BE)	AFB II (BE)	AFB III (BE)
A/AG 1	1a					I		2		
	1b	I				I		3		
	2a	II			I				2	
	2b		II		I	I			2	
	3a				I	I		3		
	3b		II		I	I	II		2	
	4a				II				2	
	4b				II				2	
	4c					II			2	
A/AG 2	1a				I	I		3		
	1b					I		2		
	2a				II			3		
	2b		I			II			2	
	3a	I	I			I	II		3	
	3b					I		2		
	3c	III	II		II		II			5
B/AG 1	1a	I				I	I	5		
	1b	I				I		4		
	1c		I		I	I		4		
	2a	II	II				III			5
	2b		II			I			2	
	2c	II			II	II			5	
	2d				II	I			4	
	3a		II			I	II		5	
	3b	II	II			I	III			6
B/AG 2	1a	I				I		3		
	1b	II	II		I	II	III			7
	1c		II		I	II			7	
	2a	I		II		I			5	
	2b	I		II		I			4	
	2c		I			I		4		
	2d	II					II		2	
	2e				II				3	
	2f	II		III	II		II			5

Tab. 5.8: Zuordnung der Kompetenzen und Anforderungsbereiche für den Themenbereich Analysis des bayerischen Abiturs 2020

5.2.2 Aufgaben zum Themenbereich Geometrie

Teil A - Aufgabengruppe 1

In der Aufgabengruppe 1 wird eine Kugel mit Mittelpunkt $M(5|-1|1)$ betrachtet, wobei die Strecke $[PQ]$ mit den Endpunkten $P(8|-5|1)$ und Q der Durchmesser ist (Sta20a, S. 8).
Aufgabe a besteht zunächst darin, die Koordinaten von Q zu berechnen. Dies stellt ein einfaches Rechenverfahren dar und erfordert demnach K5-I. Anschließend soll nachgewiesen werden, dass der Punkt $R(9|-1|4)$ auf der Kugel liegt. Hierbei handelt es sich um ein strategisches Vorgehen, bei dem zunächst die Kugelgleichung ermittelt werden muss, sodass eine Einstufung in K2-II und K1-I erfolgt. Demnach entspricht die Aufgabe mit 3 BE dem Anforderungsbereich II.
Teilaufgabe b erfordert eine Begründung ohne Rechnung, dass das Dreieck PQR bei R rechtwinklig ist. Dabei handelt es sich um eine Routineargumentation mittels Satz des Thales, sodass eine Zuordnung zu K1-I erfolgt und die Aufgabe mit 2 BE in den Anforderungsbereich I fällt.

Teil A - Aufgabengruppe 2

Innerhalb dieser Aufgabe sind die Punkte $P(-2|3|0)$ und $Q(q|1|5)$ mit $q \in \mathbb{R}$ gegeben, wobei Q von P genauso weit entfernt ist wie von R (Sta20a, S. 9).
In Teilaufgabe a soll q bestimmt werden, wobei zur Lösung ein strategiegestütztes Vorgehen erfolgt (vgl. Tabelle 3.2), sodass die Kompetenzen K2-II und K5-I vorausgesetzt werden. Es folgt eine Einstufung der 3 BE in den Anforderungsbereich II.
Aufgabenteil b verlangt das Ermitteln der Koordinaten des Eckpunkts S der Raute $PQRS$. Hierbei handelt es sich um einen mehrschrittigen Lösungsweg (K6-II), bei dem zuerst der Mittelpunkt M bestimmt wird und anschließend daraus die Koordinaten von S ermittelt werden können. Es folgt eine Einstufung in K2-II, K6-II und K5-I. Zusätzlich soll gezeigt werden, dass $PQRS$ kein Quadrat ist, wobei K1-I sowie K5-I erforderlich sind, da hierbei mittels Skalarprodukt gezeigt werden muss, dass lediglich ein Winkel nicht $90°$ beträgt. Insgesamt erfolgt eine Zuweisung der 2 BE zum Anforderungsbereich II.

Teil B - Aufgabengruppe 1

Dieser Aufgabenvorschlag handelt modellhaft von einer auf einer horizontalen Fläche stehenden Mehrzweckhalle, welche die Form eines geraden Prismas besitzt. Dabei ist die Grundfläche durch die Punkte $A_1(0|0|0), A_2(20|0|0), A_3$ und $A_4(0|10|0)$ festgelegt. Zusätzlich ist zur Veranschaulichung eine Skizze der Halle abgebildet (Sta20b, S. 10). Zunächst sollen in Aufgabe a die Koordinaten der Punkte B_2, B_3 und B_4 angegeben sowie anschließend bestätigt werden, dass diese in der Ebene $E : x_2+5x_3-30 = 0$ liegen. Das Angeben der Koordinaten entspricht den Kompetenzen K1-I sowie K4-I, da diese leicht mit Hilfe der Abbildung und Informationen des Textes bestimmt werden können. Um zu bestätigen, dass die Punkte in der Ebene liegen, muss jeweils der Punkt in die Ebenengleichung eingesetzt werden, demnach entspricht dieser Teil der Kompetenz K5-I. Die Aufgabe ist also mit 4 BE dem Anforderungsbereich I zuzuordnen.

Aufgabe b erfordert das Berechnen der Größe des Neigungswinkels der Dachfläche, welche durch die Ebene E aus Teilaufgabe a beschrieben wird, gegenüber der horizontalen Grundfläche. Gemäß Tabelle 4.3 kann diese Aufgabe den Kompetenzen K3-I und K5-II zugeteilt werden und entspricht mit 3 BE dem Anforderungsbereich II.

Für Aufgabe c ist der Punkt $T(7|10|0)$ gegeben, welcher sich auf der Kante $[AC]$ befindet. Es soll nun rechnerisch untersucht werden, ob es auf der Kante $[B_3B_4]$ Punkte gibt, für die gilt: *Die Verbindungsstrecken des Punktes zu den Punkten B_1 und T stehen aufeinander senkrecht.* (Sta20b, S. 10)

Falls es solche Punkte gibt, so müssen auch die Koordinaten angegeben werden. Dies erfordert ein strategiegestütztes Vorgehen (K2-II), bei dem eine komplexe mathematische Lösung präsentiert werden muss, sodass hierbei eine Einstufung in K6-III erfolgt. Dabei wird zunächst die Gleichung der Gerade durch die Punkte B_3 und B_4 aufgestellt und dann mittels Skalarprodukt bestimmt, für welche Punkte obige Aussage gilt. Der gezielte Einsatz von mathematischen Hilfsmitteln wird demnach K5-II zugewiesen (vgl. Tabelle 3.3). Zusätzlich erfordert die Aufgabe das Bewerten einer mathematischen Aussage (K1-II). Insgesamt entfallen die 6 BE dem Anforderungsbereich III.

Aufgabe d besteht darin, eine Gleichung der Ebene F, welche durch drei Punkte festgelegt ist, in Normalenform zu ermitteln. Der Lösungsweg ähnelt dem Aufgabetyp „Ebene in Koordinatenform ermitteln", sodass nach Tabelle 4.3 die Kompetenz K5-II und diese Aufgabe mit 5 BE dem Anforderungsbereich II zugehört.

In Aufgabe e soll eine Gleichung der Schnittgeraden g bestimmt werden, in der die

Ebene F die x_1x_2-Ebene schneidet, wobei es sich um das Anwenden eines formalen mathematischen Verfahrens handelt und deshalb K5-II (vgl. Tabelle 3.3) zugeteilt wird. Damit entsprechen die 3 BE dem Anforderungsbereich II.
Für Aufgabe f ist in einer Abbildung der Grundriss des Hallenmodells in der x_1x_2-Ebene gegeben (Sta20b, S. 11). Die Aufgabe besteht darin, unter Verwendung der bisherigen Erkenntnisse den Schattenbereich der Flutlichtanlage in der Abbildung darzustellen. Hierbei handelt es sich um das Entwickeln einer eigenen mathematischen Darstellung und wird aufgrund der Komplexität K4-III zugeteilt. Zudem erscheint die Einteilung zu K2-II sinnvoll, da für das Einzeichnen des Schattenbereichs zunächst eine Strategie gefunden werden muss, um diesen zu ermitteln. Die Aufgabe gehört folglich mit 4 BE in den Anforderungsbereich III.

Teil B - Aufgabengruppe 2

Betrachtet wird in dieser Aufgabengruppe die Ebene $E: 4x_1 - 8x_2 + x_3 + 50 = 0$ und die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ (Sta20b, S. 12).
Für Teilaufgabe a soll erläutert werden, warum die Rechnung

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} = -72 \neq 0$$

ein Nachweis dafür ist, dass g und E genau einen gemeinsamen Punkt haben. Es handelt sich dabei um das Bewerten einer mathematischen Aussage (Tabelle 3.2) in Form einer Routineargumentation auf Basis eines bekannten Satzes, sodass dies in K1-I eingestuft wird. Demnach entfällt 1 BE dem Anforderungsbereich I.
Aufgabe b erfordert zunächst das Berechnen des Schnittwinkels von g und E, wobei es sich ebenso wie beim Berechnen des Neigungswinkels (vgl. Tabelle 4.3) um ein formales mathematisches Verfahren handelt und eine Einstufung in K5-II erfolgt. Abschließend soll gezeigt werden, dass $S(0,5|6,5|0)$ der Schnittpunkt von g und E ist. Dies kann durch Einsetzen der Ebene in die Gerade gezeigt werden, sodass eine einfache rechnerische Begründung ausreichend ist und die Kompetenz K1-I vorausgesetzt wird. Es folgt damit eine Einordnung der 5 BE in den Anforderungsbereich II.
Für Aufgabe c wird die Kugel K mit Mittelpunkt $M(-13|20|0)$ betrachtet, welche die Ebene E berührt. Dabei sollen die Koordinaten des Berührpunktes F bestimmt werden, wobei ein strategisches Vorgehen (K2-II) sowie das Anwenden formaler mathematischer

Verfahren (K5-II) auftritt, da zunächst mit Hilfe der Lotgeraden mit Aufpunkt M und als Richtungsvektor der Normalenvektor von E der Lotfußpunkt bestimmt wird, welcher dem gesuchten Berührpunkt F entspricht. Zusätzlich muss der Radius r der Kugel bestimmt werden, wobei K5-I notwendig ist. Insgesamt folgt eine Einstufung der Aufgabe mit 6 BE in den Anforderungsbereich II.
Aufgabe d besteht aus einem Nachweis dafür, dass die Gerade g die Kugel K im Punkt $T(3|12|-2)$ berührt. Zur Lösung dieser Aufgabe muss ein strategisches Verfahren genutzt werden, sodass ebenso die Kompetenz K2-II sowie K1-II erforderlich ist. Zur Bewältigung dieser Aufgabe können die Koordinaten des Punktes T in die Kugelgleichung eingesetzt werden, welche sich zunächst mit Hilfe des Mittelpunkts bestimmen lässt. Für das anschließende Einsetzen der Koordinaten ist zusätzlich K5-I notwendig und für das Darlegen des Lösungsweg K6-II. Insgesamt erfolgt eine Zuordnung der 5 BE zum Anforderungsbereich II.
Die Punkte M, T, S und F liegen in einer Ebene Z. In Aufgabe e soll zunächst begründet werden, dass das Viereck $MTSF$ einen Umkreis besitzt und anschließend der Flächeninhalt dieses berechnet werden. Die Begründung hierbei ist eine anspruchsvolle Argumentation (K1-III), welche anhand der Skizze (K4-II) und mit Hilfe des Satz des Thales erfolgt. Die Berechnung des Flächeninhalts kann mit Hilfe der Zerlegung in zwei rechtwinklige Dreiecke als naheliegende Strategie (K2-I) schnell durchgeführt werden, sodass K5-I erforderlich ist. Insgesamt erfolgt die Zuteilung der 4 BE zum Anforderungsbereich III.
Aufgabe f besteht aus zwei Teilen, wobei zuerst der Körper beschrieben werden soll, welcher durch die Rotation des Vierecks $MTSF$ um die Gerade MS entsteht. Das Beschreiben entspricht dem „Darlegen eines einfachen mathematischen Sachverhalts", sodass nach Tabelle 3.3 K6-I vorausgesetzt wird. Zudem erfordert dies einen sachgerechten Umgang mit unvertrauten Darstellungen und damit K4-III. Es handelt sich dabei um einen zusammengesetzten Körper aus zwei Kegeln mit Mittelpunkt $M_{[TF]}$ der Strecke $[TF]$. Anschließend sollen für den beschriebenen Körper die Strecken a und b angegeben werden, welche in die Formel $V = \frac{1}{3}(\frac{a}{2})^2\pi b$ eingesetzt werden. Dabei ist K5-II notwendig, sodass die Aufgabe schließlich mit 4 BE dem Anforderungsbereich III zuzuteilen ist.

Zusammenfassung der Ergebnisse für den Themenbereich Geometrie

Die Tabelle 5.9 fasst alle Kompetenzen und Anforderungsbereiche im Themenbereich Geometrie des bayerischen Abiturs sowie die Punkteverteilung auf die einzelnen Anforderungsbereiche zusammen.

Teil/AG	TA	K1	K2	K3	K4	K5	K6	AFB I (BE)	AFB II (BE)	AFB III (BE)
A/AG 1	a	I	II			I			3	
	b	I						2		
A/AG 2	a		II			I			3	
	b	I	II			I	II		2	
B/AG 1	a	I			I	I		4		
	b			I		II			3	
	c	II	II			II	III			6
	d					II			5	
	e					II			3	
	f		II		III					4
B/AG 2	a	I						1		
	b	I				II			5	
	c		II			II			6	
	d	II	II			I	II		5	
	e	III	I		II	I				4
	f				III	II	I			4

Tab. 5.9: Zuordnung der Kompetenzen und Anforderungsbereiche für den Themenbereich Geometrie des bayerischen Abiturs 2020

5.2.3 Aufgaben zum Themenbereich Stochastik

Teil A - Aufgabengruppe 1

Aufgabengruppe 1 betrachtet grüne und rote Würfel, deren Seiten unterschiedlich beschriftet sind und beim Werfen jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Die grünen Würfel haben auf fünf Seiten die Augenzahl 1 und auf einer die Augenzahl 6 und die roten Würfel jeweils auf zwei Seiten die Augenzahlen 1, 3 und 6 (Sta20a, S. 6). Für Teilaufgabe a befinden sich in einer Urne drei der grünen und zwei der roten oben beschriebenen Würfel, wobei mit einem Griff zwei davon entnommen werden. Es soll nun ein Term angegeben werden, mit dem die Wahrscheinlichkeit bestimmt wird, dass ein roter und ein grüner Würfel entnommen wurden. Hierbei handelt es sich um die hypergeometrische Verteilung, welche in den IQB Poolaufgaben nach aktuellem Stand nicht erfasst wird. Es erfolgt also gemäß Tabelle 4.4 eine Zuordnung zum Aufgabentyp „Berechnen der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (hypergeometrische Verteilung)", sodass die Kompetenzen K3-I, K5-I und K6-I erforderlich sind. Damit entspricht die Aufgabe mit 2 BE dem Anforderungsbereich I.
In Aufgabe b gilt es, alle Werte anzugeben, welche die Zufallsgröße X annehmen kann, wobei X die Augensumme zweier geworfener Würfel beschreibt. Hierbei handelt es sich um eine naheliegende Lösungsstrategie, sodass gemäß Tabelle 3.2 die Kompetenz K2-I vorausgesetzt wird. Anschließend soll die Wahrscheinlichkeit $P(X = 7)$ bestimmt werden, wobei es sich um eine binomialverteilte Zufallsgröße handelt und demnach die Kompetenzen K3-I, K5-I sowie K6-I notwendig sind (vgl. Tabelle 4.4). Es folgt eine Zuweisung der 3 BE zum Anforderungsbereich I.

Teil A - Aufgabengruppe 2

Aufgabengruppe 2 handelt von einem Glücksrad, welches aus zwei unterschiedlich großen Sektoren besteht. Davon ist der größere mit der Zahl 1 und der kleinere mit 3 beschriftet. Zusätzlich ist gegeben, dass die Wahrscheinlichkeit beim einmaligen Drehen des Rads die Zahl 1 zu erzielen, mit p bezeichnet wird. Das Glücksrad wird zweimal gedreht (Sta20a, S. 7).
In Teilaufgabe a soll begründet werden, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden erzielten Zahlen 4 ist, durch den Term $2p(1-p)$ angegeben werden kann. Dies wird den Kompetenzen K1-I, K3-I sowie K5-I zugewiesen, sodass die Aufgabe

mit 1 BE dem Anforderungsbereich I entspricht.
Schließlich muss in Teilaufgabe b der Wert von p bestimmt werden, für den gilt, dass der Erwartungswert der Zufallsvariable X gleich 3 ist. Dies erfordert zunächst K2-II, da eine Strategie gefunden werden muss. Schließlich sind wie auch in Aufgabe a die Kompetenzen K3-I und K5-I erforderlich, sodass die Aufgabe mit 4 BE in den Anforderungsbereich II eingeteilt wird.

Teil B - Aufgabengruppe 1

Aufgabe 1 thematisiert insgesamt 6250 Haushalte, von denen 2250 einen schnellen Internetanschluss besitzen. $\frac{2}{3}$ der Haushalte mit schnellem Internetanschluss besitzen zusätzlich ein Abonnement für einen Streamingdienst. 46 % aller Haushalte haben weder einen schnellen Internetanschluss noch ein Abonnement für einen Streamingdienst (Sta20b, S. 6). Dabei werden nun die folgenden Ereignisse betrachtet:

A: „Ein zufällig ausgewählter Haushalt verfügt über einen schnellen Internetanschluss."

B: „Ein zufällig ausgewählter Haushalt besitzt ein Abonnement eines Streamingdiensts."

Die Aufgabe besteht zum einen darin, eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel zu diesem Sachverhalt zu erstellen und zum anderen soll überprüft werden, ob die beiden Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind. Das Aufstellen der Vierfeldertafel entspricht nach Tabelle 4.4 den Kompetenzen K2-II, K4-II und K6-II. Die Überprüfung auf stochastische Unabhängigkeit erfordert die Kompetenzen K3-II, K1-I sowie K5-I (vgl. Tabelle 4.4), sodass Aufgabe 1 mit 5 BE dem Anforderungsbereich II entspricht.

Aufgabe 2 beschreibt ein Telekommunikationsunternehmen, welches neue Kunden gewinnen möchte und deshalb an zufällig ausgewählte Haushalte Werbung versendet. Es wird angenommen, dass die angeschriebenen Haushalte unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % noch keinen schnellen Internetanschluss besitzen (Sta20b, S. 6).
Aufgabe 2a erfordert das Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten, dass unter 10 angeschriebenen Haushalten

- mindestens zwei noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügen.

- genau acht bereits über einen schnellen Internetanschluss verfügen.

Es handelt sich hierbei um eine binomialverteilte Zufallsgröße, sodass wie in Tabelle 4.4 erwähnt die Kompetenzen K3-I und K5-I erforderlich sind. Damit wird diese Aufgabe mit 4 BE dem Anforderungsbereich I zugeteilt.
In Aufgabe 2b soll im Sachzusammenhang ein Ereignis beschrieben werden, dessen Wahrscheinlichkeit durch $0,2^{10} + (1 - 0,2)^{10}$ angegeben wird. Diese Aufgabe erfordert nach Tabelle 4.4 die Kompetenzen K1-II, K3-II, K4-II sowie K6-II. Demnach wird 2b mit 2 BE dem Anforderungsbereich II zugeordnet.
In Aufgabe 2c soll ermittelt werden, wie viele Haushalte mindestens angeschrieben werden müssen, sodass mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % mindestens ein angeschriebener Haushalt, welcher noch keinen schnellen Internetanschluss besitzt, einen einrichten lässt. Dabei wird davon ausgegangen, dass jeder hundertste Haushalt ohne schnellen Internetanschluss sich für die Einrichtung eines solchen entscheidet. Es handelt sich dabei um eine Aufgabe des Typs „3-Mindestens-Aufgabe", bei der die Ungleichung $P(X \geq 1) > 0,99$ gelöst werden muss und welche gemäß Tabelle 4.4 die Kompetenzen K2-I, K3-II sowie K5-II erfordert. Damit entfallen die 5 BE dieser Aufgabe dem Anforderungsbereich II.

Aufgabe 3 betrachtet eine Zufallsgröße Y, die die Werte $0, 1, 2, 3$ und 4 annimmt. Folgende Tabelle zeigt dabei die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y, wobei $a, b \in [0; 1]$.

k	0	1	2	3	4
$P(Y = k)$	a	b	$\frac{3}{8}$	b	a

Tab. 5.10: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Y (vgl. Sta20b, S. 7)

Für Aufgabe 3a ist eine Beschreibung erforderlich, woran unmittelbar zu erkennen ist, dass der Erwartungswert von Y gleich 2 ist. Diese Beschreibung erfordert das Erkennen der Symmetrie. Da dies leicht aus der Tabelle zu entnehmen ist, wird diese Aufgabe den Kompetenzen K1-I, K4-I sowie K6-I und folglich mit 2 BE dem Anforderungsbereich I zugeteilt.
Anschließend soll in Aufgabe 3b bestimmt werden, welche Werte a und b haben, wenn für die Varianz von Y gilt: $Var(Y) = \frac{11}{8}$. Dies erfordert eine Lösungsstrategie, bei der letztlich ein Gleichungssystem zu lösen ist. Dabei sind die Kompetenzen K1-II, K2-II,

K5-III sowie K6-II notwendig, sodass die Aufgabe mit 5 BE dem Anforderungsbereich III zugewiesen wird. Dazu ist zu sagen, dass K5 im Anforderungsbereich III gefordert ist, da es sich beim Berechnen der Varianz in diesem Fall um ein komplexes Verfahren handelt (vgl. Tabelle 3.3), sodass diese Zuordnung gewählt wird.
In Aufgabe 3c kommt eine weitere Zufallsgröße Z hinzu, welche für eine Laplace-Münze die Anzahl des Auftretens von *Zahl* bei viermaligem Werfen beschreibt. Zusätzlich ist gegeben, dass der Erwartungswert für Z ebenfalls 2 ist sowie $P(Z = 2) = \frac{3}{8}$. Die Aufgabe besteht zum einen darin, die Varianz zu berechnen, wobei die Kompetenz K5-I erforderlich ist. Zum anderen soll diese Varianz mit der von Y verglichen und davon ausgehend ein qualitativer Unterschied zwischen den Wahrscheinlichkeitsverteilungen Y und Z beschrieben werden. Dabei erfolgt eine Zuteilung dieser 2 BE zum Anforderungsbereich III, da es sich hierbei um eine komplexe Aufgabenstellung handelt, welche eine anspruchsvolle Argumentation verlangt. Demnach werden die Kompetenzen K1-III, K2-II sowie K6-II benötigt.

Teil B - Aufgabengruppe 2

Aufgabe 1 beschreibt das Szenario eines Fußballturniers, an dem neun Mannschaften teilnehmen, welche jeweils aus Jungen und Mädchen bestehen. Dabei sind $\frac{2}{3}$ aller Teilnehmenden männlich (Sta20b, S. 8).
Für ein Foto stellen sich die drei Spielführerinnen und die sechs Spielführer in einer Reihe auf. Aufgabe 1a besteht darin, die Anzahl der Möglichkeiten für die Aufstellung der neun Kinder zu bestimmen, wenn die drei Spielführerinnen nebeneinander stehen sollen. Dies wird wie auch in Tabelle 4.4 den Kompetenzen K2-III sowie K3-II zugeteilt, sodass eine Zuordnung der 3 BE zum Anforderungsbereich III erfolgt.
Nun werden aus allen Kindern zehn ausgelost, die je einen Fußball erhalten. Für das Berechnen der Wahrscheinlichkeit, dass fünf Mädchen und fünf Jungen einen Ball erhalten, verwendet Max den Ansatz

$$\binom{10}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5.$$

In Aufgabe 1b soll angegeben werden, ob hierbei vom Modell *Ziehen mit Zurücklegen* oder *Ziehen ohne Zurücklegen* ausgegangen wird. Dies erfordert aufgrund der Interpretation dieser Aussage in Bezug auf ein mathematisches Modell die Kompetenzen K4-II und K6-II (vgl. Tabelle 3.3). Anschließend soll rechnerisch begründet werden, dass die obn beschriebene Wahrscheinlichkeit nur geringfügig von der tatsächlichen

Wahrscheinlichkeit abweicht. Dies kann durch Berechnen der Wahrscheinlichkeit (hypergeometrische Verteilung) gelöst werden, sodass hierbei die Kompetenzen K3-I, K5-I und K6-I gefordert sind (vgl. Tabelle 4.4). Insgesamt folgt eine Zuteilung dieser 5 BE zum Anforderungsbereich II.

Zusätzlich konnten sich die Schülerinnen und Schüler in zwei Listen für Torwandschießen und Elfmeterschießen nach dem Turnier eintragen. Dabei haben sich 45 % der Kinder in beide Listen und 15 % nur für das Elfmeterschießen eingetragen. 90 % der Kinder, die sich für das Torwandschießen eingetragen haben, haben sich ebenfalls für das Elfmeterschießen eingeschrieben. Aus den Kindern wird nun zufällig eines ausgewählt und es werden die folgenden Ereignisse betrachtet (vgl. Sta20b, S. 6):

T: „Das Kind hat sich für das Torwandschießen eingetragen."

E: „Das Kind hat sich für das Elfmeterschießen eingetragen."

Die beiden Ereignisse E und T sollen in Aufgabe 2a auf stochastische Unabhängigkeit untersucht werden, was nach Tabelle 4.4 den Kompetenzen K1-I, K3-II sowie K5-I entspricht. Demnach erfolgt eine Einteilung der Aufgabe mit 4 BE in den Anforderungsbereich II.
Für Aufgabe 2b ist es nötig, die beiden Ereignisse A und B unter Verwendung der Mengenschreibweise durch T und E auszudrücken.

A: „Das Kind hat sich in keine der Listen eingetragen."

B: „Das Kind hat sich in genau eine Liste eingetragen."

Dabei handelt es sich um das Verändern einer mathematischen Darstellung, sodass K4-II erforderlich ist. Demnach erfolgt eine Zuordnung der 3 BE zum Anforderungsbereich II.

Es treten beim Torwandschießen jeweils zwei Kinder gegeneinander an, wobei nacheinander sechs Schüsse abgegeben werden. Wer dabei mehr Treffer erzielt, gewinnt. Joe trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 %, während die Trefferwahrscheinlichkeit von Hans 30 % beträgt (Sta20b, S. 9).
In Aufgabe 3a soll die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden, dass Joe beim Torwandschießen gegen Hans gewinnt, wenn Hans bei seinen sechs Schüssen genau zwei

Treffer erzielt hat. Daraus muss gefolgert werden, dass Joe genau dann gewinnt, wenn er mindestens drei Treffer erzielt. Hierbei liegt eine Bernoullikette der Länge $n = 6$ mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,2$ vor und es muss $P(X \geq 3)$ berechnet bzw. anhand der Tabelle bestimmt werden, sodass gemäß Tabelle 4.4 eine Zuordnung zu K3-I und K5-I erfolgt. Anschließend soll anhand einer konkreten Spielsituation erläutert werden, dass das dabei zugrunde gelegte mathematische Modell allgemein nicht der Realität entspricht. Dies erfordert K3-III, da zur Bewältigung der Aufgabe ein mathematisches Modell im Kontext einer realen Situation überprüft werden soll (vgl. Tabelle 3.3). Zusätzlich erfordert diese Erläuterung K1-II. Es erfolgt damit eine Zuweisung der 4 BE in den Anforderungsbereich III.

Aufgabe 3b erfordert das Beschreiben eines Ereignisses im Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\sum_{k=0}^{6} (B(6; 0,2; k) \cdot B(6; 0,3; k))$ bestimmt werden kann. Eine vergleichbare Aufgabe findet sich in Tabelle 4.4, welche den Kompetenzen K1-II, K3-II sowie K4-II und K6-II zugewiesen wird. Da es sich hierbei jedoch um eine kompliziertere Darstellung aufgrund der Summenschreibweise handelt, erfolgt statt K4-II eine Zuteilung zu K4-III. Demnach entspricht diese Aufgabe mit 2 BE dem Anforderungsbereich III.

In Aufgabe 3c ist bekannt, dass Lisa im Training in 90 % aller Fälle bei sechs Schüssen mindestens einen Treffer erzielt. Es soll die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden, dass ihr erster Schuss im Wettbewerb ein Treffer ist, wenn man annimmt, dass sich ihre Trefferquote im Vergleich zum Training nicht ändert (Sta20b, S. 9). Dieser Berechnung soll als Modell eine geeignete Bernoullikette zugrunde gelegt werden. Diese Aufgabe ist vergleichbar mit einer „3-Mindestens-Aufgabe", wobei hier nicht die Anzahl n gesucht ist, sondern die Trefferwahrscheinlichkeit p. Dabei muss die Gleichung $P(X \geq 1) = 0,9$ aufgestellt und durch Umformung zu $1 - P(X = 0) = 0,9$ nach p aufgelöst werden. Dabei werden ebenso wie in Tabelle 4.4 die Kompetenzen K2-I, K3-II sowie K5-II benötigt. Demnach werden die 4 BE dieser Aufgabe dem Anforderungsbereich II zugeordnet.

Zusammenfassung der Ergebnisse zum Themenbereich Stochastik

Die Tabelle 5.11 fasst alle Kompetenzen und Anforderungsbereiche im Themenbereich Stochastik des bayerischen Abiturs sowie die Punkteverteilung auf die einzelnen Anforderungsbereiche zusammen.

Teil/AG	TA	K1	K2	K3	K4	K5	K6	AFB I (BE)	AFB II (BE)	AFB III (BE)
A/AG 1	a			I		I	I	2		
	b		I	I		I	I	3		
A/AG 2	a	I		I		I		1		
	b		II	II		I			4	
B/AG 1	1	I	II	II	II	I	II		5	
	2a			I		I		4		
	2b	II		II	II		II		2	
	2c		I	II		II			5	
	3a	I			I		I	2		
	3b	II	II			III	II			5
	3c	III	II			I	II			2
B/AG 2	1a		III	II						3
	1b	II		I	II	I	II		5	
	2a	I		II		I			4	
	2b				II				3	
	3a	II		III		I				4
	3b	II		II	III		II			2
	3c		I	II		II			4	

Tab. 5.11: Zuordnung der Kompetenzen und Anforderungsbereiche für den Themenbereich Stochastik des bayerischen Abiturs 2020

6 Diskussion der Ergebnisse

Nach Analyse aller Abituraufgaben folgt nun eine zusammenfassende Auswertung der Ergebnisse. Dabei werden zunächst die allgemeinen mathematischen Kompetenzen betrachtet und anschließend wird die Verteilung der Anforderungsbereiche auf die Bewertungseinheiten (BE) ausgewertet und miteinander verglichen.
Im Anschluss erfolgt eine kurze Reflexion zu der in dieser Arbeit angewandten Vorgehensweise bei der Analyse von den Abituraufgaben.

Zur Auswertung der Ergebnisse wurden Diagramme erstellt, um den Vergleich der Häufigkeiten des Auftretens der Kompetenzen zu veranschaulichen. Dabei wurde pro Aufgabengruppe in jedem Themengebiet die Häufigkeit der Kompetenzen in den drei Anforderungsbereichen K1-I, K1-II, ...,K6-III gezählt und anschließend der prozentuale Anteil dieser bestimmt.
Zur Veranschaulichung wurden die Kompetenzen in den folgenden Abbildungen verschiedenen Farben zugeteilt:

■ K1 Mathematisch argumentieren
■ K2 Probleme mathematisch lösen
■ K3 Mathematisch modellieren
■ K4 Mathematische Darstellungen verwenden
■ K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
■ K6 Mathematisch kommunizieren

6.1 Ergebnisse des Vergleichs im Prüfungsteil A

In diesem Kapitel sollen nun die Ergebnisse der Abiturprüfungen zum hilfsmittelfreien Teil (Teil A) erläutert werden. Dabei soll nochmals auf die in Tabelle 2.1 erwähnten Unterschiede hingewiesen werden, wodurch sich ein Vergleich der beiden Länder schwierig gestaltet. So verfügt Teil A in beiden Bundesländern über die identische Gesamtpunktzahl von 30 BE, jedoch verhält sich die Aufteilung dieser auf die drei Themengebiete Analysis, Geometrie und Stochastik verschieden. Folglich enthält Prüfungsteil A des bayerischen Abiturs im Themenbereich Analysis 20 BE, während es im Berliner Abitur nur 10 BE sind. Hinzu kommt, dass auch infolge der höheren Punktanzahl mehr Zeit für die Bearbeitung eingerechnet werden kann. Aufgrund dessen könnte man erwarten, dass demzufolge auch deutlich mehr Kompetenzen auftreten und möglicherweise sogar der Anteil an Aufgaben zum Anforderungsbereich III in Bayern größer ausfällt. Betrachtet man nun in Abbildung 6.1 die beiden Aufgabengruppen (AG 1 und AG 2) zu Analysis, so lässt sich feststellen, dass ausschließlich das *mathematische Argumentieren* (K1) im Anforderungsbereich III auftritt. Demnach ist dieser Anforderungsbereich in nur einer der beiden Aufgabengruppen vertreten, und dabei auch nur in einem geringen Anteil.

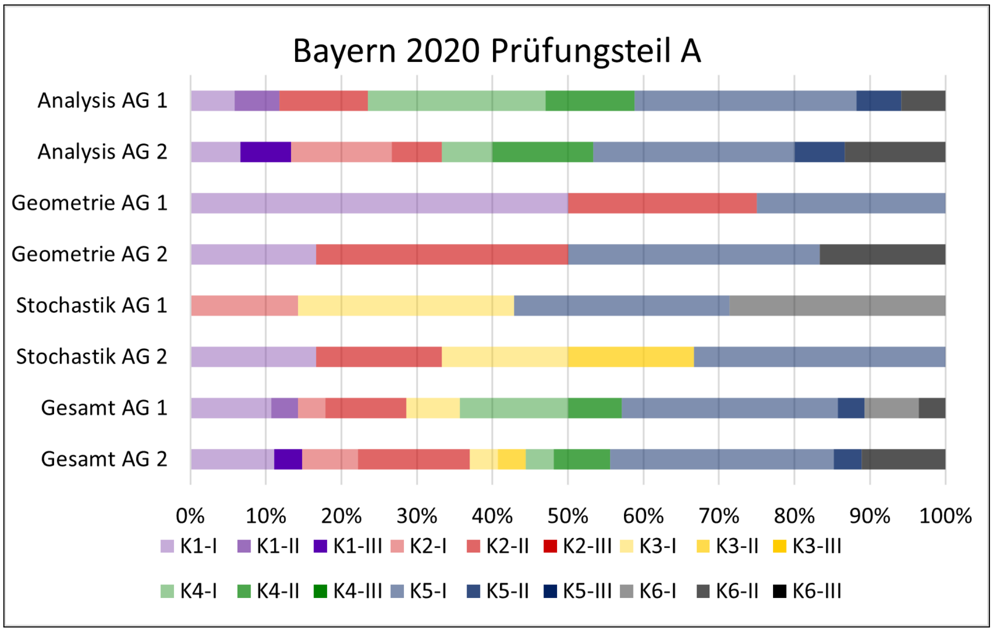


Abb. 6.1: Prozentualer Anteil der Kompetenzen im Prüfungsteil A Bayern

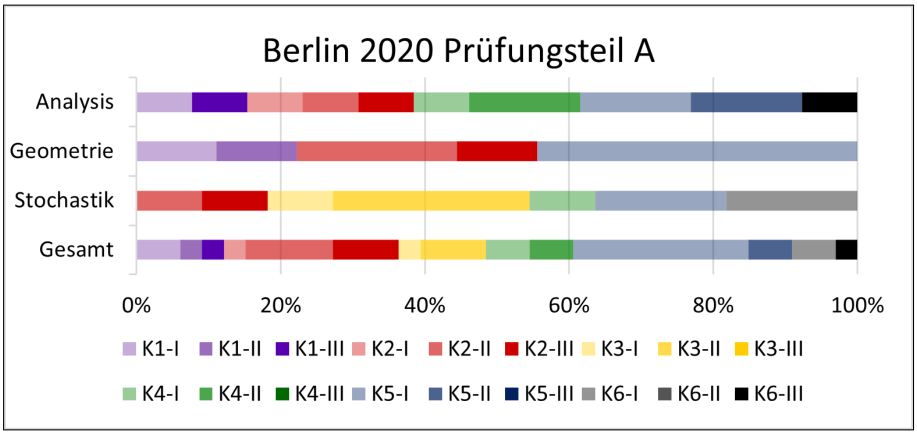


Abb. 6.2: Prozentualer Anteil der Kompetenzen im Prüfungsteil A Berlin

Wie in Abbildung 6.2 zu erkennen ist, weist das Berliner Abitur im Teil A in Analysis das *mathematische Argumentieren* (K1), das *mathematische Kommunizieren* (K6) sowie auch das *mathematische Problemlösen* (K2) im Anforderungsbereich III auf.

Sowohl in Bayern als auch in Berlin treten im Bereich der Analysis alle Kompetenzen bis auf das *mathematische Modellieren* (K3) auf. Trotz der erhöhten Punktzahl in Bayern kommen demnach nicht mehr Kompetenzen vor als es in Berlin der Fall ist.

Weiterhin fällt auf, dass die Kompetenz des *mathematischen Modellierens* (K3) in beiden Bundesländern auch innerhalb des Themengebiets der Geometrie nicht vertreten ist. Dies liegt darin begründet, dass es sich bei Aufgaben dieser Kompetenz meist um Realsituationen handelt, welche als mathematische Modelle dargestellt werden.
Im Prüfungsteil für Stochastik jedoch findet sich K3 in beiden Ländern wieder. Grund dafür ist, dass bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung meist Realsituationen thematisiert werden, welche interpretiert und verstanden werden müssen, um die jeweiligen Aufgaben zu lösen, weshalb K3 vor allem in diesem Themenbereich erforderlich ist. Zusätzlich ist zu sagen, dass es in Prüfungsaufgaben kaum möglich ist, K3-III zu fordern, da es sich hierbei um das Modellieren einer komplexen Realsituation handelt, welche das Festlegen von Variablen und Bedingungen fordert oder auch das Überprüfen, Vergleichen und Bewerten eines solchen mathematischen Modells (Kul12a, S. 15). Dies erscheint im Rahmen der zeitlichen Begrenzung einer Abiturprüfung in der Regel nicht machbar.
Während in Analysis in Bayern mehr Punkte zur Verfügung stehen, sind es in den Bereichen Geometrie und Stochastik weniger. So werden jeweils nur 5 BE im Gegensatz zu den 10 BE im Berliner Abitur vergeben. Umgekehrt ist hierbei also zu erwarten, dass aufgrund der geringeren Anzahl an Punkten und einer damit einhergehenden kürzeren Bearbeitungszeit in der bayerischen Abiturprüfung weniger Kompetenzen vorkommen. Betrachtet man die Ergebnisse der Aufgabengruppe 1 in Geometrie des bayerischen Abiturs (vgl. Abbildung 6.1), so wird deutlich, dass die Vielfalt an erforderlichen Kompetenzen sehr gering ausfällt. Es finden hier nur drei der sechs Kompetenzen Anwendung, was sich auf die geringe Punktzahl von nur 5 BE zurückführen lässt. Dabei sind die Kompetenzen *mathematisch modellieren* (K3) und *mathematische Darstellungen verwenden* (K4) in keinen der beiden Aufgabengruppen der Geometrie gefordert. Zudem zeigt sich in diesen beiden Sachgebieten, dass keine der sechs Kompetenzen im Anforderungsbereich III auftritt.
Verglichen dazu erkennt man in Abbildung 6.2, dass in allen drei Themengebieten des

Berliner Abiturs die Kompetenz *Probleme mathematisch lösen* tatsächlich im Anforderungsbereich III (K2-III) auftritt.
Die Vielfalt der Kompetenzen im Themenbereich Geometrie fällt auch im Berliner Prüfungsteil A gering aus und es sind wie in Bayern nur drei der sechs Kompetenzen notwendig, sodass nicht allein die Anzahl der Punkte Aufschluss auf die Vielfalt an Kompetenzen geben kann.

Schlussendlich zeigen die Ergebnisse zum Prüfungsteil A auf, dass die Aufgaben insgesamt ein breites Spektrum der allgemeinen mathematischen Kompetenzen abdecken. Dies wird deutlich, wenn man in den Abbildungen 6.1 und 6.2 die Anteile der Kompetenzen des gesamten hilfsmittelfreien Teils betrachtet. Dass das mathematische Modellieren (K3) eher weniger vorkommt, ist aus oben genannten Gründen nicht verwunderlich. Und vor allem im hilfsmittelfreien Teil war ein geringer Anteil dieser Kompetenz zu erwarten.

6.2 Ergebnisse des Vergleichs im Prüfungsteil B

Anders als Prüfungsteil A ist die Punkteverteilung der insgesamt 90 BE auf die drei Themengebiete identisch, sodass der Vergleich dieses Prüfungsteils aussagekräftiger ist. In diesem Prüfungsteil werden zunächst alle drei Themenbereiche getrennt voneinander betrachtet und deren Ergebnisse durchleuchtet.

Themenbereich Analysis

Der Themenbereich Analysis stellt den Schwerpunkt des Prüfungsteils B dar und beinhaltet mit 40 BE fast die Hälfte der in Teil B zu erreichbaren Punkte.
In Abbildung 6.3 zeigen sich die Kompetenzanteile der beiden Aufgabengruppen verglichen zwischen den Ländern. Den größten Anteil nimmt dabei die Kompetenz K5 *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* ein, welche nahezu in jeder Aufgabe erforderlich ist. Auch in Prüfungsteil B zeigt sich, dass das *mathematische Modellieren* (K3) in beiden Ländern jeweils nur in einem Aufgabenvorschlag vertreten ist und dies mit einem eher kleinen Anteil. Als Unterschied fällt dabei auf, dass dieser in Bayern höher ist als in Berlin. So existieren im bayerischen Abitur drei Teilaufgaben, welche diese Kompetenz im Anforderungsbereich II erfordern, während es in Berlin nur eine Aufgabe betrifft, welche K3 im Anforderungsbereich I

voraussetzt.
Vergleicht man in Abbildung 6.3 die Kompetenz K2 *Probleme mathematisch lösen*, so lässt sich zunächst erkennen, dass der Anteil dieser in beiden Abiturprüfungen sowie Aufgabenvorschlägen in einem ähnlichen Bereich liegt. Jedoch ist anzumerken, dass K2 im Anforderungsbereich III ausschließlich in den Aufgabengruppen des Berliner Abiturs vorzufinden ist.

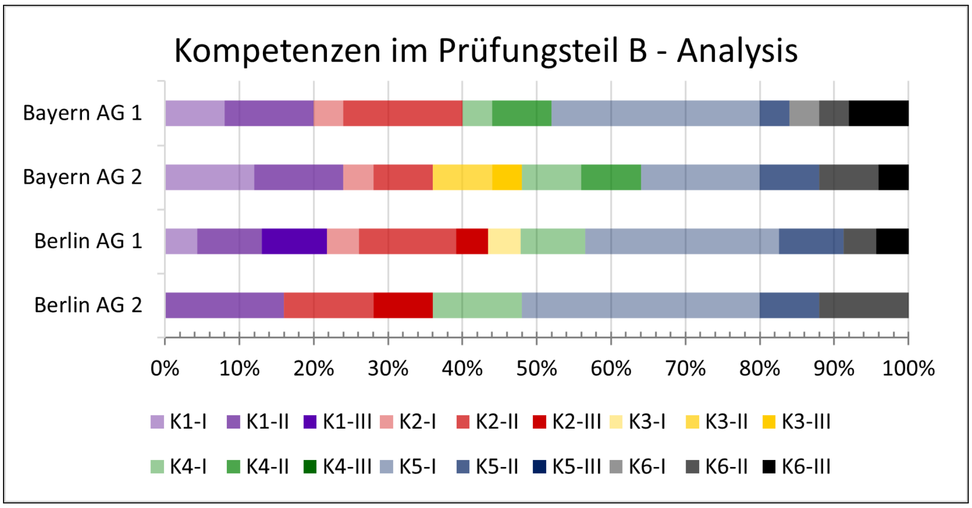


Abb. 6.3: Vergleich der Kompetenzanteile im Prüfungsteil B Analysis

Dies kann wiederum damit begründet werden, dass die Anforderungen für K2-III mit einer hohen Komplexität verbunden sind. So handelt es sich hierbei um Aufgaben, die das Lösen eines komplexen Problems erfordern, wobei beispielsweise Verallgemeinerungen erforderlich sind (Kul12a, S. 15). Ähnlich wie für die Kompetenz K3-III gilt auch hier, dass diese Aufgaben im Rahmen einer Abiturprüfung eher selten auftreten.
Auffällig ist auch, dass die Kompetenz des *mathematischen Kommunizierens* (K6) in Aufgabengruppe 1 des Berliner Abiturs kaum vertreten ist. Allgemein wird in Abbildung 6.3 deutlich, dass das mathematische Kommunizieren in Analysis in beiden Abiturprüfungen eher einen geringen Anteil einnimmt. Im Gegensatz dazu erweist sich die Kompetenz des *mathematischen Argumentierens* (K1) als dominant und findet sich in allen Aufgabengruppen wieder.
Verglichen mit den Ergebnissen aus Wenzecks Untersuchung, bei der für die Abituraufgaben zum Bereich Analysis der Jahre 2011 bis 2017 festgestellt wurde, dass Bayern im Vergleich zu Berlin mehr Wert auf Begründungsaufgaben legt, kann damit gefolgert werden, dass sich dies verändert hat und die Begründungsaufgaben nun auch in Berlin

einen höheren Stellenwert haben (Wen18, S. 75).

Themenbereich Geometrie

Wie auch in Analysis fällt das *mathematische Modellieren* (K3) im Themenbereich der Geometrie gering aus. Abbildung 6.4 zeigt, dass diese Kompetenz jeweils nur in einem Aufgabenvorschlag beider Länder auftritt.
Ebenfalls ist die Kompetenz des *Umgangs mit symbolischen, technischen und formalen Elementen der Mathematik* (K5) der Schwerpunkt und nahezu in jeder Teilaufgabe gefordert. Der Anteil des *mathematischen Argumentierens* (K1) ist geringer als im Sachgebiet der Analysis, erstreckt sich aber dennoch über einen angemessen hohen Anteil. In Aufgabengruppe 2 des bayerischen Abiturs stellt dieser mit knapp 30 % einen sehr großen Anteil dar.
Im Gegensatz zu Analysis weist die Kompetenz des *Verwendens mathematischer Darstellungen* (K4) innerhalb der Geometrie sowohl in Bayern als auch in Berlin einen größeren Anteil auf.

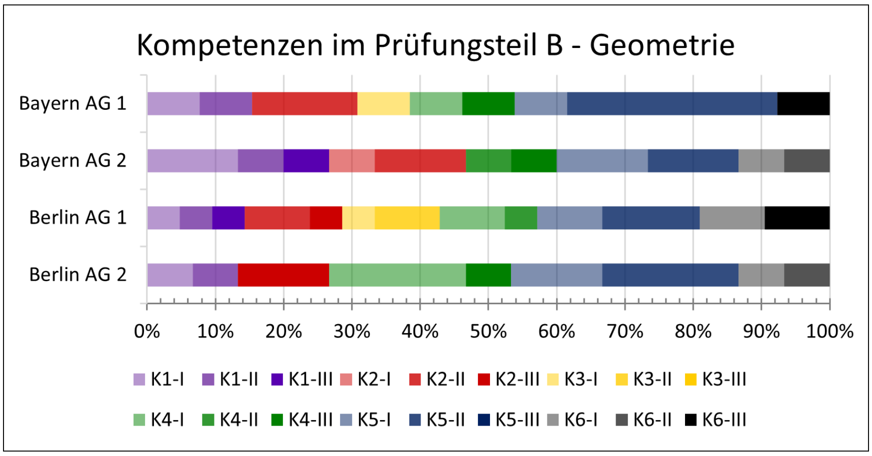


Abb. 6.4: Vergleich der Kompetenzanteile im Prüfungsteil B Geometrie

Die Kompetenz des *mathematischen Kommunizierens* (K6) nimmt auch hier keinen allzu großen Anteil ein. Als einziges sticht dabei die Aufgabengruppe 1 des Berliner Abiturs hervor, bei dem diese Kompetenz mit knapp 20 % einen relativ großen Anteil annimmt.

Themenbereich Stochastik

Abschließend erfolgt die Auswertung der Ergebnisse zum Themenbereich Stochastik im Prüfungsteil B, welche in Abbildung 6.5 zu sehen ist.
Analog zu Prüfungsteil A spielt die Kompetenz des *mathematischen Modellierens* (K3) in diesem Themengebiet wieder eine wichtige Rolle wie in Abbildung 6.5 deutlich erkennbar ist. So ist diese in allen Aufgabengruppen beider Bundesländer vertreten und dies auch im Anforderungsbereich III. Hervorzuheben ist hier die Aufgabengruppe 2 des bayerischen Abiturs, bei welcher der Anteil mit 29 % am höchsten ist.

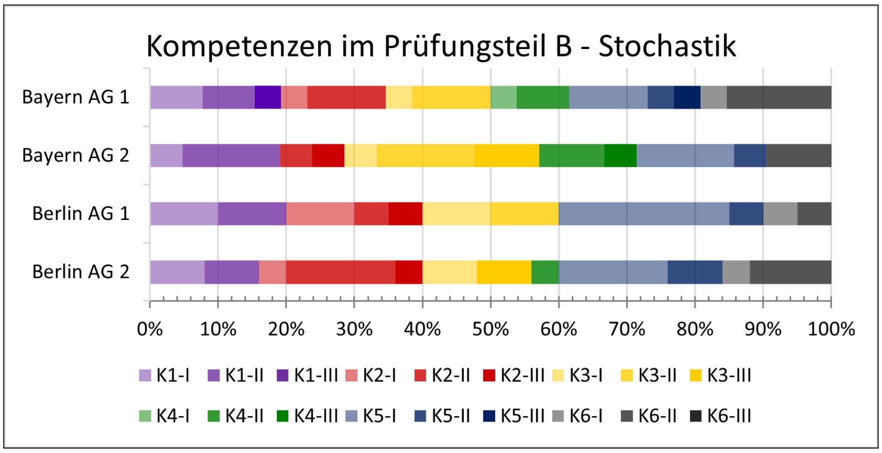


Abb. 6.5: Vergleich der Kompetenzanteile im Prüfungsteil B Stochastik

Das *mathematische Kommunizieren* (K6) allerdings fällt vor allem in Aufgabengruppe 2 des bayerischen Abiturs sehr gering aus. Zudem ist der Anteil der Kompetenz zur *Verwendung mathematischer Darstellungen* (K4) sehr niedrig und sogar in Aufgabengruppe 1 des Berliner Abiturs nicht vorhanden. Das *mathematische Argumentieren* (K1) hat wie auch im Themenbereich Geometrie einen hohen Stellenwert und tritt in allen Aufgabengruppen und zu einem hohen Anteil auf. Den maximalen Wert von 20 % findet man dabei in Aufgabengruppe 1 des Berliner Abiturs.

Zusammenfassung der Verteilung allgemeiner mathematischer Kompetenzen

Bezüglich der prozentualen Verteilung der Kompetenzen existiert jedoch keine Vorgabe seitens der Bildungsstandards. Dennoch kann abschließend festgehalten werden, dass alle Kompetenzen in beiden Abituren einbezogen werden. Es wurde zudem deutlich, dass diese sehr stark innerhalb der drei Themengebiete variieren. Die Kompetenz des

Umgangs mit symbolischen, technischen und formalen Elementen der Mathematik (K5) weist in allen Aufgabengruppen sowie Themengebieten einen sehr hohen Anteil auf. Dennoch kann festgestellt werden, dass das Ergebnis hinsichtlich der Kompetenz des *mathematischen Argumentierens* (K1) eine positive Entwicklung vor allem für das Berliner Abitur zeigt. So ist diese Kompetenz in allen Gebieten meist mit einem hohen Anteil vertreten, woraus sich schließen lässt, dass Begründungsaufgaben an Bedeutung gewonnen haben. Um genaueres darüber sagen zu können, wären die Ergebnisse im Vergleich zu den letzten Jahren interessant. Dennoch kann in Bezug auf den Themenbereich Analysis dank der Untersuchung von Wenzeck gesagt werden, dass sich dieser verglichen mit den Jahren 2011 bis 2017 erhöht hat.

6.3 Verteilung der Anforderungsbereiche

Es folgt abschließend ein Überblick über die gesamten Abiturprüfungen unter Berücksichtigung der Verteilung der drei Anforderungsbereiche, wobei Rückschlüsse auf die Schwierigkeit der Abiturprüfungen gezogen werden können. Der erste Balken in den folgenden Abbildungen stellt jeweils die Referenzverteilung dar, welche zu Beginn in Kapitel 3.3 festgelegt wurde.

Verteilung der Anforderungsbereiche im Prüfungsteil A

Die Verteilung der Punkte auf die Anforderungsbereiche im Prüfungsteil A sind den Abbildungen 6.6 und Abbildung 6.7 zu entnehmen.

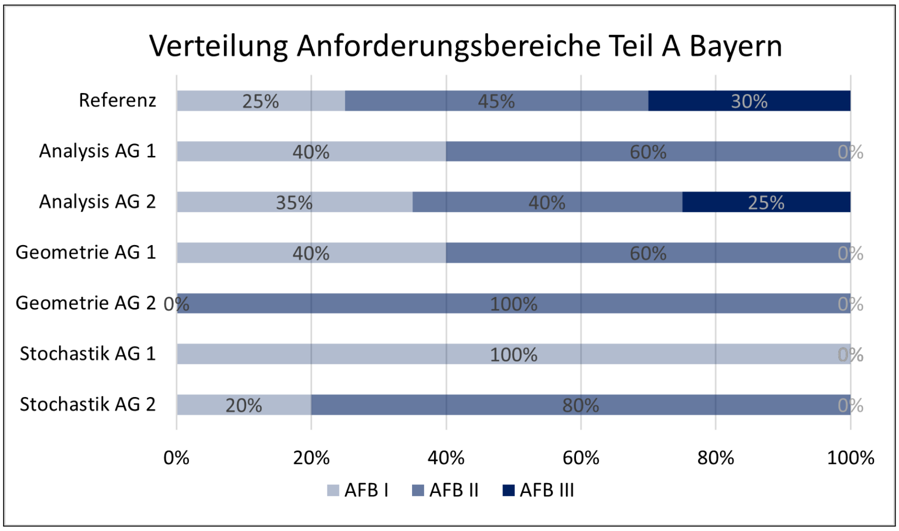


Abb. 6.6: Verteilung der Anforderungsbereiche im Prüfungsteil A des bayerischen Abiturs

In Abbildung 6.6 wird deutlich, dass die Referenzvorgabe im bayerischen hilfsmittelfreien Teil kaum getroffen wird. Ausschließlich Aufgabengruppe 2 innerhalb der Analysis befindet sich annähernd im vorgegebenen Bereich, wobei diese mit 25 % etwas unter dem Referenzwert von 30 % liegt.
Entgegen der Erwartungen, dass der Anteil des Anforderungsbereichs III in Analysis aufgrund der höheren Punktzahl von 20 BE größer ist, spiegelt sich in Abbildung 6.6 wider, dass der Anteil deutlich zu gering ist und in Aufgabengruppe 1 sogar keine Aufgaben diesem entsprechen.
Weiterhin existieren in den Themenbereichen Geometrie und Stochastik keinerlei Aufgaben im Anforderungsbereich III, wobei anzumerken ist, dass hierbei pro Aufgabengruppe nur 5 BE zu erreichen sind. So besteht beispielsweise Aufgabengruppe 1 des Themengebiets Stochastik ausschließlich aus Aufgaben, welche dem Anforderungsbereich I zugeordnet wurden. Daraus kann geschlussfolgert werden, dass die Aufgaben in der Regel „zu leicht” sind und es wäre eine mögliche Lösung, die Verteilung der Punkte zu verändern, sodass diese über alle Themengebiete gleichverteilt ist, wie es auch im Berliner Teil A der Fall ist. Dennoch ist zu sagen, dass die Poolaufgaben auch Aufgaben mit Anforderungsbereich III beinhalten, obwohl diese nur einen Umfang von jeweils 5 BE haben. Es ist also durchaus möglich, bei der geringen Punktanzahl von 5 BE schwierigere Aufgaben zu stellen.
Im Gegensatz dazu lässt sich anhand Abbildung 6.7 feststellen, dass nahezu alle Aufgaben des Berliner hilfsmittelfreien Teils, bei dem die Punkteverteilung auf die drei Themenbereiche mit jeweils 10 BE gleichverteilt ist, der Referenzverteilung entsprechen.

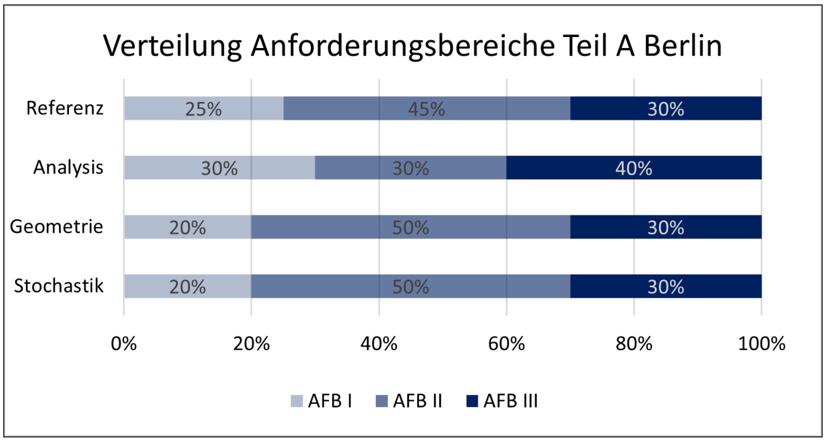


Abb. 6.7: Verteilung der Anforderungsbereiche im Prüfungsteil A des Berliner Abiturs

Eine einzige Abweichung besteht im Themengebiet der Analysis, wobei der Anteil an Punkten im Anforderungsbereich III 40 % entspricht und damit sogar über dem vorgegebenen Referenzwert liegt.
Vermutlich hängen die Ergebnisse damit zusammen, dass die Aufgaben für das Berliner Abitur in unveränderter Form aus dem Aufgabenpool entnommen sind, welche auf Basis der Bildungsstandards erstellt wurden. Wie bereits erwähnt, wurden im Jahr 2020 aufgrund der Terminverschiebung des bayerischen Mathematikabiturs keinerlei Aufgaben aus dem Pool übernommen.
Dies verstärkt die Vorteile des Aufgabenpools, da hierbei deutlich zu sehen ist, dass die Aufgaben aus diesem eine hohe Übereinstimmung mit der vorgesehenen Referenzverteilung aufweisen. Für den bayerischen hilfsmittelfreien Teil ist es also ratsam und wünschenswert, auf diese Aufgaben zurückzugreifen.

Verteilung der Anforderungsbereiche im Prüfungsteil B

Wirft man einen Blick auf die in Abbildung 6.8 und 6.9 dargestellten Verteilungen der Punkte auf die Anforderungsbereiche im Prüfungsteil B, so wird deutlich, dass beide Länder in den meisten Aufgabengruppen einen ähnlichen Anteil an Punkten im Anforderungsbereich III aufweisen.

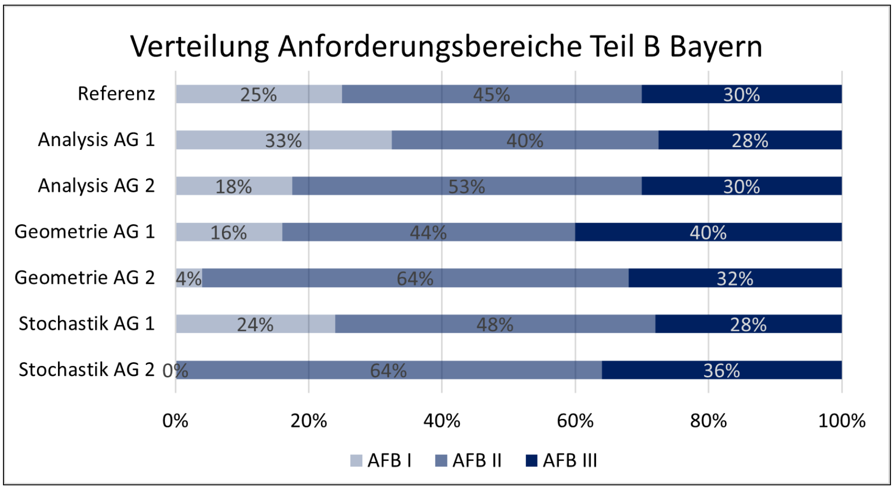


Abb. 6.8: Verteilung der Anforderungsbereiche im Prüfungsteil B des bayerischen Abiturs

Insgesamt schwankt der Bereich hinsichtlich des Anforderungsbereichs III in Bayern zwischen 28 % und 40 %, während sich in Berlin das Maximum auf lediglich 32 %

beläuft und einen minimalen Wert von 16 % aufweist. Damit ergibt sich die stärkste Abweichung vom Referenzwert in Aufgabengruppe 2 im Themengebiet der Stochastik des Berliner Abiturs.

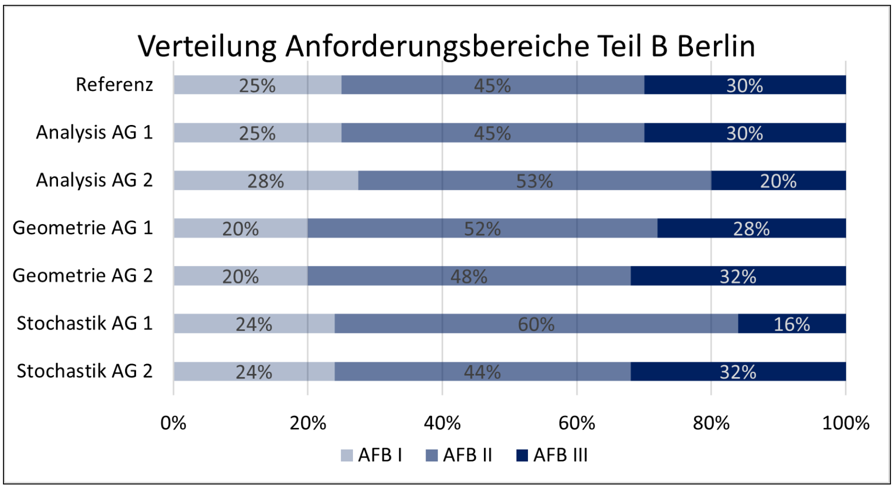


Abb. 6.9: Verteilung der Anforderungsbereiche im Prüfungsteil B des Berliner Abiturs

Dennoch befindet sich der Anteil des Anforderungsbereichs III auch im Berliner Abitur auf einem hohen Niveau und weist nur in dem einen Fall mit 16 % und in Analysis (AG 2) mit 20 % eine deutlich zu hohe Abweichung vom Referenzwert auf.
Hinsichtlich der Anteile des Anforderungsbereichs II ist festzustellen, dass diese im bayerischen Abitur eine breitere Spanne aufweisen. So schwanken sie dabei zwischen den Werten 40 % und 64 %, in Berlin hingegen zwischen 44 % und 60 %. Demnach verhält sich der Anforderungsbereich II in beiden Abiturprüfungen relativ ähnlich.
Anders sieht es jedoch in Bezug auf den Anforderungsbereich I aus. So fällt auf, dass dieser in Berlin einer relativ geringen Spanne von 20 % bis 28 % unterliegt (vgl. Abbildung 6.9), während diese in Bayern einen große Bereich zwischen 0 % und 33 % aufzeigt.

Insgesamt lässt sich sagen, dass der Anteil des Anforderungsbereichs III in Berlin in drei der insgesamt sechs untersuchten Aufgabengruppen der Referenz entspricht, wohingegen er in Bayern in vier der sechs Aufgabengruppen der Referenz entspricht bzw. diese übersteigt. Hinsichtlich der Schwierigkeit beider Abiturprüfungen kann also festgestellt werden, dass sich diese in einem ähnlichen Bereich befindet.
In den beiden Fällen der Abweichung des Referenzwerts im bayerischen Abitur beläuft sich dieser Unterschied jedoch nur auf eine geringe Abweichung von 2 %. In Berlin

hingegen ist festzustellen, dass zwei Aufgabengruppen einen deutlich zu geringen Anteil an Anforderungsbereich III aufweisen. So beträgt dieser in Analysis Aufgabengruppe 2 nur 20 % und die Aufgabengruppe 1 des Themenbereichs Stochastik weist einen geringen Wert von 16 % auf (vgl. Abbildung 6.9). Dem Anspruch an das erhöhte Anforderungsniveau, den Anforderungsbereich III mehr als I zu betonen, werden diese Aufgabengruppen nicht gerecht.
Verknüpft man dennoch die Ergebnisse mit denen aus Langs Untersuchung bezogen auf das Themengebiet Stochastik, so könnte man sagen, dass sich der Anteil des Anforderungsbereichs III im Berliner Abitur erhöht hat (Lan21, S. 96). Den Ergebnissen aus der Analyse der Jahrgänge 2014 bis 2019 zufolge, war der Anteil des Anforderungsbereichs III vor 2018 sehr gering, wobei dieser meist zwischen 13 % und 28 % schwankte und nur ein einziges Mal der Vorgabe von 30 % entsprach (Aufgabengruppe 2, 2014). Dies deutet in jedem Fall darauf hin, dass die Einführung des Zentralabiturs und der länderübergreifenden Aufgabenpools eine positive Auswirkung auf ein anspruchsvolleres Mathematikabitur in Berlin haben.

6.4 Diskussion der Vorgehensweise

Es folgt nun eine Reflexion zur Vorgehensweise bei der Durchführung der Analyse. Dadurch, dass nicht alle Aufgaben der Abiturprüfungen 2020 in ähnlicher Weise bereits im IQB Aufgabenpool vorhanden sind, spielt bei der Einordnung in die erforderlichen Kompetenzen natürlich eine subjektive Wahrnehmung und Interpretation mit. Dennoch sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Einordnung nach bestem Wissen und auf Basis der getroffenen Kriterien erfolgte. In diesem Zusammenhang wäre es von Interesse, ob die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse der Analyse mit den entsprechenden Einteilungen der offiziellen Erwartungshorizonten des IQB übereinstimmen. Leider sind diesbezügliche Angaben nicht öffentlich zugänglich, sodass ein solcher Vergleich nicht möglich ist.
Nicht zu vernachlässigen ist dabei auch der vorangegangene Mathematikunterricht. So unterscheidet sich dieser innerhalb der Länder Bayern und Berlin, aber auch von Schule zu Schule. Der Lehrplan gibt zwar die grundlegenden Inhalte vor, jedoch ist es den Lehrkräften freigestellt, auf welche Aufgabentypen sie den Schwerpunkt legen und welcher Schwierigkeitsgrad verlangt wird.

Eine Unterteilung der einzelnen Teilaufgaben wäre zusätzlich sinnvoll, da vor allem im bayerischen Abitur eine Teilaufgabe meist aus mehreren Handlungen besteht, die unabhängig voneinander zur Lösung ausgeführt werden müssen.
So besteht Teilaufgabe 1a der Aufgabengruppe 1 in Analysis aus den folgenden drei Aufgaben (vgl. Sta20b, S. 2):

1. Bestätigen, dass G_f symmetrisch zur $y-$Achse ist,
2. Untersuchen des Verhaltens von f für $x \to \infty$,
3. Bestimmen der Werte mit $f(x) = 0,96$.

Würde man also Teilaufgabe 1a nochmals in diese drei Bausteine segmentieren, so erhöht sich natürlich auch in diesem Fall der Anteil der Kompetenz K5-I, da dieser somit mehrfach gezählt werden würde.
Ergänzend dazu ist zu sagen, dass während der Analyse festgestellt werden konnte, dass die einzelnen Teilaufgaben des bayerischen Abiturs im Vergleich zum Berliner Abitur häufiger aus mehreren Bausteinen bestehen. Demzufolge finden sich im bayerischen Abitur 2020 für den Themenbereich Analysis in Prüfungsteil B drei Teilaufgaben, welche jeweils drei verschiedene Handlungen erfordern und vier Teilaufgaben, welche wiederum in jeweils zwei Bausteine unterteilt werden können.
Hierbei wäre also von Interesse, dies genauer zu untersuchen, sodass ein möglichst exakter Vergleich der beiden Abiturprüfungen möglich ist.

Ein weiterer interessanter Punkt wäre ein Vergleich des Auftretens der jeweiligen Themengebiete. Dies wurde in dieser Arbeit zunächst nicht berücksichtigt, da dies den Rahmen gesprengt hätte. Diesbezüglich gibt es jedoch im Rahmen des Vergleichs durch Wenzeck eine Einschätzung für den Themenbereich Analysis (vgl. Wen18), wobei im Zuge dessen festgestellt wurde, dass die Anzahl der in Abituren abgefragten Themengebiete in Bayern meist deutlich höher liegt als in Berlin. So lag die Anzahl der Themen in den Jahren 2011 bis 2017 im bayerischen Abitur zwischen acht und zehn, während diese in Berlin zwischen fünf und acht schwankte (Wen18, S. 69). Außerdem konnte innerhalb dieser Analyse ausfindig gemacht werden, dass das bayerische Abitur eine höhere Variation an Funktionstypen aufgreift (Wen18, S. 75). Ein diesbezüglicher Vergleich hinsichtlich der Prüfungsinhalte in den Themengebieten Stochastik und Geometrie wäre daher ebenso von Interesse.

Ein weiterer Punkt, der vor allem die Abiture der Jahre 2019 und 2020 aufgrund der in der Einleitung beschriebenen Problematik interessant ist, ist der Zeitfaktor. So wurde 2020 seitens der Lehrkräfte geäußert, dass zu viele Aufgaben in einer zu Zeit gelöst werden müssen (VE20). Es wäre demnach interessant, dies innerhalb einer Auswertung der eigenen Bearbeitungszeit näher zu analysieren. Im Zuge der Untersuchung der Stochastik-Aufgaben für den Leistungskurs Berlin durch Lang wurde diesbezüglich bestätigt, dass die benötigte Bearbeitungszeit für die Prüfungsaufgaben über die Jahre hinweg gestiegen ist (Lan21, S. 95).

7 Fazit und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit konnte anhand der Analyse der Abiturprüfungen 2020 der beiden Länder Berlin und Bayern dargelegt werden, welche allgemeinen mathematischen Kompetenzen in welcher Dimension gefordert sind und wie sich die Anteile der drei Anforderungsbereiche hinsichtlich aller erreichbaren Punkte unterscheiden.
Dabei konnte festgestellt werden, dass die Abiturprüfungen beider Länder ein vielfältiges Spektrum der allgemeinen mathematischen Kompetenzen abbilden. Da in Bezug auf die Verteilung und den Anteil der geprüften Kompetenzen keine Vorgaben auf Basis der Bildungsstandards gemacht werden, kann hierbei nur dokumentiert werden, dass die Forderung dieser in beiden Ländern Bayern und Berlin gleichermaßen in den Prüfungsaufgaben gewährleistet ist. Dass der Anteil des Anforderungsbereichs III für die Kompetenzen *mathematisches modellieren* (K3) und *Probleme mathematisch lösen* (K2) gering ausfällt, ist im Allgemeinen nicht verwunderlich, da Aufgaben dieser Art mit sehr viel Aufwand und Komplexität verbunden sind.
Das Auftreten der jeweiligen Kompetenzen variiert je nach Themengebiet Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik. Zusammenfassend lässt sich jedoch sagen, dass beide Abiturprüfungen als Ganzes betrachtet alle sechs Kompetenzen erfordern.
Hinsichtlich des Schwierigkeitsgrads konnte gezeigt werden, dass das Berliner Abitur sich deutlich dem des bayerischen Abiturs angenähert hat. So wurde belegt, dass der Anteil des Anforderungsbereichs III in den meisten Aufgabengruppen den Vorgaben entspricht und sich verglichen mit Ergebnissen aus Wenzeck und Lang im Vergleich zu den letzten Jahren damit erhöht hat.
Prüfungsteil A des bayerischen Abiturs weist kaum Aufgaben des Anforderungsbereichs

III auf, was die Vermutung zulässt, dass der hilfsmittelfreie Teil in Bayern zu einfach ist. Zudem entspricht er nicht der Richtlinie der Bildungsstandards, dass für das erhöhte Anforderungsniveau der Anforderungsbereich III stärker hervorzuheben ist.

Die eingangs erwähnten Beschwerden über das zu schwierige Mathematikabitur in Berlin können darauf zurückgeführt werden, dass es tatsächlich an Schwierigkeit zugenommen hat, jedoch nicht in einem zu hohen Maß, wenn man die Ergebnisse mit Bayern vergleicht. Denn im Vergleich zu Bayern schneidet das Berliner Abitur 2020 in der Schwierigkeit sehr ähnlich ab. Die Beschwerden beruhen vermutlich darauf, dass das Abitur in Berlin im Vergleich zu den vergangenen Jahren deutlich schwieriger ist. Dabei ist jedoch anzumerken, dass das Abitur der Jahre vor 2019 als zu einfach betitelt wurde. Dementsprechend kann es positiv gesehen werden, dass das Berliner Abitur schließlich mit dem bayerischen „mithalten" kann.
Dabei ist festzuhalten, dass die länderübergreifenden Aufgabenpools eine positive Auswirkung hinsichtlich der Vergleichbarkeit der Abiturprüfungen mit sich bringen.

Alles in allem wurde mit der Einführung der Bildungsstandards und des Aufgabenpools ein Grundstein für die verbesserte Vergleichbarkeit des höchsten Schulabschlusses gelegt. Die Problematik hinsichtlich der unvergleichbaren Abiturnote und den sich daraus ergebenen Schwierigkeiten in Bezug auf die universitäre Weiterbildung löst sich dennoch nicht auf, da die Abiturprüfung letztendlich nur einen kleinen Teil der Abiturnote ausmacht und damit auch die Qualifikationsphase im Gesamten eine Rolle spielt, was nicht alleine durch eine zentrale Abiturprüfung gelöst werden kann. Generell bedarf es daher noch viel Arbeit, um die Vergleichbarkeit des Abschlusses in den 16 Bundesländern zu erhöhen. In diesem Zusammenhang kündigte die Kultusministerkonferenz in einem Beschluss vom 15. Oktober 2020 an, welche Ziele in den nächsten Jahren erreicht werden sollen und inwiefern sich die bereits vorhandenen Instrumente weiterentwickeln (vgl. Kul20).
Dabei sollen neben der Abschlussprüfung auch die Rahmenbedingungen der gymnasialen Oberstufe miteinbezogen werden. Wie in dieser Arbeit in Kapitel 2 aufgezeigt werden konnte, sind hierbei die Unterschiede zwischen Bayern und Berlin sehr groß. Um diese Differenzen aufzubrechen, soll eine einheitliche Regelung für alle Bundesländer geschaffen werden, wobei „bis zum Jahr 2023 eine genaue Anzahl verpflichtend zu belegender und in die Gesamtqualifikation einzubringender Fächer einschließlich ihrer

Gewichtung [festgelegt ist]“ (Kul20, S. 19). Außerdem wird festgesetzt, wie viele Fächer die Schülerinnen und Schüler auf dem erhöhten Niveau wählen müssen.
Ein weiteres Ziel besteht darin, den Aufgabenpool so zu optimieren, dass dieser effizienter genutzt werden kann. Demnach sollen die Prüfungsaufgaben, welche aus dem Pool entnommen werden, nicht mehr angepasst werden, sondern genauso wie sie sind in die Abiturprüfung übernommen werden. Dies geht einher mit einer Anpassung an die äußeren Umstände, wie beispielsweise Aufgabenstruktur, Bearbeitungszeit und Verwendung von Hilfsmitteln. Letztlich soll dies bis zum Jahr 2023 erfolgen, sodass es ab diesem Zeitpunkt für jedes Land möglich ist, den Aufgabenpool zu verwenden. Im Zuge dessen soll zusätzlich eine verpflichtende Anzahl von mindestens 50 % an Aufgaben aus dem Pool festgelegt werden (vgl. Kul20, S. 19 f.).

Es bleibt daher spannend inwiefern sich diese Komponenten der allgemeinen Hochschulreife verändern und damit eine immer höhere Einheit in Bezug auf den Schulabschluss gewährleisten.

Literaturverzeichnis

[Bay07] BAYERISCHE STAATSKANZLEI: *Schulordnung für die Gymnasien in Bayern (Gymnasialschulordnung – GSO).* Stand: 22.06.2020. Gesetz- und Verordnungsblatt (GVBl), 2007 http://www.gesetze-bayern.de/Content/Pdf/BayGSO?all=True. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Bay10] BAYERISCHES STAATSMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT UND KULTUS: *Abiturprüfung im Fach Mathematik im achtjährigen Gymnasium.* 2010 http://www.isb.bayern.de/download/14838/abiturpruefung_im_fach_mathematik_im_achtjaehrigen_gymnasium_2.pdf. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[BL05] BÜCHTER, A. ; LEUDERS, T.: *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen.* Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG, 2005

[Gan19] GANSEKO, S.: *Anforderungen in den Berliner Abiturprüfungen im Fach Mathematik: Eine Analyse von Prüfungsaufgaben zum Themenfeld der Analysis für den Grundkurs.* Humboldt Universität zu Berlin (Unveröffentlicht), 2019

[Insa] INSTITUT ZUR QUALITÄTSENTWICKLUNG IM BILDUNGSWESEN: *Aufgabensammlung - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau* https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik/erhoeht/. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Insb] INSTITUT ZUR QUALITÄTSENTWICKLUNG IM BILDUNGSWESEN: *Aufgabensammlung - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil A. Analysis Aufgabe 2 (Aufgabengruppe 1)* https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik/erhoeht/. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Insc] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Aufgabensammlung - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Analysis Aufgabe 3 (WTR)* `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Insd] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Aufgabensammlung zur Orientierung* `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2019/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Inse] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder* `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Insf] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Grundstock von Operatoren* `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins17a] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2017 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau.* 2017 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2017/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins17b] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2017 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil A. Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative 2) Aufgabe 1 (Aufgabengruppe 1).* 2017 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2017/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins17c] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2017 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Analysis Aufgabe 4 (WTR).* 2017 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2017/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins17d] INSTITUT ZUR QUALITÄTSENTWICKLUNG IM BILDUNGSWESEN: *Pools für das Jahr 2017 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Analysis Aufgabe 5 (WTR).* 2017 https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2017/mathematik/erhoeht/. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins17e] INSTITUT ZUR QUALITÄTSENTWICKLUNG IM BILDUNGSWESEN: *Pools für das Jahr 2017 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative 2) Aufgabe 4 (WTR).* 2017 https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2017/mathematik/erhoeht/. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins17f] INSTITUT ZUR QUALITÄTSENTWICKLUNG IM BILDUNGSWESEN: *Pools für das Jahr 2017 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Stochastik Aufgabe 3 (WTR).* 2017 https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2017/mathematik/erhoeht/. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins18a] INSTITUT ZUR QUALITÄTSENTWICKLUNG IM BILDUNGSWESEN: *Pools für das Jahr 2018 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau.* 2018 https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2018/mathematik/erhoeht/. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins18b] INSTITUT ZUR QUALITÄTSENTWICKLUNG IM BILDUNGSWESEN: *Pools für das Jahr 2018 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil A. Analysis Aufgabe 3 (Aufgabengruppe 2).* 2018 https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2018/mathematik/erhoeht/. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins18c] INSTITUT ZUR QUALITÄTSENTWICKLUNG IM BILDUNGSWESEN: *Pools für das Jahr 2018 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Stochastik Aufgabe 3 (WTR).* 2018 https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2018/mathematik/erhoeht/. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins18d] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2018 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Stochastik Aufgabe 4 (WTR).* 2018 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2018/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins19a] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2019 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau.* 2019 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2019/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins19b] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2019 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil A. Analysis Aufgabe 1 (Aufgabengruppe 1).* 2019 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2019/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins19c] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2019 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Analysis Aufgabe 3 (WTR).* 2019 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2019/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins19d] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2019 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative 2) Aufgabe 3 (WTR).* 2019 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2019/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins19e] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2019 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative 2) Aufgabe 5 (WTR).* 2019 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2019/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins20a] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2020 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau.* 2020 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins20b] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2020 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil A. Analysis Aufgabe 4 (Aufgabengruppe 2).* 2020 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins20c] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2020 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil A. Analysis Aufgabe (Aufgabengruppe 1).* 2020 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins20d] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2020 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil A. Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative 2) Aufgabe 1 (Aufgabengruppe 1).* 2020 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins20e] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2020 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil A. Stochastik Aufgabe 2 (Aufgabengruppe 1).* 2020 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins20f] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen: *Pools für das Jahr 2020 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil A. Stochastik Aufgabe 5 (Aufgabengruppe 2).* 2020 `https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins20g] INSTITUT ZUR QUALITÄTSENTWICKLUNG IM BILDUNGSWESEN: *Pools für das Jahr 2020 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Analysis Aufgabe 3 (WTR).* 2020 https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins20h] INSTITUT ZUR QUALITÄTSENTWICKLUNG IM BILDUNGSWESEN: *Pools für das Jahr 2020 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative 2) Aufgabe 3 (WTR).* 2020 https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins20i] INSTITUT ZUR QUALITÄTSENTWICKLUNG IM BILDUNGSWESEN: *Pools für das Jahr 2020 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative 2) Aufgabe 4 (WTR).* 2020 https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins20j] INSTITUT ZUR QUALITÄTSENTWICKLUNG IM BILDUNGSWESEN: *Pools für das Jahr 2020 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Stochastik Aufgabe 3 (WTR).* 2020 https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Ins20k] INSTITUT ZUR QUALITÄTSENTWICKLUNG IM BILDUNGSWESEN: *Pools für das Jahr 2020 - Aufgaben für das Fach Mathematik zum erhöhten Anforderungsniveau. Prüfungsteil B. Stochastik Aufgabe 4 (WTR).* 2020 https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2020/mathematik/erhoeht/. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[KDN13] KÜHN, S. M. ; DRÜKE-NOE, C.: *Qualität und Vergleichbarkeit durch Bildungsstandards und zentrale Prüfungen? Ein bundesweiter Vergleich von Prüfungsanforderungen im Fach Mathematik zum Erwerb des Mittleren Schulabschlusses.* 2013. – S. 912–932

[Kre19] Kretzschmar, T.: *Anforderungen in den Berliner Abiturprüfungen im Fach Mathematik: Eine Analyse von Prüfungsaufgaben zum Themenfeld der Analysis für den Leistungskurs*. Humboldt Universität zu Berlin (Unveröffentlicht), 2019

[Kul02] Kultusministerkonferenz: *Einheitliche Prüfungsanforderungenin der Abiturprüfung - Mathematik. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 01.12.1989 i.d.F. vom 24.05.2002)*. 2002 `https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/1989/1989_12_01-EPA-Mathe.pdf`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Kul03] Kultusministerkonferenz: *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003)*. 2003 `https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Kul04] Kultusministerkonferenz: *Vereinbarung über Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10) in den Fächern Biologie, Chemie, Physik*. 2004 `https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_12_16-Bildungsstandards-Mittleren-SA-Bio-Che-Phy.pdf`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Kul12a] Kultusministerkonferenz: *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)*. 2012 `https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Kul12b] Kultusministerkonferenz: *Operatoren für das Fach Mathematik an den Deutschen Schulen im Ausland*. 2012 `https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/Bildung/Auslandsschulwesen/Kerncurriculum/Auslandsschulwesen-Operatoren-Mathematik-10-2012.pdf`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Kul15] Kultusministerkonferenz: *Bericht über den Verfahrensstand bei der Implementation der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife.* 2015 https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2015/2015_11_12-Bericht-Implementation-Bildungsstandards-AHR.pdf. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Kul19] Kultusministerkonferenz: *Operatoren und Beispiele für das Fach Mathematik an den Deutschen Schulen im Ausland (Bildungsgang Gymnasium).* 2019 https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/doc/Bildung/Auslandsschulwesen/ServiceSekI/Operatoren_Mathematik_GYM.PDF. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Kul20] Kultusministerkonferenz: *Politische Vorhaben zur „Ländervereinbarung über die gemeinsame Grundstruktur des Schulwesens und die gesamtstaatliche Verantwortung der Länder in zentralen bildungspolitischen Fragen“ (Beschluss der KMK vom 15.10.2020).* 2020 https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2020/2020_10_15-Politische-Vorhaben-LV.pdf. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Kul21] Kultusministerkonferenz: *Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe und der Abiturprüfung.* 2021 https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/1972/1972_07_07-VB-gymnasiale-Oberstufe-Abiturpruefung.pdf. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Lan15] Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg: *Rahmenlehrplan Teil C - Mathematik. Jahrgangsstufen 1-10.* 2015 https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/Teil_C_Mathematik_2015_11_10_WEB.pdf. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Lan21] Lang, H.: *Umsetzung der abschlussorientierten Standards in den Berliner Abiturprüfungen im Themenfeld Stochastik: Eine Analyse von Prüfungsaufgaben im Leistungskurs hinsichtlich allgemeiner und inhaltlicher Kompetenzen.* Humboldt Universität zu Berlin (Unveröffentlicht), 2021

[PE20] Preusse, D. ; Eiben, M.: *Abitur Berlin 2020 - Ergebnisbericht.* Institut für Schulqualität der Länder Berlin und Brandenburg e.V. (ISQ), 2020 `https://www.isq-bb.de/wordpress/wp-content/uploads/2020/12/Zentralabitur_Bericht_Berlin_2020_Endversion-1.pdf`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[PPR97] Penssel, C. ; Penssel, H.-J. ; Roth, D.: *Basismathematik 9.* 2. Auflage. Bayerischer Schulbuch Verlag München, 1997

[Ris08] Risse, J.: *Differenzierte Beurteilung mathematischer Kompetenzendurch Analyse von Schüleraktivitäten beim Lösen mathematischer Aufgaben – Entwicklung und Erprobung eines Konzeptes.* 2008 `https://edoc.hu-berlin.de/bitstream/handle/18452/16428/risse.pdf?sequence=1&isAllowed=y`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Sch20] Schulgesetz Berlin: *Verordnung über die gymnasiale Oberstufe (VG-OG) vom 18. April 2007.* Stand: 01.12.2020. 2020 `https://www.schulgesetz-berlin.de/media/downloads/VerordnungüberdiegymnasialeOberstufeStand01.12.2020.pdf`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Sen06] Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie: *Fachbrief Nr. 4 Mathematik.* 2006 `https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/fachbriefe_berlin/mathematik/fachbrief_mathematik_04.pdf`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Sen14] Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie: *Fachbrief Nr. 18 Mathematik.* 2014 `https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/fachbriefe_berlin/mathematik/Fachbrief_Mathematik_18.pdf`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Sen17] Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie: *Fachbrief Nr. 21 Mathematik.* 2017 https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/fachbriefe_berlin/mathematik/Fachbrief_Mathematik_21.pdf. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Sen19] Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie: *Ausführungsvorschriften über schulische Prüfungen (AV Prüfungen).* 2019 https://www.berlin.de/sen/bildung/schule/rechtsvorschriften/. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Sen20] Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie: *Hinweise zur Vorbereitung auf die Abiturprüfung 2020 im Land Brandenburg. Prüfungsschwerpunkte Mathematik.* 2020 https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/pruefungen/abitur_bb/RS_ZA_2020/PS_Mathematik_2020.pdf. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Sta04] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München: *Das Gymnasium in Bayern.* 2004 http://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26350.html. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Sta08] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München: *Das Abitur im Fach Mathematik am achtjährigen Gymnasium.* 2008 https://www.isb.bayern.de/download/1766/das-abitur-im-fach-mathematik-am-achtjaehrigen-gymnasium.pdf. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Sta17] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München: *LehrplanPlus - Mathematik.* 2017 https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachprofil/gymnasium/mathematik. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Sta19] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München: *Kontaktbrief Mathematik 2019*. 2019 http://www.isb.bayern.de/download/23250/kontaktbrief_mathematik_2019.pdf. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Sta20a] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München: *Abiturprüfung im Fach Mathematik 2020 - Prüfungsteil A*. 2020 https://www.isb.bayern.de/download/22912/abiturpruefung_mathematik_2020_pruefungsteil_a.pdf. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Sta20b] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München: *Abiturprüfung im Fach Mathematik 2020 - Prüfungsteil B*. 2020 https://www.isb.bayern.de/download/22913/abiturpruefung_mathematik_2020_pruefungsteil_b.pdf. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Sta20c] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München: *Kontaktbrief Mathematik 2020*. 2020 https://www.isb.bayern.de/download/23249/kontaktbrief_mathematik_2020.pdf. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Sta20d] Stark Verlag GmbH: *Abitur 2021 - Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen Berlin Mathematik LK*. 7. ergänzte Auflage. Stark Verlag GmbH, 2020

[VE18] Vieth-Entus, S.: *Vergleich Berlin-Bayern: Berlins Mathe-Abiturienten haben es leichter*. 2018 https://www.tagesspiegel.de/berlin/vergleich-berlin-bayern-berlins-mathe-abiturienten-haben-es-leichter/22929722.html. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[VE19] Vieth-Entus, S.: *Berliner Abitur zu schwer? Schüler fordern Überprüfung der Matheklausur*. Tagesspiegel, 2019 https://www.tagesspiegel.de/berlin/berliner-abitur-zu-schwer-schueler-fordern-ueberpruefung-der-matheklausur/24342110.html. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[VE20] Vieth-Entus, S.: *Ergebnisse im Berliner Matheabitur noch schlechter als 2019*. Tagesspiegel, 2020 `https://www.tagesspiegel.de/berlin/senatorin-will-beschwerden-von-lehrern-pruefen-ergebnisse-im-berliner-matheabitur-noch-schlechter-als-2019/25954506.html`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

[Wen18] Wenzeck, S.: *Vergleich der Abituraufgaben: Bayern und Berlin*. Humboldt Universität zu Berlin, 2018 `http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/user/filler/Masterarbeit_Wenzeck-Severin.pdf`. – zuletzt aufgerufen am 09.05.2021

A Anhang

A.1 Abitur Bayern 2020 - Teil A

Mathematik

Abiturprüfung 2020

Prüfungsteil A

Arbeitszeit: 70 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

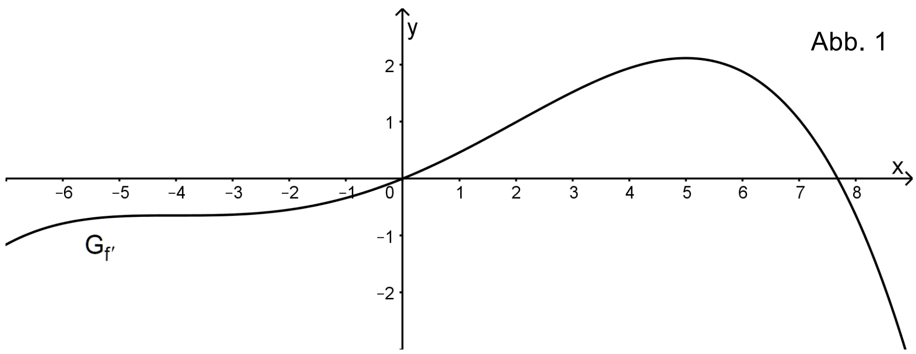
BE

1 Gegeben ist die Funktion $h\colon x \mapsto x \cdot \ln\left(x^2\right)$ mit maximalem Definitionsbereich D_h.

2 **a)** Geben Sie D_h an und zeigen Sie, dass für den Term der Ableitungsfunktion h' von h gilt: $h'(x) = \ln\left(x^2\right) + 2$.

3 **b)** Bestimmen Sie die Koordinaten des im II. Quadranten liegenden Hochpunkts des Graphen von h.

2 Die Abbildung 1 zeigt den Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f. Nur in den Punkten $\left(-4 \mid f'(-4)\right)$ und $\left(5 \mid f'(5)\right)$ hat der Graph $G_{f'}$ waagrechte Tangenten.



2 **a)** Begründen Sie, dass f genau eine Wendestelle besitzt.

2 **b)** Es gibt Tangenten an den Graphen von f, die parallel zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten sind. Ermitteln Sie anhand des Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' in der Abbildung 1 Näherungswerte für die x-Koordinaten derjenigen Punkte, in denen der Graph von f jeweils eine solche Tangente hat.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f\colon x \mapsto x^2 + 4$ und $g_m\colon x \mapsto m \cdot x$ mit $m \in \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f und der Graph von g_m mit G_m bezeichnet.

3 **a)** Skizzieren Sie G_f in einem Koordinatensystem. Berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punkts der Graphen G_f und G_4.

2 **b)** Es gibt Werte von m, für die die Graphen G_f und G_m jeweils keinen gemeinsamen Punkt haben. Geben Sie diese Werte von m an.

4 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 0{,}7 \cdot e^{0{,}5x} - 0{,}7$ und $x \in \mathbb{R}$.
Die Funktion g ist umkehrbar. Die Abbildung 2 zeigt den Graphen G_g von g sowie einen Teil des Graphen G_h der Umkehrfunktion h von g.

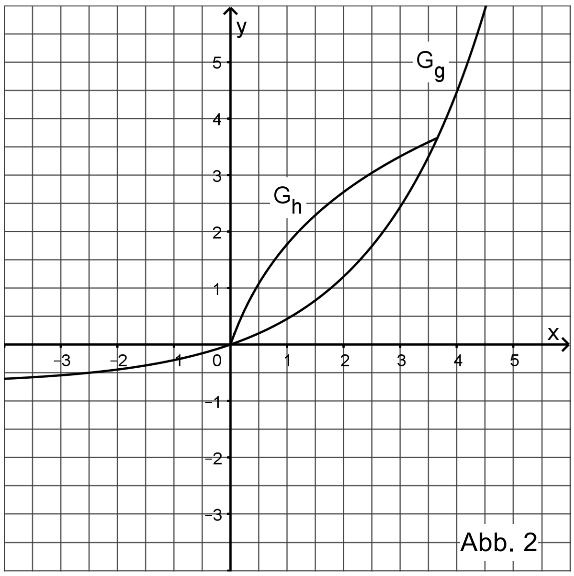


Abb. 2

2 **a)** Zeichnen Sie in die Abbildung 2 den darin fehlenden Teil von G_h ein.

2 **b)** Betrachtet wird das von den Graphen G_g und G_h eingeschlossene Flächenstück. Schraffieren Sie den Teil dieses Flächenstücks, dessen Inhalt mit dem Term $2 \cdot \int_0^{2{,}5} \left(x - g(x)\right) dx$ berechnet werden kann.

2 **c)** Geben Sie den Term einer Stammfunktion der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $k\colon x \mapsto x - g(x)$ an.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \ln\left(2-x^2\right)$ mit maximaler Definitionsmenge D_g.

3 **a)** Skizzieren Sie die Parabel mit der Gleichung $y = 2 - x^2$ in einem Koordinatensystem und geben Sie D_g an.

2 **b)** Ermitteln Sie den Term der Ableitungsfunktion g' von g.

2 Die Abbildung 1 zeigt einen Teil des Graphen G_h einer in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ definierten gebrochen-rationalen Funktion h.
Die Funktion h hat bei $x = 2$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel; zudem besitzt G_h die Gerade mit der Gleichung $y = x - 7$ als schräge Asymptote.

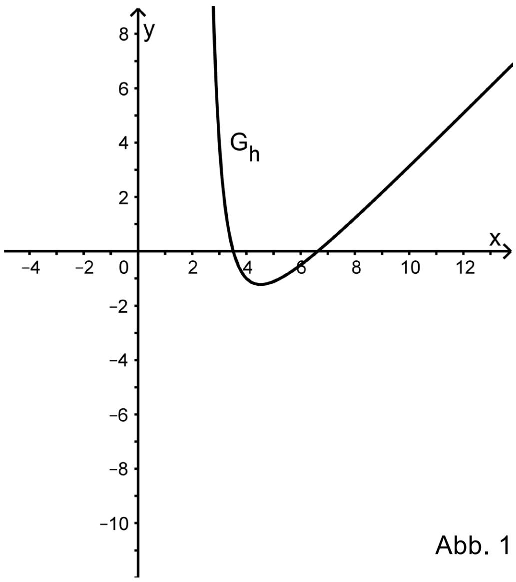


Abb. 1

3 **a)** Zeichnen Sie in die Abbildung 1 die Asymptoten von G_h ein und skizzieren Sie im Bereich $x < 2$ einen möglichen Verlauf von G_h.

2 **b)** Berechnen Sie unter Berücksichtigung des asymptotischen Verhaltens von G_h einen Näherungswert für $\int_{10}^{20} h(x)\,dx$.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $k: x \mapsto \dfrac{-x^2+2x}{2x^2+4}$. Ihr Graph wird mit G_k bezeichnet.

3 **a)** Geben Sie die Nullstellen von k an und begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass G_k die Gerade mit der Gleichung $y=-0{,}5$ als waagrechte Asymptote besitzt.

2 **b)** Berechnen Sie die x-Koordinate des Schnittpunkts von G_k mit der waagrechten Asymptote.

5 **4** Die Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f einer in $[0{,}8;\,+\infty[$ definierten Funktion f.

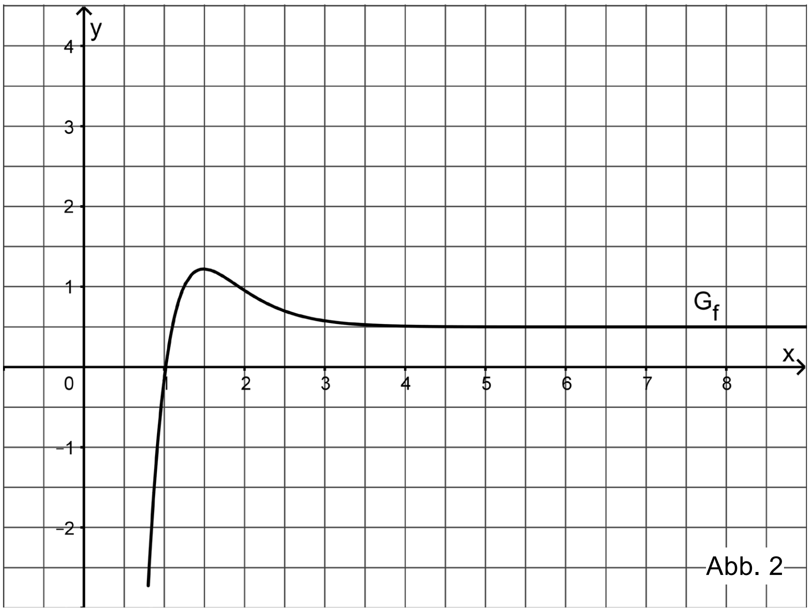


Abb. 2

Betrachtet wird zudem die in $[0{,}8;\,+\infty[$ definierte Integralfunktion

$J: x \mapsto \int_2^x f(t)\,dt$.

Begründen Sie mithilfe von Abbildung 2, dass $J(1) \approx -1$ gilt, und geben Sie einen Näherungswert für den Funktionswert $J(4{,}5)$ an. Skizzieren Sie den Graphen von J in der Abbildung 2.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Gegeben sind grüne und rote Würfel, deren Seitenflächen unterschiedlich beschriftet sind und beim Werfen mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Jeder grüne Würfel trägt auf fünf Seitenflächen die Augenzahl 1 und auf einer die Augenzahl 6. Jeder rote Würfel trägt auf jeweils zwei Seitenflächen die Augenzahlen 1, 3 bzw. 6.

2 **a)** In einer Urne befinden sich drei grüne Würfel und zwei rote Würfel. Der Urne werden mit einem Griff zwei Würfel zufällig entnommen. Geben Sie einen Term an, mit dem man die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen kann, dass ein roter Würfel und ein grüner Würfel entnommen werden.

3 **b)** Ein grüner Würfel und ein roter Würfel werden gleichzeitig geworfen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Summe der beiden geworfenen Augenzahlen. Geben Sie alle Werte an, die die Zufallsgröße X annehmen kann, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 7)$.

5

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Ein Glücksrad besteht aus zwei unterschiedlich großen Sektoren. Der größere Sektor ist mit der Zahl 1 und der kleinere mit der Zahl 3 beschriftet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim einmaligen Drehen des Glücksrads die Zahl 1 zu erzielen, wird mit p bezeichnet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

1 **a)** Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden erzielten Zahlen 4 ist, durch den Term $2p \cdot (1-p)$ angegeben wird.

4 **b)** Die Zufallsgröße X beschreibt die Summe der beiden erzielten Zahlen. Bestimmen Sie, für welchen Wert von p die Zufallsgröße X den Erwartungswert 3 hat.

5

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Die Strecke $[PQ]$ mit den Endpunkten $P(8\,|\,-5\,|\,1)$ und Q ist Durchmesser einer Kugel mit Mittelpunkt $M(5\,|\,-1\,|\,1)$.

3 **a)** Berechnen Sie die Koordinaten von Q und weisen Sie nach, dass der Punkt $R(9\,|\,-1\,|\,4)$ auf der Kugel liegt.

2 **b)** Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass das Dreieck PQR bei R rechtwinklig ist.

5

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben sind die Punkte $P(-2|3|0)$, $R(2|-1|2)$ und $Q(q|1|5)$ mit der reellen Zahl q, wobei Q von P genauso weit entfernt ist wie von R.

3 **a)** Bestimmen Sie q.

(zur Kontrolle: $q = -2$)

2 **b)** Ermitteln Sie die Koordinaten des Eckpunkts S der Raute PQRS. Zeigen Sie, dass PQRS kein Quadrat ist.

5

A.2 Abitur Bayern 2020 - Teil B

Mathematik

Abiturprüfung 2020

Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$; die Abbildung 1 zeigt ihren Graphen G_f.

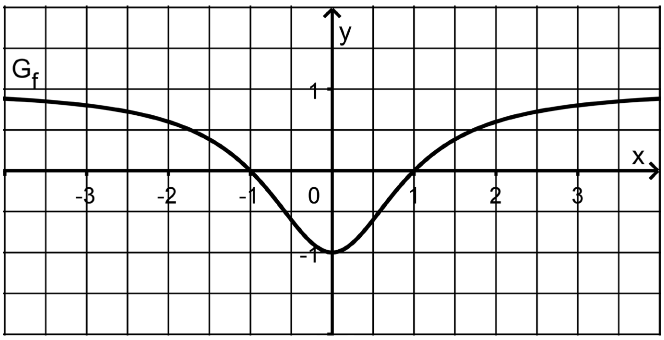


Abb. 1

5 **1 a)** Bestätigen Sie rechnerisch, dass G_f symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, und untersuchen Sie anhand des Funktionsterms das Verhalten von f für $x \to +\infty$. Bestimmen Sie diejenigen x-Werte, für die $f(x) = 0{,}96$ gilt.

4 **b)** Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von G_f.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$)

4 **c)** Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt $(3 \mid f(3))$. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem t die x-Achse schneidet, und zeichnen Sie t in die Abbildung 1 ein.

2 Nun wird die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F: x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ betrachtet; ihr Graph wird mit G_F bezeichnet.

5 **a)** Begründen Sie, dass F in $x = 0$ eine Nullstelle hat, und machen Sie mithilfe des Verlaufs von G_f plausibel, dass im Intervall $[1;\ 3]$ eine weitere Nullstelle von F liegt.
Geben Sie an, welche besondere Eigenschaft G_F im Punkt $(-1 \mid F(-1))$ hat, und begründen Sie Ihre Angabe.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 **b)** Die Gerade mit der Gleichung $y = x - 1$ begrenzt gemeinsam mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Geben Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks und den sich daraus ergebenden Näherungswert für $F(1)$ an.

5 **c)** Die Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f sowie den Graphen G_g der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto -\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

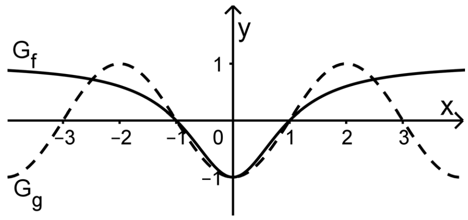


Abb. 2

Beschreiben Sie, wie G_g aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \cos x$ hervorgeht, und berechnen Sie durch Integration von g einen weiteren Näherungswert für $F(1)$.

(zur Kontrolle: $F(1) \approx -\frac{2}{\pi}$)

4 **d)** Berechnen Sie das arithmetische Mittel der beiden in den Aufgaben 2b und 2c berechneten Näherungswerte. Skizzieren Sie den Graphen von F für $0 \leq x \leq 3$ unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in der Abbildung 1.

3 Für jeden Wert $k > 0$ legen die auf G_f liegenden Punkte $P_k\left(-k \mid f(-k)\right)$ und $Q_k\left(k \mid f(k)\right)$ gemeinsam mit dem Punkt $R(0 \mid 1)$ ein gleichschenkliges Dreieck P_kQ_kR fest.

5 **a)** Berechnen Sie für $k = 2$ den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks P_2Q_2R (vgl. Abbildung 3).

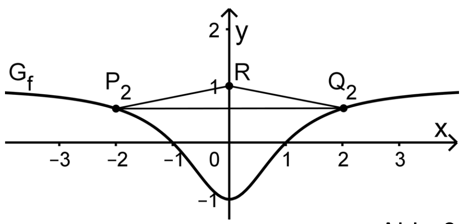


Abb. 3

Zeigen Sie anschließend, dass der Flächeninhalt des Dreiecks P_kQ_kR allgemein durch den Term $A(k) = \frac{2k}{k^2+1}$ beschrieben werden kann.

6 **b)** Zeigen Sie, dass es einen Wert von $k > 0$ gibt, für den $A(k)$ maximal ist. Berechnen Sie diesen Wert von k sowie den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks P_kQ_kR.

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 1 + 7e^{-0{,}2x}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_0^+$; die Abbildung 1 zeigt ihren Graphen G_f.

3 **1 a)** Begründen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ waagrechte Asymptote von G_f ist.
Zeigen Sie rechnerisch, dass f streng monoton abnehmend ist.

Für jeden Wert $s > 0$ legen die Punkte $(0\,|\,1)$, $(s\,|\,1)$, $(s\,|\,f(s))$ und $(0\,|\,f(s))$ ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $R(s)$ fest.

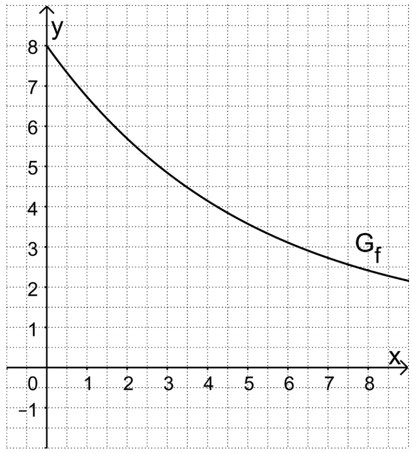


Abb. 1

7 **b)** Zeichnen Sie dieses Rechteck für $s = 5$ in die Abbildung 1 ein.
Zeigen Sie, dass $R(s)$ für einen bestimmten Wert von s maximal ist, und geben Sie diesen Wert von s an.

(zur Kontrolle: $R(s) = 7s \cdot e^{-0{,}2s}$)

7 **c)** Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f, der y-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $y = 1$ und $x = 5$ begrenzt wird.
Einen Teil dieses Flächenstücks nimmt das zu $s = 5$ gehörige Rechteck ein. Bestimmen Sie den prozentualen Anteil des Flächeninhalts dieses Rechtecks am Inhalt des Flächenstücks.

2 Die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $A: x \mapsto \frac{8}{f(x)}$ beschreibt modellhaft die zeitliche Entwicklung des Flächeninhalts eines Algenteppichs am Südufer eines Sees. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Tagen und $A(x)$ der Flächeninhalt in Quadratmetern.

5 **a)** Bestimmen Sie $A(0)$ sowie $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x)$ und geben Sie jeweils die Bedeutung des Ergebnisses im Sachzusammenhang an. Begründen Sie mithilfe des Monotonieverhaltens der Funktion f, dass der Flächeninhalt des Algenteppichs im Laufe der Zeit ständig zunimmt.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **b)** Bestimmen Sie denjenigen Wert x_0, für den $A(x_0) = 4$ gilt, und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

(zur Kontrolle: $x_0 \approx 9{,}7$)

4 **c)** Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts des Algenteppichs zu Beobachtungsbeginn.

2 **d)** Nur zu dem Zeitpunkt, der im Modell durch x_0 (vgl. Aufgabe 2b) beschrieben wird, nimmt die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts des Algenteppichs ihren größten Wert an. Geben Sie eine besondere Eigenschaft des Graphen von A im Punkt $\left(x_0 \mid A(x_0)\right)$ an, die sich daraus folgern lässt, und begründen Sie Ihre Angabe.

3 **e)** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion A unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in der Abbildung 2.

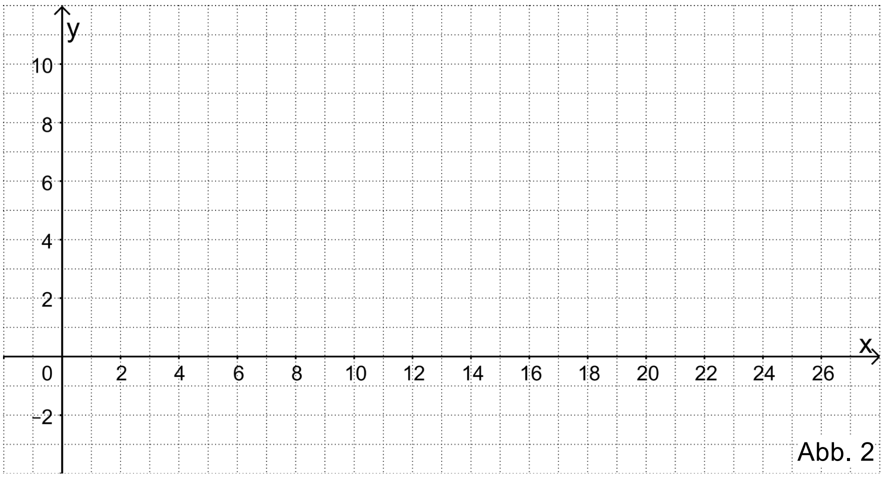


Abb. 2

5 **f)** Um die zeitliche Entwicklung des Flächeninhalts eines Algenteppichs am Nordufer des Sees zu beschreiben, wird im Term $A(x)$ die im Exponenten zur Basis e enthaltene Zahl $-0{,}2$ durch eine kleinere Zahl ersetzt.

Vergleichen Sie den Algenteppich am Nordufer mit dem am Südufer

- hinsichtlich der durch $A(0)$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x)$ beschriebenen Eigenschaften (vgl. Aufgabe 2a).
- hinsichtlich der momentanen Änderungsrate des Flächeninhalts zu Beobachtungsbeginn (vgl. Aufgabe 2c).

Skizzieren Sie – ausgehend von diesem Vergleich – in der Abbildung 2 den Graphen einer Funktion, die eine mögliche zeitliche Entwicklung des Flächeninhalts des Algenteppichs am Nordufer beschreibt.

40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

5 **1** In einer Gemeinde gibt es 6250 Haushalte, von denen 2250 über einen schnellen Internetanschluss verfügen. Zwei Drittel der Haushalte, die über einen schnellen Internetanschluss verfügen, besitzen auch ein Abonnement eines Streamingdiensts. 46 % aller Haushalte verfügen weder über einen schnellen Internetanschluss noch besitzen sie ein Abonnement eines Streamingdiensts.

Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

A: „Ein zufällig ausgewählter Haushalt verfügt über einen schnellen Internetanschluss."

B: „Ein zufällig ausgewählter Haushalt besitzt ein Abonnement eines Streamingdiensts."

Stellen Sie zu der beschriebenen Situation eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel auf und überprüfen Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

2 Ein Telekommunikationsunternehmen möchte neue Kunden gewinnen. Dazu schickt es an zufällig ausgewählte Haushalte Werbematerial. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass die angeschriebenen Haushalte unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 20 % noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügen.

4 **a)** Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 10 angeschriebenen Haushalten

- mindestens zwei noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügen.
- genau acht bereits über einen schnellen Internetanschluss verfügen.

2 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $0{,}2^{10} + (1 - 0{,}2)^{10}$ angegeben wird.

5 **c)** Ermitteln Sie, wie viele Haushalte das Unternehmen mindestens anschreiben müsste, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens ein angeschriebener Haushalt, der noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügt, einen solchen einrichten lassen würde. Gehen Sie dabei davon aus, dass sich jeder hundertste angeschriebene Haushalt, der noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügt, dafür entscheidet, einen solchen einrichten zu lassen.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Die Zufallsgröße Y kann die Werte 0, 1, 2, 3 und 4 annehmen. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y mit $a, b \in [0; 1]$.

k	0	1	2	3	4
$P(Y = k)$	a	b	$\frac{3}{8}$	b	a

2 **a)** Beschreiben Sie, woran man unmittelbar erkennen kann, dass der Erwartungswert von Y gleich 2 ist.

Die Varianz von Y ist gleich $\frac{11}{8}$.

5 **b)** Bestimmen Sie die Werte von a und b.

2 **c)** Die Zufallsgröße Z, die für eine Laplace-Münze die Anzahl des Auftretens von „Zahl“ bei viermaligem Werfen beschreibt, hat ebenfalls den Erwartungswert 2 und es gilt analog $P(Z = 2) = \frac{3}{8}$. Berechnen Sie die Varianz von Z, vergleichen Sie diese mit der Varianz von Y und beschreiben Sie davon ausgehend einen qualitativen Unterschied der Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Z und Y.

25

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

Das Laplace-Gymnasium veranstaltet auf dem Sportplatz ein Fußballturnier für die neuen 5. Klassen.

1 An dem Turnier nehmen neun Mannschaften teil. Die Mannschaften bestehen jeweils aus Jungen und Mädchen, wobei zwei Drittel aller mitspielenden Kinder männlich sind.

3 **a)** Die drei Spielführerinnen und die sechs Spielführer der Fußballmannschaften stellen sich in einer Reihe für ein Foto auf. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für die Aufstellung der neun Kinder, wenn die drei Spielführerinnen nebeneinanderstehen sollen.

5 **b)** Im Rahmen der Begrüßung durch die Schulleiterin werden aus allen Spielerinnen und Spielern zunächst zehn Kinder ausgelost, die je einen Fußball erhalten sollen. Um die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass fünf Mädchen und fünf Jungen einen Ball erhalten, verwendet Max den Ansatz

$$\binom{10}{5} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^5 .$$

Geben Sie an, ob Max dabei vom Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ oder vom Modell „Ziehen ohne Zurücklegen“ ausgeht. Begründen Sie rechnerisch unter Zugrundelegung eines im Sachkontext realistischen Zahlenwerts für die Gesamtzahl der Spielerinnen und Spieler, dass die von Max berechnete Wahrscheinlichkeit nur geringfügig von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit abweicht.

Neben dem Fußballturnier werden für die Schülerinnen und Schüler auch ein Elfmeterschießen und ein Torwandschießen angeboten.

2 Dafür konnten sich die Kinder in zwei Listen eintragen. 45 % der Kinder haben sich sowohl für das Torwandschießen als auch für das Elfmeterschießen eingetragen, 15 % haben sich nur für das Elfmeterschießen eingetragen. 90 % der Kinder, die sich für das Torwandschießen eingetragen haben, haben sich auch für das Elfmeterschießen eingetragen. Aus den Kindern wird eines zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

T: „Das Kind hat sich für das Torwandschießen eingetragen.“
E: „Das Kind hat sich für das Elfmeterschießen eingetragen.“

4 **a)** Untersuchen Sie die Ereignisse T und E auf stochastische Unabhängigkeit.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **b)** Drücken Sie jedes der beiden folgenden Ereignisse unter Verwendung der Mengenschreibweise durch T und E aus.

A: „Das Kind hat sich in keine der Listen eingetragen.“
B: „Das Kind hat sich in genau eine Liste eingetragen.“

Beim Torwandschießen treten zwei Schützen gegeneinander an. Zunächst gibt der eine sechs Schüsse ab, anschließend der andere. Wer dabei mehr Treffer erzielt, hat gewonnen; andernfalls geht das Torwandschießen unentschieden aus.

3 Joe trifft beim Torwandschießen bei jedem Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 %, Hans mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 %.

4 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Joe beim Torwandschießen gegen Hans gewinnt, wenn Hans bei seinen sechs Schüssen genau zwei Treffer erzielt hat. Erläutern Sie anhand einer konkreten Spielsituation, dass das dieser Aufgabe zugrunde gelegte mathematische Modell im Allgemeinen nicht der Realität entspricht.

2 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $\sum_{k=0}^{6}\left(B(6;\,0{,}2;\,k)\cdot B(6;\,0{,}3;\,k)\right)$ angegeben wird.

4 **c)** Lisa erreichte im Training in 90 % aller Fälle bei sechs Schüssen mindestens einen Treffer. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihr erster Schuss im Wettbewerb ein Treffer ist, wenn man davon ausgeht, dass sich ihre Trefferquote im Vergleich zum Training nicht ändert. Legen Sie Ihrer Berechnung als Modell eine geeignete Bernoullikette zugrunde.

25

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Die Abbildung 1 zeigt modellhaft eine Mehrzweckhalle, die auf einer horizontalen Fläche steht und die Form eines geraden Prismas hat.

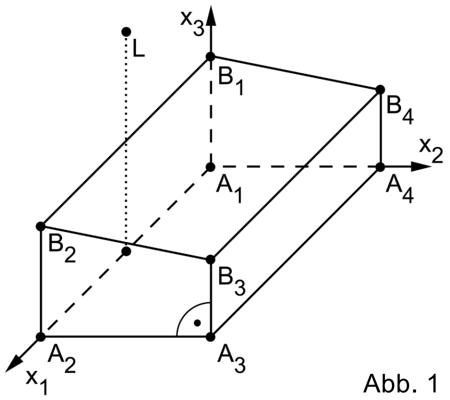


Abb. 1

Die Punkte $A_1(0|0|0)$, $A_2(20|0|0)$, A_3 und $A_4(0|10|0)$ stellen im Modell die Eckpunkte der Grundfläche der Mehrzweckhalle dar, die Punkte B_1, B_2, B_3 und B_4 die Eckpunkte der Dachfläche. Diejenige Seitenwand, die im Modell in der x_1x_3-Ebene liegt, ist 6 m hoch, die ihr gegenüberliegende Wand nur 4 m.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m, d. h. die Mehrzweckhalle ist 20 m lang.

4 **a)** Geben Sie die Koordinaten der Punkte B_2, B_3 und B_4 an und bestätigen Sie, dass diese Punkte in der Ebene $E: x_2 + 5x_3 - 30 = 0$ liegen.

3 **b)** Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels der Dachfläche gegenüber der Horizontalen.

6 **c)** Der Punkt $T(7|10|0)$ liegt auf der Kante $[A_3A_4]$. Untersuchen Sie rechnerisch, ob es Punkte auf der Kante $[B_3B_4]$ gibt, für die gilt: Die Verbindungsstrecken des Punktes zu den Punkten B_1 und T stehen aufeinander senkrecht. Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an.

Der Punkt L, der vertikal über dem Mittelpunkt der Kante $[A_1A_2]$ liegt, veranschaulicht im Modell die Position einer Flutlichtanlage, die 12 m über der Grundfläche angebracht ist. Die als punktförmig angenommene Lichtquelle beleuchtet – mit Ausnahme des Schattenbereichs in der Nähe der Hallenwände – das gesamte Gelände um die Halle.

5 **d)** Die Punkte L, B_2 und B_3 legen eine Ebene F fest. Ermitteln Sie eine Gleichung von F in Normalenform.

(zur Kontrolle: $F: 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 90 = 0$)

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **e)** Die Ebene F schneidet die x_1x_2-Ebene in der Gerade g. Bestimmen Sie eine Gleichung von g.

(zur Kontrolle: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in IR$)

4 **f)** Die Abbildung 2 zeigt den Grundriss des Hallenmodells in der x_1x_2-Ebene. Stellen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Schattenbereich der Flutlichtanlage in der Abbildung exakt dar.

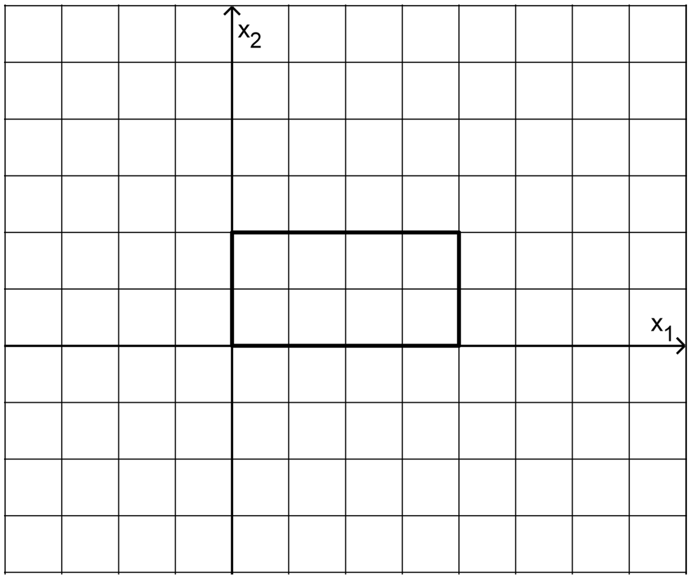


Abb. 2

25

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Ebene $E: 4x_1 - 8x_2 + x_3 + 50 = 0$ und die Gerade $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1 **a)** Erläutern Sie, warum die folgende Rechnung ein Nachweis dafür ist, dass g und E genau einen gemeinsamen Punkt haben:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} = -72 \neq 0$$

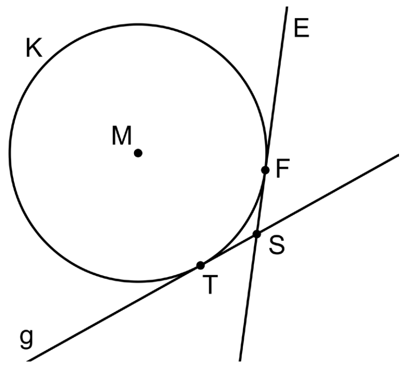
5 **b)** Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels von g und E und zeigen Sie, dass $S(0{,}5 \mid 6{,}5 \mid 0)$ der Schnittpunkt von g und E ist.

6 **c)** Die Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(-13 \mid 20 \mid 0)$ berührt die Ebene E. Bestimmen Sie die Koordinaten des zugehörigen Berührpunkts F sowie den Kugelradius r.

(zur Kontrolle: $F(-5 \mid 4 \mid 2)$, $r = 18$)

5 **d)** Weisen Sie nach, dass die Gerade g die Kugel K im Punkt $T(3 \mid 12 \mid -2)$ berührt.

Die Punkte M, T, S und F (vgl. die Aufgaben b, c und d) liegen in einer Ebene Z. Die nicht maßstabsgetreue Abbildung zeigt die Gerade g, den Schnitt der Ebene E mit der Ebene Z sowie den Schnitt der Kugel K mit der Ebene Z.



4 **e)** Begründen Sie, dass das Viereck MTSF einen Umkreis besitzt.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

4 **f)** Durch Rotation des Vierecks MTSF um die Gerade MS entsteht ein Körper. Beschreiben Sie diesen Körper.

In einer Formelsammlung ist zur Berechnung des Volumens eines solchen Körpers die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot b$ zu finden. Geben Sie für den beschriebenen Körper die Strecken an, deren Längen für a bzw. b einzusetzen sind.

25

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich gegenüber der Freien Universität Berlin, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.
Die vorliegende Arbeit ist frei von Plagiaten. Alle Ausführungen, die wörtlich oder inhaltlich aus anderen Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht.
Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keiner anderen Universität als Prüfungsleistung eingereicht.

Ort, Datum Unterschrift