Ein Atlas der Schulmathematik

für die Sekundarstufe I

Entwicklung einer Lernhilfe zur besseren Vernetzung
der Inhalte des Mathematikunterrichts

Dissertation
zur Erlangung des Grades einer
Doktorin der Naturwissenschaften

am Fachbereich Mathematik und Informatik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Elisabeth Brunner

Berlin 2020

Erstgutachterin: Prof. Dr. Brigitte Lutz-Westphal
Zweitgutachter: Prof. Dr. Jürgen Sander

Tag der Disputation: 30.10.2020

Danksagung

Ohne die Unterstützung und die Inspiration durch zahlreiche Personen und Institutionen wäre die vorliegende Arbeit nicht entstanden. Für die vielfältige Hilfe bin ich von ganzem Herzen dankbar!

Mein Dank gilt zuallererst und insbesondere meiner Doktormutter Prof. Dr. Brigitte Lutz-Westphal. Ihre Neugier und ihre Offenheit haben mich bestärkt, meine Forschungsidee zu entwickeln und in dieser Arbeit umzusetzen. Ihr kritischer Blick und ihre prüfenden Fragen haben mich motiviert, meine Gedanken, Überlegungen und Argumente immer weiter herauszuschälen sowie klar und überzeugend zu Papier zu bringen. Ich danke ihr für ihre zugewandte und unterstützende Begleitung!

Für die Impulse aus der Unterrichtspraxis danke ich meinen Kolleginnen und Kollegen von der Evangelischen Schule Berlin Zentrum, die mir gerade zu Beginn gewinnbringende Austauschpartner*innen waren.

Während dieser langen Phase des wissenschaftlichen Arbeitens war es immer wieder hilfreich, nicht alleine unterwegs zu sein. Ich danke meinen Mitdoktorand*innen und Kolleg*innen aus der Didaktik der Mathematik an der FU Berlin für die produktiven Gespräche, ihre Zeit, ihr Mitdenken und ihr Feedback.

Ich danke meiner Schwester Anna für ihr kritisches Lesen, ihr Korrigieren und ihr Fragenstellen. Ich danke meiner Familie und meinen Freunden für die motivierenden und fokussierenden Gespräche über den langen Prozess, den ein solches Vorhaben mit sich bringt.

Mein besonderer Dank gilt meinem Mann Benedikt, der in Gedanken, Worten und Taten stets seine bedingungslose Unterstützung meines Promotionsprojekts gelebt hat und mir auch auf dieser Reise ein großartiger Partner war.

Berlin, im September 2020 Elisabeth Brunner

Zusammenfassung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* entwickelt – eine Lernhilfe zur besseren Vernetzung der Inhalte des Mathematikunterrichts. Sie liefert damit einen Beitrag mathematikdidaktischer Forschung zur theoriebasierten Entwicklung und Erforschung von Lernmaterial.

Den theoretischen Rahmen bilden zum einen Theorien und Erkenntnisse aus den Neurowissenschaften. Aus ihnen werden Grundannahmen zur Struktur und Funktionsweise des menschlichen Gedächtnisses sowie darauf aufbauend zur Organisation von Wissen herausgearbeitet. Zum anderen werden aus Theorien zum Lernen Konsequenzen für die Struktur von Lernhilfen abgeleitet und diese mit Ergebnissen aus der Forschung zu Gedächtnistechniken über Möglichkeiten für die Steigerung der Gedächtnisleistung verknüpft. Aus der Gesamtschau entstehen Kriterien für eine Lernhilfe, die in ihrem Aufbau und in ihrer Struktur dem Gehirn entsprechend gestaltet ist und das Lernen der mathematischen Inhalte der Sekundarstufe I optimal unterstützt.

Basierend auf diesen Kriterien, wird der *Atlas der Schulmathematik der Sekundarstufe I* in drei Schritten entwickelt: Zu Beginn werden die mathematischen Inhalte der Sekundarstufe I analysiert und in Schlüsselbegriffen formuliert. Im zweiten Schritt werden diese Schlüsselbegriffe miteinander in Beziehung gesetzt und zu Netzen verbunden. Diese Netze werden dann im dritten Schritt visualisiert, indem sie in Welt-, Kontinental-, Länder- und weitere Karten eingebettet werden.

Zudem wird ein Ausblick gegeben auf den Einsatz der entwickelten Lernhilfe im Unterricht. Dabei werden die Adressat*innen vorgestellt, die beiden Optionen der analogen und der digitalen Realisierung abgewogen sowie der Einsatz basierend auf einem Phasenmodell des Unterrichts skizziert.

Abschließend werden Forschungsfragen formuliert, mit deren Hilfe der *Atlas der Schulmathematik der Sekundarstufe I* und sein Einsatz im Unterricht weiter erforscht werden können.

Inhaltsverzeichnis

Tabellen- und Abbildungsverzeichnis

Vorwort

Bricht man in ein Gebiet auf, das noch unbekannt oder unvertraut ist, beispielsweise zu einer Städtetour oder einer Wanderung, zu Fuß, mit dem Fahrrad oder mit dem Auto, dann nutzt man ein Instrument, das bei der Orientierung hilft: Mittels einer Landkarte verschafft man sich einen Überblick über die Struktur und einen Einblick in die Charakteristik dieser „neuen Welt“. Interessante Orte und Sehenswürdigkeiten, die es zu besuchen lohnt, werden recherchiert. Es werden Wege und Verbindungen zwischen einzelnen Punkten betrachtet und abgewogen, vor dem Hintergrund der Art, wie man unterwegs ist, sowie der eigenen Fähigkeiten, Interessen und Ziele. So entsteht ein Plan für die Reise. Dieser kann detailliert und eng geknüpft sein oder auch nur eine grobe Richtung vorgeben und noch viele Freiheitsgrade lassen, abhängig von dem oder der jeweiligen Reisenden. Eine*r bezieht Empfehlungen von Expert*innen mit in seine oder ihre Pläne ein und lässt sich gerne lenken, ein*e andere*r setzt stärker auf das Entdecken während des Reisens selbst.

Ein*e Schüler*in bricht zu Beginn seiner oder ihrer Schulzeit ebenfalls auf zu einer Reise in eine „neue Welt“ — in diesem Fall in die „Welt der Schulmathematik“[1]. Auch hier lassen sich Orte und Sehenswürdigkeiten ausmachen, „Must-sees", wenn man so will, die miteinander in Beziehung stehen, die miteinander in einer gleichsam übergeordneten Struktur verwoben sind. Auch hier gibt es unterschiedliche Verbindungen und Wege, auf denen man reisen kann. Auch hier gibt es verschiedene Arten, unterwegs zu sein, je nach den eigenen Fähigkeiten, Interessen und Zielen. Auch hier kann sich der oder die Reisende Expert*innen suchen, die bei den Planungen helfen oder bei der Reise selbst begleiten oder lenken. Eines jedoch fehlt dem Schüler oder der Schülerin: eine dingliche Orientierungshilfe im Sinne einer Landkarte — eine Landkarte der Schulmathematik, die hilft, diese „neue Welt“ kennenzulernen und zu verstehen.

In dieser Arbeit wird der Mathematikunterricht in den Blick genommen, als der Kontext, in dem die „Welt der Schulmathematik“ hauptsächlich bereist wird. Je nach Grad an Individualisierung gleicht die Reise entweder mehr einer geplanten und geführten Gruppenreise oder aber einer Reise auf eigene Faust und im eigenen Tempo. Je nach Grad an Differenzierung können einzelne Reisende an einem Ort länger oder kürzer verweilen, ihn mehr oder weniger intensiv erkunden. Entscheidend ist: Bislang haben die wenigsten Reisenden eine wirkliche Vorstellung davon, wie genau die „Welt der Schulmathematik“ aussieht und welche Orte zu Zielen der eigenen Reise werden

[1] In der vorliegenden Arbeit wird mit „Welt der (Schul-)Mathematik“ ein metaphorischer Begriff genutzt. Er will bei den Lesenden in dem entsprechenden Kontext bildhafte Assoziationen erzeugen. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass es sich dabei nicht um einen stehenden Begriff oder einen Fachbegriff handelt.

können. Die Reiseziele werden von Expert*innen definiert, und auch die Reihenfolge, in der sie besucht werden, ist in den meisten Fällen festgelegt. Doch vor, während und nach der Reise fehlen oftmals die Zeit und eine anschauliche Möglichkeit, das aktuelle Reiseziel in der großen „Welt der Schulmathematik“ zu verorten und mit bereits bereisten Orten zu verknüpfen.

Das ist misslich, denn: Die Kenntnis der zugrundeliegenden Struktur einer Welt als Ganzes kann in hohem Maße dazu beitragen, das Lernen einzelner Fakten zu erleichtern und so ein tieferes Verständnis dieser Welt zu fördern. Genau darin liegt das Potenzial einer Visualisierung der „Welt der Schulmathematik“.

Aus diesem Grund besteht das Ziel dieser Arbeit in der Verknüpfung aller Orte, die im Rahmen des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I besucht werden, also in der theoretischen und der praktischen Entwicklung und Diskussion einer Landkarte, oder besser: eines *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I*.

1. Einleitung

Lehrpläne, in Berlin und Brandenburg als Rahmenlehrplan bezeichnet, sind „ein grundlegender Wegweiser für das Lernen in der Schule“ (Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie Berlin [SenBJF] & Ministerium für Bildung, Jugend und Sport Land Brandenburg [MBJS] 2020). So ist es auf der Startseite im Portal Rahmenlehrplan-Online Berlin-Brandenburg formuliert. Weiter heißt es dort: „In ihnen wird festgehalten, was Kinder und Jugendliche mit auf den Weg bekommen sollen, um während ihrer Schulzeit und im Anschluss daran handlungsfähig und verantwortungsvoll das eigene Leben gestalten zu können“ (SenBJF & MBJS 2020). Dieser Impuls sei an den Anfang der vorliegenden Arbeit gestellt: Der oder die Lernende soll zum Gestalter oder zur Gestalterin des eigenen Lebens und damit auch des eigenen Lernens werden. Dazu liefern ihm oder ihr die Lehrpläne die wichtigen oder auch entscheidenden Bausteine, die diesen Weg pflastern.

In der Praxis sind es hauptsächlich die Lehrenden, die die Lehrpläne verwenden. Sie planen damit ihren Unterricht, was nach den Ausführungen des Instituts für Didaktik der Mathematik – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung an der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt [IDM-AECC-M] (2007) genau die Idee ist: Die Lehrpläne steuern, „was im Unterricht behandelt werden soll“ (IDM-AECC-M 2007, S. 3), und geben den Lehrenden eine Orientierung darüber, welche Inhalte wann und in welcher Reihenfolge zu behandeln sind (vgl. IDM-AECC-M 2007, S. 3). Lehrpläne dienen als Grundlage, auf der die Fachbereiche das schulinterne Curriculum errichten. Die Lehrenden für das Fach Mathematik in der Sekundarstufe I, stellvertretend für alle Fächer, blicken auf ein intensives Fachstudium zurück. Sie haben ihr eigenes Wissensnetz zu den Themen und Inhalten der Schulmathematik bzw. analog für ihr jeweiliges Fach weiterentwickelt und sich auf höheren Stufen der Wissensbildung bewegt (vgl. Bauer & Hefendehl-Hebeker 2019, S. 1). Sie sind durch ihr fachmathematisches Wissen in der Lage, Inhalte für ihren Unterricht sinnvoll auszuwählen, zu bewerten, zu strukturieren und zu gewichten (vgl. Klein 1908, zitiert nach Bauer & Hefendehl-Hebeker 2019, S. 2).

Wenngleich oft nicht so wahrgenommen, richten sich die Lehrpläne als „grundlegender Wegweiser für das Lernen“ (SenBJF & MBJS 2020) aber auch und vielleicht sogar gerade an die Lernenden. Sie sind es doch, die Handlungsfähigkeit und Verantwortung für die Gestaltung des eigenen Lebens und damit insbesondere auch für die Gestaltung des eigenen Lernens erwerben sollen (vgl. SenBJF & MBJS 2020). Die vorliegende Arbeit will einen Beitrag dazu leisten, dass Kinder und Jugendliche im Rahmen des Schulunterrichts mehr Freiheit und damit auch Verantwortung für das eigene Lernen übernehmen können.

1.1. Hinführung

Diese Arbeit entsteht im Rahmen mathematikdidaktischer Forschung. Daher wird das oben genannte individuelle Lernen im Mathematikunterricht in den Blick genommen. In den Lehrplänen für Mathematik finden sich in den einleitenden Passagen die folgenden Ziele für Unterricht. Sie bilden die Grundlage für die Entwicklung der Forschungsfrage und des Forschungszieles der Arbeit.

Auf Basis der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss – einem Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003 – hat jedes Bundesland seinen eigenen Lehrplan für Mathematik entwickelt.[2] In ihrem Beschluss hat sich die Kultusministerkonferenz zudem auf einige gemeinsame Punkte als Grundlage für alle Bundesländer geeinigt: „Die Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss werden als abschlussbezogene Regelstandards definiert. Sie […] beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen einschließlich zugrunde liegender Wissensbestände, die Schülerinnen und Schüler bis zu einem bestimmten Zeitpunkt ihres Bildungsganges erreicht haben sollen, zielen auf systematisches und vernetztes Lernen und folgen so dem Prinzip des kumulativen Kompetenzerwerbs […]“ (KMK 2004, S. 3). Alle Bundesländer haben zugestimmt, die Standards in den jeweiligen Lehrplan einzuarbeiten und sie umzusetzen (vgl. KMK 2004, S. 4).

In Teil C für Mathematik des Rahmenlehrplans Berlin und Brandenburg für die Jahrgangsstufen 1 bis 10 werden unter 1.1 die Ziele des Unterrichts formuliert. Auch hier taucht der eben genannte Punkt des systematischen und vernetzten Lernens auf. So soll der Mathematikunterricht „die Schülerinnen und Schüler, ausgehend von ihren mathematischen Vorerfahrungen, [befähigen] Zusammenhänge zu erkunden, Strukturen zu untersuchen, Beziehungen zwischen Begriffen aufzudecken, Vorgehensweisen und Darstellungsformen zu finden und begründet auszuwählen“ (SenBJF & MBJS 2020, S.3). Erfolgreiches mathematisches Lernen wird beschrieben als „Ausbildung eines Netzes, das sich durch Erweiterung von bewährten und durch Zugewinn von neuen Vorstellungen zu einem immer leistungsfähigeren System subjektiver Erfahrungsbereiche, Handlungsvorstellungen und Erklärungsmodelle entwickelt“ (SenBJF & MBJS 2020, S. 3).

Die Kultusministerkonferenz formuliert das etwas allgemeiner und benennt in ihren Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss noch konkreter als eingangs zitiert

---

[2] Aufgrund der föderalen Struktur Deutschlands existieren für diese Pläne unterschiedliche Namen: „Bildungsplan“ in Baden-Württemberg, Hamburg, Saarland; „Rahmenplan“ in Mecklenburg-Vorpommern; „Rahmenlehrplan“ in Berlin, Brandenburg; „Lehrplan“ in Bayern, Bremen, Hessen, Nordrhein-Westfalen, Rheinland-Pfalz, Sachsen, Sachsen-Anhalt, Schleswig-Holstein, Thüringen; sowie „Curriculare Vorgaben“ in Niedersachsen.

das Ziel, dass „bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten sachgebietsübergreifendes, vernetzendes Denken und Verständnis grundlegender mathematischer Begriffe erreicht werden sollen“ (KMK 2004, S. 6).

Weiterhin geht es um Folgendes: Schülerinnen und Schüler sollen „Mathematik mit ihrer fachspezifischen Sprache, ihren Symbolen, Bildern, Darstellungen und Formeln als ein eigenes, geordnetes Konzept [erkennen]“ (SenBJF & MBJS 2020, S. 3). Dieser Gedanke findet sich auch im bayerischen LehrplanPlus für Mathematik an Gymnasien. Hier wird Winter (1995) mit der Formulierung dreier Grunderfahrungen zitiert, die im Rahmen des Mathematikunterrichts ermöglicht werden sollen (vgl. Winter 1995, S. 37). Die zweite dieser Grunderfahrungen ist, „mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen“ (Winter 1995, S. 37).

In diesen einleitenden Worten werden zwei Aspekte deutlich: Zum einen sollen die Lernenden die mathematischen Themen und Inhalte zu einem Wissensnetz zusammenfügen, indem sie Neues mit bereits Bekanntem verknüpfen und inhaltliche Verbindungen erkennen und aufbauen. Zum anderen sollen die Lernenden einen Einblick in die oder einen Eindruck von der „Welt der Mathematik“ bekommen, um die es im Rahmen der Sekundarstufe I geht.

Vollrath und Roth (2012) betrachten zu Beginn ihres Buches über die Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe die Mathematik als Unterrichtsfach. Bei ihnen finden sich ebenfalls die beiden gerade genannten Aspekte: Vollrath und Roth (2012) betrachten zum einen die Rolle des Gedächtnisses für die Verfügbarkeit des gelernten Wissens (vgl. Vollrath & Roth 2012, S 55). Sie unterstreichen, dass neue Inhalte besser behalten werden, wenn sie „sinnstiftende Verbindungen mit bereits erworbenem Wissen“ (Vollrath & Roth 2012, S. 56) eingehen. Für ein besseres Verstehen geht es darum, Beziehungen zwischen den Elementen des Wissens zu erkennen (vgl. Vollrath & Roth 2012, S. 57). Neue Sachverhalte sollen in erworbenes Wissen eingeordnet werden (vgl. Vollrath & Roth 2012, S. 57). Sie fordern zum anderen, dass die Lernenden im Unterricht eine adäquate Vorstellung von Mathematik bekommen sollen (vgl. Vollrath & Roth 2012, S. 24). Dabei geht es bei mathematischem Wissen um „Begriffe, ihre Eigenschaften, Beziehungen zwischen Eigenschaften und um Beziehungen zwischen Begriffen“ (Vollrath & Roth 2012, S. 25). Hier wird der Aspekt der Mathematik als „Beziehungsgefüge“ (Vollrath & Roth 2012, S. 26) betont.

1.2. Forschungsfragen und Forschungsziel

Die vorliegende Arbeit setzt an dieser Stelle an. Sie geht von der praktischen Erfahrung aus, dass im Unterricht zumeist der Fokus auf dem aktuell zu behandelnden Thema, d.h. den momentan zu erlernenden Inhalten und zu entwickelnden Kompetenzen liegt. Die verfügbare Zeit lässt dabei kaum Spielraum, den einzelnen Inhalt in der Gesamtheit der „Welt der Schulmathematik“ zu verorten. Zwar findet ein gewisses Maß an Vernetzung statt, wenn zur Erarbeitung von Neuem bei bereits Bekanntem angeknüpft wird. In der Regel jedoch fehlt der Blick auf das große Ganze, das Wissensnetz der mathematischen Inhalte der Sekundarstufe I.

Diese Erfahrungen aus der Praxis führen zu den folgenden Überlegungen: Wäre es angesichts dieses Mangels nicht nützlich, ein Instrument, ein Unterrichtsmaterial, eine Lernhilfe zur Verfügung zu haben, mit dem bzw. der die Lernenden selbstständig ein Bild von der gerade genannten „Welt der Schulmathematik“ entwickeln können? Ein Bild, das, wie Vollrath und Roth (2012) fordern, die Mathematik als „Beziehungsgefüge“ deutlich werden lässt (Vollrath & Roth 2012, S. 26)? Ein Bild, in dem sich der oder die Lernende mit dem jeweils aktuellen Inhalt verorten, bereits erkundete Inhalte erkennt und neugierig werden kann auf weitere Themen, die es noch zu erschließen gilt – ein Bild, das die Lernenden beim Aufbau des Wissensnetzes, bestehend aus allen mathematischen Inhalten der Sekundarstufe I, inspiriert und begleitet?

Ein Forschungsfeld innerhalb der Mathematikdidaktik ist die theoriebasierte Entwicklung und Erforschung von Lernmaterial. Dazu leistet diese Arbeit einen Beitrag. Das Ziel ist es, ein Instrument zu schaffen, das alle Inhalte der Mathematik der Sekundarstufe I umfasst und sie in einer Struktur visualisiert, die die fachlogischen Verbindungen zwischen ihnen aufgreift und darstellt. Dieses Ziel speist sich aus der Motivation, eine Lernhilfe für Schüler*innen zu entwickeln, die sie im Unterrichtsalltag auf ihrem gesamten Weg durch die Schulmathematik der Sekundarstufe I begleitet und ihnen zum einen Orientierung gibt und zum anderen über die Vernetzung der Inhalte ein tieferes Verständnis ermöglicht und fördert. Ein solches Material für die Hand der Lernenden, das alle Inhalte umfasst und diese miteinander in Beziehung setzt, existiert bislang noch nicht und wird in den kommenden Kapiteln erarbeitet. Dabei sind die folgenden beiden Forschungsfragen handlungsleitend:

1. Wie lassen sich die Inhalte der Mathematik der Sekundarstufe I so in einem Netz darstellen, dass
    a. die gezogenen Verbindungen mathematisch korrekt sind und
    b. durch sie die existierende mathematische Struktur deutlich wird?

2. Wie kann diese Struktur in einer Lernhilfe visualisiert werden, die auf die Funktionsweise des Gehirns abgestimmt ist und in ihrem Aufbau das Lernen, Speichern und Erinnern mathematischer Inhalte möglichst gut unterstützt?

1.3. Aufbau der Arbeit

Die Didaktik der Mathematik als Wissenschaftsdisziplin, die sich mit dem Lehren und Lernen von Mathematik beschäftigt, hat eine besondere Charakteristik: Sie ist auf der einen Seite eng verbunden mit der Mathematik als Fachwissenschaft; auf der anderen Seite steht sie in fruchtbarer Beziehung zu den Geistes- und Sozialwissenschaften, wie der psychologischen Forschung, der Pädagogik, der Soziologie und der Philosophie (vgl. Reiss & Hammer 2013, S. V). Vollrath und Roth (2012) charakterisieren die Didaktik der Mathematik in folgender Weise: „Für die Mathematikdidaktik ist das Lehren und Lernen von Mathematik das zentrale Forschungsanliegen. Dabei liefern Mathematik, Pädagogik und Psychologie Argumente, mit denen sich didaktische Theorien stützen lassen. Mathematikdidaktik gründet sich aber auf Unterrichtserfahrung, die theoretisch reflektiert wird, und auf Ergebnisse empirisch didaktischer Forschung“ (Vollrath & Roth 2012, S. X). Diese besondere Position der Mathematikdidaktik wird hier genutzt.

Die weiteren Kapitel dieser Arbeit gliedern sich wie folgt:

In Kapitel 2, der theoretischen Einbettung, wird die zweite Forschungsfrage in den Fokus genommen. Ihre Beantwortung bildet den Rahmen für die Beantwortung der ersten Forschungsfrage. Daher werden die beiden Forschungsfragen in umgekehrter Reihenfolge bearbeitet. Im genannten Kapitel werden Erkenntnisse aus den Neurowissenschaften und der Lernpsychologie verwendet. Herausgearbeitet wird hier, worin das Potenzial der Forschungsidee liegt: Aufbauend auf Überlegungen zum menschlichen Gehirn als dem zentralen Organ des Lernens, wird die Bedeutung von der Kenntnis der Struktur des zu Lernenden für das Lernen herausgearbeitet. Daran anknüpfend, geht es im zweiten Schritt darum, wie eine entsprechende Struktur für diese Lerninhalte aufzubauen ist. Aus den Erkenntnissen werden dann in einem dritten Schritt Kriterien abgeleitet, die eine konkrete Antwort auf die zweite Forschungsfrage liefern und bei der praktischen Umsetzung zum Einsatz kommen.

In Kapitel 3, der praktischen Umsetzung, wird eine Antwort auf die erste Forschungsfrage entwickelt. Hierbei kommt die Fachwissenschaft zum Tragen. Es werden zunächst alle relevanten Inhalte der Schulmathematik der Sekundarstufe I gesammelt und anschließend die sachlogischen Beziehungen, die zwischen ihnen bestehen, analysiert. Darauf aufbauend, werden Verbindungen zwischen den einzelnen Inhalten hergestellt und diese dann weiter in Netzen zusammengeführt.

In Kapitel 4 wird der Einsatz der so erstellten Lernhilfe im Unterricht skizziert. Dabei werden die verschiedenen Adressat*innen in den Blick genommen. Zudem werden mögliche Formen der Ausgestaltung vorgeschlagen.

In Kapitel 5 werden zunächst die unternommenen Schritte resümiert. Anschließend werden weiterführende Forschungsfragen zur entwickelten Lernhilfe und zu deren Einsatz im Unterricht formuliert.

2. Theoretische Einbettung

Die Idee der Arbeit spiegelt sich in einem Zitat von Manfred Spitzer (2014): Er führt in seinem Buch „Lernen“ das Gehirn ein als das „Organ, das jeder benutzt, wenn er lernt“ (Spitzer 2014, S. 19). Er formuliert weiter: „[Was] der Magen für die Verdauung, die Beine für die Bewegung oder die Augen für das Sehen sind, ist das Gehirn für das Lernen“ (Spitzer 2014, S. XIII). Denkt man diese Aussagen weiter, so ergibt sich die folgende Überlegung: Wenn Speisen für den Magen oder Schuhe für die Beine so aufbereitet werden sollten, dass die Verdauung oder die Bewegung möglichst optimal ablaufen kann, dann sollte auch das zu Lernende so aufbereitet werden, dass das Gehirn optimal lernen kann. Das Ziel für die zu entwickelnde Lernhilfe ist daher, dass sie in ihrer inhaltlichen und formalen Struktur so gestaltet wird, dass sie möglichst gut zur Funktionsweise des Gehirns passt.

Von dieser Grundüberlegung ausgehend, wird das theoretische Fundament der vorliegenden Arbeit in drei Schritten zusammengesetzt:

In Schritt eins werden Erkenntnisse aus den Neurowissenschaften zugrundegelegt, um das Gehirn, seine relevanten Strukturen und seine Funktionsweise bei der Aufnahme und Speicherung neuer Informationen zu verstehen. Die Grundlage hierfür bilden Theorien und Modelle aus der psychologischen Forschung zum menschlichen Gedächtnis. An diese anknüpfend, werden vier Beiträge aus den Neurowissenschaften aufgenommen, die Metaphern für das menschliche Gehirn liefern. Ziel der Ausführungen ist es, eine Vorstellung davon zu entwickeln, wie Wissen im menschlichen Gehirn organisiert ist, und was beim Lernen neuer Wissensinhalte auf neuronaler Ebene geschieht.

In Schritt zwei werden die Grundlagen einer Aufbereitung von Lernstoff behandelt, die bei der in Schritt eins dargestellten Struktur und Funktionsweise des menschlichen Gehirns ansetzt und möglichst gut auf sie zugeschnitten ist. Dazu werden Erkenntnisse u.a. aus der Lernpsychologie herangezogen und auf Konsequenzen für die Organisation des zu Lernenden untersucht. Im Fokus steht die Entwicklung konkreter Lernhilfen. Ergänzend werden Strategien analysiert, die die Gedächtnisleistung steigern. Hier geht es um die Aufbereitung des zu Lernenden im oben beschriebenen Sinne.

In Schritt drei schließlich werden die in den ersten beiden Schritten erörterten Perspektiven zusammengeführt. Darauf aufbauend, werden die Forschungsideen der vorliegenden Arbeit formuliert und Kriterien aufgestellt, die bei der Entwicklung des *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* handlungsleitend sind.

2.1. Neurowissenschaftlicher Rahmen

Die Arbeit nutzt Erkenntnisse aus der psychologischen Forschung und den Neurowissenschaften zur Funktionsweise des Gehirns und zum Prozess des Lernens. Leitend ist dabei zunächst die Frage, wie das menschliche Gehirn die Wissensinhalte, die im Rahmen des Mathematikunterrichts gelernt werden, verarbeitet und speichert. Daran anknüpfend wird die Frage untersucht, wie bedeutsam es für das Lernen ist, wenn die Struktur des zu Lernenden bekannt und verfügbar ist.

2.1.1. Grundannahmen zur Struktur und Funktionsweise des menschlichen Gedächtnisses

Zu Beginn dieses Abschnitts geht es um eine Schärfung der Begrifflichkeit. Es gilt, die beiden Begriffe „Gehirn“ und „Gedächtnis“ für die vorliegende Arbeit zu definieren und zu differenzieren. Es folgen Modelle zur Struktur und zur Funktionsweise des menschlichen Gedächtnisses und dazu ein Einblick in den aktuellen Stand der Forschung.

2.1.1.1. Definitorisches

Hoffmann und Engelkamp (2013) folgend, ist „das Organ des Gedächtnisses […] das Gehirn. Im Gehirn kann nur das gespeichert werden, was im Gehirn stattfindet. Das bedeutet, es wird nicht das, was außerhalb von uns geschieht, im Gehirn gespeichert, sondern das, was die äußeren Reize in unserem Gehirn anregen“ (Hoffmann & Engelkamp 2013, S. 5). Die Autoren definieren in ihrem Lehrbuch der Lern- und Gedächtnispsychologie das Gedächtnis als „Fähigkeit, Informationen zu bewahren und nach einer Behaltensphase korrekt wiederzugeben“ (Hoffmann & Engelkamp 2013, S. 2).

Gerrig und Zimbardo (2008) beschreiben in ihrem Lehrwerk das Gedächtnis in ähnlicher Weise als „die Fähigkeit, Informationen zu speichern und abzurufen“ (Gerrig & Zimbardo 2008, S. 232). Sie blicken auf das Gedächtnis als eine „Form der Informationsverarbeitung“ (Gerrig & Zimbardo 2008, S. 232). Die Autoren betonen damit den dynamischen und prozesshaften Charakter des Gedächtnisses.

Gruber (2018) verknüpft in seinem Lehrwerk über das Gedächtnis die bereits genannten Definitionen, wenn er schreibt, dass man unter Gedächtnis „Prozesse und Systeme [versteht], die für die Einspeicherung, die Aufbewahrung, den Abruf und die Anwendung von Informationen zuständig sind, sobald die ursprüngliche Quelle der Information nicht mehr verfügbar ist“ (Gruber 2018, S. 2).

Ziel ist es in den beiden folgenden Unterabschnitten, die wichtigsten Aspekte zur Funktionsweise des Gehirns bei der Aufnahme, der Speicherung und dem Abruf all jener Informationen zusammenzustellen, die im Rahmen des Mathematikunterrichts bedeutsam sind. Um das menschliche Gedächtnis möglichst differenziert und umfassend zu begreifen, werden die Gedächtnisprozesse und die Gedächtnissysteme getrennt dargestellt.

Im Folgenden werden zunächst die Gedächtnisprozesse näher beleuchtet. Untersucht werden die Phasen, in denen eine Information verarbeitet wird. Je nach Phase ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, durch die Strukturierung einer neuen Information deren Verarbeitung zu fördern, was in den Unterkapiteln 2.2. und 2.3. weiter ausgeführt wird.

2.1.1.2. Gedächtnisprozesse

Wenn Inhalte zu einem späteren Zeitpunkt verfügbar sein sollen, sind die folgenden drei Prozesse entscheidend: Enkodierung, Speicherung und Abruf (vgl. Gerrig & Zimbardo 2008, S. 235). Sie laufen nicht unabhängig voneinander ab, sondern greifen in komplexer Weise ineinander (vgl. Gerrig & Zimbardo 2008, S. 236).

Der erste Prozess ist die Enkodierung. Er umfasst die Aufnahme einer Information aus der Umwelt über die Sinnesorgane. Gleich einem Codierungs- oder Verschlüsselungsvorgang, wird diese Information dann in eine „mentale Repräsentation“ im Sinne eines geistigen Vorstellungsbildes überführt (Gerrig & Zimbardo 2008, S. 235). Dabei bleiben die wichtigsten Merkmale bzw. Bestandteile der ursprünglichen Information erhalten (vgl. Gerrig & Zimbardo 2008, S. 235). Wie Gruber formuliert, beschreibt die Enkodierung „den initialen Schritt beim Aufbau einer neuen Gedächtnisspur“ (Gruber 2018, S. 69). Der zweite Teil der Enkodierung besteht darin, dass die mentale Repräsentation in eine überdauernde Gedächtnisspur übersetzt und mit bereits vorhandenen Einträgen im Langzeitgedächtnis verknüpft wird (vgl. Gruber 2018, S. 70).

Während des zweiten Prozesses, der Speicherung, werden die Informationen über einen gewissen Zeitraum hinweg in bestimmten Gehirnstrukturen aufbewahrt (vgl. Gerrig & Zimbardo 2008, S. 235). Auf neuronaler Ebene spricht man hier von der Retention, d.h. dass die Gedächtniseinträge aufrechterhalten werden, und von der Konsolidierung, d.h. dass die Gedächtnisspur gefestigt wird (vgl. Gruber 2018, S. 70).

Der dritte Prozess, der Abruf, stellt schließlich den Zugriff auf die gespeicherten Informationen dar (vgl. Gerrig & Zimbardo 2008, S. 235). Metzig und Schuster (2016) betonen, dass es beim Lernen gleichermaßen darauf ankommt, eine Information im

Gedächtnis abzulegen, wie sie bei Bedarf wiederzufinden (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 13).

Gruber (2018) bezeichnet seinen Ansatz als prozeduralistisch, da er sich auf die Prozesse konzentriert, die innerhalb des Gedächtnisses ablaufen (vgl. Gruber 2018, S. 5). Jeder der dargestellten Prozesse hat seine Funktion bei der Verarbeitung neuer Informationen und bietet damit Möglichkeiten, um anzusetzen, wenn man diese Informationsverarbeitung optimieren möchte.

Im folgenden Unterabschnitt geht es nun um eine strukturelle Betrachtungsweise des Gedächtnisses (vgl. Gruber 2018, S. 4). Aus diesem Blickwinkel werden die Strukturen im Gedächtnis, die Gedächtnissysteme, beschrieben. Die zugrundeliegende Überlegung ist hierbei: Wenn man die Strukturen des Gedächtnisses kennt und das zu Lernende in entsprechender Weise strukturiert, dann gelingt das Lernen dadurch leichter und besser.

2.1.1.3. Gedächtnissysteme

Der Informationsfluss zum und vom Langzeitgedächtnis wird im Rahmen der sogenannten Mehrspeichermodelle beschrieben (vgl. Gerrig & Zimbardo 2008, S. 236). In diesen Modellen wird das Gedächtnis in drei Bereiche unterteilt und damit eine Struktur geliefert, in der die gerade beschriebenen Prozesse ablaufen: das sensorische Gedächtnis, das Arbeitsgedächtnis mit dem Kurzzeitgedächtnis sowie das Langzeitgedächtnis (vgl. Gerrig & Zimbardo 2008, S. 236).

Den Ausgangspunkt dafür lieferten vor über 50 Jahren Atkinson und Shiffrin (1968). Sie haben als erste die Aufteilung des Gedächtnisses in mehrere getrennte Systeme in einem Modell, ihrem Mehrspeichermodell, formuliert und damit unterschiedliche theoretische Ansätze sowie das Wissen damaliger Autoren zusammengefasst (vgl. Gruber 2018, S. 4). Mit ihrem Modell haben die Autoren einen Grundstein gelegt für die Gedächtnisforschung bis heute. Gleichwohl sind die Theorien zu den Gedächtnissystemen mittlerweile weiter ausdifferenziert und komplexer geworden (vgl. Gruber 2018, S. 5). Es folgt eine Darstellung der einzelnen Komponenten nach aktuellem Erkenntnisstand.

Das Enkodieren von Informationen findet im sensorischen Gedächtnis und im Arbeitsgedächtnis statt. Nach der Wahrnehmung eines Reizes durch die Sinne steht mit dem sensorischen Gedächtnis ein System bereit, das diese Sinneseindrücke verarbeitet. Zwar kann dabei eine große Menge an Informationen je nach aufnehmender Sinnesfunktion gespeichert werden, aber nur für sehr kurze Zeit (vgl. Neisser 1967, zitiert nach Gerrig & Zimbardo 2008, S. 237). Die meisten Informationen bleiben präattentiv, d.h. es werden nicht alle gespeicherten Informationen ins Bewusstsein gehoben (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 8). Nur die für den Moment wichtigen Informationen werden ausgewählt und an das Kurzzeitgedächtnis weitergegeben.

Die moderierende Variable hierbei ist die Aufmerksamkeit. Informationen ohne Aufmerksamkeit gehen verloren (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 8). Metzig und Schuster (2016) verweisen auf Ergebnisse von Lorayne und Lucas (2000), die zeigen, dass ein Hauptziel von Gedächtnisstrategien ist, die Aufmerksamkeit auf eine zu lernende Information zu lenken (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 8). So gelingt ihre Weitergabe an das Kurzzeitgedächtnis und steigt die Wahrscheinlichkeit für die Aufnahme ins Langzeitgedächtnis (vgl. Gruber 2018, S. 18).

Im Unterschied zum sensorischen Speicher hat das Kurzzeitgedächtnis eher eine geringe Kapazität mit 7 plus/minus 2 Elementen (vgl. Gruber 2018, S. 28). Dabei entspricht ein Element einem Sachverhalt, der zusammengefasst werden kann. Diese Speichereinheit wird als Chunk bezeichnet (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 11). Metzig und Schuster (2016) weisen darauf hin, dass die Anzahl der für eine Information benötigten Kurzzeitspeicherplätze vom vorhandenen Wissen im Langzeitspeicher abhängt (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 11). Anders gesagt: Je mehr man schon über ein Thema weiß, umso besser funktioniert das Chunking, d.h. umso kompakter wird die neue Information im Kurzzeitgedächtnis gebündelt. Insgesamt geht es dabei nur um sehr überschaubare Zeitabschnitte: In idealisierten Situationen kann der Kurzzeitspeicher Informationen für etwa 20 Sekunden speichern (vgl. Gruber 2018, S. 28).

Das Kurzzeitgedächtnis und das Langzeitgedächtnis sind zwei unterschiedliche Gedächtnissysteme. Anders als in dem ursprünglichen Mehrspeichermodell von Atkinson und Shiffrin (1968) angenommen, deuten einige neuere Forschungsergebnisse darauf hin, dass eine Information aus dem sensorischen Speicher nicht zwingend durch den Kurzzeitspeicher in den Langzeitspeicher wandern muss, sondern auch direkt dorthin kommen kann (vgl. Gruber 2018, S. 20). Andere Theorien fassen das Kurzzeitgedächtnis als ein Arbeitsgedächtnis auf, zu nennen sind hier das Arbeitsgedächtnismodell von Baddeley und Hitch (1974) und das Arbeitsgedächtnismodell von Cowan (1997) (vgl. Gruber 2018, S. 28). Aus ihrer Perspektive wiederum stellt das Kurzzeitgedächtnis eine „notwendige Zwischenstation zum Langzeitgedächtnis“ (Gruber 2018, S. 28) dar, die wie ein Puffer durch Wiederholung eine Information aufrechterhält, bis diese ins Langzeitgedächtnis überführt wurde (vgl. Gruber 2018, S. 28). Die genannten Autoren differenzieren das Arbeitsgedächtnis noch weiter in Untereinheiten, die bei der Informationsverarbeitung und Speicherung beteiligt sind, und denen jeweils spezielle Funktionen in diesem Prozess zukommen (vgl.

Gruber 2018, S. 29 ff.). Allerdings ist das für diese Arbeit nicht relevant und wird daher hier nicht weiter ausgeführt.

Gruber (2018) bezeichnet das Langzeitgedächtnis als „permanenten Wissensspeicher“ (Gruber 2018, S. 39). Mittlerweile deuten die Forschungsergebnisse darauf hin, dass dieses Gedächtnissystem eine nahezu unbegrenzte Kapazität hat (vgl. Gruber 2018, S. 39). Auch das Langzeitgedächtnis lässt sich noch weiter in Subsysteme unterteilen, die für unterschiedliche Arten von Informationen zuständig sind, aber miteinander interagieren können (vgl. Gruber 2018, S. 40). So wird zwischen dem deklarativen und dem non-deklarativen Gedächtnis unterschieden. Der Begriff lässt sich vom lateinischen „declarare" ableiten, was „erklären“ und „verkünden“ bedeutet. In diesen beiden Gedächtnissystemen werden die Inhalte danach differenziert, ob sie erklärbar bzw. bewusstseinsfähig sind oder nicht (vgl. Gruber 2018, S. 40). In der vorliegenden Arbeit geht es um die Inhalte der Schulmathematik. Sie lassen sich explizit benennen und sind damit deklarative Inhalte. Daher konzentrieren sich die weiteren Ausführungen auf dieses Subsystem.

Im deklarativen Gedächtnis lassen sich wiederum zwei Subsysteme unterscheiden: das prozedurale und das semantische Gedächtnis. Diese Unterscheidung geht auf Tulving (1972) zurück, der als erster zwischen episodischen und semantischen Formen des deklarativen Wissens unterschied (vgl. Tulving 1972, zitiert nach Gerrig & Zimbardo 2008, S. 245). Dabei handelt es sich bei den episodischen Gedächtnis-inhalten um diejenigen, die persönlich erlebt wurden. Sie werden im prozeduralen Gedächtnis gespeichert. Die semantischen Gedächtnisinhalte sind „generische kategoriale Gedächtnisinhalte wie beispielsweise die Bedeutung von Wörtern und Konzepten“ (Gerrig & Zimbardo 2008, S. 245) und werden dementsprechend im semantischen Gedächtnis gespeichert. Gruber (2018) spricht hier von Faktenwissen oder von Wissen über die Welt (vgl. Gruber 2018, S. 39).

Damit sind nun genau jenes Wissen und jene Gedächtnisstruktur beschrieben, die für die vorliegende Arbeit relevant sind. Im Folgenden wird der Fokus nun noch enger innerhalb des deklarativen auf das semantische Gedächtnis gerichtet.

2.1.2. Grundannahmen zur Organisation von Wissen: Der Netzwerkgedanke

In diesem Abschnitt geht es um die Frage, wie die „großen Bestände organisierten Wissens“ (Gerrig & Zimbardo 2008, S. 258) im Langzeitgedächtnis strukturiert sind. Dabei liegt, wie eben begründet, die Aufmerksamkeit auf dem semantischen Gedächtnis. Betrachtet werden nun das Wissen bzw. die Gedächtnisinhalte und ihre

Organisation, oder anders ausgedrückt: wie Wissen über bestimmte Gegebenheiten bzw. Objekte kognitiv, also im Gehirn repräsentiert ist (vgl. Gruber 2018, S. 44).

Gruber (2018) schreibt dazu: „Wissen ist in Kategorien repräsentiert“; und er definiert Kategorien als „eine Klasse von Objekten, die aufgrund von Gemeinsamkeiten“ bestimmt sind (Gruber 2018, S. 44). Gerrig und Zimbardo (2008) formulieren das etwas weiter gefasst: „Eine Grundfunktion von Gedächtnis ist es, ähnliche Erfahrungen [bzw. Inhalte oder Informationen] zusammenzufassen, um Muster in der Interaktion mit der Umwelt aufzudecken“ (Gerrig & Zimbardo 2008, S. 258). Die Autoren verweisen auf Murphy (2002), wenn sie schreiben, dass es eine der grundlegendsten Fähigkeiten denkender Organismen sei, Einzelerfahrungen — bzw. Inhalte oder Informationen — Kategorien zuzuordnen (vgl. Murphy 2002, zitiert nach Gerrig & Zimbardo 2008, S. 258).

Nun ist zu fragen, wodurch sich eine bestimmte Kategorie auszeichnet, und wie Kategorisierung stattfindet. Dazu liefert Gruber die beiden, wie er schreibt, „prominentesten Ansätze“: die Prototyptheorie und die Exemplartheorie (Gruber 2018, S. 44).

Die Prototyptheorie geht davon aus, dass zu jeder Kategorie durch „Mittelungen [sic] über spezifische Lernexemplare […], die die spezifischen charakteristischen Merkmale enthalten“, ein Prototyp gebildet wird (Gruber 2018, S. 44). Neue und unbekannte Objekte werden mit diesem durchschnittlichen Angehörigen einer Kategorie oder dieser Standardrepräsentation verglichen und entsprechend kategorisiert (vgl. Gruber 2018, S. 44).

Die Exemplartheorie hingegen geht davon aus, dass im Gedächtnis die Erinnerung an die verschiedenen Exemplare einer Kategorie gespeichert wird, die bereits bekannt sind. Ein neues Objekt wird mit denjenigen verglichen, die ihm am ähnlichsten und demgemäß derselben Kategorie zugeordnet sind (vgl. Gruber 2018, S. 45).

Gruber folgend, existieren Belege für beide Theorien. Der Erklärungswert scheint mit der Größe der Kategorie zusammenzuhängen: Je kleiner die Kategorie ist, umso stärker greift die Exemplartheorie (vgl. Gruber 2018, S. 49). Wenn man eine Differenzierung nach der Art des neuen und zu kategorisierenden Inhalts vornehmen will, deuten Forschungsergebnisse darauf hin, dass die Inhalte des semantischen Gedächtnisses eher der Prototyptheorie entsprechen, während die Inhalte des episodischen Gedächtnisses eher der Exemplartheorie folgen (vgl. Gruber 2018, S. 49).

Deutlich wird hier jedenfalls, dass die Inhalte des semantischen Gedächtnisses, die inhaltlich miteinander verbunden sind, auch gemeinsam gespeichert werden. Das führt zu der folgenden Überlegung: Wenn man Informationen mit bzw. in einer Struktur – z.B. einer Lernhilfe – präsentiert, in der sie gemeinsam auftauchen, dann unterstützt das eine entsprechend verknüpfte Speicherung dieser Informationen mit den zugehörigen anderen Informationen im Langzeitgedächtnis. Gerrig und Zimbardo (2008) formulieren das so: „Es gehört zur Alltagserfahrung im Umgang mit der Welt, dass [man] […] mentale Strukturen erworben [hat] […], die Strukturen in der Umwelt repräsentieren“ (Gerrig & Zimbardo 2008, S. 258).

Im Folgenden geht es nun darum, die für diese Arbeit maßgeblichen mentalen Strukturen oder Repräsentationen im Gehirn noch genauer zu betrachten.

2.1.2.1. Semantische Netzwerke

Dafür wird zunächst der Begriff des „Konzeptes“ eingeführt (Gerrig & Zimbardo 2008, S. 258): Gerrig und Zimbardo (2008) definieren Konzepte als „die mentalen Repräsentationen für Kategorien (Gerrig & Zimbardo 2008, S. 258). Ein Konzept ist also eine Art geistiger Vertreter oder geistige Vertretung für Erfahrungen einer bestimmten Art. Es werden Konzepte entwickelt aus Erfahrungen mit Objekten, mit Tätigkeiten, aber auch mit Eigenschaften, mit abstrakten Ideen oder mit Beziehungen (vgl. Gerrig & Zimbardo 2008, S. 258 f.).

Wie sind diese Konzepte und auch die weiter oben genannten Prototypen in den kognitiven Systemen repräsentiert? Gruber (2018) führt hier die Idee der semantischen Netzwerke ein und beschreibt sie mittels zweier grundlegender Modelle:

Für das erste Modell bezieht er sich auf Collins und Quillian (1969) und definiert ein semantisches Netzwerk als eine hierarchische Gedächtnisstruktur (vgl. Collins & Quillian 1969, zitiert nach Gruber 2018, S. 47). In ihr bildet jedes Konzept einen Knoten. Mit jedem dieser Knoten sind logische Aussagen oder Informationen verbunden, die Propositionen sind, d.h. „kleinstmögliche selbstständig als wahr bzw. falsch beurteilbare Wissenseinheit[en]“ (Gruber 2018, S. 47). So wie Kategorien hierarchisch geordnet und in Subkategorien organisiert werden können, stehen auch Konzepte in einer hierarchischen Organisationsstruktur (vgl. Gerrig & Zimbardo 2008, S. 260).

Für das zweite Modell bezieht sich Gruber (2018) auf Collins und Loftus (1975) und beschreibt ein semantisches Netzwerk ebenfalls als die Verbindung zwischen unterschiedlichen Konzepten. In diesem Fall liegt das Augenmerk auf der Länge der Verbindungen zwischen den Konzepten. Je kürzer eine Verbindung ist, umso höher ist der Grad der Verwandtschaft zwischen zwei Konzepten (vgl. Collins & Loftus 1975, zitiert nach Gruber 2018, S. 48). Hier handelt es sich also weniger um eine hierarchische, als vielmehr um eine erfahrungsbasierte Struktur (vgl. Gruber 2018, S. 48).

Unabhängig von der Wahl eines jener beiden Modelle muss jedes neue Wissenselement in die komplexe Struktur des gesamten Wissens eingeordnet werden. Metzig und Schuster (2016) beschreiben dies mit dem Begriff des „multiple encoding“, was bereits sprachlich auf die Einordnung in verschiedene Zusammenhänge hinweist (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 14). Der im vorigen Abschnitt genannte Gedanke wird an dieser Stelle noch einmal aufgegriffen: Wenn neue Informationen bereits in einer Art Netzwerk präsentiert werden, kann diese Struktur beim Aufbau von Konzepten und den daraus entstehenden semantischen Netzwerken im Gedächtnis hilfreich und förderlich sein.

2.1.2.2. Neuronale Netzwerke

In diesem Unterabschnitt wird noch ein Schritt weiter in die Tiefe gegangen, auf die physiologische Ebene des Gehirns. Es wird zunächst betrachtet, was passiert, wenn ein Reiz wahrgenommen wird. Auch hier taucht wieder der Netzwerkgedanke auf.

Gruber führt die Begriffe der „Gedächtnisspur“ bzw. des „Engramms eines Reizes“ ein (Gruber 2018, S. 95) und definiert sie bzw. es als die „physiologische Spur, die eine Reizeinwirkung als dauerhafte Veränderung im Gehirn hinterlässt“ (Gruber 2018, S. 95). Ein solches Engramm ist ein Netzwerk aus synchronisierten Nervenzellen bzw. Neuronen, die durch die Wahrnehmung eines Reizes gemeinsam aktiviert werden. Gruber zitiert den Psychologen Hebb, der diesen Netzwerkgedanken schon 1949 hatte und von „Zellverbänden“ oder „Zellensembles“ sprach (Hebb 1949, zitiert nach Gruber 2018, S. 96). Diese neuronalen Netzwerke können weit über den Kortex verteilt sein, je nachdem, welche Aspekte eines Objekts sie repräsentieren. Farben werden beispielsweise in einem anderen kortikalen Areal verarbeitet als Bewegungen (vgl. Gruber 2018, S. 104).

Anders als bei Gruber (2018), der neuronale Netzwerke bezogen auf einen eingehenden Reiz entwickelt, beschreibt Spitzer (2014) das Gehirn im Ganzen als neuronales Netzwerk. Er definiert neuronale Netzwerke allgemein als „informationsverarbeitende Systeme, die aus einer großen Zahl einfacher Schalteinheiten zusammengesetzt sind. […] [Dabei lässt sich] ein Neuron als Informationsverarbeitungselement verstehen.“ (Spitzer 2014, S. 49).

Bei Spitzer (2014) taucht das, was von Gruber (2018) als Engramm bezeichnet wird, in der folgenden Definition auf: „Ein inneres Abbild bestimmter äußerer, durch Reize vermittelter Charakteristika und Strukturen der Umwelt nennt man ganz allgemein eine Repräsentation. […] Eine Repräsentation ist ein Neuron mit ganz bestimmten Synapsenstärken der eingehenden Verbindungen. Diese sorgen dafür, dass das Neuron nur dann aktiv wird, wenn ein ganz bestimmtes Muster als Input vorliegt. […] Bei solchen Repräsentationen handelt es sich keineswegs nur um Bilder. Auch unsere Körperoberfläche und unser Körperinneres, Handlungen […], regelhafte Zusammenhänge in der Welt sowie Werte, die unser Zusammenleben leiten und regeln, einschließlich unserer Kommunikationssysteme, sind in uns repräsentiert. Die Form all dieser Repräsentationen sind unterschiedliche Synapsenstärken an Neuronen. […] Aktive, feuernde Neuronen repräsentieren […] diejenigen Inhalte, die gerade aktuell sind bzw. verarbeitet werden“ (Spitzer 2014, S. 79 f.).

Bei beiden Autoren wird damit ein Gedanke weitergeführt, der schon unter 2.1.1.1. bei den Definitionen von Gehirn und Gedächtnis nach Hoffmann und Engelkamp (2013) aufgetaucht ist: Im Gehirn wird nur das gespeichert, was im Gehirn stattfindet, d.h. es werden die Muster an neuronaler Aktivität gespeichert, die ein bestimmter Reiz im Gehirn auslöst (vgl. Hoffmann & Engelkamp 2013, S. 5).

Die Frage an dieser Stelle ist nun, ob man durch eine spezielle Struktur bei den eingehenden Reizen die Entwicklung von Repräsentationen fördern und in spezieller Weise beeinflussen kann.

Dazu findet sich bei Spitzer (2014) die Erkenntnis, dass die Repräsentationen im Kortex als landkartenförmig gesehen werden (vgl. Spitzer 2014, S. 102). Gemeint ist hier, dass sie „in ganz bestimmter Weise geordnet sind: (1) Ähnliche Signale liegen nahe beieinander. (2) Häufige Eingangssignale nehmen einen größeren Raum ein als seltene“ (Spitzer 2014, S. 102). Es existieren demnach mit Ähnlichkeit und Häufigkeit zwei allgemeine Ordnungsprinzipien dieser kortikalen Repräsentationen (vgl. Spitzer 2014, S. 102).

Spitzer (2014) nennt zudem drei Funktionsprinzipien, nach denen das neuronale Netzwerk im menschlichen Gehirn aufgebaut ist: „(1) Synapsen sind plastisch, (2) im Gehirn herrscht hohe Konnektivität und (3) Neuronen sind mit ihren Nachbarn auf ganz bestimmte Weise verbunden, die dafür sorgt, dass bei Erregung an einer Stelle die nahe gelegenen Zellen mit erregt werden, weiter entfernt liegende Zellen hingegen aktiv gehemmt werden“ (Spitzer 2014, S. 102).

Das ergänzt Spitzer (2014) noch um die folgende Erkenntnis, die allgemein für neuronale Netzwerke gilt, und damit insbesondere für das menschliche Gehirn:

„Sobald man diese drei Prinzipien, von denen man weiß, dass sie in der Gehirnrinde implementiert sind, in ein Modell hineinsteckt und dieses Netzwerk dann mit irgendwelchem strukturierten Input füttert, entstehen Karten des Input, d.h. aus flüchtigen Aktivitätsmustern (Input) werden neuronale Repräsentationen dieser Muster (in Form unterschiedlich starker Synapsen an Neuronen der Outputschicht des Netzwerks). Die entstehenden Repräsentationen sind zudem kartenförmig auf der Outputschicht des Netzwerks angeordnet, d.h. nach den [oben genannten] Prinzipien der Häufigkeit und Ähnlichkeit" (Spitzer 2014, S. 103).

Für diese Arbeit festzuhalten ist also, dass der Netzwerkgedanke auch auf neuronaler Ebene zu finden ist. Eine eingehende Information aktiviert ein Netzwerk aus allen beteiligten Neuronen, und genau dieses Aktivierungsmuster wird gespeichert. Dabei ist die neuronale Repräsentation, wie oben definiert, kartenförmig. Diese Überlegungen weitergedacht, müsste ein Input, der bereits nach den Prinzipien der Ähnlichkeit und der Häufigkeit geordnet ist, die entsprechende kartenförmige Repräsentation noch fördern.

Einen letzten Aspekt beim Blick auf die physiologische Ebene liefert der aktuelle Stand der Hirnforschung, der davon ausgeht, dass bereits bei der Geburt alle Neuronen vorhanden sind: „[Die] Entwicklung des Gehirns […] besteht vor allem in Veränderungen der sogenannten Verdrahtung der Neuronen" (Spitzer 2014, S. 52), also im Ausbau der Vernetzung bereits vorhandener Neuronen. Spitzer (2014) bringt das in Zusammenhang mit Lernen, wenn er schreibt: „Immer dann, wenn Lernen stattfindet, ändern sich die Stärken einiger Synapsen ein klein wenig" (Spitzer 2014, S. 75). Im Kern des Lernens geht es also um Vernetzung auf neuronaler Ebene, was eng mit der Vernetzung der eintreffenden Informationen verbunden ist.

2.1.2.3. Netzwerkmetaphern

Im nun Folgenden werden einige Bilder entwickelt, um die Gedanken aus den beiden zurückliegenden Unterabschnitten noch greifbarer und verständlicher zu machen. Mit diesen Bildern wird dann in den Unterkapiteln 2.2. und 2.3. weitergearbeitet, wenn aus der Struktur und der Funktionsweise des Gehirns Impulse dafür abgeleitet werden, wie dementsprechendes Lernen stattfinden sollte.

Auch Buzan und Buzan (2013), die Urväter des „Mind-Mapping", nutzen die Idee der geistigen Landkarte (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 31). Sie beschreiben eine geistige Landkarte oder auch Erinnerungsspur als neuronale Bahn, die errichtet wird, „während eine Botschaft, ein Gedanke oder eine neu durchlebte Erinnerung von Gehirnzelle zu Gehirnzelle weitergeleitet wird" (Buzan & Buzan 2013, S. 31). Dabei erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein geistiges Ereignis wie beispielsweise das Zustandekommen eines Gedankenmusters stattfindet, mit jeder Wiederholung desselben (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 32). Diese Überlegungen passen zu dem eben zitierten Gedanken Spitzers (2014), dass nicht die Anzahl der Nervenzellen variiert, sondern die Verbindungen zwischen ihnen mit zunehmender Nutzung stärker werden.

Die beiden Autoren zeichnen das Bild einer Art geistiger Landkarte und liefern eine anschauliche Metapher: „Jegliche Information, die […] [das] Gehirn erreicht […] kann als eine zentrale Kugel dargestellt werden, von der Hunderte, Tausende, Millionen von Haken ausgehen. Jeder Haken stellt eine Assoziation dar, jede Assoziation verfügt über ihre eigene unendliche Reihe von Verknüpfungen. […] Das Denkmuster […] [des] Gehirns kann man somit als eine riesige, sich verästelnde Assoziationsmaschine sehen — als einen Super-Biocomputer mit Gedankenpfaden, die von einer praktisch unendlichen Zahl von Datenknoten ausstrahlen. […] Diese Struktur spiegelt die neuronalen Netzwerke wider, die die physische Architektur […] [des] Gehirns ausmachen“ (Buzan & Buzan 2013, S. 53). Wieder taucht hier der Netzwerkgedanke auf. Das Besondere bei diesen beiden Autoren ist, dass sie die Verbindungen, aus denen sich das Netzwerk zusammensetzt, als assoziative Verbindungen charakterisieren. Wenn nun Informationen, die ins Gehirn aufgenommen werden sollen, bereits so aufbereitet sind, dass sie Vorstellungen bewusst miteinander verknüpfen bzw. verknüpft darstellen, dann sollte das die Bildung von entsprechenden Assoziationen im Gehirn fördern.

Die Autoren beschreiben in diesem Kontext auch die enorme Speicherkapazität des menschlichen Gehirns. Sie führen diese auf die „Differenziertheit der komplizierten neurophysiologischen Bahnen“ (Buzan & Buzan 2013, S. 55) zurück. Entscheidend ist, dass neue Informationen auf ganzheitliche, radiale und systematische Weise gesammelt werden (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 55). Wobei radiales oder „von einem Mittelpunkt ausstrahlendes“ Denken von den Autoren definiert wird als „assoziative Denkprozesse, die von einem Mittelpunkt ausgehen oder mit einem Mittelpunkt verbunden sind“ (Buzan & Buzan 2013, S. 55). In den beiden Unterkapiteln 2.2. und 2.3. werden diese Eigenschaften wieder aufgegriffen, wenn es darum geht, Kriterien für eine möglichst optimale Lernhilfe aufzustellen.

Auch bei Autoren, die eine praktische Expertise für Lernen und Gedächtnis entwickelt haben, findet sich der Netzwerkgedanke. So beschreibt die Leiterin des „Instituts für gehirn-gerechtes Arbeiten“ Vera F. Birkenbihl (2011) in ihrem Buch „Stroh im Kopf“ das menschliche Gedächtnis als ein Netz, für das sie den von ihr rechtlich geschützten Begriff des „Wissens-Netzes“ verwendet (Birkenbihl 2011, S. 43). Analog dazu, wie die einzelnen Neuronen auf physiologischer Ebene Tausende von Verbindungen eingehen, entwickelt Birkenbihl die Metapher des Wissens-Netzes, das aus Verbindungen zwischen einzelnen Informationen aufgebaut ist (vgl. Birkenbihl 2011, S. 44 ff.). Nach ihren

Überlegungen ist jede Information, repräsentiert durch ein Wort bzw. einen Begriff, ein Knotenpunkt in dem Wissens-Netz und verbunden mit erst einmal uneingeschränkt vielen anderen Informationen (vgl. Birkenbihl 2011, S. 45).

Auch Frederic Vester (2016) beschreibt in seinem Buch „Denken, Lernen, Vergessen“ das Gehirn in einer Weise, die an ein Netzwerk denken lässt. So formuliert er, „dass sehr bald [in der Entwicklung eines Säuglings] ein Skelett von verschmolzenen, man könnte sagen ‚verlöteten‘ Verdrahtungen zwischen den Gehirnzellen entsteht, ein Grundmuster von Beziehungen und Assoziationen – sozusagen die ‚Hardware‘ unseres biologischen Computers –, an dem sich später alles andere, was der Mensch erlebt, aufhängt und einordnet und auch gegebenenfalls willentlich wieder abgerufen und erinnert wird. Der Mensch versucht, immer mehr Wahrnehmungen, Informationen irgendwie in dieses Gerüst der ersten Lebensmonate einzugliedern und daran die subtileren, weicheren Folgegerüste aufzubauen“ (Vester 2016, S. 48). Diese Entwicklung beschreibt Vester so: „[An] den ersten Verdrahtungen unseres Gehirns hängen sich alle späteren Eindrücke auf. Die ersten Verknüpfungen dienen dabei als Wegweiser für die folgenden Bahnen, Kontaktstellen und weiteren Verknüpfungen“ (Vester 2016, S. 49). An diesen Überlegungen ist für die vorliegende Arbeit besonders die Idee des Skeletts interessant, von dem aus oder an dem alle weiteren Informationen verankert werden. In einem solchen Netzwerk scheint es eine Art von Hauptknoten und -verbindungen zu geben, in die dann neue Verbindungen eingeflochten werden können.

Das Grundgerüst, das sich in den ersten Lebensmonaten entwickelt, ist ein „Zellgefüge […], das sich […] ganz unter dem Eindruck von äußeren Wahrnehmungen gebildet hat. Damit gelang der Natur das Kunststück, ein erstes kodifiziertes Abbild der äußeren Umwelt ohne unser Zutun im Gehirn aufzubauen“ (Vester 2016, S. 123). Diese Grundmuster sind bei jedem Menschen individuell und abhängig von der äußeren Umwelt, die abgebildet wurde. Hier findet sich nochmal der Gedanke von Hoffmann und Engelkamp (2013), die unterscheiden zwischen dem, was einen Menschen umgibt, und wie dies dann im Gehirn abgebildet wird.

Vester fasst die Netzwerkmetapher noch weiter. Er spricht von einem „Netzwerk des Lernens, das auf der begrifflichen Ebene die Verflechtung all der Phänomene zeigt, die mit unserer Gehirnaktivität verknüpft sind“ (Vester 2016, S. 122). Auch er betont die Rolle der Aufmerksamkeit. Sie entscheidet darüber, ob eine Information ins Kurzzeitgedächtnis aufgenommen wird oder nicht (vgl. Vester 2016, S. 140). Die Bedeutsamkeit der Aufmerksamkeit tauchte bereits im Unterabschnitt 2.1.1.3. bei der Beschreibung des Kurzzeitgedächtnisses auf und wird hiermit noch einmal hervorgehoben.

2.1.2.4. Neuroplastizität oder die Veränderung in Netzwerken

Bislang war der Blick hauptsächlich auf die Entstehung und den Aufbau der neuronalen Netzwerke gerichtet. In diesem Unterabschnitt geht es um Veränderungen und um die Umorganisation innerhalb dieser Netzwerke, d.h. um die Neuroplastizität. Spitzer (2014) beschreibt neuronale Netzwerke als kognitive Landkarten und formuliert: „Seit etwa zwei Jahrzehnten ist bekannt, dass kortikale Landkarten nicht nur erfahrungsabhängig entstehen, sondern einer beständigen erfahrungsabhängigen Umorganisation unterliegen. Man spricht von Neuroplastizität“ (Spitzer 2014, S. 105).

Es existieren bereits einige Studien (Kim et al. 1997, zitiert nach Spitzer 2014, S. 118; Polk und Farah 1998, zitiert nach Spitzer 2014, S. 115), die nahelegen, „dass auch höhere kortikale Repräsentationen erfahrungsabhängig gespeichert sind. […] Man schätzt, dass bei jeder bestimmten geistigen Leistung […] zumindest einige Dutzend kortikaler Landkarten in spezifischer Weise aktiviert sind“ (Spitzer 2014, S. 118); im Kortex existieren insgesamt mehrere hundert kortikale Landkarten, die sehr stark miteinander vernetzt sind (vgl. Spitzer 2014, S. 118). Dann wird Spitzer konkret, wenn er zum einen schreibt, dass der Hippokampus fähig ist, „unvollständige Informationen zu ergänzen, denn er ist unter anderem sehr stark mit sich selbst verknüpft“ (Nakazawa et al. 2002, zitiert nach Spitzer 2014, S. 37); und wenn er zum anderen auf eigene Forschungsergebnisse verweist, indem er formuliert: „[S]olche Netzwerke vervollständigen unvollständigen Input anhand gespeicherter Informationen“ (Spitzer 1996, zitiert nach Spitzer 2014, S. 37).

Es sind also Erfahrungen und geistiges Hantieren, die die Gestalt der neuronalen Netzwerke verändern und umorganisieren. Daraus kann man ableiten, dass kontinuierliches Präsentieren einer bestimmten Struktur z.B. in einer Lernhilfe auch das Abbild dieser Struktur im Gehirn fördert, was für die vorliegende Arbeit von Bedeutung ist. Der zweite Aspekt ist ebenfalls interessant: dass Netzwerke bis zu einem gewissen Grad in der Lage sind, unvollständige Informationen zu vervollständigen.

Analog zu Spitzer nennen auch Buzan und Buzan (2013) unter anderem zwei Wirkweisen des Gehirns, an denen man die Neuroplastizität erkennen kann: Das Gehirn neigt „zur Suche nach Mustern und zur Vervollständigung von Informationen“ (Buzan & Buzan 2013, S. 37). Sie heben den Vergleich des Gehirns mit einem Computer auf und schreiben: Das „Gehirn denkt nicht linear oder sequentiell wie ein Computer. Es denkt multilateral: radial“ (Buzan & Buzan 2013, S. 39).

Die Autoren beschreiben das menschliche Gehirn als „organisch […] organisiert“ (Buzan & Buzan 2013, S. 59). Mit dieser Wortwahl heben sie den Charakter des Gehirns als belebtes und gewachsenes bzw. wachsendes System hervor. Wenn nun

Denkprozesse unterstützt werden sollen, bedarf es solcher Instrumente, die das organische Fließen bzw. das oben definierte radiale Denken imitieren oder abbilden (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 59). Diesem Gedanken folgend, befasst sich das nächste Unterkapitel mit der Information, die ins Gehirn – oder noch genauer: ins Gedächtnis – aufgenommen werden soll, oder anders gesagt: mit dem zu Lernenden.

2.2. Lernpsychologischer Rahmen

Bei den bisherigen Betrachtungen hat sich – sowohl bei den Erkenntnissen zur Struktur des Gehirns als auch bei denen zu den Prozessen, die an der Informationsverarbeitung beteiligt sind – die Idee des Netzwerkes herausgebildet. Der Blick auf die neuronale Ebene zeigt ein Netzwerk aus Nervenzellen, das durch die eintreffenden Reize geformt wird. Auch die Speicherung von Wissen im Langzeitgedächtnis folgt dieser Struktur: Die Inhalte oder Informationen sind die Knoten, und ihre Beziehungen sind die Verbindungslinien. Gemeinsam bilden sie ein Wissensnetz.

Im Folgenden werden die bislang formulierten Gedanken unter dem Blickwinkel der lernpsychologischen Forschung weiterentwickelt. Dabei geht es um drei Fragen:

(1) Wie findet auf Basis des Netzwerkgedankens Lernen statt, oder anders formuliert: Welche Impulse liefern Erkenntnisse der Lernpsychologie im Hinblick auf dem Gehirn entsprechendes Lernen?
(2) Welche Erkenntnisse gibt es zu Lernhilfen, die die Struktur bzw. die Organisation der Inhalte zur Aufgabe haben, d.h. die das Lernen dem Gehirn entsprechend gestalten sollen?
(3) Wie lässt sich die Gedächtnisleistung durch die Nutzung visueller Gedächtnistechniken steigern?

2.2.1. Impulse für dem Gehirn entsprechendes Lernen

Wenn in diesem Unterkapitel über Lernen gesprochen wird, dann geht es um die Aufnahme und die Integration der weiter oben definierten deklarativen Wissensinhalte ins Langzeitgedächtnis bzw. in das bereits bestehende Wissensnetz. Dieses Lernen kann als dem Gehirn entsprechend bezeichnet werden, wenn es möglichst optimal abgestimmt ist auf die Funktionsweisen des Gedächtnisses, wie sie in Kapitel 2.1. herausgearbeitet wurden.

Die Überlegungen dieser Arbeit folgen den konstruktivistischen Theorien des Lernens, die Lernen als konstruktiven Prozess definieren: Neue Inhalte werden aktiv in das bereits bestehende Wissen eingebaut (vgl. Reiss & Hammer 2013, S. 29). Dabei wird kein Abbild der Realität erschaffen; vielmehr wird mit den neuen Inhalten hantiert und werden individuelle Bedeutungen konstruiert und entwickelt, die dann gespeichert werden. Damit entsteht ein individuelles Wissensnetz des oder der Lernenden.

Im Folgenden werden zunächst die oben genannten Netzwerkmetaphern aufgegriffen, um in diesen Bildern den Prozess des Lernens zu verankern.
Buzan und Buzan (2013) arbeiten mit der Metapher der geistigen Landkarte bzw. einer weit verästelten Assoziationsmaschine. Sie verweisen auf Erkenntnisse aus der Lernpsychologie darüber, an was sich das menschliche Gehirn während des Lernprozesses hauptsächlich erinnert: Es sind die „Dinge, die mit bereits gespeicherten Daten oder Mustern assoziiert oder mit anderen Aspekten dessen, was gelernt wird, verknüpft werden“ (Buzan & Buzan 2013, S. 35). Die Autoren unterstreichen die Bedeutsamkeit der Vernetzung neuer Inhalte mit bereits bekannten bzw. mit bereits verfügbaren Wissensbausteinen: „Die zwei Hauptfaktoren des Erinnerns [sind] Assoziation und Betonung“ (Buzan & Buzan 2013, S. 37). Diese beiden Faktoren wirken in der folgenden Weise: Wichtige Ideen werden von Schlüsselwörtern transportiert, und zwischen diesen will das Gehirn Assoziationen herstellen. Diese Assoziationen fördern Kreativität und Gedächtnisleistung, und visuell anregende Gestaltungen fördern das Erinnern (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 49).

Vera F. Birkenbihl (2011) knüpft an ihre oben beschriebene Netzwerkmetapher für das Gehirn die folgenden Überlegungen zum Lernen an: Beim Lernen werden neue Informationen in das bereits bestehende Netz eingewoben; das geschieht schneller und leichter, wenn schon Informationen existieren, an die die neuen Inhalte angeknüpft werden können (vgl. Birkenbihl 2011, S. 51). Dies folgt dem Prinzip: „Neues muss an Altem festgebunden werden“ (Birkenbihl 2011, S. 52). Für neue Informationen gilt es, „zunächst einige wenige Haupt-Fäden zu schaffen und dieses Konstrukt an […] [das] vorhandene Wissens-Netz anzubinden […]“ (Birkenbihl 2011, S. 115). Birkenbihl empfiehlt, zu diesem Zweck ein „Denk-Modell“ im Sinne dieses Wortes zu bauen, und meint damit ein Modell bzw. eine Struktur des Lerngegenstandes, an dem bzw. an der die zu lernenden Informationen angebunden werden können (vgl. Birkenbihl 2011, S. 111).

Vester (2016) spricht, wie weiter oben beschrieben, vom „Netzwerk des Lernens“ (Vester 2016, S. 122). In seinen Ausführungen betont er die Rolle der Aufmerksamkeit: Das zu Lernende muss Aufmerksamkeit generieren, um überhaupt die ersten Schritte ins Gedächtnis finden zu können (vgl. Vester 2016, S. 140). Gleiches formulieren Metzig und Schuster (2016), wenn sie schreiben, dass bei allen Aufgabentypen entscheidend ist, dass sie die Aufmerksamkeit auf die zu lernende Information lenken (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 124). Ferner schreibt Vester

(2016): „Ob man aber für eine bestimmte Information Aufmerksamkeit empfindet, ist wiederum von den bereits vorhandenen Assoziationen abhängig, das heißt von den mit dieser Information bereits möglichen Gedankenverbindungen. Je mehr bekannte Assoziationen also durch eine neue Information angerührt werden, desto größer ist die Chance, dass die Aufmerksamkeit geweckt wird“ (Vester 2016, S. 140). Ist für eine Information „kein Erkennungssignal für das Gehirn“ (Vester 2016, S. 141) bzw. keine mögliche Assoziation vorhanden, kann sie weder ins Kurzzeit- noch ins Langzeitgedächtnis aufgenommen werden.

Spitzer (2014) beschreibt den Weg, den ein neuer Inhalt bis zur Verankerung im Gehirn geht, wie folgt: „Je intensiver wir uns mit Inhalten beschäftigen, desto eher hinterlassen sie Spuren im Gedächtnis. […] Ein bestimmter Inhalt wird nicht von einem Kasten zum nächsten weitergereicht […], sondern im Kopf bearbeitet, von verschiedenen Arealen des Gehirns zugleich und interaktiv […], es wird mit ihm geistig hantiert. Je mehr, je öfter, je tiefer, desto besser für das Behalten“ (Spitzer 2014, S. 6). Weiter betont er die Wichtigkeit von Zusammenhängen. Er zieht einen spannenden Vergleich, wenn er schreibt: „Geschichten treiben uns um, nicht Fakten. Geschichten enthalten Fakten, aber diese Fakten verhalten sich zu den Geschichten wie das Skelett zum ganzen Menschen. Wer glaubt, beim Lernen gehe es darum, Fakten zu büffeln, der liegt völlig falsch; Einzelheiten machen nur im Zusammenhang Sinn, und es ist dieser Zusammenhang und dieser Sinn, der die Einzelheiten interessant macht. Und nur dann, wenn die Fakten in diesem Sinne interessant sind, werden wir sie auch behalten“ (Spitzer 2014, S. 35).

Diesen Aspekt greifen auch Buzan und Buzan (2013) auf und beleuchten ihn von einer anderen Seite, wenn sie den folgenden Satz formulieren: „Die Vogelschau auf eine oft als äußerst kompliziert erachtete Materie zeigt die dahinterliegende Struktur und macht die Materie zugänglicher“ (Buzan & Buzan 2013, S. 267).

Aus diesen Ausführungen wird deutlich, dass Lernen dann gelingt, wenn die zu lernenden Informationen nicht einzeln und für sich, sondern im Zusammenhang stehen, wenn sie miteinander in Beziehung gesetzt und verbunden präsentiert werden. Dabei soll die Struktur bzw. das Beziehungsgeflecht erkennbar und verständlich gemacht werden.

Auch die Ergebnisse von Helmke und Weinert (1997) zeigen, dass fürs Lernen die Kenntnis der Struktur des Lerngegenstandes bedeutsam ist. Sie stellen eine Überlegung zu den Ursachen des Zusammenhangs zwischen intellektuellen Fähigkeiten und schulischen Leistungen an: „Intelligentere haben im Vergleich zu weniger intelligenten Menschen in kumulativen Lernsequenzen unter vergleichbaren Zeit- und Instruktionsbedingungen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in der

Vergangenheit mehr und intelligenter organisiertes (tiefer verstandenes, vernetztes, multipel repräsentiertes und flexibel nutzbares) Wissen erworben. Diese bereichsspezifischen Vorkenntnisse erleichtern die darauf aufbauenden weiteren Lernprozesse" (Helmke & Weinert 1997, S. 106). Wenn man diesen Gedanken fortführt, dann kann eine gegebene Struktur bzw. visualisierte Vernetzung der Lerninhalte denselben Effekt wie eine höhere Intelligenz erzielen und dadurch den Wissenserwerb erleichtern bzw. steigern.

Diese Erkenntnisse greift auch Wahl (2011) auf, wenn er schreibt, dass entsprechend des Experten-Novizen-Paradigmas die Intelligenz und die fachspezifische Expertise einen hohen Einfluss auf den Lernerfolg haben. Zu Beginn des Lernprozesses überwiegt der Einfluss der Intelligenz, doch im Verlauf gewinnen die bereichsspezifischen Vorkenntnisse und die steigende Expertise an Bedeutung (vgl. Wahl 2011, S. 2). Wahl (2011) bezieht sich dabei auf Wahl, Weinert und Huber (2006), Helmke und Weinert (1997) sowie Köller und Baumert (2002). Es gilt, „dafür zu sorgen, dass die Lernenden mit einem möglichst hohen themenbezogenen Kenntnisstand in einen Lernprozess eintreten. […] Man müsste alles vorwegnehmen und auf der Basis exzellenter Vorkenntnisse in den Lernprozess eintreten" (Wahl 2011, S. 2).

Damit lässt sich zusammenfassen, dass das Lernen der Struktur des Gedächtnisses und den entscheidenden Prozessen dann gerecht wird, wenn es zum einen die Inhalte miteinander in Beziehung setzt und sich so immer wieder Anknüpfungspunkte für neue Erkenntnisse finden; und wenn zum anderen die innere Struktur eines Themenfeldes transparent gemacht wird, d.h. die Inhalte geordnet und nach ihrer Bedeutsamkeit betont werden, indem sie in einer passenden Darstellungsstruktur gefasst werden. Zudem zu nennen und ebenfalls als äußerst bedeutsam für gelingendes Lernen anzuerkennen ist die Aufmerksamkeit, die auf den zu lernenden Inhalt gerichtet werden muss, wenn Lernen überhaupt ermöglicht werden soll.

2.2.2. Konsequenzen für die Organisation des zu Lernenden – Entwicklung von Lernhilfen

Bislang ging es darum, wie Lernen gestaltet werden sollte, um es möglichst gut auf die Struktur und die Funktionsweise des Gedächtnisses zuzuschneiden. Daraus ergaben sich bereits einige Impulse für die Art und Weise, wie das zu Lernende aufbereitet werden kann, um das Lernen zu begünstigen. In der Praxis kommen entsprechend konzipierte Lernhilfen zum Einsatz. Bevor in 2.2.2.1. bis 2.2.2.3. drei solcher Lernhilfen vorgestellt werden, werden nun noch einige zusätzliche, darauf sehr konkret anwendbare Impulse präsentiert.

Metzig und Schuster (2016) gehen den Weg über die Betrachtung von Lerntechniken und verstehen die Verbesserung der Gedächtnisleistung als einen geschickteren Umgang mit den Möglichkeiten und Begrenzungen des menschlichen Gehirns. Spezielle Lerntechniken sollen dem Lernenden helfen, neue Informationen so zu transformieren und zu gruppieren, dass sie optimal behalten werden können (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 6). Die Autoren beziehen sich auf eine Studie von Ericsson et al. (1980), wenn sie zwei Strategien vorstellen, die zu einer Verbesserung der Lernleistung führen: Zum einen soll die Menge der neuen Informationen reduziert werden, indem sie auf bereits gespeichertes Wissen bezogen werden (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 3). Zum anderen wird empfohlen, den Lernstoff bewusst und in Untereinheiten zu organisieren (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 3).

Auch Nückles, Gurlitt, Pabst und Renkl (2004) gehen mit ihren Überlegungen in diese Richtung: „Der Erfolg von Arbeits- und Lernprozessen hängt mehr denn je davon ab, dass es gelingt, umfangreiche Wissensbestände zu strukturieren, anzuwenden und zu kommunizieren. […] Den neuen Anforderungen sind die Einzelnen aber nur dann gewachsen, wenn sie ihren persönlichen Umgang mit Wissen aktiv und eigenverantwortlich gestalten. Hier sind intelligente Lern- und Arbeitstechniken für den individuellen Umgang mit Wissen […] gefragt“ (Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 1).

Hattie (2013) zitiert in diesem Kontext Nesbit und Adesope (2006) mit der Erkenntnis, dass „möglicherweise […] eine geringere kognitive Last damit verbunden [ist], dass Knoten im zweidimensionalen Raum angeordnet werden, um eine Beziehung auszudrücken, und so alle Hinweise auf ein Konzept in einem einzigen Symbol zusammengefasst und Verbindungen ausdrücklich gekennzeichnet werden, um die Beziehungen zu identifizieren“ (Nesbit & Adesope 2006, zitiert nach Hattie 2013, S. 201).

David Ausubel (1974) fordert, „Lernprozesse mit sogenannten ‚Organisationshilfen‘ transparent und nachhaltig zu gestalten“ (Ausubel 1974, zitiert nach Wahl 2011, S. 3). Ausubel nennt drei Gründe, warum „die vorausgehende Strukturierung […] umfassender, allgemeiner und abstrakter sein [soll] als die folgenden Inhalte. […] Erstens sollen die Vorkenntnisse der Lernenden mobilisiert werden; zweitens sollen sinnvolle Verknüpfungen zwischen schon vorhandenem und neuem Wissen ermöglicht werden; drittens soll damit Verstehen angebahnt und umgekehrt, mechanisches Auswendiglernen vermieden werden“ (Ausubel 1974, zitiert nach Wahl 2011, S. 3). Hier lautet das Ziel, dass „ein tragfähiges Vor-Verständnis […] [entsteht], das die subjektive Auseinandersetzung mit der vermittelten Thematik erleichtert“ (Wahl 2011, S. 5). Insgesamt geht es darum, die „einzigartigen Vorkenntnisstrukturen [jedes einzelnen

Lerners und jeder einzelnen Lernerin] und […] [die] für alle gleichen Expertenstrukturen“ (Wahl 2011, S. 5) miteinander zu verbinden.

Zusätzlich zum Strukturierungsgedanken lassen sich bei Metzig und Schuster (2016) noch diese weiterführenden Anforderungen an Lernhilfen ableiten: Sie sollten sicherstellen, dass eine Information an der richtigen Stelle im Speichersystem eingeordnet wird (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 100); dementsprechend sollten sie die zu lernenden Informationen organisieren und sichere Abrufstrategien bereitstellen (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 100).

Darüber hinaus gilt generell, dass Visualisierungen das Verstehen von Inhalten und das Erkennen von Zusammenhängen unterstützen; sie schaffen einen besseren Überblick, erleichtern das Fokussieren auf das Wesentliche und fördern somit ein besseres und nachhaltiges Verstehen (vgl. Lercher 2017, S. 18).

Davon ausgehend, folgen nun drei Beispiele für Lernhilfen, die über die Struktur bzw. die Organisation der Inhalte funktionieren. Sie finden alle drei vielfältige Anwendung und sind in ihrer Wirksamkeit vielfach untersucht und belegt.

2.2.2.1. Mind-Mapping

Die vermutlich am weitesten verbreitete Art, Inhalte zu strukturieren, ist Mind-Mapping. Den Wert von Mind-Mapping arbeiten Buzan und Buzan (2013) heraus, die, wie weiter oben bereits geschrieben, als die Urväter dieser Technik bezeichnet werden können. Sie formulieren die beiden zentralen Gedanken: „Mind-Maps erlauben eine unendliche Folge assoziativer ‚Sondierungen‘, die umfassend jeder Idee oder Fragestellung nachgehen, mit der […] [man sich befasst]“ (Buzan & Buzan 2013, S. 37); und: „Weil in einer Mind-Map die Ideen miteinander verbunden sind, tut sich […] [das] Gehirn leichter, über Assoziationen ein tieferes Verständnis zu erlangen und kreative Gedankensprünge zu machen“ (Buzan & Buzan 2013, S. 39).

Die Autoren beschreiben eine Mind-Map mit den folgenden Merkmalen: Im Zentrum steht ein Bild, das den Hauptgegenstand der Aufmerksamkeit darstellt; die Hauptthemen oder Oberbegriffe zu diesem Gegenstand, auch als „grundlegende Ordnungsidee“ bezeichnet, bilden die davon ausgehenden Äste (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 85). Alle weiteren Themen, die von untergeordneter Bedeutung sind, werden als Zweige dargestellt, die von diesen Ästen abgehen; jeder Ast oder Zweig wird mit einem Schlüsselwort bezeichnet (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 61 f.). Strukturierungen finden in einer Mind-Map mittels Hierarchien und Kategorien statt (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 85).

Generell gelten die beiden folgenden Zusammenhänge: Je kreativer und visuell spannender eine Mind-Map ist, z.B. durch Farbe oder Bilder, umso größer ist ihre Wirkung (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 62); und je mehr Verbindungen dargestellt werden, umso differenzierter und genauer wird das zu Lernende gespeichert (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 84)

Durch die Darstellung auf einer einzigen Seite sind alle enthaltenen Informationen dem Gehirn ständig präsent; das Gehirn wiederholt sie, stärkt die entsprechenden synaptischen Verbindungen und verbessert so ihre Zugänglichkeit (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 133). So finden sich hier dieselben Überlegungen wie weiter vorne bei Spitzer (2014). In Mind-Maps sind die Informationen auf das Wesentliche reduziert und durch Farben, Formen, Assoziationen, Struktur und spezielle räumliche Anordnungen ansprechend gestaltet (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 133). Mind-Maps sind zum einen „Gedächtnishilfen für das Abspeichern und Wiederfinden von Informationen“ (Buzan & Buzan 2013, S. 134), zum anderen regen sie neue Ideen und Assoziationen an, die dann wiederum neue Wissensmuster erzeugen (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 134).

Zudem formulieren die Autoren einen Gedanken zu Mind-Maps, der sich schon weiter vorne in den Überlegungen von Vester (2016) und Birkenbihl (2011) findet: Eine Mind-Map bietet ein „vorstrukturiertes Gerüst für Assoziationen und stellt sicher, dass alle relevanten Elemente einbezogen werden“ (Buzan & Buzan 2013, S. 145).

In einer Mind-Map werden nur Schlüsselbegriffe und Symbole genutzt, so dass auch große Datenmengen „schnell und leicht verstanden, abgespeichert und erinnert“ werden können (Lercher 2017, S. 13). Formen, Bilder und Symbole werden vom Gehirn besonders effizient und schnell erkannt und erfasst, das natürliche, assoziative Denken durch die Darstellung in Netzen unterstützt und Zusammenhänge einfach skizziert (vgl. Lercher 2017, S. 14). Lercher (2017) formuliert, warum Mind-Mapping einen so positiven Effekt auf das Lernen und die Gehirnleistung hat: „Die Fähigkeit dieser Methode, den menschlichen schnellen Zugriffspeicher, aktiviert durch Formen und Bilder, und den intelligenten Arbeitsspeicher, gesteuert durch Sprache, optimal miteinander zu vernetzen und zu aktivieren, ist Grund genug“ (Lercher 2017, S. 15).

Für diese Arbeit besonders interessant ist, dass Mind-Maps gezielt als Gedächtnisstütze entwickelt wurden und damit ihre Anwendung unter dem Aspekt der Mnemotechnik betrachtet werden kann (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 129). So zeigen Mind-Maps eine Parallelität zur Locimethode, auf die in Abschnitt 2.2.3. genauer eingegangen wird. Bei einer Mind-Map kann jeder Ast als ein Speicherort gesehen werden, an dem Informationen wie beispielsweise Begriffe abgelegt werden. Vorstellungskraft und Assoziation helfen bei der Erinnerung (vgl. Buzan & Buzan 2013, S. 132).

Nückles, Gurlitt, Pabst und Renkl (2004) bauen den Mind-Mapping-Ansatz auf der Metapher des menschlichen Gedächtnisses als assoziativem Netzwerk auf: In diesem sind die Begriffe nach thematischer Nähe, z.B. nach Situationen, in denen sie gemeinsam vorkommen, platziert (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 6). Buzan und Buzan (2013) bezeichnen eine „Mind-Map als äußere Ausdrucksform des radialen Denkens" (Buzan & Buzan 2013, S. 55).

2.2.2.2. Concept-Mapping

Mit dem Mind-Mapping eng verwandt ist das Concept-Mapping. Der Unterschied zwischen den beiden Ansätzen lässt sich an den unterschiedlichen Metaphern für das menschliche Gehirn erkennen, auf denen sie basieren: Anders als gerade bei den Mind-Maps beschrieben, bauen Concept-Maps auf der Annahme auf, dass das menschliche Gedächtnis aus einem hierarchisch geordneten Netzwerk von Begriffen besteht (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 6).

Bei einer Concept-Map sind die inhaltlichen und logischen Beziehungen zwischen den Begriffen entscheidend für den Aufbau und die Struktur des Netzwerks (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 6): „Versuchen wir uns die genaue Bedeutung eines Begriffs zu vergegenwärtigen, so hangeln wir uns nach dieser Auffassung des Gedächtnisses vor allem entlang der logisch-semantischen Beziehungen zu anderen Begriffen" (Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 6 f.). Aus diesem Grunde sind Concept-Maps „[…] hierarchisch aufgebaut, und die Beziehungen zwischen den verschiedenen Schlüsselbegriffen werden explizit benannt. Oftmals gibt es nicht nur Verbindungslinien von oben nach unten, also zwischen Ober- und Unterbegriffen, sondern es können auch Querverbindungen eingezeichnet werden" (Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 4). So entsteht Stück für Stück eine visuelle Darstellung aller relevanten Konzepte, und jeder Begriff kann zum Ausgangspunkt einer neuen Concept-Map werden (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 16).

Anders als beim Mind-Mapping geht es beim Concept-Mapping also darum, die logischen und inhaltlichen Verbindungen zwischen Begriffen zu analysieren, und nicht darum, spontan zu assoziieren (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 8). Damit dient „diese Technik vor allem dazu, das analytische Potenzial des Denkens zu stimulieren. Concept-Maps unterstützen die analysierende und reflektierende Auseinandersetzung mit einem Gegenstandsbereich" (Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 8). Allgemein gilt bei einer Concept-Map: „Einzelne Fakten bleiben nicht für sich alleine stehen, sondern werden in Beziehung zueinander gesetzt. Der größere Zusammenhang wird deutlich, und das zu Lernende wird in Beziehung zur eigenen Erfahrungswelt gesetzt" (Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 88).

Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl (2004) geben die folgende Übersicht über mögliche Darstellungsstrukturen für eine Concept-Map (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 27 ff.):

- Hierarchische Darstellungsstrukturen:
  - Abstraktions- oder Inklusionshierarchie: Hierbei wird ein „übergeordneter allgemeiner Begriff in spezifischere Begriffe ausdifferenziert“ (Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 27).
  - Komplexionshierarchie: Hier wird „ein übergeordnetes Ganzes in seine untergeordneten Bestandteile zerlegt“ (Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 27), d.h. es besteht eine Teil-Ganzes-Relation zwischen den Ebenen (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 28).
  - Möglichkeit der „‚Vererbung‘ von Merkmalen auf Grund der Inklusionsbeziehung zwischen Ober- und Unterbegriffen“ (Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 28).
  - Eigenschaftszuschreibungen
- Kausalbeziehungen bzw. Ursache-Wirkungs-Beziehungen:
  - Deterministische Kausalmodelle
  - Probabilistische Kausalmodelle
- Zeitliche Abläufe, d.h. Begriffe besitzen eine zeitliche Reihenfolge:
  - Ablaufstrukturen
  - Flussdiagramme
- Institutionalisierte Handlungsstrukturen
- Vergleiche, Unterschiede und Gemeinsamkeiten

Bei der Erstellung einer Concept-Map zu einem bestimmten Themenbereich liefert diese Zusammenschau mögliche Darstellungsstrukturen, die den inhaltlichen Zusammenhang spiegeln.

Metzig und Schuster (2016) beziehen sich auf Dansereau et al. (1979), wenn sie die folgenden unterschiedlichen Strukturen benennen (vgl. Dansereau et al. (1979), zitiert nach Metzig & Schuster 2016, S. 103) und damit die inhaltlichen und logischen Beziehungen zwischen Begriffen charakterisieren:

- Hierarchische Strukturen
  - „Teil-von“-Verbindung
  - „Beispiel-für“-Verbindung
- Kettenstrukturen
  - „Führt-zu“-Verbindung
- Clusterstrukturen
  - Analogieverbindungen

- „Charakteristisches-Merkmal“-Verbindung
- Evidenzverbindung

Hier werden mögliche Verbindungen benannt, die einzelne Begriffe innerhalb einer Concept-Map miteinander eingehen können. Die beiden Übersichten sind Werkzeuge für die Erstellung neuer Concept-Maps. Damit finden sie Anwendung in Kapitel 3.

2.2.2.3. Advance Organizer bzw. vorangestellte Organisationshilfen

Ein Konzept für eine Lernhilfe, das bereits seit den 1970er Jahren existiert, ist das des Advance Organizer bzw. der vorangestellten Organisationshilfe. Die zentrale Idee hierbei lautet, „Expertenwissen auf wenige nachvollziehbare Grundgedanken zu reduzieren und diese didaktisch so geschickt aufzubereiten, dass Novizen das Wesentliche daran verstehen können“ (Wahl 2011, S. 7). Ein Advance Organizer beschränkt sich in der Regel auf ein Thema oder eine Unterrichtsreihe.

Ausubel (1960) geht davon aus, dass das Lernen und das Behalten von bedeutsamen Inhalten durch relevante zusammenfassende Konzepte, die im Voraus präsentiert werden, erleichtert werden (vgl. Ausubel 1960, S. 267). Die Grundlage bildet die Überlegung, dass die kognitive Struktur hierarchisch organisiert ist und dem Organisationsprinzip der fortschreitenden Differenzierung folgt (vgl. Ausubel 1960, S. 267). Aus seiner Sicht wird neues bedeutsames Material dann in die bestehende kognitive Struktur aufgenommen, wenn es bei bereits existierenden Konzepten, die verfügbar, angemessen und stabil sind, angeknüpft werden kann (vgl. Ausubel 1960, S. 267).

Entscheidend ist der Grad der Inklusivität, d.h. je unbekannter ein Wissensbereich ist, umso inklusiver bzw. generalisierter müssen die „fassenden Einheiten“ sein (vgl. Ausubel 1960, S. 270). Die Präsentation der angemessenen und relevanten umfassenden Konzepte muss im Voraus erfolgen, um schon zu Beginn des neuen Lernprozesses Teil der kognitiven Struktur des oder der Lernenden zu sein (vgl. Ausubel 1960, S. 271).

Sowohl für die Lernenden als auch für die Lehrenden ergibt sich so eine klarere Orientierung innerhalb der Thematik (vgl. Wahl 2011, S. 6). Der oder die Lernende „vernetzt die wesentlichen Grundgedanken auf nachvollziehbare Weise. Dieses Wissensnetz können die Lernenden zweifach nutzen. Erstens können sie ihre eigene Vorkenntnis-Struktur auf die dargebotenen Zusammenhänge beziehen und Punkte entdecken, an denen Novizenstruktur und Expertenstruktur miteinander verknüpft werden können. Zweitens können einzelne Details an den allgemeinen Grundgedanken festgemacht werden. Dies ergibt eine gute Ordnung, die den späteren Abruf der einzelnen Inhalte erleichtert“ (Wahl 2011, S. 7).

Auch Hattie (2013) untersucht das Konzept des Advance Organizer als Beitrag des Unterrichtens zum Lernen. Er definiert Advance Organizer in Anlehnung an Stone (1983) „als Brücken vom bisherigen Wissen (des Lesers) zu dem, was gelernt werden soll; sie sollten abstrakter und einschließender sein als der spezifischere Stoff, der gelernt werden soll, und sie sollten ein Mittel zur Organisation des neuen Stoffes darstellen. […] Sie haben das Ziel, alte und neue Informationen zu verbinden. Da sie vor dem Lernen präsentiert werden sollen, können Advance Organizer die Lernenden dabei unterstützen, bevorstehenden Unterricht zu organisieren und zu interpretieren“ (Stone 1983, zitiert nach Hattie 2013, S. 199).

2.2.2.4. Nutzen dieser Mapping-Techniken bzw. Lernhilfen

Im Folgenden werden einige Ergebnisse zusammengestellt, die die Wirksamkeit der drei vorgestellten Lernhilfen belegen. Hierbei wird Bezug genommen auf Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl (2004). Sie haben Erkenntnisse aus der psychologischen und aus der pädagogischen Forschung zusammengestellt, die den Mehrwert von Mapping-Techniken zeigen:

Zum einen reduzieren diese Techniken die Komplexität eines Themas, Wesentliches und Unwesentliches wird leichter unterschieden; damit einher geht das Gefühl, die Fülle und den Umfang eines Themengebietes bewältigen zu können, indem die Kernpunkte und Schlüsselbegriffe erkennbar sind (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 9). Das knüpft an Banduras (1986) Überlegungen zur Selbstwirksamkeit an: Es ergibt sich ein „[erhöhter] Kräfteeinsatz im Lernprozess, weil er die Aussicht auf eine erfolgreiche Bewältigung steigert (vgl. Wahl 2011, S. 6)

Mapping-Techniken haben eine Visualisierungsfunktion: Es geht darum, abstrakte Zusammenhänge transparent zu machen, um sie so verstehen und abspeichern zu können; Maps schaffen dafür Metaphern oder Bilder (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 11).

Zudem kommt den Techniken eine Elaborationsfunktion zu: „Das Neue ergibt Sinn, weil man es in Bezug zu dem Wissen setzt, das man bereits hat. […] Je mehr und je besser man elaboriert, desto tiefer wird das erzielte Verständnis sein und umso dauerhafter wird das neu erworbene Wissen im Gedächtnis verankert“ (Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 12). Es werden Ideen untereinander und mit bereits vorhandenem Wissen anschaulich verknüpft (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 113).

Die Rolle der Aufmerksamkeit für die Aufnahme neuer Informationen wurde bereits mehrfach betont. Wahl (2011) stellt im Zusammenhang der Mapping-Techniken ebenfalls diesen Aspekt heraus: Der oder die Lernende kann seine oder ihre Aufmerksamkeit besser auf die für ihn oder sie wesentlichen Bereiche richten und sie so aktiv fokussieren (vgl. Wahl 2011, S. 5).

2.2.3. Steigerung der Gedächtnisleistung – Nutzung visueller Gedächtnistechniken

In diesem Unterkapitel wurde eingangs die Frage gestellt, wie sich die Gedächtnisleistung durch die Nutzung visueller Gedächtnistechniken steigern lässt. Um darauf eine Antwort zu geben, werden in diesem Abschnitt zunächst grundlegende Überlegungen zur Funktionsweise von Gedächtnistechniken angestellt. Anschließend wird eine Gedächtnistechnik vorgestellt, die gezielt mit visuellen Bildern arbeitet.

Ein grundlegender Mechanismus bei Gedächtnistechniken ist es, neue Informationen, die gelernt werden sollen, direkt zu verknüpfen mit Elementen, die bereits im Langzeitgedächtnis verankert sind (vgl. Seemüller & Dresler 2011, S. 88). Dieser Mechanismus wird in der Skilled Memory Theory noch weiter ausdifferenziert (vgl. Chase & Ericsson 1982; Ericsson 1985, zitiert nach Seemüller & Dresler 2011, S. 84): Bei der Enkodierung neuer Informationen wird auf die Wissensstrukturen des semantischen Langzeitgedächtnisses zurückgegriffen. Es werden Abrufhinweise im Langzeitgedächtnis bestimmt, die mit den neu einzuspeichernden Informationen assoziiert werden und später den Abruf erleichtern (vgl. Chase & Ericsson 1982; Ericsson 1985, zitiert nach Seemüller & Dresler 2011, S. 84). Dieser Ablauf kann durch Training immer weiter beschleunigt werden (vgl. Chase & Ericsson 1982; Ericsson 1985, zitiert nach Seemüller & Dresler 2011, S. 84). Durch neurologische Befunde sieht Ericsson (2003) die Theorie weiterhin bestätigt (vgl. Ericsson 2003, zitiert nach Seemüller & Dresler 2011, S. 87).

Einen zweiten Ansatz, um die Funktionsweise von Gedächtnistechniken zu erklären, liefert Karsten (2011). Danach kann die Gedächtnisleistung optimiert werden durch die folgenden mentalen Prozesse: Neue Informationen bekommen durch die Verbindung mit Bildern, durch semantische Verknüpfungen und durch Emotionen Bedeutung und Struktur (vgl. Karsten 2011, S. 58 f.). Das verursacht in verschiedenen Hirnarealen Aktivierung und erzeugt Anknüpfungspunkte im Langzeitgedächtnis, was wiederum die Merkleistung steigert (vgl. Butcher, 2000; Konrad & Dresler, 2007, zitiert nach Karsten 2011, S. 59). Metzig und Schuster (2016) ergänzen das, indem sie den Vorteil einer bildhaften Darstellung generell darin begründen, dass sie die simultane Verarbeitung mehrerer Elemente fördert und so die Geschwindigkeit und Genauigkeit beim Abruf einer bestimmten Information noch steigert (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 58 f.).

Karsten (2011) liefert in diesem Zusammenhang sieben Faktoren, die er bei der Anwendung von Mnemotechniken als besonders bedeutsam für ihre Wirksamkeit erachtet (vgl. Karsten 2011, S. 71 ff.):

- *Transformation*: Zu lernende abstrakte oder theoretische Inhalte werden in anschauliche und bedeutsame Inhalte umgewandelt (vgl. Karsten 2011, S. 71).
- *Assoziation*: Das umfasst zwei Arten: Zum einen reduziert die Assoziation zwischen neuen Lerninhalten die Menge der neu zu speichernden Informationen. Zum anderen wird das Lernen erleichtert, wenn neue Lerninhalte mit bereits im Langzeitgedächtnis vorhandenen verknüpft werden (vgl. Karsten 2011, S. 72).
- *Fantasie*: Einer zu lernenden Information werden nach Möglichkeit alle Sinne umfassende Informationen hinzugefügt (vgl. Karsten 2011, S. 73).
- *Emotion*: Zu lernende Inhalte werden bewusst mit emotionalisierenden Bildern angereichert (vgl. Karsten 2011, S. 73).
- *Logik*: Durch Logik und Kombinationsgabe wird neues Lernmaterial noch intensiver abgespeichert (vgl. Karsten 2011, S. 74).
- *Lokalisation*: Neues Lernmaterial wird beim Lernen gezielt an festen Orten verankert und kann so wieder lokalisiert und abgerufen werden (vgl. Karsten 2011, S. 74).
- *Visualisierung*: Die große visuelle Speicherfähigkeit des Gehirns (vgl. Standing 1973, zitiert nach Karsten 2011, S. 75) wird genutzt durch die Schaffung von mentalen Bildern zu neuen Inhalten (vgl. Karsten 2011, S. 75). Hierzu liefern Metzig und Schuster (2016) Ergebnisse von Düker und Tausch (1970), die zeigten, dass Informationen besser gelernt werden, wenn sie mit einem Bild gekoppelt sind. Dabei ist es nicht entscheidend, dass das Bild und der Inhalt kongruent sind; das Bild muss auch nicht unbedingt Anschauungsmaterial sein (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 56). Unter 2.1.2. wurde bereits gezeigt, dass in der mentalen Vorstellung auf visuelle Prototypen zurückgegriffen wird und es weniger um die fotografische Abbildung der Realität geht (vgl. Schumann-Hengsteller 1995, zitiert nach Metzig & Schuster 2016, S. 57). Entscheidend ist, dass die Fähigkeit zur Visualisierung aktiviert wird und für die neuen Inhalte Bilder entwickelt werden (Karsten 2011, S. 75).

Auf diesen Ausführungen aufbauend, wird nun eine Mnemotechnik vorgestellt, die im weiteren Verlauf der Arbeit eine wichtige Rolle spielen wird: die Locimethode. Sie findet seit 2.500 Jahren praktische Anwendung und ist damit eine der ältesten dokumentierten Gedächtnistechniken (vgl. McCabe 2015, S. 169).

Locimethode

Als Erfinder der Locimethode gilt der griechische Dichter Simonides (557 bis 468 v. Chr.). Bei dieser Methode wird eine bekannte Umgebung gewählt, in der bildliche Vorstellungen an verschiedenen Plätzen positioniert werden können (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 59). Diese bekannte Umgebung fungiert als Erinnerungshilfe: Die gewählten Orte können später in der Vorstellung abgelaufen werden, wobei dann die Informationen, die an den einzelnen Plätzen abgelegt oder positioniert und auf diese Weise verknüpft wurden, wieder abgerufen werden (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 59).

Um eine solche Ortsreihenfolge zu konstruieren, ist eine Folge von Orten auszusuchen, die an einem vertrauten oder gut bekannten Weg liegen (vgl. Metzig & Schuster 2016, 59). Die Orte werden abhängig von der Anzahl der zu lernenden Begriffe oder Inhalte ausgewählt; das Kriterium für ihre Auswahl ist, dass sie gut unterscheidbar sind und am besten möglichst gleichmäßig über die Wegstrecke verteilt liegen (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 60). Um beim imaginierten Ablaufen die Orte bemerken zu können, sollten sie visuell auffallen (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 60). Karsten (2011) empfiehlt „eine präzise Route […] auf der sich markante Plätze oder auch größere Objekte befinden“ (Karsten 2011, S. 67). Karsten (2011) formuliert neun Regeln, die beim Erstellen einer Ortsreihenfolge zu beachten sind und die eben genannten Punkte von Metzig und Schuster (2016) beinhalten sowie noch ergänzen (vgl. Karsten 2011, S. 69 f.):

- vertraute Umgebung
- eindeutige Reihenfolge
- einprägsame Routenpunkte
- mittlere Ausmaße des einzelnen Punktes
- mäßiger Abstand zwischen den Punkten
- dauerhafte Positionierung der einzelnen Orte
- ausreichende Unterschiedlichkeit
- festgelegter Betrachtungswinkel
- durchnummerierbar

Nach der Konstruktion der Ortsreihenfolge werden im zweiten Schritt die zu lernenden Begriffe oder Inhalte möglichst bildhaft mit den verschiedenen Orten verknüpft (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 61). Dabei empfehlen Metzig und Schuster (2016) interagierende oder sich durchdringende Bilder, die lebhaft und farbig gestaltet sind, und deren Vorstellung emotional aktivierend wirkt (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 62). Entscheidend ist, dass Inhalte, die dauerhaft abgespeichert werden sollen, jeweils ihre eigene „Wissensroute“ benötigen, d.h. dass die Anzahl der Routenpunkte der Anzahl an zu speichernden Informationen entsprechen muss (vgl. Karsten 2011, S. 68).

Sollen schließlich die Begriffe oder Inhalte abgerufen werden, so wird der Weg Ort für Ort abgeschritten. Dabei werden die Informationen in den automatisch aufkommenden Vorstellungsbildern wiedererkannt (vgl. Metzig & Schuster 2016, S. 59).

Die Locimethode rückte in den letzten 40 Jahren immer wieder in den Fokus wissenschaftlicher Forschung (vgl. McCabe 2015, S. 169). Im Folgenden werden einige Ergebnisse zu ihrer Wirksamkeit und ihren Auswirkungen auf Lernen und Gedächtnisleistung dargestellt:

So konnte McCabe (2015) zeigen, dass Lernende durch das gemeinsame Kennenlernen und Ausprobieren der Locimethode im Unterricht auch in zukünftigen Lernaufgaben selbstständig diese Technik einsetzten und dadurch ihre Erinnerungsleistung steigerten (vgl. McCabe 2015, S. 172). Die Lernenden wurden zusätzlich motiviert, die Technik kreativ und in unterschiedlichen Situationen anzuwenden (vgl. McCabe 2015, S. 172). Putnam (2015) wies in seiner Untersuchung über den Einsatz von Gedächtnisstrategien in der Bildung auf einen weiteren positiven Effekt abseits der Steigerung der Gedächtnisleistung hin: die Förderung der Lernmotivation (vgl. Putnam 2015, S. 137). In diesem Sinne wiederum findet sich bei McCabe die Verbesserung der Kenntnisse über das eigene Gedächtnis und die Erfahrung der Selbstwirksamkeit im Umgang mit den eigenen kognitiven Fähigkeiten (vgl. McCabe 2015, S. 172).

Kondo et al. (2005) wiesen eine Veränderung in der Hirnaktivität im Zusammenhang mit der Anwendung der Locimethode nach (vgl. Kondo et al. 2005, S. 1154). Dazu untersuchten sie in einer funktionalen MRT-Studie die Hirnregionen, die durch die Anwendung der Locimethode aktiviert werden, und spiegelten dadurch die Steigerung der Gedächtnisleistung beim Erinnern erlernter Inhalte (vgl. Kondo et al. 2005, S.1159).

Kliegl, Smith und Baltes (1989) wiesen in zwei Studien mit 65- bis 83-Jährigen und 19- bis 29-Jährigen erhebliche Leistungssteigerungen durch das Erlernen und Einüben der Locimethode nach (vgl. Kliegl, Smith & Baltes 1989, S. 247). Sie konnten zum einen zeigen, dass mit Hilfe der Locimethode selbst in höherem Alter noch enorme Steigerungen der Gedächtnisleistung zu erreichen sind; zum anderen belegten sie, dass dieser Effekt bei jüngeren Menschen sogar noch stärker ausfiel (vgl. Kliegl, Smith & Baltes 1989, S. 250).

2.3. Forschungsrahmen

Die Überlegungen der beiden vorherigen Unterkapitel haben gezeigt, dass für gelingendes Lernen die Strukturierung dessen, was gelernt werden soll, bedeutsam ist. Im ersten Unterkapitel wurde innerhalb des neurowissenschaftlichen Rahmens der Blick auf Erkenntnisse zum Aufbau und zur Funktionsweise des menschlichen Gedächtnisses gerichtet. Dabei lag der Fokus auf der Aufnahme, der Speicherung und dem Abruf deklarativer Wissensinhalte. Ziel war es, ein Verständnis dafür zu entwickeln, was beim Lernen dieser Wissensinhalte im Gehirn passiert.

Im zweiten Unterkapitel wurde dann aus der Perspektive der Lernpsychologie gezeigt, wie der Prozess des Lernens dem Gehirn entsprechend gestaltet werden kann: Die Struktur des zu Lernenden muss von Beginn an transparent und verständlich sein, damit für neue Wissensinhalte Anknüpfungsmöglichkeiten geschaffen und bereits bekannte Wissensinhalte mit anderen in Beziehung gesetzt werden können. So werden die Fähigkeiten und Fertigkeiten des Gehirns möglichst effektiv genutzt, um ein eigenes Wissensnetz aufzubauen.

Im Folgenden wird daraus zunächst das methodische Vorgehen der vorliegenden Arbeit abgeleitet (2.3.1.). Anschließend werden Kriterien für die Entwicklung der Lernhilfe im dritten Kapitel aufgestellt (2.3.2.).

2.3.1. Ausformulierung der Forschungsidee

Im Rahmen des Mathematikunterrichts baut jede*r Lernende ihr oder sein eigenes Wissensnetz zur Mathematik auf. Dabei ist das Ziel, dass alle Inhalte, die durch die Bildungsstandards definiert und in den gesetzlichen Planungsgrundlagen formuliert sind, Teil dieses Wissensnetzes werden. So entsteht in Kapitel 3 eine Lernhilfe, die den Aufbau dieses Wissensnetzes im Gehirn des oder der Lernenden begleiten und möglichst dem Gehirn entsprechend gestalten soll, und das auf Grundlage aller Inhalte der Mathematik der Sekundarstufe I.

2.3.1.1. Strukturierung aller Inhalte der Mathematik der Sekundarstufe I

In Kapitel 3 wird – der Tradition der Stoffdidaktik folgend – der Stoff des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I analysiert. Diese logische Analyse wird im Sinne Wittmanns (2015) noch ergänzt um den Blick auf die „Genese des Wissens im Verlauf der Schulzeit“ (vgl. Wittmann 2015, S. 250).

Dazu werden zunächst alle Inhalte der Sekundarstufe I gesammelt und auf Schlüsselwörter reduziert. Anschließend werden zwischen diesen Schlüsselwörtern mögliche Verbindungen erarbeitet. Diese müssen aus mathematischer Sicht korrekt und zugleich für die Lernenden in der Sekundarstufe I verständlich und nachvollziehbar sein. Basierend auf den Erkenntnissen aus den Abschnitten 2.2.2. und 2.2.3., werden die einzelnen Schlüsselwörter mit ihren Verbindungen zu einem großen Ganzen zusammengefügt, so dass aus der Liste mit mathematischen Inhalten ein Wissensnetz entsteht.

Hierzu passen einige Gedanken von Spitzer (2014) zum Lernen von Mathematik aus Sicht der Hirnforschung: „Mathematik ist abstrakt, genau das ist ihre Stärke. […] Gerade in der Mathematik ist […] die so viel zitierte Vernetzung der zu lernenden Inhalte von größter Bedeutung. Man sieht überhaupt nur, was Mathematik kann und wofür sie gut ist, wenn man ihre Allgemeinheit [im Sinne ihres Aufbaus und ihrer Struktur] einmal verstanden hat. Sie ist nicht sinnlos und weltfremd, sondern eher wie ein Schweizer Taschenmesser: immer und überall für alles Mögliche zu gebrauchen" (Spitzer 2014, S. 275).

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die in Kapitel 3 gezogenen Verbindungen zwischen den Schlüsselwörtern eine mögliche Strukturierung der Inhalte ergeben. Diese wird sowohl fachwissenschaftlich als auch fachdidaktisch begründet. Gleichwohl ließen sich vermutlich an einigen Stellen auch andere Verbindungen ziehen oder andere Darstellungsstrukturen wählen.

2.3.1.2. Visualisierung – Verknüpfung mit Weltkarte

Die Erkenntnisse zur Funktionsweise von Gedächtnistechniken (vgl. 2.2.3.) zeigen, dass die Verknüpfung neuer Inhalte mit bereits gespeicherten den Abruf der neuen Inhalte erleichtert und beschleunigt. Des Weiteren geht es darum, für neue Inhalte eine Struktur zu schaffen und sie für die Lernenden mit Bedeutung zu versehen, um so eine stärkere Aktivierung in verschiedenen Hirnarealen zu erzeugen und darüber mehr Anknüpfungspunkte im Langzeitgedächtnis zu generieren und schließlich auf diese Weise die Merkleistung zu steigern. In dieselbe Richtung zielten die Ausführungen zum Mind-Mapping (vgl. 2.2.2.1.): Auch hier wurde deutlich, dass eine kreative und visuell spannende Darstellung das Lernen fördert.

Somit geht es bei der Entwicklung der Lernhilfe darum, eine Visualisierung für das Wissensnetz der schulmathematischen Inhalte zu finden, das diese Aspekte berücksichtigt und anwendet. In Verbindung mit den Erkenntnissen zur Funktionsweise und zur Wirksamkeit der Locimethode unter 2.2.3. ergibt sich schließlich die konkrete Idee für die Visualisierung des Wissensnetzes der schulmathematischen Inhalte: Das Wissensnetz wird mit einer Weltkarte verknüpft. Die Themenbereiche der Schulmathematik werden den Kontinenten zugeordnet und bilden so die höchste

Gliederungsebene. Für die nächsten Gliederungsebenen stehen die Einteilung der Kontinente in Länder und dann jeweils die Karten zu einzelnen Ländern zur Verfügung. Dabei ist es das Ziel, jedem Schlüsselbegriff aus dem Wissensnetz einen Ort auf der Welt zuzuordnen. Auf diese Weise entsteht der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I*.

Zwei Einschränkungen sind zu treffen: Erstens handelt es sich dabei nicht um eine mathematisch definierte Projektion aus der Menge der Schlüsselbegriffe auf die Menge der Orte auf der Weltkarte. Und zweitens werden Distanzen und geografische Eigenschaften außer Acht gelassen.

2.3.2. Ableitung von Kriterien aus 2.1. und 2.2.

Im Abschnitt 2.2.2. wurden drei Lernhilfen vorgestellt, die mit der Strukturierung von Lerninhalten arbeiten: Mind-Maps, Concept-Maps und vorangestellte Organisationshilfen. In diesem Abschnitt werden daran anknüpfend und auf Basis der Erkenntnisse aus den Unterkapiteln 2.1. und 2.2. Kriterien formuliert, die bei der Entwicklung des Wissensnetzes, das im *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* visualisiert wird, Anwendung finden. Dabei lässt sich dieser Atlas nicht einer der drei vorgestellten Lernhilfen allein zuordnen. Es werden einzelne Elemente aus allen dreien aufgegriffen und zusammengeführt.

Die Inhalte, die das Wissensnetz der Schulmathematik der Sekundarstufe I bilden, sind durch die gesetzlichen Planungsgrundlagen festgelegt. Ihre Verbindungen entstehen durch inhaltliche Beziehungen, die aus mathematischer Sicht zwischen ihnen existieren. Allgemein sollen die folgenden vier Punkte, die aus den Ausführungen im Abschnitt 2.2.2. abgeleitet werden, für die Struktur des gesamten Wissensnetzes gelten:

- Die Komplexität des Netzes soll möglichst gering gehalten werden. Die Konzentration liegt auf dem Wesentlichen, und der Umfang des gesamten Themas ist transparent. Deshalb werden zusammenhängende Netze auf einer Seite dargestellt.
- Zusammenhänge werden sichtbar.
- Die Vernetzungen der Begriffe untereinander sind sinnstiftend, d.h. sie liefern einen inhaltlichen Mehrwert zu den verbundenen Begriffen.
- Die Darstellung generiert Aufmerksamkeit und hilft, den Fokus auf einzelne Aspekte zu richten.

In Anlehnung an eine Mind-Map (siehe 2.2.2.1.) werden die Schlüsselbegriffe nach thematischer Nähe angeordnet und miteinander verbunden. Durch die Verknüpfung des Netzes mit der Weltkarte wird der Forderung nach einer kreativen und visuell anregenden Darstellung entsprochen.

In Anlehnung an eine Concept-Map (siehe 2.2.2.2.) wird die Darstellungsstruktur nach der inhaltlichen Struktur gewählt und zwischen Unterthemen bei Bedarf variiert. Die Netze werden dort hierarchisch aufgebaut, wo dies den Inhalt spiegelt. Neben den Schlüsselbegriffen selbst werden so auch die „logisch-semantischen Beziehungen zu anderen Begriffen“ (Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 6 f.) dargestellt. Die Verbindungen werden im zugehörigen Text benannt und charakterisiert. Da das Wissensnetz aufgrund der Vielzahl der Schlüsselbegriffe zu allen Inhalten der Schulmathematik in der Sekundarstufe I reich bestückt sein wird, bleiben die einzelnen Verbindungen innerhalb des Netzes – jeweils eine einfache Linie – unbenannt. Somit wird in der Visualisierung nur dargestellt, dass eine Verbindung zwischen zwei Schlüsselbegriffen besteht. Von welcher Art eine Verbindung ist, und welche Informationen hinter ihr liegen, dieses Wissen erwirbt der oder die Lernende während des Lernprozesses.

In Anlehnung an eine vorangestellte Organisationshilfe bzw. einen Advance Organizer (siehe 2.2.2.3.) wird das organisatorische Prinzip der fortschreitenden Differenzierung gewählt. Das wird deutlich an der Übertragung auf das Konzept des Atlas: Die Weltkarte bildet die höchste Gliederungsebene, gefolgt von den einzelnen Kontinenten und dann Ebene für Ebene weiter ins Detail gehend. Der Grad der Inklusivität bleibt damit variabel.

Nückles, Gurlitt, Pabst und Renkl (2004) empfehlen eine Reihe von Schritten zur Erstellung einer Concept-Map (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 17 f.). In dieser Arbeit übernommen werden die folgenden: Zunächst wird das Inhaltsgebiet festgelegt und dazu eine Liste aller Schlüsselbegriffe erstellt, die zum Thema bekannt sind; das Thema wird ins Zentrum der Arbeitsfläche geschrieben; dann werden die Schlüsselbegriffe durchgesehen, um den umfassendsten zu wählen und in einen neuen Knoten zu schreiben; nun wird eine Verbindung zwischen diesen beiden ersten Begriffen gezogen; es folgt der nächste Schlüsselbegriff, der dem bereits notierten, mit dem er in Beziehung steht, zugeordnet wird; auch hier wird eine Verbindung gezogen; bei der Anordnung soll sinnvoll gruppiert werden, d.h. was zusammengehört, wird räumlich nah beieinander positioniert; nach Möglichkeit sollen Überschneidungen von Verbindungslinien vermieden werden (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 17).

Die Autoren weisen darauf hin, dass, bezogen auf das gesamte Netz, die Übersichtlichkeit wichtig ist. Dazu empfehlen sie, den Fokus auf die wesentlichen Aspekte eines Themas zu legen; die Verbindungslinien sollten sich möglichst wenig überschneiden; an manchen Stellen kann eine neue Concept-Map beispielsweise zu einem Unterthema für mehr Klarheit sorgen; die Darstellungsstruktur sollte abhängig von der inhaltlichen Struktur gewählt werden (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 18).

Die hier aus den einzelnen Lernhilfen entnommenen und zusammengeführten Kriterien dienen nun in Kapitel 3 zur Erstellung einer neuen Lernhilfe, des *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I*.

3. Praktische Umsetzung – Entwicklung der Atlaskarten

In diesem Kapitel führt der Weg in die praktische Umsetzung. Im Fokus steht die Beantwortung der Forschungsfrage, die in der Einleitung unter 1.2. als erste formuliert wurde. Sie lautet: Wie lassen sich die Inhalte der Mathematik der Sekundarstufe I so in einem Netz darstellen, dass die gezogenen Verbindungen mathematisch korrekt sind, und dass durch sie die existierende mathematische Struktur deutlich wird?

Die Antwort wird, wie unter 2.3.1. beschrieben, in zwei Schritten entwickelt. Im ersten Unterkapitel werden alle Inhalte, um die es im Rahmen des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I geht, erfasst und in Schlüsselbegriffen festgehalten. Im zweiten Unterkapitel werden diese Schlüsselbegriffe miteinander in Beziehung gesetzt. Die Verbindungen zwischen ihnen werden in Netzen visualisiert und parallel im Text beschrieben. Dabei sollen sie sowohl dem fachmathematischen Anspruch gerecht werden, als auch fachdidaktische Überlegungen miteinbeziehen.

In einem dritten Schritt werden diese Wissensnetze in eine Weltkarte eingebettet. So entsteht eine Lernhilfe, die die Kriterien von 2.3.2. erfüllt und damit auf die Funktionsweise des Gehirns abgestimmt ist und in ihrem Aufbau das Lernen, Speichern und Erinnern mathematischer Inhalte möglichst gut unterstützt.

3.1. Welche Inhalte müssen auf die Karten?

Zunächst geht es darum, all jene Inhalte zu sammeln, die von den Lernenden im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I erlernt werden sollen. Als verbindliche Quelle für diese Inhalte werden die gesetzlichen Planungsgrundlagen, die Lehrpläne für Mathematik, verwendet. Sie legen fest, „was im Unterricht behandelt werden soll“ (IDM-AECC-M 2007, S. 3). Wie in der Einleitung unter 1.1. bereits erwähnt, liegt die Entwicklung der Lehrpläne in Deutschland in der Hand der einzelnen Bundesländer. Gemeinsam gründen alle Lehrpläne auf den Vorgaben der KMK, die diese in ihren allgemeinen Bildungsstandards zum Mittleren Schulabschluss veröffentlicht hat (vgl. KMK 2004).

An dieser Stelle sei festgehalten, dass diese Quelle genutzt wird in dem Wissen, dass jeder Lehrplan ein normatives Instrument ist, das auf die reinen fachwissenschaftlichen Inhalte angewendet wurde. Die genannten Themengebiete und Inhalte und die zu entwickelnden Kompetenzen sind immer eine Auswahl, die von einer Gruppe von Autor*innen auf Basis politischer Vorgaben getroffen wurde. Ein Lehrplan erhebt somit nicht den Anspruch auf Vollständigkeit aus fachwissenschaftlicher Sicht.

Es geht nun um die folgende Eingrenzung: Die Frage nach dem, was im Rahmen des Mathematikunterrichts erlernt werden soll, führt im deutschsprachigen Raum zu einem dreidimensionalen Modell mathematischer Kompetenzen (vgl. SenBJF & MBJS 2020, S. 5). Dieses Modell gibt ein Bild davon, was mathematische Bildung umfasst. Mathematische Kompetenzen setzen sich demnach aus drei Dimensionen zusammen: einer Handlungsdimension, einer Inhaltsdimension und einer Komplexitätsdimension (vgl. IDM-AECC-M 2007, S. 9). Oder anders formuliert: Es geht im Mathematikunterricht immer um eine Verknüpfung aus „prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen, inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen […] und Anforderungsbereichen, die eine Orientierung für den kognitiven Anspruch mathematischen Handelns geben“ (SenBJF & MBJS 2020, S. 5). Kompetenzerwerb findet nie isoliert in einer Dimension statt (vgl. SenBJF & MBJS 2020, S. 6). In der vorliegenden Arbeit wird jedoch eine Dimension in den Fokus genommen: Es werden die mathematischen Inhalte analysiert, um die es im Rahmen der Sekundarstufe I geht. Die zu entwickelnde Lernhilfe bildet genau diesen Bereich, genau diese Dimension mathematischer Kompetenzen ab.

3.1.1. Begründung der Auswahl der verwendeten Lehrpläne

Die Arbeit wird als Dissertation in Berlin eingereicht und speist sich in ihrer Idee aus den Erfahrungen in der Berliner Schulpraxis. Daher wird als primäre Quelle der Teil C für Mathematik des Rahmenlehrplans für die Jahrgangsstufen 1 bis 10 für Berlin und Brandenburg verwendet. Als Ergänzung werden die bayerischen Mathematiklehrpläne für die Grundschule, die Mittelschule, die Realschule und das Gymnasium analysiert. Dahinter stehen zwei Überlegungen: Zum einen existieren in Bayern drei schultypspezifische Lehrpläne für die Sekundarstufe I, was eine andere Schwerpunktsetzung als in Berlin und Brandenburg deutlich macht. Zum anderen liegt Bayern deutschlandweit regelmäßig in der Spitzengruppe bei Vergleichsarbeiten in Mathematik in der Sekundarstufe I (vgl. Roppelt, Penk, Pöhlmann & Pietsch 2013, S.139; vgl. Mahler & Kölm 2019, S. 209). Mit der Wahl der Lehrpläne dieser drei deutschen Bundesländer wird eine möglichst umfangreiche Sammlung aller Lerninhalte der Sekundarstufe I angestrebt.

Um die Inhalte der drei deutschen Bundesländer noch zu erweitern, die wie oben beschrieben aus denselben Bildungsstandards der KMK (2004) entwickelt wurden, wird der Blick außerdem über die Landesgrenzen hinaus in den deutschsprachigen Teil der Schweiz und nach Österreich gerichtet. Der Fokus liegt hierbei auf weiteren, in den verwendeten deutschen Lehrplänen noch nicht genannten Inhalten. Aus der Schweiz wird der Lehrplan 21 Mathematik (D-EDK 2016) verwendet; er bildet das gemeinsame Planungsinstrument für die 21 deutsch- und mehrsprachigen Kantone der Schweiz und formuliert die verbindlichen Inhalte der obligatorischen Schulstufen (vgl. D-EDK 2021). Auf dieser Grundlage entwickeln die einzelnen Kantone ihre individuellen Lehrpläne. Damit gleicht der Lehrplan 21 in seiner Bedeutung den Bildungsstandards der KMK. Aus Österreich wird der Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schule (AHS), deren Ziel die Vermittlung einer umfassenden und vertieften Allgemeinbildung ist, gewählt und der für alle Bildungsregionen gleichermaßen gilt (vgl. BMBWF 2021).

3.1.2. Darstellung der entstandenen Begriffslisten

Wie in 2.3.2 formuliert, werden in einem ersten Schritt alle mathematischen Inhalte in Schlüsselbegriffen gefasst und aufgelistet. Dafür wird zunächst, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, das für Berlin und Brandenburg gültige Dokument verwendet. Nach Formulierung aller darin enthaltenen Inhalte werden die drei anderen Lehrpläne sowie die Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (KMK 2004) analysiert und bislang fehlende Inhalte ergänzt.

Die KMK stellt in ihren Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss die Inhalte nach den folgenden fünf Leitideen geordnet dar: *Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionaler Zusammenhang* und *Daten und Zufall* (vgl. KMK 2004, S. 9). In den untersuchten deutschen Lehrplänen werden darauf aufbauend die Inhalte ebenfalls untergliedert und nach Themenbereichen sortiert. Auch in den Lehrplänen aus der Schweiz und Österreich finden sich ähnliche Untergliederungen. Tabelle 1 gibt einen Überblick über diese Themenbereiche.

Tabelle 1: Überblick über die Themenbereiche

KMK	**Berlin & Brandenburg**	**Bayern**	**Schweiz**	**Österreich**
(KMK 2004, S. 9)	(SenBJF & MBJS 2020, S. 5)	(ISB 2010, S. 30)	(D-EDK 2016, S. 6)	(IDM-AECC-M 2007, S. 9)
• Zahl • Messen • Raum und Form • Funktionaler Zusammen-hang • Daten und Zufall	• Zahlen und Operationen • Größen und Messen • Raum und Form • Gleichungen und Funktionen • Daten und Zufall	• Zahlen • Geometrie • Funktionen • Stochastik	• Zahl und Variable • Form und Raum • Größen, Funktionen, Daten und Zufall	• Zahlen und Maße • Geometrische Figuren und Körper • Variable, funktionale Abhängigkeit-en • Statistische Darstellungen und Kenn-größen

Um die Formulierung der Inhalte in Form von Schlüsselbegriffen übersichtlich zu gestalten, wird die Untergliederung in Themenbereiche auch in dieser Arbeit genutzt. Es entstehen fünf Begriffslisten, entsprechend der für Berlin und Brandenburg formulierten fünf Themenbereiche. Die in den anderen Lehrplänen gefundenen Inhalte werden im Anschluss an den entsprechenden inhaltlich passenden Stellen ergänzt und in der Tabelle durch unterschiedliche Schriftstile kenntlich gemacht.

An dieser Stelle findet noch eine kurze Abgrenzung statt: In Anlehnung an die Überlegungen von Nückles, Gurlitt, Pabst und Renkl (2004) werden Schlüsselbegriffe formuliert, die dann in Netzen miteinander verknüpft werden. Dabei ist „Schlüsselbegriff" hier zu verstehen als Wort oder Wörter, die möglichst gut einen Inhalt fassen bzw. benennen (Nückles, Gurlitt, Pabst und Renkl 2004, S. 17). Bei Weigand (2014) taucht im Rahmen des Begriffslernens ebenfalls die Bezeichnung „Schlüsselbegriff" auf; er nutzt diese Bezeichnung jedoch als Impuls zur Strukturierung der Inhalte der Geometrie und unterscheidet ihn von „Leitbegriffen" und „Standardbegriffen", je nachdem, ob ein Begriff mittel-, lang- oder kurzfristig gelernt wird (vgl. Weigand 2014a, S.115 ff.). Diese Unterteilung findet in der vorliegenden Arbeit nicht statt. Hier werden als Schlüsselbegriffe die in den angegebenen Quellen benannten Inhalte in entsprechende Worte gefasst, die kurz und prägnant die Bedeutung wiedergeben.

Daraus ergeben sich die nun folgenden tabellarisch dargestellten Listen aller Inhalte, die es im Rahmen des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I zu erkunden und zu erlernen gilt.

Die unterschiedlichen Schriftstile spiegeln die folgende Zuordnung der entsprechenden Lehrpläne: normal: aus Berlin/Brandenburg, *kursiv*: aus Bayern, **fett**: aus Österreich, <u>unterstrichen</u>: aus der Schweiz.

Tabelle 2: Begriffsliste zum Themenbereich „Raum und Form"

R	**R^2 - ebene Figuren**	**R^3 - geometrische Körper**
Punkt	Viereck	Würfel
	Kreis	Quader
	Dreieck	Kugel
	Quadrat	Zylinder, **Drehzylinder**
	Rechteck	Prisma
	Parallelogramm	Kegel, **Drehkegel**
	Trapez	gerade Pyramide

R	R^2 - ebene Figuren	R^3 - geometrische Körper
	Drachenviereck	schiefe Pyramide
	Raute	Tetraeder
	Teilflächen	Teilkörper
	Zusammengesetzte Flächen	Zusammengesetzte Körper
	ebene Figuren	Differenzkörper
	Differenzflächen	Würfelbauten
	Körpernetze	(massstabsgetreue) Modelle
	Schrägbilder (Verzerrungswinkel, -maßstab, Schrägbildachse)	
	strukturierte Flächen	
	Baupläne	
	Seiten-, Vorder-, *Ansicht*	
	Aufsichten	
	geometrische Muster	
	Parkettierungen	
	Flächenornamente	
	Axialschnitte von Rotationskörpern	
	Lagepläne	
	Grundrisszeichnungen	

Bestandteile von Objekten	Abbildungen	Beziehungen/Sätze
Eckpunkt	Symmetrie	Dreiecksarten (Systematisierung nach Winkelgrößen und Seitenlängen)
Kante	Spiegelsymmetrie	
Seite	Drehsymmetrie	Haus der Vierecke
(Einheits-) Strecke	Verschieben	Lagebeziehungen (Punkt/ Gerade, Gerade/Gerade, Punkt/Ebene, Gerade/Ebene, Ebene/Ebene)
Strahl / *Halbgerade*	Drehen	
Gerade	Spiegeln	*Lagebegriffe (schneidend, parallel, senkrecht, windschief)*
Winkel (Schenkel, Scheitelpunkt)	Punktspiegelung	
rechter Winkel	*Drehwinkel*	Größenbeziehungen
spitzer Winkel	*Drehzentrum*	Winkelbeziehungen

Bestandteile von Objekten	**Abbildungen**	**Beziehungen/Sätze**
stumpfer Winkel	*Drehung um +/-90° und +/-180°*	(Scheitel-, Neben-, Stufen-, Innenwinkel)
gestreckter Winkel	Vergrößern	Dreieck: gleichschenklig, gleichseitig
Höhe	Verkleinern	
Seitenhalbierende	Kongruenzabbildungen (Längen- und Winkeltreue, *Geraden-, Parallelen-, Kreistreue*)(Umkehrbarkeit, Umlaufsinn, Lage von Ur- und Bildgeraden, Fixelemente)	Konstruktion von Dreiecken
Winkelhalbierende		*Wege*
Mittelsenkrechte		Winkelsätze
Kathete		Dreiecksungleichung
Hypothenuse/Basis	*Parallelverschiebung*	Kongruenzsätze
Senkrechte	Ähnlichkeitsabbildung	Satz des Thales
Parallele	*Strahlensätze*	*Satzgruppe des Pythagoras*
Diagonale	*zentrische Streckung (Urpunkt, Bildpunkt, Streckungsfaktor, Goldener Schnitt)*	Satz des Pythagoras
Abstand/Entfernung		Höhensatz
Kreislinie		Kathetensatz
Ortslinie und Ortsbereich		trigonometrische Beziehungen
Tangente		Innenwinkelsumme von Vielecken
Kreisbogen/Bogenmaß		Peripheriewinkelsatz
Mittelpunktswinkel		
Kreisring		
Kreissektor/-ausschnitt		
Radius		
Durchmesser		
Schnittpunkt / -gerade		

Fundamentalkonstruktionen	**Problemlösestrategien**
Spiegelpunkt und Achse	Zerlegen in Teilflächen
Mittelsenkrechte	Rückführung auf Flächen durch Netze/Schrägbilder
Lot	Auslegen mit Einheitsquadraten
Winkelhalbierende	Annähern durch Außen- und Innenquadrate
Spiegelpunkt und Zentrum	Zerlegen in Teilflächen oder Sektoren
Umkreis	Prinzip von Cavalieri
Inkreis	

Fundamentalkonstruktionen	**Problemlösestrategien**
Schwerpunkt	
Dreiecke aus Winkel- und Seitenmaßen	
Tangente an Kreis durch Punkt außerhalb des Kreises	

Tabelle 3: Begriffsliste zum Themenbereich „Größen und Messen"

Messinstrumente (MI) auswählen & nutzen	**Größenvorstellungen entwickeln**	**Maßeinheiten**
selbstgefertigte MI	Repräsentanten und Stützpunktvorstellung	situationsangemessenes Verwenden der Einheiten
Genormte MI		
Skala	Skizzen und Zeichnungen nutzen	Bruchteile von Größen (gemeine Brüche, Dezimalschreibweise)
Lineal	Bezugsgrößen nutzen	
Maßband	*funktionale Beziehungen nutzen*	Bruchzahlen bei Größenangaben
Uhr	Maßeinheiten ineinander umrechnen	Zerlegungsprinzip
Kalender		Ergänzungsprinzip
Maßzahl	Maßstäbe	erweiterte Stellenwerttafel
Messergebnis		Einheitsgedanke
Messgerät		
(standardisierte) Maßeinheit		

Winkel	**Länge**	**(Ober-)Flächeninhalt**	**Volumen**
Bogenmaß	Umfang als Länge	Oberflächeninhalt von Körpern (mit Formel für gerades Prisma, Kreiszylinder, zusammengesetzte Körper, gerade Pyramide, geraden Kreiskegel, Kugel)	Hohlmaße
Gradmaß	Formel Umfang von Vielecken, geradlinig und krummlinig begrenzten Figuren, Kreisen, Kreisteilen		Formel beim geraden Prisma, Kreiszylinder, zusammengesetzte Körper, gerade Pyramide, gerader Kreiskegel, Kugel
	Satz des Pythagoras		
Sinus		Formel beim Dreieck, Viereck, Kreis, Parallelogramm, zusammengesetzte ebene Figuren	Satz von Cavalieri bei schiefen Prismen, Zylindern, Pyramiden
Kosinus			
Tangens			
Sinussatz			
Kosinussatz			

Zeit	Geld	Masse
Zeitpunkt	Stückelung	
Zeitspanne/-dauer	Preis	
	Betrag	

Umgang mit Ergebnissen
Prüfen auf Plausibilität
Überschlagsrechnung
Schätzen
Näherungsrechnungen
kritisches Bewerten
sinnvolles Runden
sinnvolle Genauigkeit

Tabelle 4: Begriffsliste zum Themenbereich „Zahlen und Operationen“

Natürliche Zahlen	Ganze Zahlen	Rationale Zahlen	Reelle Zahlen	besondere Zahlen
Mengen erfassen	Vorzeichen	Bruchteil	Pi	Potenzen (Begriffe: Potenz, Basis, Exponent)
Mengen darstellen	Kleiner-Größer-Relation	Stammbruch	Quadratwurzeln	
Mengen (ent-)bündeln		Brüche als Anteile	Näherungswerte	Potenzschreibweise
	geogr. Höhe	Brüche als Verhältnis	**Schranken finden**	Quadratzahlen
Zahldarstellungen	*Thermometer*	Bruch als Quotient	Intervallschachtelung	Primzahlen
Schreiben von Ziffern	*Zahlengerade/-strahl*	Dezimaldarstellung	*numerische Verf.*	
		Prozentdarstellung		
Stellenwertsystem im Zehnersystem (auch Dezimal)	*Zustände*	gemischte Zahlen		
	Kontostand	Dichtheit		
Zahlensysteme (Dual-, römisches System)		Bruch als Operator		
		Prozent als Operator		
Anzahlen schätzen		*Pfeildarstellung*		

Natürliche Zahlen	**Ganze Zahlen**	**Rationale Zahlen**	**Reelle Zahlen**	**besondere Zahlen**
Kardinalzahl-aspekt		*grafische Darstellung: Kreissektor, Rechtecksanteil,* Zahlengerade		
Ordinal-zahlaspekt				
Rechenaspekt				
Maßzahlaspekt		Prozentsatz als: vergleichbarer Anteil		

Hantieren mit Zahlen	**Zahlbeziehungen beschreiben**
Zahl auf Zahlengerade orten	Mengen zerlegen
Zahl als Fingerbild zeigen	additives Zahlzerlegen
Zahlreihen aufsagen	Unterscheiden nach gegebenen Kriterien (z.B. gerade/ungerade)
Vergleichen	
(An-) Ordnen	Zahlenfolgen bilden, weiterführen, verändern
sachgerechtes Runden	Vielfache / kgV
Prozentsatz, -wert, Grundwert*	Teiler / ggT
*Zählen (*in unterschiedlichen Schritten, vorwärts und rückwärts*)*	*Primfaktorzerlegung*
	Teilbarkeitsregeln
	Betrag / Gegenzahl
	Zahlbereichserweiterungen

Darstellungs-weisen	**Addition**	**Subtraktion**	**Multiplikation**	**Division**
Handlung	Hinzufügen	Wegnehmen	wiederholtes Hinzufügen gleicher Anzahlen	Aufteilen
Sachverhalt	Vereinigen	Unterschied		Verteilen
Notation	Zustandsände-rung	Zustandsände-rung	Anteilbildung	Bruch kürzen
Bild		Addition d. Ggzahl	Bruch erweitern	Mult. mit Kehrwert
Rechenwege darstellen, beschreiben, austauschen und nachvollziehen			x(-1) als Inversion	Division mit Rest
			zeitlich-sukzessives Vervielfachen	

Darstellungs-weisen	Addition	Subtraktion	Multiplikation	Division
Durchführung der Rechenoperationen: schriftlich, halbschriftlich, im Kopf, mit steigender Anzahl an Wertziffern			*räumlich-simultane Gegebenheit*	
			Zählprinzip	

Potenzieren	Radizieren	Logarithmieren
als fortgesetzte Mult.	als Umkehroperation zum Quadrieren	

Rechenstrategie	Rechengesetze	Ergebnisüberprüfung	*Aufgabentypen*
Strategien beim Kopfrechnen	Kommutativ-gesetz	Kontrollrechnungen	*Umkehraufgaben*
Kleines 1+1	Assoziativgesetz	Überschlagen	*Tauschaufgaben*
Kleines 1x1	Distributivgesetz	Abschätzen	*analoge Aufgaben*
Dreisatz*	gleich- und gegensinniges Verändern	Rückschau halten	*Nachbaraufgaben*
Verhätnisgleichungen*			Anweisungen zu Handlungs-sequenzen/ Flussdiagramme
Rückführen auf bekannte Strukturen	Potenz-vor-Punkt-vor-Strich		
arithmetische Muster finden			
systematisches Probieren	Klammerregel		
Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten	Potenzgesetze		
Rechnen in Schritten	Wurzelgesetze		

* Verbindung zum Themenbereich „Gleichungen und Funktionen“

Tabelle 5: Begriffsliste zum Themenbereich „Gleichungen und Funktionen“

Bestandteile/Elemente	Termbegriff	äquivalentes Umformen
Variablen	außer- und innermathematische Sachverhalte und Zusammenhänge	Vorzeichenregeln
Notation algebraischer Terme		Kommutativgesetz
Termwert		Assioziativgesetz
Wurzelterme	erfassen und beschreiben	Distributivgesetz
Terme mit Potenzen	vergleichen	*Faktorisieren*
graphische Darstellung	begründen	binomische Formeln

Bestandteile/Elemente	**Termbegriff**	**äquivalentes Umformen**
symbolische Darstellung		quadratische Ergänzung
sprachliche Darstellung		*Additionstheoreme*
		Potenzgesetze
		Wurzelgesetze

Gleichungstypen	**Lösungsverfahren**	**Lösungskontrolle**
einfache Gleichungen	*Äquivalenzumformungen*	rechnerisch
lineare Gleichungen	Lösbarkeit	in Bezug auf Sachkontext
Verhältnisgleichungen	Lösungsvielfalt	Umkehroperation
Bruchgleichungen	systematisches Probieren	
quadratische Gleichungen	rechnerisch	
Gleichung mit Parameter	grafisch	
Ungleichung	**Fallunterscheidung**	
Exponentialgleichungen	**Näherungsverfahren**	
Gleichungen mit höheren Potenzen	Logarithmus + *Rechenregeln*	
Gleichungen mit Wurzeln	Faktorisieren	
Spezialfälle aus der Trigonometrie: sin²@ + cos²@ = 1 und tan@ = sin@/cos@	Substituieren	
	Polynomdivision	

Art des Gleichungssystems	**Lösungsverfahren**	**Lösungsherausforderungen**
lineares Gleichungssystem (2 Variablen)	grafisch	Lösbarkeit
lineares Gleichungssystem (3 Variablen)	systematisches Probieren	Lösungsvielfalt
quadratisches Gleichungssystem	rechnerisch/algebraisch	
Schnittprobleme	Additionsverfahren	
	Einsetzungsverfahren	
	Gleichsetzungsverfahren	

Zuordnungsbegriff annähern	**Zuordnungsbegriff**	**Übergang zum Funktionsbegriff**
Ordnen von Objekten nach Eigenschaften	direkt proportionale Zuordnung	linearer Zusammenhang
	indirekt proportionale Zuordnung	funktionaler Zusammenhang

Zuordnungsbegriff annähern	**Zuordnungsbegriff**	**Übergang zum Funktionsbegriff**
Zuordnungen in Alltagszusammenhängen	*Begriffe: verhältnis- bzw. quotientengleich, produktgleich, Proportionalitätsfaktor, Ursprungshalbgerade*	<u>Wertetabelle</u>
geometrische Muster		Funktionswert
arithmetische Muster		Funktionsgraph
Bildungsregeln von Mustern		Funktionsgleichung
multiplikative Zusammenhänge in Alltagssituationen		
direkte und indirekte Proportionalität		

Funktionsfamilien	**Funktionsglei-chung**	**zu untersuchende Merkmale**
lineare Funktionen	$y = ax + b$	Steigung, *Steigungsdreieck, m = tan@*
		Änderungsrate
		Nullstelle
		y-Achsenabschnitt
		Einfluss der Parameter auf den Verlauf des Graphen
		Funktionsgleichung achsenparalleler Geraden
		orthogonale bzw. parallele Geraden
		Parallelenscharen
quadratische Funktionen	$y = a\,(x+d)^2 + e$	Definitionsbereich
	$y = ax^2 + bx + c$	Wertebereich
		Parabelscharen (Trägergraphen)
		Lösungsformel und Diskriminante
trigonometrische Funktionen	$y = a \sin(x)$	Form des Graphen
	$y = a \sin(bx+c) + d$	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
	$y = a \cos(bx)$	Einfluss der Parameter auf den Verlauf des Graphen (Streckung, Stauchung, Verschiebung)
Exponentialfunktionen	$y = a\,b^x$ (b größer 0, x aus N)	
		Symmetrie
	$y = a\,b^x + c$ (b größer 0)	Öffnungsrichtung
		Scheitelpunkt

Funktionsfamilien	Funktionsgleichung	zu untersuchende Merkmale
Potenzfunktionen	$y = ax^k + b$ (k aus Z und k aus Q_+)	Periodizität
		Änderungsverhalten (ausgewählter ganzrat. Fktn.)
		Angabe markanter Punkte (Hoch-, Tief-, Wendepunkt)
		Verhalten an den Definitionsrändern
		Grenzwertbegriff, Gernzwertschreibweise
		Gleichung der Asymptote bestimmen
		Änderungsmaße (absolute & relative Änderung, Differenzenquotient)
Umkehrfunktion zu linearen Fktn, Exponentialfktn und Potenzfktn mit ganzzahligem Exponenten		

Zuordnungs- oder Funktionstyp	Darstellungsformen
geometrische Muster	nachlegen, nachbauen, ausmalen
arithmetische Muster	herstellen nach Bildungsregel
	Ausfüllen von Lücken in Folgen
	Fortsetzen einfacher Folgen
	symbolische Darstellung
Zuordnungen (prop. & ind. prop.)	sprachlich
	tabellarisch
	grafisch im Koordinatensystem
	mittels Pfeilen/symbolisch
alle Funktionsfamilien	sprachlich
	tabellarisch
	grafisch im Koordinatensystem
	Funktionsgleichung

Zuordnungs- und Funktionstyp	Anwendung
direkte und indirekte Proportionalität vs. nicht proportional!	Vervielfachen von Größen
	Ermitteln und berechnen von Größen
	Verhältnisgleichungen
	Zusammenhang Kreisumfang/-fläche und Radius
	Dreisatz

Zuordnungs- und Funktionstyp	**Anwendung**
	Prozentrechnung
	Maßstab
	Zinsrechnung
jeweils bekannte Funktionstypen	Modellieren von Problemstellungen
	Schnittpunkte von Funktionsgraphen berechnen
ganzrationale Funktionen	mittlere und lokale Änderungsrate
Exponential- und Logarithmusfktn.	Anfangs- und Endwerte
	Wachstumsfaktoren und -raten
	Zinseszinsrechnung

Begriffe Prozentrechnung	***Begriffe im Zusammenhang***	***Begriffe Zinsrechnung***
Prozentsatz (als Faktor)	*Preiserhöhung und -senkung*	*Zinssatz*
Prozentwert	*Skonto*	*Zinsen*
Grundwert	*Umsatzsteuer*	*Kapital*
Rabatt	*Brutto-, Nettogewicht, Tara*	*Verzinsungszeit*
Promillerechnung	*Einkaufspreis*	*Jahres-, Monats- und Tageszinsen*
	Handlungskosten	
	Selbstkosten	
	Gewinn	
	Verlust	
	Brutto-, Nettoverkaufspreis	

Tabelle 6: Begriffsliste zum Themenbereich „Daten und Zufall“

Datenerhebung	**Veranschaulichung**	**Interpretation**
Daten sammeln, erfassen, ordnen, strukturieren	sortierte Objektmengen	Kenngrößen
	vorgegebene Tabellen	Modalwert
statist. Rohdaten	Strichlisten	Minimum
Daten ordnen/ strukturieren	*einfache Schaubilder*	Maximum
	Würfeltürme	arithmetisches Mittel
Daten interpretieren	Liniendiagramm	Median
Befragung	(vorgegebene) Säulendiagramme	Spannweite

Datenerhebung	**Veranschaulichung**	**Interpretation**
Recherche	Balkendiagramm	absolute Häufigkeit
*(Zufalls-)*Experiment	Kreisdiagramm	relative Häufigkeit
Merkmal	*Vierfeldertafel*	**Quartile**
Daten	Boxplots	**Manipulation**
Stichprobe	Flussdiagramm	*Standardabweichung*
Skalierung	**Streudiagramm**	
	Strecken- und Stabdiagramm	

Zufallsgeneratoren	**Begriffe und Definitionen**	**Wahrscheinlichkeiten bestimmen**
Würfel	Zufall	Regel von Laplace
Glücksrad	Zufallsexperiment	Summenregel
Urne	Ergebnis (sicher, möglich, unmöglich)	Baumdiagramme
	Ergebnismenge*/-raum*	Pfadregeln
	Ereignis	Urnenmodell
	Wahrscheinlichkeitsbegriff	**Satz von Bayes**
	Gesetz der großen Zahlen	Fakultät
	Gegenwahrscheinlichkeiten	Binomialkoeffizient
		bedingte Wahrscheinlichkeit
		Kombinatorik
		Permutation
		Unabhängigkeitsbegriff

3.2. Wie hängen diese Inhalte zusammen?

In diesem Unterkapitel werden nun die herausgearbeiteten Inhalte in Beziehung zueinander gesetzt und die dazu formulierten Schlüsselbegriffe zu Netzen zusammengefügt. In Abschnitt 2.3.2. wurden vier allgemeine Kriterien aufgestellt, die dabei zur Anwendung kommen. Sie sind wie eine Art Rahmen oder Metaebene zu verstehen und sollen über alle Themenbereiche hinweg gelten:

- Die Komplexität des Netzes soll möglichst gering gehalten werden. Die Konzentration liegt auf dem Wesentlichen, und der Umfang des gesamten

Themas ist transparent. Deshalb werden zusammenhängende Netze auf einer Seite dargestellt.

- Zusammenhänge werden sichtbar.
- Die Vernetzungen der Begriffe untereinander sind sinnstiftend, d.h. sie liefern einen inhaltlichen Mehrwert zu den verbundenen Begriffen.
- Die Darstellung generiert Aufmerksamkeit und hilft, den Fokus auf einzelne Aspekte zu richten.

Das erste Kriterium gibt eine klare Vorgabe für die Darstellung auf einer Seite. Es mahnt zugleich, stets darauf zu achten, die Komplexität soweit wie möglich zu reduzieren. Im zweiten und dritten Kriterium lässt sich der bereits formulierte Anspruch verankern, dass die entstehenden Netze jeweils die Struktur, die aus fachmathematischer Sicht zwischen den Inhalten existiert, transparent werden lässt. Die Verbindungen, die zwischen den Schlüsselbegriffen gezogen werden, sollen eine zusätzliche Erkenntnis über den Inhalt und seine Position im Gesamtgefüge aller Inhalte liefern. Um das zu erreichen, werden innerhalb jedes Themenbereiches Autor*innen zu Rate gezogen, die sich mit dem Aufbau und der Struktur eben dieses Themenbereiches eingehend beschäftigen oder beschäftigt haben. Aufbauend auf ihren Überlegungen, erfolgen die Wahl von und die Einteilung in die einzelnen Haupt- und Unterthemen sowie die Zuweisung der einzelnen Inhalte bzw. deren Verbindungen. Das vierte Kriterium wird in 3.3. speziell in den Fokus genommen, wenn es, wie in 2.3.1 angekündigt, um die Visualisierung der einzelnen Netze geht.

Nückles, Gurlitt, Pabst und Renkl (2004) entsprechend, wird jeweils zunächst der Themenbereich ins Zentrum der Arbeitsfläche geschrieben. Aus der Liste aller Schlüsselbegriffe werden dann die umfassendsten Hauptthemen gewählt, die den Themenbereich in einem ersten Schritt untergliedern (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst und Renkl 2004, S. 17). Diese Hauptthemen sollen so formuliert werden, dass ihnen alle weiteren Schlüsselbegriffe eindeutig zugeordnet werden können und es zu keinen Überschneidungen kommt. Bei jeder Form der Strukturierung von Inhalten, die gewählt wird, geht es darum, Verbindungen, die aus mathematischer Sicht zwischen diesen Inhalten existieren, sichtbar zu machen. So soll die Wahl von Hauptthemen einen Themenbereich zunächst grob gliedern und einen ersten Überblick über die unterschiedlichen Aspekte deutlich machen, die den genannten Themenbereich charakterisieren. Nach dieser ersten Einteilung aller Schlüsselbegriffe werden in einem nächsten Schritt weitere Unterthemen herausgearbeitet, die innerhalb eines Hauptthemas für Struktur sorgen. Jeder Schlüsselbegriff der Liste braucht einen Ort bzw. ein Thema, an den bzw. das er angebunden werden kann. So wiederholt sich der eben genannte Schritt so lange, bis alle Schlüsselbegriffe in das entstandene Netz eingebaut sind. An den Stellen, an denen es für mehr Klarheit und Übersichtlichkeit sorgt, werden weitere Netze zu einzelnen Unterthemen entwickelt.

Somit entstehen zu jedem Themenbereich zunächst ein Netz, das eine Übersicht über die Hauptthemen gibt, und dann weitere Netze zu jedem dieser Hauptthemen. Wie in 2.3.2. erwähnt, lassen sich bei all diesen Netzen die Darstellungsstruktur insgesamt und die Art der einzelnen Verbindungen charakterisieren. In der vorliegenden Arbeit werden, in Anlehnung an die in 2.2.2.2. von Nückles, Gurlitt, Pabst und Renkl (2004) beschriebenen Möglichkeiten, kombiniert mit den von Metzig und Schuster (2016) dargestellten Varianten, hierarchische Darstellungsstrukturen verwendet. Dabei tauchen drei Arten auf, wie zwei Hierarchieebenen miteinander in Beziehung stehen bzw. verbunden sein können. Um im Folgenden bei den einzelnen Netzen einfach Bezug auf diese drei Möglichkeiten nehmen zu können, wird auch ihr Inhalt in einem Schlüsselbegriff gefasst. So ergeben sich die folgenden drei Verbindungstypen:

- *Ausdifferenzierung:* Hier wird ein allgemeiner Begriff in spezifischere Begriffe ausdifferenziert bzw. verfeinert; ein Unterbegriff ist als ein Beispiel für einen entsprechenden Oberbegriff zu verstehen; hierbei werden Merkmale des Oberbegriffs an den Unterbegriff vererbt (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst und Renkl 2004, S. 27; Dansereau et al. (1979), zitiert nach Metzig & Schuster 2016, S. 103).
- *Zerlegung:* Ein Begriff wird in seine Bestandteile zerlegt; ein Unterbegriff ist hier ein Teil des zugehörigen Oberbegriffs (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst und Renkl 2004, S. 27; Dansereau et al. (1979), zitiert nach Metzig & Schuster 2016, S. 103).
- *Eigenschaftszuschreibung:* Hier werden bestimmte Eigenschaften oder charakteristische Merkmale zu einem Oberbegriff gesammelt und als Unterbegriffe angebunden (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst und Renkl 2004, S. 28; Dansereau et al. (1979), zitiert nach Metzig & Schuster 2016, S. 103).

Es folgen fünf Abschnitte (3.2.1. bis 3.2.5.), in denen zu jedem Themenbereich die gesammelten Schlüsselbegriffe zu Netzen verknüpft werden. Die zugrundeliegenden Überlegungen und Begründungen für die gezogenen Verbindungen und die entstehende Struktur werden im Text beschrieben und sollen parallel und in Kombination mit dem entsprechenden Netz betrachtet werden. An einigen Stellen führen die Überlegungen der zu Rate gezogenen Autor*innen dazu, dass einzelne Schlüsselbegriffe noch in den entsprechenden Netzen ergänzt werden. Entweder werden auf diese Weise Kategorien eröffnet, oder die zusätzlichen Schlüsselbegriffe vervollständigen bereits genannte Aspekte oder differenzieren diese noch weiter aus. In den zugehörigen Textabschnitten werden diese Punkte entsprechend benannt.

3.2.1. Begriffsnetz zum Themenbereich „Raum und Form“

Für den Geometrieunterricht formuliert Weigand (2014b) drei zentrale inhaltsspezifische Ziele. Das erste dieser Ziele, das „Verständnis geometrischer Begriffe und ihrer Eigenschaften“ (Weigand 2014b, S. 25), wird für dieses Unterkapitel als Leitmotiv verwendet: „Schülerinnen und Schüler [sollen] Denkstrukturen oder mentale Strukturen entwickeln, die das Wissen über den Begriff repräsentieren, und die insbesondere die Beziehungen zu bereits gelernten Begriffen enthalten“ (Weigand 2014b, S. 25). Im Sinne der Forderung an den Mathematikunterricht nach Beziehungshaltigkeit und Vernetzung, in der sich Weigand auf Freudenthal (1973) und Wagenschein (1970) bezieht, unterstreicht er, dass es darum geht, „Beziehungen zwischen geometrischen Begriffen, Eigenschaften und Sätzen [aufzuzeigen]“ und eine „Vernetzung zwischen verschiedenen Gebieten der Mathematik“ zu schaffen (Weigand 2014b, S. 26). Diese Gedanken bilden die Grundlage bei der Entwicklung der Netze zur Leitidee „Raum und Form“.

In der Begriffsliste zu diesem Themenbereich (siehe Tabelle 2, S. 54) finden sich alle geometrischen Begriffe, Eigenschaften und Sätze, die sich ein Schüler oder eine Schülerin im Rahmen der genannten Leitidee erschließen soll (vgl. Weigand 2014b, S. 26). Beim Vernetzen dieser Inhalte fließt ein weiterer Gedanke von Weigand (2014) mit ein, den er im Zusammenhang mit der Begriffsbildung und der Einordnung in ein Begriffsnetz formuliert: Es geht ihm darum, ein Verständnis für die gegenseitigen Abhängigkeiten von Begriffen und Sätzen zu entwickeln und sich so mit dem Prozess des Aufbaus der Geometrie auseinanderzusetzen (vgl. Weigand 2014b, S. 27). Wie in den einleitenden Gedanken zu diesem Unterkapitel beschrieben, sollen alle aufgelisteten geometrischen Begriffe, Eigenschaften und Sätze in Kategorien gefasst werden, die möglichst gut nachvollziehbar und trennscharf sind, d.h. die nach Möglichkeit eine eindeutige Zuordnung der einzelnen Begriffe zu jeweils einer Kategorie zulassen. Das schließt eine Hierarchisierung in Ober- und Unterkategorien mit ein.

Weigand (2014b) findet für geometrische Begriffe vier Kategorien: Objekte, Relationen, Abbildungen und Maße (vgl. Weigand 2014b, S. 25). Franke (2001) verwendet für die Geometrie der Grundschule eine zweifache Klassifikation: Sie unterscheidet die „Begriffe für ebene und räumliche Objekte oder [unterscheidet sie] nach logischen Gesichtspunkten in Objektbegriffe, Eigenschaftsbegriffe und Relationsbegriffe“ (Franke 2001, S. 78). In der Beschreibung dieser Klassen gliedert sie die von Weigand (2014b) als Objekte bezeichneten Begriffe noch weiter in Objekte und Eigenschaften (vgl. Franke 2001, S. 78). Gleichzeitig ergänzt Weigand (2014b) mit den Abbildungen und den Maßen zwei für die Sekundarstufe wichtige Aspekte (vgl. Weigand 2014b, S. 25).

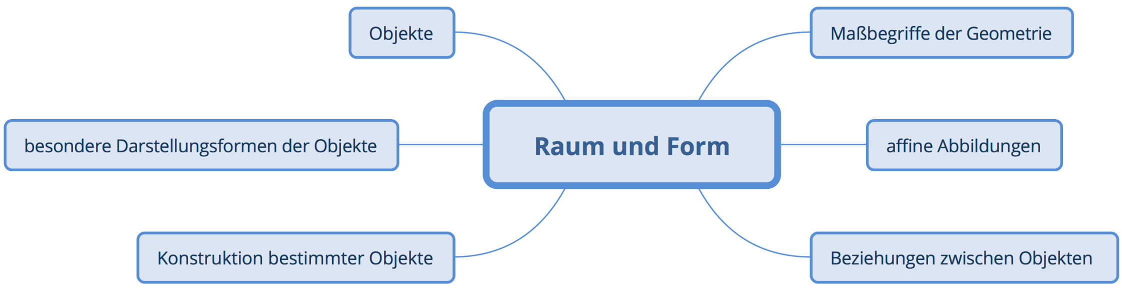
Holland (2001) geht noch stärker ins Detail: Er beginnt mit der Einteilung der geometrischen Begriffe unter „inhaltlichen, logischen, axiomatischen und strukturellen Gesichtspunkten“ (Holland 2001, S. 157). Nach dem inhaltlichen Aspekt werden die Begriffe in drei Gruppen eingeteilt: „Figurenbegriffe, Abbildungsbegriffe und Maß-begriffe“ (Holland 2001, S. 157). Auch er nimmt an dieser Stelle eine zweifache Klassifikation vor, indem er wie Franke zwischen ebenen und räumlichen Begriffen unterscheidet (vgl. Holland 2001, S. 157). Nach logischen Gesichtspunkten klassifiziert er die „Objektbegriffe (oder Eigenschaftsbegriffe), Relationsbegriffe und Funktions-begriffe“ (Holland 2001, S. 158). Die axiomatischen und strukturellen Gesichtspunkte werden an dieser Stelle nicht weiter verfolgt.

Inhaltlich inspiriert durch diese Einteilungen, werden in der vorliegenden Arbeit die folgenden sechs Kategorien bzw. Hauptthemen für den Themenbereich „Raum und Form“ festgelegt und in Abbildung 1 als Netz zur Übersicht dargestellt:

- Objekte
- Besondere Darstellungsformen der Objekte
- Konstruktion bestimmter Objekte
- Beziehungen zwischen Objekten
- Affine Abbildungen
- Maßbegriffe der Geometrie.

Dabei ähneln Weigands (2014b) „Objekte“, Frankes (2001) „Objektbegriffe und Eigenschaftsbegriffe“ und Hollands (2001) „Figurenbegriffe“ und „Objektbegriffe“ der Begriffsmenge, die von den ersten drei Kategorien abgebildet wird. Kategorie 4 sammelt Weigands (2014b) „Relationen“, Frankes (2001) und Hollands (2001) „Relationsbegriffe“ sowie Teile von Hollands (2001) „Figurenbegriffen“ unter dem inhaltlichen Gesichtspunkt. Die fünfte Kategorie zielt auf die Begriffe, die Weigand (2014b) mit „Maße“ und Holland (2001) mit „Maßbegriffe“ und einem Teil der „Funktionsbegriffe“ beschreibt. Kategorie 6 bündelt Weigands (2014b) „Abbildungen“, Hollands (2001) „Abbildungsbegriffe“ und einen Teil seiner „Funktionsbegriffe“. An dieser Stelle sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es sich hier um eine grobe Zuordnung handelt. Im Folgenden wird detaillierter auf die Einteilungen der oben genannten Autoren Bezug genommen. Unterschiede zu ihren Klassifikationen werden an entsprechender Stelle diskutiert.

Abbildung 1: Netz zur Übersicht über den Themenbereich „Raum und Form“



Ein großer Teil der Schlüsselbegriffe auf den Begriffslisten lässt sich nach diesen sechs Kategorien strukturieren. Die Begriffe, die sich der Kategorie „Objekte“ zuordnen lassen, schaffen das Fundament des Netzes zur Leitidee „Raum und Form“. In gewisser Weise darüber gelegt werden dann die Begriffe und Sätze zur zweiten und dritten Kategorie. Diese Idee fußt auf einem Vorgehen aus der Kartographie: Wenn dort ein Raumphänomen dargestellt wird, kann dafür entweder eine topographische Karte oder eine thematische Karte entwickelt werden. Die Frage ist jeweils, welche Absicht damit verfolgt wird.

Auf diese Weise liefert die Einordnung in die erste Kategorie gleichsam eine topographische Darstellung des Geländes zur Leitidee „Raum und Form“. Hier wird den Lernenden ersichtlich, mit welchen geometrischen Objekten gearbeitet werden soll. Die Kategorien 2 und 3 ermöglichen dann thematische Karten, die sich über die topographische Karte legen lassen und Eigenschaften und Sätze transparent machen.

Die vierte und fünfte Kategorie stehen für sich. Sie liefern wieder eine topographische Darstellung eines weiteren Teils des Geländes zur Leitidee „Raum und Form“. Die sechste Kategorie hat eine Doppelfunktion. Sie liefert weitere Aspekte zu den unter 1 bis 4 gefassten Objekten. Zugleich bildet sie den Übergang zu den Inhalten des Themenbereiches „Größen und Messen“, aus dem sie einige Schlüsselbegriffe mit aufnimmt.

Im Folgenden wird jede der Kategorien bzw. jedes der Hauptthemen weiter entwickelt und ausdifferenziert. Dabei werden Anknüpfungspunkte bzw. Verbindungen zwischen den Kategorien sowie zu weiteren Themenbereichen geschaffen.

3.2.1.1. Objekte

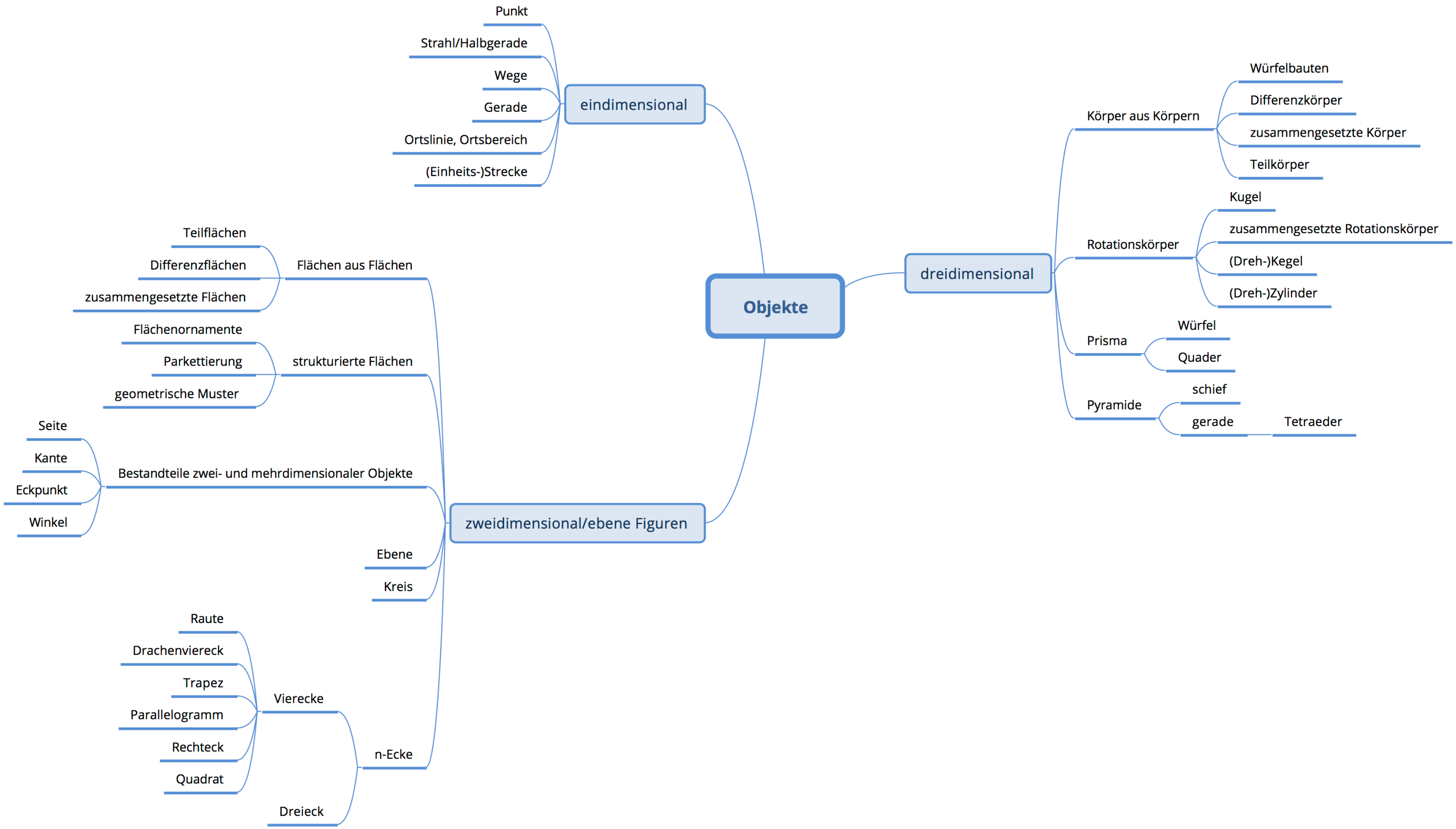
Wenn in diesem Unterabschnitt von Objekten gesprochen wird, handelt es sich um die von Weigand (2014b) als „geometrische Begriffe“ bezeichneten Inhalte (vgl. Weigand 2014b, S. 25). Zu dieser Kategorie gehören die Objekte, mit denen im Rahmen des Mathematikunterrichts hantiert wird. Die Übersicht in Abbildung 2 zeigt alle Objekte, die dieser Kategorie zugeordnet sind.

Die Menge aller Objekte wird in einem ersten Schritt in drei Unterkategorien gegliedert und zwar, je nach ihrer Dimension, in *eindimensionale*, *zweidimensionale* oder *dreidimensionale Objekte*. Die Zugehörigkeit zu einer dieser drei Unterkategorien trifft eine Aussage über die Eigenschaft der Dimension des entsprechenden Objekts – es handelt sich hier also um eine Eigenschaftszuschreibung.

Die *eindimensionalen Objekte* werden in die folgenden sechs Schlüsselbegriffe ausdifferenziert, von denen jeder ein Beispiel für diese Kategorie liefert: *Punkt*, *Strahl/ Halbgerade*, *Wege*, *Gerade*, *Ortslinie* und *Ortsbereich* sowie *(Einheits-)Strecke*

Bei den *zweidimensionalen Objekten* tauchen die *Ebene* und der *Kreis* direkt als Beispiele dieser Kategorie auf. Daneben werden vier weitere Unterkategorien geschaffen. Dabei fassen *Flächen aus Flächen*, *strukturierte Flächen* und *n-Ecke* jeweils einzelne Objekte zusammen, die hierfür Beispiele sind und in den untersuchten Lehrplänen gefordert werden. Das sind bei den *Flächen aus Flächen* die *Teilflächen*, die *Differenzflächen* sowie die *zusammengesetzten Flächen* und bei den *strukturierten Flächen* die *Flächenornamente*, die *Parkettierung* und die *geometrischen Muster.* Bei den *n-Ecken* werden die beiden spezifischen Fälle *Dreieck* und *Viereck* genannt, die in der Schulmathematik eine besondere Rolle spielen. Die *Vierecke* werden ebenfalls noch weiter in die sechs unterschiedlichen Vierecksarten ausdifferenziert: *Raute, Drachenviereck, Trapez, Parallelogramm, Rechteck* und *Quadrat*. *Flächen aus Flächen* und *n-Ecke* tauchen als Begriffe nicht in den Lehrplänen auf, werden aber als Bezeichnungen für diese beiden Unterkategorien zusätzlich eingeführt. Die *Bestandteile zwei- und mehrdimensionaler Objekte – die vierte Unterkategorie* – sammeln charakteristische Merkmale mehrdimensionaler Objekte. Hier wird die Menge aller *Bestandteile zwei- und mehrdimensionaler Objekte* als ein „übergeordnetes Ganzes“ in die einzelnen Merkmale *Seite*, *Kante*, *Eckpunkt* und *Winkel* und damit „in seine untergeordneten Bestandteile zerlegt“ (Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 27).

Abbildung 2: Netz zu den Objekten



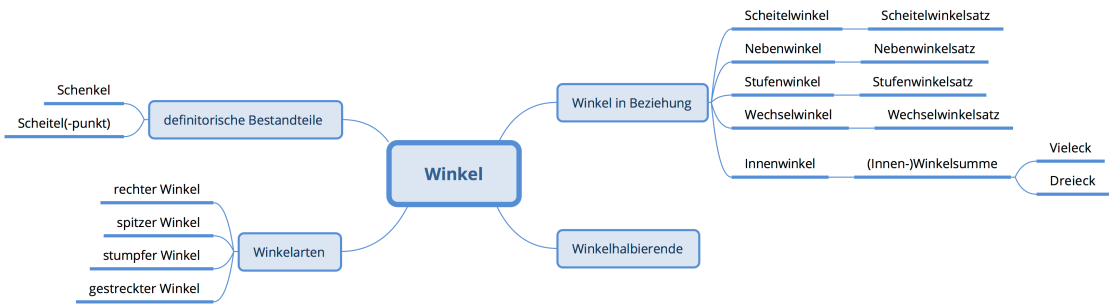
Bei den *dreidimensionalen Objekten* werden analog zu den zweidimensionalen die *Körper aus Körpern* als zusätzlicher Begriff für diese Unterkategorie eingeführt und in *Würfelbauten*, *Differenzkörper*, *zusammengesetzte Körper* und *Teilkörper* untergliedert. Die *Rotationskörper* werden ebenfalls weiter ausdifferenziert: Auch hier werden als Beispiele *Kugel*, *zusammengesetzte Rotationskörper, (Dreh-)Kegel* und *(Dreh-)Zylinder* angeknüpft. *Würfel* und *Quader* stehen mit dem *Prisma* als spezielle Objekte dieser Unterkategorie in einer Inklusionshierarchie (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 27). Die Unterkategorie der *Pyramide* wird noch über eine Eigenschaftszuschreibung in *schiefe* und *gerade Pyramiden* zerlegt (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 27), wobei den letztgenannten der *Tetraeder* als Beispiel zugeordnet ist.

Drei Objekten dieses Netzes kommt eine besondere Rolle zu: dem *Dreieck*, dem *Kreis* und dem *Winkel*. Sie bilden genau genommen eigenständige (Unter-)Themen, denen sich jeweils viele Schlüsselbegriffe der vorliegenden Begriffsliste zuordnen lassen. Daher werden zum Zweck der Übersichtlichkeit drei von diesen Objekten ausgehende separate Netze entwickelt und im Folgenden dargestellt.

3.2.1.1.1. Winkel

Im Netz in Abbildung 3 steht der *Winkel* als Thema im Mittelpunkt der Arbeitsfläche.

Abbildung 3: Netz zum Winkel



Der geometrische Begriff des *Winkels* hat eine vielschichtige Bedeutung. Als Objekt kann er weiter zerlegt werden in seine *definitorischen Bestandteile,* was die erste Unterkategorie bildet. Gleichzeitig ist er selber definitorischer Bestandteil anderer geometrischer Begriffe wie beispielsweise des *Dreiecks* oder eines *Vierecks*. Hierbei ist die *Art des Winkels* entscheidend. Daher wird die *Art des Winkels* als Unterkategorie im Begriffsnetz gewählt. Sie liefert eine disjunkte Einteilung aller Winkel nach der Eigenschaft ihrer Gradzahl. Die dritte Unterkategorie *Winkel in Beziehung* ergibt sich aus Begriffen, die die Lage von zwei Winkeln zueinander beschreiben, die innerhalb eines Vielecks oder an zwei parallelen Geraden, geschnitten von einer dritten Gerade, liegen. In Ergänzung zu den Inhalten der Lehrpläne ist jeweils der zugehörige Satz zugeordnet, der eine Aussage über die Größe der entsprechenden Winkel trifft. Im weitesten Sinne sind hier wieder Eigenschaften und zusätzlich entsprechende Sätze leitend bei der Zuordnung zu dieser Kategorie.

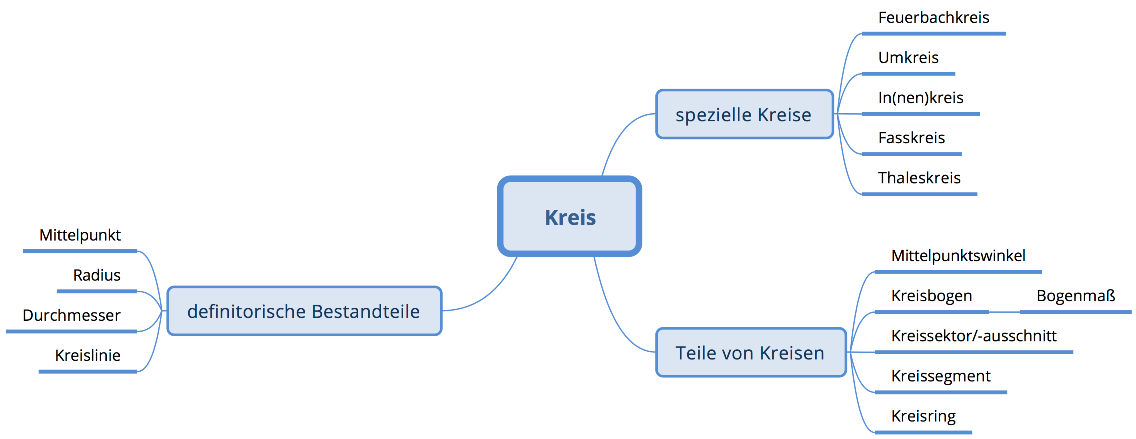
Es bleiben noch zwei Begriffe, die in das Begriffsnetz zum Winkel hineingehören: die *Winkelhalbierende* und die *Innenwinkelsumme*. Die letztgenannte ist bei der Definition des Innenwinkels angeknüpft und aus Gründen der Vollständigkeit für die Lernenden noch ausdifferenziert, je nach mathematischem Objekt, in dem sie betrachtet wird.

Das Begriffsnetz zum *Winkel* bietet an mehreren Stellen Verknüpfungspunkte zu Knoten anderer Netze. Die Winkelarten *spitzer, rechter* und *stumpfer Winkel* bieten Verbindungen zu den *Dreiecksarten* im Begriffsnetz zum *Dreieck*. Im selben Begriffsnetz wird die *(Innen-)Winkelsumme* eingebunden. Die *Winkelhalbierende* wird bei dem Begriffsnetz zu den *Konstruktionen bestimmter Objekte* (siehe 3.2.1.3.) und bei den *Lagebeziehungen* (siehe 3.2.1.4.) verknüpft, weil ihre Bedeutung im Unterricht an dieser Stelle hauptsächlich zum Tragen kommt.

3.2.1.1.2. Kreis

Auch der *Kreis* wird in einer Unterkategorie in seine *definitorischen Bestandteile* zerlegt. Im Mathematikunterricht werden *Teile von Kreisen* und *spezielle Kreise* weiter ausdifferenziert, die Verbindungen zu anderen Begriffen darstellen. Daher knüpft an dem Begriff *Kreis* ein Begriffsnetz an, das zunächst in drei Kategorien eingeteilt ist: *definitorische Bestandteile*, *Teile von Kreisen* und *spezielle Kreise.*

Abbildung 4: Netz zum Kreis



Die Kategorie der *Teile von Kreisen* lässt sich noch weiter spezifizieren: Der *Mittelpunktswinkel* erfüllt in diesem Kontext seinen inhaltlichen Zweck genauso wie der *Kreissektor/-ausschnitt*. Das *Bogenmaß* taucht in diesem Netz als Begriff auf wegen seiner engen Verknüpfung mit der Definition des *Kreisbogens*. Es stellt eine inhaltliche Brücke zu den Begriffen der Kategorie dar, die unter 3.2.1.6. bei den Größen gesammelt werden. An dieser Stelle erscheint auch die *Kreiszahl*, die hier vielleicht vermisst wird.

Die Kategorie der *speziellen Kreise* wird ebenfalls noch weiter ausdifferenziert. Der *Feuerbachkreis*, der *Umkreis* und der *In(nen)kreis* stehen im Zusammenhang mit den besonderen Linien im Dreieck, der *Winkelhalbierenden,* der *Seitenhalbierenden,* der *Mittelsenkrechten* und der *Höhe*. Da hier jeweils die Aufmerksamkeit auf der Konstruktion liegt, wird an dieser Stelle die Verbindung zum Begriffsnetz zur *Konstruktion bestimmter Objekte* unter 3.2.1.3. gezogen. Der *Fasskreis* und der *Thaleskreis* knüpfen inhaltlich ebenfalls am *Dreieck* bzw. am Spezialfall des *rechtwinkligen Dreiecks* an und werden an entsprechender Stelle verbunden. Als Kreise sind sie alle in dem vorliegenden Begriffsnetz verankert.

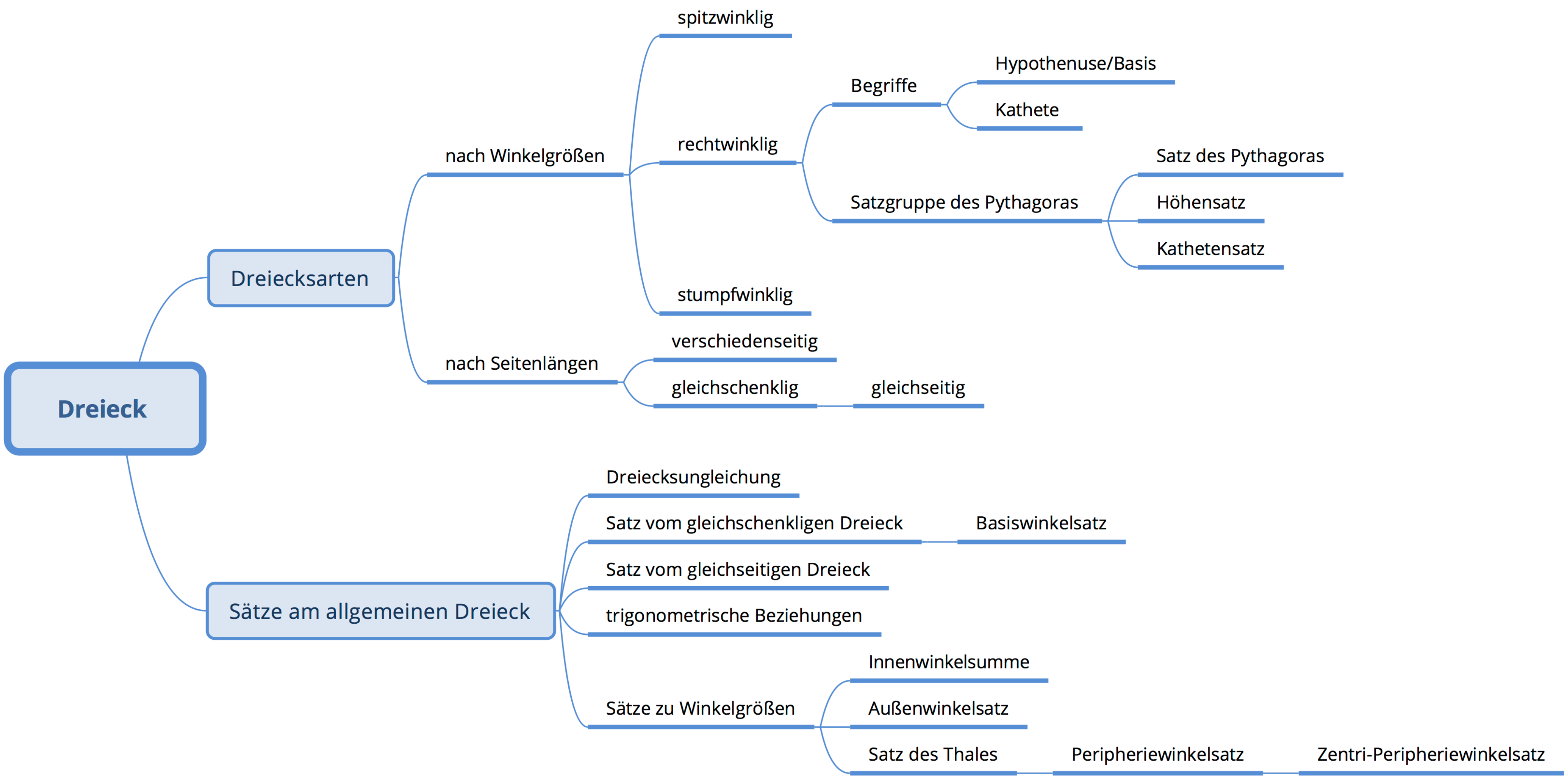
In diesem Netz wurden der Vollständigkeit halber die folgenden Schlüsselbegriffe zu den Inhalten der Begriffsliste ergänzt: *Kreissegment* und *Kreisring, Thaleskreis, Feuerbachkreis* und *Fasskreis.*

3.2.1.1.3. Dreieck

Dem *Dreieck* kommt im Rahmen des Geometrieunterrichts eine besondere Bedeutung zu. Roth und Wittmann (2014) beschreiben Dreiecke als „Basiselemente der Geometrie“ (Roth & Wittmann 2014, S. 128). Viele weitere Flächen lassen sich in Dreiecke zerlegen oder aus diesen zusammensetzen; dadurch können ihre Eigenschaften durch die Eigenschaften von Dreiecken hergeleitet bzw. begründet werden (vgl. Roth & Wittmann 2014, S. 126 ff.).

Dieser Bedeutung wird Rechnung getragen, indem das *Dreieck* zum Thema eines eigenen Begriffsnetzes gemacht wird, das in Abbildung 5 dargestellt ist. Eine erste Kategorisierung lässt sich vornehmen in *Dreiecksarten* und *Sätze am allgemeinen Dreieck*, was zu einer ähnlichen Gliederung führt, wie sie in der Fachwissenschaft auftaucht.

Abbildung 5: Netz zum Dreieck



Bei näherer Betrachtung lassen sich die Begriffe noch weiter unterteilen. Die einen tauchen speziell und einmalig im Begriffsnetz zum *Dreieck* auf. Eine zweite Gruppe bilden, wie auch schon beim *Winkel* und beim *Kreis*, Verbindungspunkte zu anderen Begriffsnetzen. Tabelle 7 zeigt eine Übersicht über Begriffe, die in Verbindung zu Dreiecken stehen und in diesem Kontext im Unterricht erarbeitet werden, sich aber aus Gründen der inhaltlichen Nähe in Begriffsnetzen zu anderen Begriffen oder einem der anderen eingangs formulierten Hauptthemen wiederfinden.

Tabelle 7: Begriffe zum Dreieck aus anderen Begriffsnetzen

Begriff	**Unterbegriffe**	**zugeordnetes Begriffsnetz**	**Verbindung zu Dreiecken**
Konstruktionen von Dreiecken		siehe 3.2.1.3. Konstruktion bestimmter Objekte	Dreiecksungleichung
Konstruktionen am Dreieck	Winkelhalbierende, In(nen)kreis Seitenhalbierende, Schwerpunkt Mittelsenkrechte, Umkreis Höhe	siehe 3.2.1.3. Konstruktion bestimmter Objekte	
Kongruenzsätze am Dreieck	SsW WSW oder SWW SSS SWS	siehe 3.2.1.5. Affine Abbildungen	

An dieser Stelle rücken die Definitionen und Sätze in den Fokus, die innerhalb der Schulmathematik speziell im Kontext *Dreiecke* auftauchen. Zunächst einmal lassen sich Dreiecke nach den Größen der *Innenwinkel* in drei disjunkte Gruppen aufteilen (vgl. Roth & Wittmann 2014, S. 128 f.). Dazu ergibt sich in der Kategorie *Dreiecksarten* die Unterkategorie nach Winkelgrößen mit den drei Knoten s*pitzwinklig, rechtwinklig* und s*tumpfwinklig.* Neben dieser Aufteilung aller Dreiecke, kann auch eine Kategorisierung *nach Seitenlängen* erfolgen: Es lässt sich eine weitere disjunkte Unterteilung aller Dreiecke nach den drei Kriterien *verschiedenseitig*, *gleichschenklig* und *gleichseitig formulieren*. Üblicherweise werden im Unterricht nur die beiden letzteren Kriterien angewendet.

Den *rechtwinkligen Dreiecken* kommt eine besondere Bedeutung zu. Daher ist dieser Knoten noch Ausgangspunkt für zwei weitere Unterkategorien. Zum einen werden die beiden Begriffe *Kathete* und *Hypothenuse* bzw. *Basis* definiert und verwendet. Zum anderen bildet die *Satzgruppe des Pythagoras* mit dem *Kathetensatz*, dem *Höhensatz* und dem *Satz des Pythagoras* ein weites Themenfeld zur Untersuchung von und Berechnung an rechtwinkligen Dreiecken. Die hierbei thematisierten Inhalte lassen sich dann übertragen und verallgemeinern auf alle Dreiecke in den *trigonometrischen Beziehungen,* was unter den *Sätzen am allgemeinen Dreieck* angeführt ist.

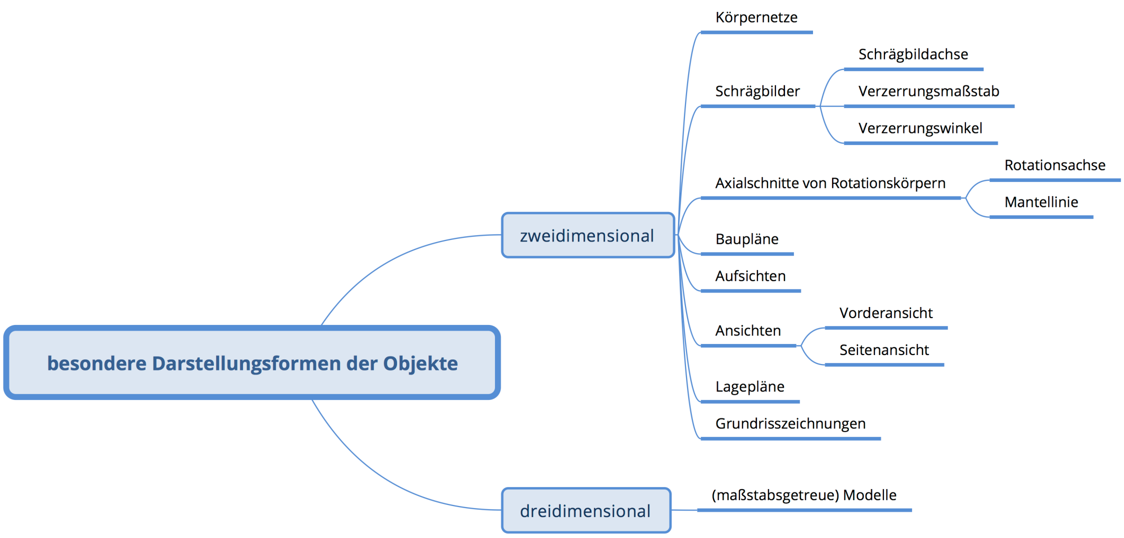
Ähnlich wie bei den *rechtwinkligen Dreiecken* finden sich mit dem *Basiswinkelsatz* und dem *Satz vom gleichschenkligen Dreieck* zwei Sätze, die sowohl beim *gleichschenkligen Dreieck* als auch beim Spezialfall, dem *gleichseitigen Dreieck,* gelten. Daher wurden diese beiden Begriffe noch ergänzt und gekoppelt.

Es lässt sich noch eine Unterkategorie von Sätzen formulieren als *Sätze zu Winkelgrößen*. Sie dienen der Berechnung einzelner Winkelgrößen am Dreieck. Die Trias aus dem *Satz des Thales*, dem *Peripheriewinkelsatz* und dem *Zentri-Peripheriewinkelsatz* stellt die Verbindung zum Begriffsnetz zum *Kreis* dar. Auch bei den *Sätzen zu Winkelgrößen* wurden für die Vollständigkeit dieser Unterkategorie der *Außenwinkelsatz* und der *Zentri-Peripheriewinkelsatz* ergänzt.

3.2.1.2. Besondere Darstellungsformen der Objekte

Die in den Rahmenlehrplänen geforderten *besonderen Darstellungsformen* (siehe Abbildung 6) sind für diejenigen Objekte formuliert, die unter 3.2.1.1. in die Unterkategorie der dreidimensionalen Objekte einsortiert wurden.

Abbildung 6: Netz zu den besonderen Darstellungsformen der Objekte



Eine erste Unterteilung lässt sich auch hier wieder nach der Dimension der Darstellungsform vornehmen, was in diesem Fall zu einer Zweiteilung führt. In der nächsten Gliederungsebene werden in beiden Kategorien die einzelnen Varianten genannt, die in den Lehrplänen gefordert werden. Hier findet also eine Ausdifferenzierung statt. Die *Schrägbilder* und die *Axialschnitte von Rotationskörpern* werden noch weiter zerlegt. Bei ihnen sind jeweils die relevanten definitorischen Unterbegriffe angeknüpft, wobei zur Differenzierung die *Rotationsachse* und die *Mantellinie* ergänzt wurden. Dabei liefert die *Mantellinie* bei den *Axialschnitten von*

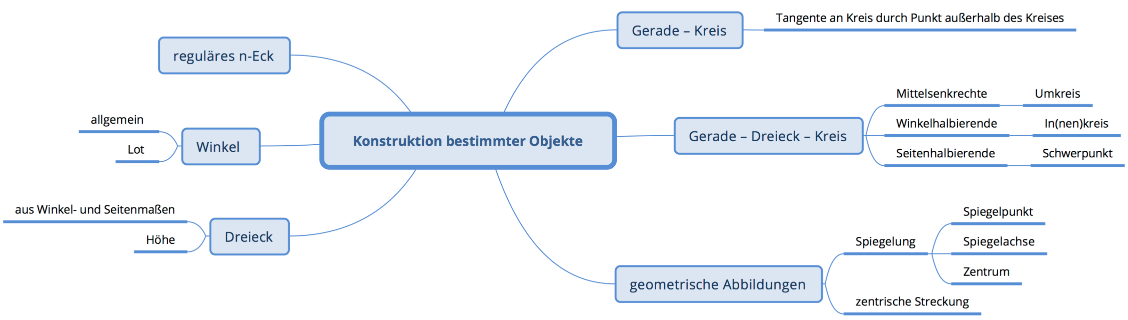
Rotationskörpern den Anknüpfungspunkt für die Berechnungen, die unter 3.2.1.6. bei den Größen genannt werden. Auch die *Ansichten* sind noch einmal unterteilt in zwei Varianten.

3.2.1.3. Konstruktion bestimmter Objekte

Ludwig und Weigand (2014) beschreiben das Konstruieren als mathematische Tätigkeit, bei der es darum geht, ideelle Objekte zu erzeugen (vgl. Ludwig & Weigand 2014, S. 62). Hier wird diese Tätigkeit genutzt, um eine neue Kategorie von Begriffen zu sammeln. Die Rahmenlehrpläne fordern als Fundamentalkonstruktionen bei bestimmten Objekten explizit die Fähigkeit, sie zu konstruieren. Auch hier taucht wieder zusätzlich, wie bereits unter 3.2.1.1. bei den Objekten, das *n-Eck* auf, nun allerdings in der speziellen Form des *regulären n-Ecks*.

In der vorliegenden Kategorie geht es um diejenigen geometrischen Begriffe, die sich aus Beziehungen zu anderen Objekten heraus definieren und konstruieren lassen. Daher ist die Kategorisierung gleichzeitig eine Sammlung neuer Begriffe, die als Verbindung zwischen anderen Kategorien bzw. zwischen Begriffen anderer Kategorien zu sehen sind. Die Unterkategorien sind so gewählt, dass sie die Objekte benennen, bei denen die neuen Begriffe ansetzen bzw. angeknüpft werden können. Abbildung 7 zeigt die sich daraus ergebenden Unterkategorien.

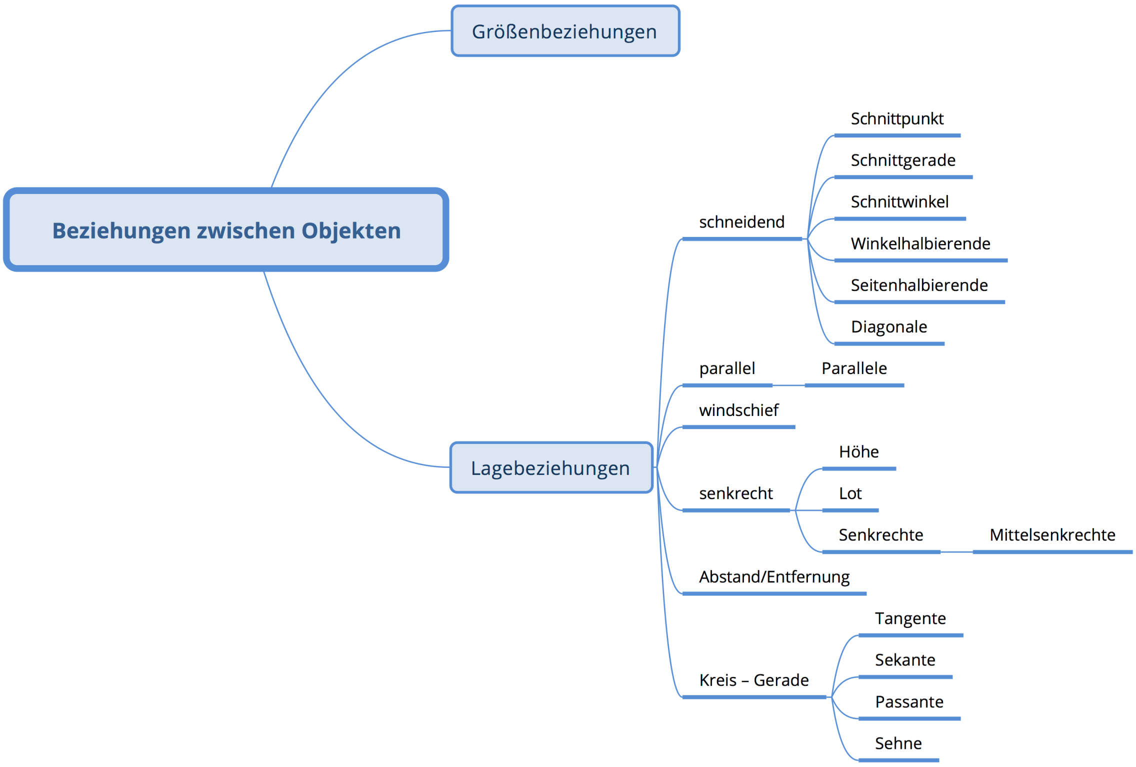
Abbildung 7: Netz zur Konstruktion bestimmter Objekte



3.2.1.4. Beziehungen zwischen Objekten

Bei der nun folgenden thematischen Strukturierung steht die Beziehung zwischen den bereits definierten und kategorisierten Objekten im Zentrum. Hier geht es um die Schlüsselbegriffe, die eine Aussage über den Zusammenhang zwischen zwei Objekten treffen. Dabei lassen sich im ersten Schritt zwei Kategorien von Beziehungen nach ihrer Art unterscheiden: die *Größenbeziehungen* und die *Lagebeziehungen*.

Abbildung 8: Netz zu Beziehungen zwischen Objekten



Bei den *Lagebeziehungen* erfolgt eine Ausdifferenzierung in Unterkategorien. Diese bestehen zum einen aus den vier Möglichkeiten, die durch die *Lagebeziehungen* von Geraden und Geraden, Geraden und Ebenen sowie Ebenen und Ebenen definiert werden: *schneidend, parallel, windschief* und *senkrecht*. Sie sind als Eigenschaftszuschreibungen zu verstehen. Ihnen sind noch diejenigen Schlüsselbegriffe zugeordnet, die durch den genannten Beziehungsaspekt definiert oder charakterisiert sind. Hier liegt also gewissermaßen eine umgekehrte Eigenschaftszuschreibung vor. Mit dem *Schnittwinkel* wurde noch ein Schlüsselbegriff zusätzlich zu den Begriffslisten zur Vervollständigung ergänzt.

Zum anderen folgen noch zwei weitere Unterkategorien zu den *Lagebeziehungen*, die bislang keinen passenden Anknüpfungspunkt gefunden haben, jedoch in diesem Themenbereich anzusiedeln sind: der Begriff *Abstand* bzw. *Entfernung* und die Lage zwischen *Kreis* und *Gerade,* ausdifferenziert in die vier möglichen Varianten, wobei hier die *Sekante*, die *Passante* und die *Sehne* noch zu den Inhalten in den Begriffslisten ergänzt wurden.

3.2.1.5. Affine Abbildungen

Die in der Schule verwendeten geometrischen Abbildungen gehören zur Familie der *affinen Abbildungen*. Sie sind in Abbildung 9 dargestellt. Um hier präzise zu arbeiten, wurde diese Bezeichnung zusätzlich zu den Inhalten auf den Begriffslisten verwendet. In Anlehnung an Hölzl (2014) werden die Kategorien in diesem Bereich auf den ersten beiden Ebenen basierend auf der Anzahl ihrer Invarianten gebildet.

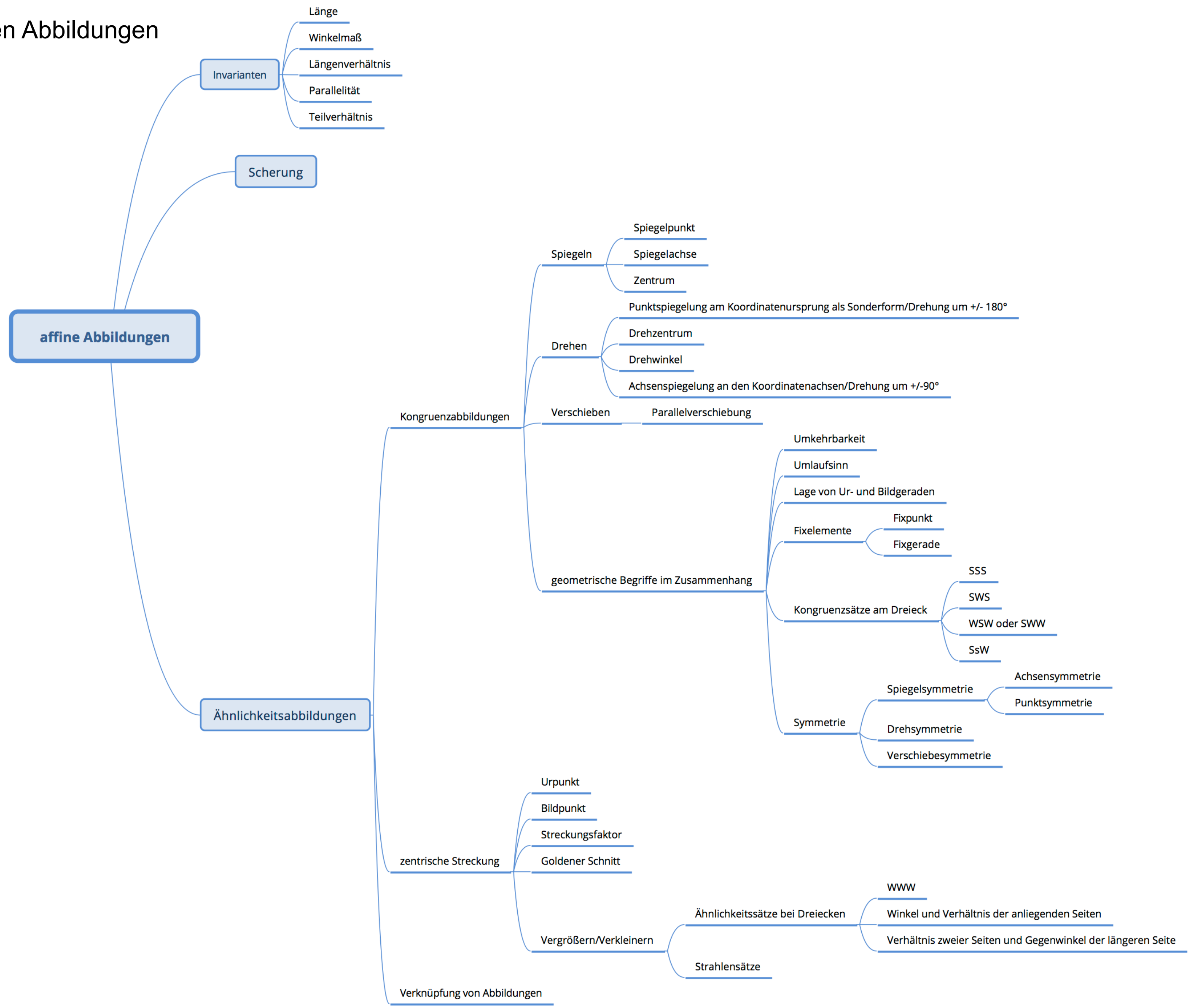
In der ersten Gliederungsebene werden drei Kategorien gebildet: die *Scherung* und die *Ähnlichkeitsabbildungen* als Ausdifferenzierungen der *affinen Abbildungen* sowie die *Invarianten* als charakteristisches Merkmal (vgl. Hölzl 2014, S. 224 f.). *Scherung* und *Invarianten* wurden dabei als Begriffe ergänzend aufgenommen.

Die *Scherung* nimmt in der Schulmathematik eine vergleichsweise kleine Rolle ein. Das Hauptaugenmerk liegt auf der weitaus größeren Gruppe der *Ähnlichkeitsabbildungen*. Bei den *Ähnlichkeitsabbildungen* kommen zu den beiden Invarianten *Parallelität* und *Teilverhältnis*, die sie mit der *Scherung* gemeinsam haben, noch die beiden Invarianten *Winkelmaß* und *Längenverhältnis* hinzu.

An dieser Stelle wird bereits deutlich, dass die Gliederungsebenen nicht äquivalent sind zur Anzahl der Invarianten. Hier unterscheidet sich die vorliegende Struktur von Hölzls (2014) „Zwiebelschalenprinzip“ (Hölzl 2014, S. 225). Er verwendet die Invarianten als Ordnungsprinzip und nimmt als Kern die *Kongruenzabbildungen* mit der größten Anzahl an Invarianten (vgl. Hölzl 2014, S. 225). In der vorliegenden Arbeit soll die Zahl der Gliederungsebenen möglichst gering gehalten werden. Daher sind die *Scherung* und die *Ähnlichkeitsabbildungen* auf gleicher Ebene angeordnet.

Eine ähnliche Situation ergibt sich innerhalb der Unterkategorie der *Ähnlichkeitsabbildungen*. Sie werden nochmal unterteilt in *zentrische Streckung*, *Kongruenzabbildungen* und *Verknüpfung von Abbildungen.* Die *Verknüpfung von Abbildungen* ist eine eigene Unterkategorie, die die Lernenden für diese Variante bei den Abbildungen sensibilisieren will. Sie wird im Sinne der Übersichtlichkeit nicht noch weiter zerlegt. Die *zentrische Streckung* beinhaltet vier Schlüsselbegriffe, die in diesem Kontext auftauchen: *Urpunkt, Bildpunkt* und *Streckungsfaktor* sind charakteristische Merkmale und der *Goldene Schnitt* ein spezielles Beispiel. Zudem umfasst sie die Unterkategorie *Vergrößern/Verkleinern.* Hier werden die *Ähnlichkeitssätze beim Dreieck,* die zusätzlich zu den Schlüsselbegriffen auf den Listen noch ausdifferenziert werden, und die *Strahlensätze* angeknüpft.

Abbildung 9: Netz zu den affinen Abbildungen



Bei den *Kongruenzabbildungen* kommt noch die Länge als fünfte Invariante hinzu. Die drei Kongruenzabbildungen *Spiegeln, Drehen* und *Verschieben* bilden jeweils eine Unterkategorie. Als eine vierte Unterkategorie werden an dieser Stelle noch vier Schlüsselbegriffe gesammelt, die in diesem Kontext als charakteristische Merkmale inhaltlich anknüpfen. Dazu gehören auch die *Symmetrie*, noch einmal unterteilt in die unterschiedlichen Varianten und die *Kongruenzsätze am Dreieck*.

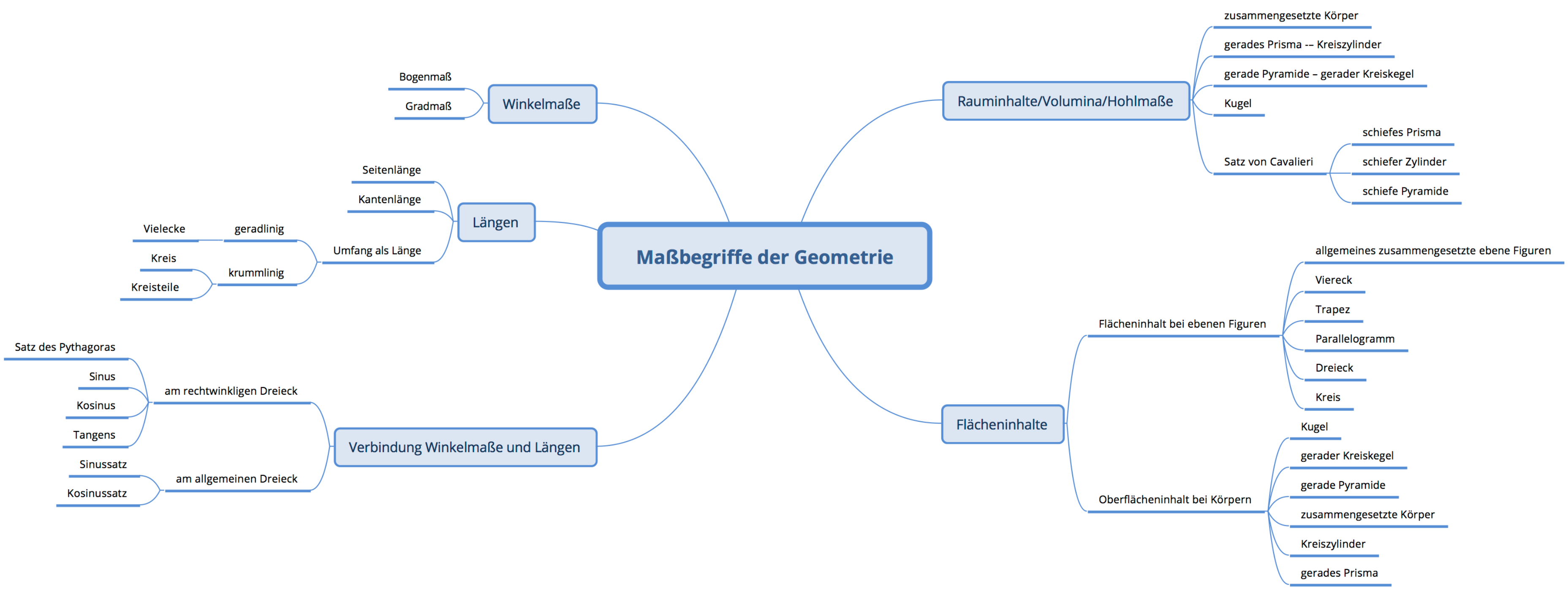
Fixpunkt, Fixgerade und *Punktsymmetrie* tauchen in diesem Netz auf, obwohl sie ursprünglich nicht in der Begriffsliste stehen, und wurden zur Vervollständigung an den entsprechenden Stellen ergänzt.

3.2.1.6. Maßbegriffe der Geometrie

Bislang wurden die geometrischen Objekte strukturiert, ihre unterschiedlichen Darstellungsformen herausgearbeitet, Möglichkeiten der Konstruktion einiger dieser Objekte festgehalten und ihre Beziehungen untereinander klassifiziert. Dieser Unterabschnitt sammelt nun Begriffe zu einem neuen Aspekt: Bestimmte Dimensionen der Objekte sollen genauer untersucht und erfasst werden. Es geht hier um diejenigen Schlüsselbegriffe, die mit der Größe der Objekte oder der Größe bestimmter Eigenschaften dieser Objekte zusammenhängen. Unter den Beiträgen des Mathematikunterrichts zur Umwelterschließung formulieren Vollrath und Roth: „Im Umgang mit Formen entsteht das Bedürfnis, Größen zu messen und von bestimmten Größen abhängige Größen zu berechnen“ (Vollrath & Roth 2012, S. 11).

In diesem Sinne werden nun, orientiert an den in 3.2.1.1. gesammelten Objekten und ihren Eigenschaften, die Begriffe zu den entsprechenden Größen kategorisiert und strukturiert. Das bildet den Übergang zur Leitidee „Messen“ nach der Struktur der von der Kultusministerkonferenz verabschiedeten Bildungsstandards und der daraus formulierten Leitidee „Größen und Messen“ aus dem Rahmenlehrplan für Berlin und Brandenburg. Daher liefert ab hier die Begriffsliste zum Themenbereich „Größen und Messen“ (siehe Tabelle 3, S. 57) diejenigen Schlüsselbegriffe, die abgebildet werden sollen. Es entsteht ein Begriffsnetz, auf dessen Basis eine weitere thematische Landkarte entwickelt wird, analog zu dem Vorgehen in den Unterabschnitten 3.2.1.2. bis 3.2.1.4.

Abbildung 10: Netz zu den Maßbegriffen der Geometrie



Dieser Unterabschnitt nimmt die von Holland (2001) klassifizierten „Maßbegriffe der Geometrie“ (Holland 2001, S. 188) – Länge, Flächeninhalt, Volumen und Winkelmaß – in den Blick. Er hebt ihren Funktionscharakter hervor und beschreibt das „Messen geometrischer Figuren durch vier Funktionen, deren Definitionsbereich eine bestimmte Figurenmenge, und deren Zielmenge einer der vier Größenbereiche ist“ (Holland 2001, S. 188): Größenbereich der Längen, Größenbereich der Flächeninhalte, Größenbereich der Volumina und Größenbereich der Winkelmaße (Holland 2001, S. 188). Der Definitionsbereich dieser Funktionen ist durch das in 3.2.1.1. entstandene Begriffsnetz abgebildet. Aus den vier Zielmengen werden nun, wie in Abbildung 10 dargestellt, die vier Kategorien *Winkelmaße, Längen, Flächeninhalte* und *Rauminhalte/Volumina/Hohlmaße* gebildet. Die letztgenannte Unterkategorie ist mit drei Begriffen überschrieben, da sie alle drei in den Rahmenlehrplänen verwendet und gefordert werden.

Die *Längen* werden noch weiter in drei Unterkategorien ausdifferenziert. Hier werden die *Seitenlänge* und die *Kantenlänge* noch zu den Begriffen auf den Listen ergänzt und getrennt voneinander aufgeführt, was die Unterteilung aus 3.2.1.1. in zwei- und dreidimensionale Objekte wieder aufgreift. Zudem bekommt der *Umfang als Länge* eine eigene Unterkategorie. Die hier angeknüpften Begriffe nennen die ebenen Figuren, zu denen die Formeln zur Berechnung ihres Umfangs in den Rahmenlehrplänen explizit gefordert werden. Aus der unterschiedlichen Bildung der Formeln abgeleitet, werden sie in zwei Unterkategorien wie charakterisierende Eigenschaften gefasst: *geradlinig* und *krummlinig*.

Bei den *Flächeninhalten* werden der *Flächeninhalt bei ebenen Figuren* und der *Oberflächeninhalt bei Körpern* getrennt. Auch wenn die Oberfläche als Summe aus den einzelnen Seitenflächen eines Körpers entsteht und ihre Berechnung sich darauf zurückführen lässt, werden doch die beiden Kategorien unterschieden, um wie eben in der bisherigen Systematik zu bleiben. Damit soll den Lernenden noch deutlicher werden, dass sie sich einmal in der Ebene und einmal im Dreidimensionalen bewegen, was den jeweiligen Weg zur Berechnung definiert.

Bei den *Flächeninhalten* wie auch bei den *Rauminhalten/Volumina/Hohlmaßen* werden ebenfalls einzelne geometrische Objekte explizit genannt. Wie bei den *Längen* fordern die Rahmenlehrpläne die Formeln zur Berechnung der entsprechenden Größen. Bei den *Rauminhalten* wurden das *gerade Prisma* und der *Kreiszylinder* sowie die *gerade Pyramide* und der *gerade Kreiskegel* zusammengefasst. Das soll die analoge Bildung der jeweiligen Formeln zur Berechnung verdeutlichen. Mit dem *Satz von Cavalieri* wird eine weitere Unterkategorie eröffnet. Sie umfasst das *schiefe Prisma*, den *schiefen Zylinder* und die *schiefe Pyramide* und überschreibt das Prinzip, das bei diesen drei Körpern zur Berechnung des Rauminhalts zum Tragen kommt. Als letzter Begriff bei den *Rauminhalten* ist noch die *Kugel* angebunden.

In diesem Begriffsnetz tauchen auch die Sätze auf, die zur Berechnung von Längen und Winkelmaßen bei Dreiecken im Rahmen der Trigonometrie erarbeitet werden. Sie verbinden die Kategorie der *Winkelmaße* und die der *Längen* für die spezielle ebene Figur des *Dreiecks*. Unterschieden nach der Art des Dreiecks, werden die einzelnen Sätze genannt: *Satz des Pythagoras, Sinus, Kosinus* und *Tangens* sowie *Sinussatz* und *Kosinussatz*.

Damit sind in diesem Abschnitt 3.2.1. durch sechs Hauptthemen oder -kategorien neun Begriffsnetze entstanden. Sie umfassen alle Schlüsselbegriffe, die im Rahmen des Geometrieunterrichts erarbeitet werden sollen und explizit in den Rahmenlehrplänen genannt werden oder aus genannten Gründen noch ergänzt wurden. Durch die Netzstruktur werden ihre inhaltlichen Verbindungen visualisiert und somit für die Lernenden sichtbar.

Unter 3.2.1.6. wurde mit „Maßbegriffe der Geometrie“ ein Begriffsnetz geschaffen, das eigentlich Teil eines größeren Begriffsnetzes ist. Das wird bereits deutlich durch den Verweis auf die Begriffslisten zur Leitidee „Größen und Messen“. Die *Maßbegriffe der Geometrie* sind nur ein Teil der in der Schulmathematik verankerten Maßbegriffe. Diese wiederum sind ein Aspekt der Leitidee „Messen“ oder „Größen und Messen“, bei der es nach Leuders und Barzel (2014) um die Trias aus „Größen, Maße und Messen“ (Leuders & Barzel 2014, S. 48) geht.

Im Folgenden werden weitere Begriffsnetze entwickelt, die die bereits genannte Leitidee „Messen“ (KMK 2004, S.9) oder „Größen und Messen“ (SenBJF & MBJS 2020, S. 5) in den Fokus nehmen.

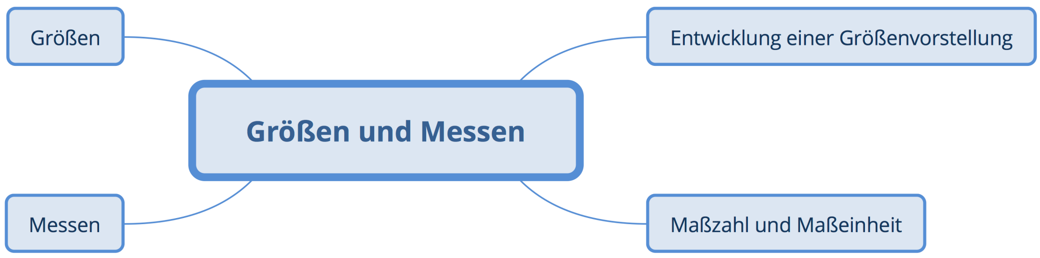
3.2.2. Begriffsnetz zum Themenbereich „Größen und Messen“

Die Grundstruktur in diesem Kapitel orientiert sich an den Ausführungen von Eckhardt (1976) zu den Größenbereichen. Wie Holland (2001) oder Krauter (2008) nennt Eckhardt (1976) bei seinen Ausführungen zu Größenbereichen die aus mathematischer Sicht zentralen Begriffe der vorliegenden Leitidee: *Größen*, *Messen* sowie die Verknüpfung aus *Maßzahl und Maßeinheit* (vgl. Eckhardt 1976, S. 96). Eckhardt liefert eine präzise Definition der vier Begriffe und formuliert ihren Zusammenhang in kurzer und klarer Weise. Daraus abgeleitet, ist die Grundstruktur dieses Kapitels ein Zusammenspiel aus den drei Aspekten *Größen*, *Messen* und als drittes der Kombination aus *Maßzahl* und *Maßeinheit*. Die Lernenden erschließen sich zu jedem der drei Aspekte die Konzepte und Begriffe in diesem Zusammenhang. Sie erkunden so die von Leuders und Barzel (2014) formulierten drei zentralen Kernideen im Themenbereich „Größen und Messen“ (vgl. Leuders & Barzel 2014, S. 48 f), mit denen sie sich auf die Arbeit von Ruf und Gallin (1998) beziehen. Mit der didaktischen

Perspektive kommt noch ein vierter Aspekt dazu, der in diesem Themenbereich der Schulmathematik im Fokus steht: die *Entwicklung einer Größenvorstellung.*

Dieses Zusammenspiel aus den vier genannten Aspekten wird in Abbildung 11 dargestellt.

Abbildung 11: Netz zur Übersicht über den Themenbereich „Größen und Messen“



Leuders und Barzel (2014) liefern noch einen Gedanken, der hier aufgegriffen wird: Die *Entwicklung einer Größenvorstellung*, das *Messen* und der Umgang mit *Maßzahlen* und *Maßeinheiten* überschreiben die drei Bereiche, in denen die Lernenden Kompetenzen im Zusammenhang mit Größen entwickeln. Hier lassen sich inhaltlich auch die Stufenmodelle einbetten, auf die sich in der Didaktik bei der Behandlung von Größen bezogen wird (vgl. Franke 2001, S. 241; Greefrath 2010, S. 111).

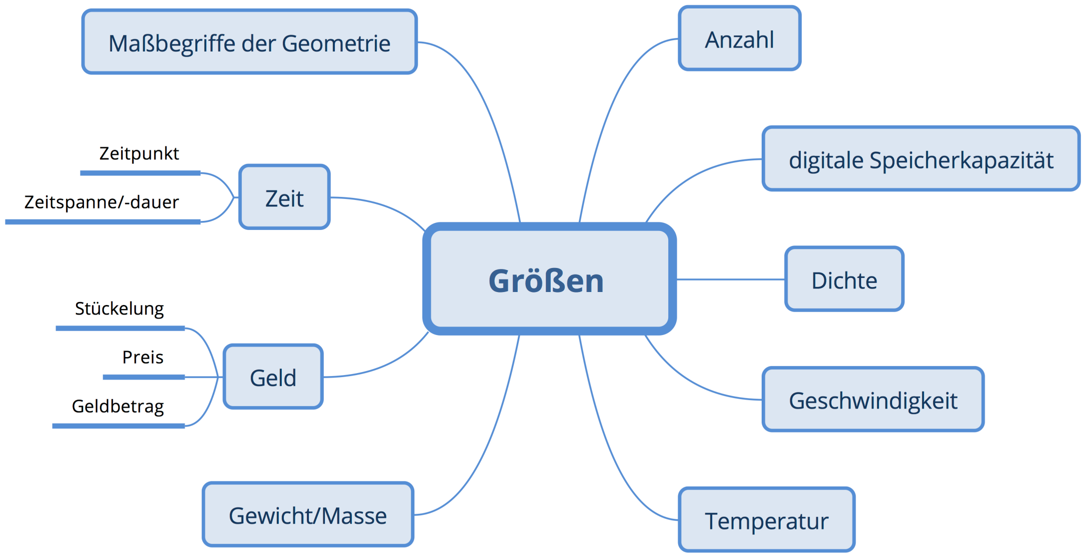
Die Stufenmodelle finden in der vorliegenden Arbeit keine weitere Beachtung, da die Stufen nicht als System zur Kategorisierung gewählt werden. Sie bilden den Prozess des Lernens der Inhalte in diesem Themenfeld ab. Die Landkarte visualisiert die Struktur der Inhalte und hat daher einen anderen Fokus. Gleichwohl werden die Stufenmodelle an dieser Stelle erwähnt, um so eine mögliche Verbindung zum Einsatz der Landkarte bei der Unterrichtsplanung und im Unterricht aufzuzeigen.

Im Folgenden werden zu jedem der vier gerade eingeführten Aspekte weitere Begriffsnetze entwickelt.

3.2.2.1. Größen

Mathematisch präziser wäre es, an dieser Stelle nicht von *Größen,* sondern von *Größenbereichen* zu sprechen (vgl. Eckhardt 1976, S. 94). Im schulischen Kontext geht es jedoch weniger darum, sich mit der Axiomatik zum Konzept der Größenbereiche im Detail auseinanderzusetzen. Im Zentrum stehen vielmehr einzelne Elemente eines Größenbereichs, was die Verwendung des Begriffs *Größe* für diese Kategorie rechtfertigt.

Abbildung 12: Netz zu Größen



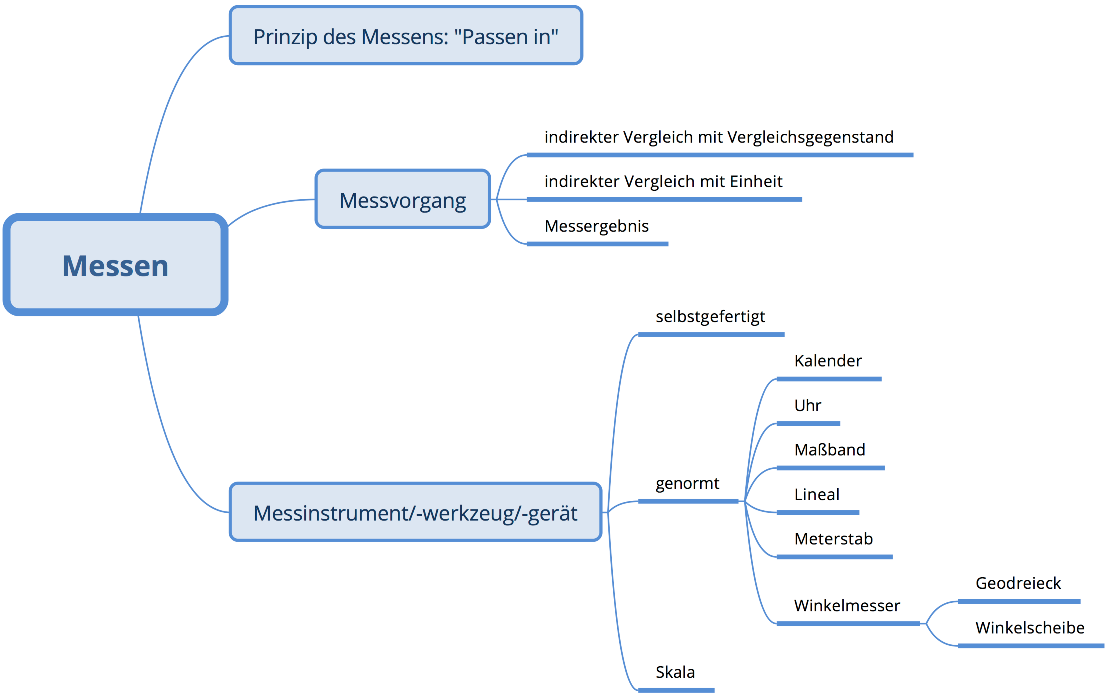
In Abbildung 12 wird das Hauptthema *Größen* weiter ausdifferenziert, indem die Schlüsselbegriffe angebunden werden, die Beispiele liefern. Im Begriffsnetz, das in Abbildung 10 dargestellt ist, sind vier Größen unter der Kategorie *Maßbegriffe der Geometrie* bereits ausdifferenziert und im zugehörigen Textabschnitt beschrieben. Daher wird an dieser Stelle nur die Kategorie genannt und für die Ausführungen auf 3.2.1.6. verwiesen. Zusätzlich zu den vier Größen *Winkelmaße, Längen, Flächeninhalte* und *Rauminhalte/Volumina/Hohlmaße*, die im eben genannten Begriffsnetz eingebunden sind, werden im Kontext der Schulmathematik verpflichtend *Zeit, Geld* und *Gewicht/Masse* thematisiert. Alle folgenden Schlüsselbegriffe finden sich so nicht in den untersuchten Rahmenlehrplänen zu diesem Themenbereich. Gleichwohl tauchen sie im Unterricht auf und werden daher in Anlehnung an Greefrath (2010) mit aufgenommen.

Bei der Einführung der negativen Zahlen spielt die *Temperatur* eine Rolle, und im Rahmen des naturwissenschaftlichen Unterrichts oder beim Sachrechnen werden auch die Größen *Geschwindigkeit* und *Dichte* thematisiert. Die *digitale Speicherkapazität* und auch die *Anzahl* als Größe werden hier gleichwertig aufgeführt (vgl. Greefrath 2010, S. 106). Die Sonderrollen, die Greefrath bei den fünf Größen *Anzahl, Temperatur, Geld, digitale Speicherkapazität* und *Gewicht/Masse* beschreibt, werden hier nicht weiter ausgearbeitet (vgl. Greefrath 2010, S. 103 ff.). Die inhaltliche Auseinandersetzung mit den Eigenschaften der einzelnen Größen erfolgt im Unterricht. Hier geht es um die Schlüsselbegriffe und ihre Verbindungen untereinander. Die Lernenden sollen einen möglichst umfassenden Überblick über die Größen bekommen, mit denen sie immer vertrauter umzugehen lernen sollen. Mit der *Anzahl* als Größe bietet sich ein Anknüpfungspunkt zu dem Begriffsnetz der Zahlen und Operatoren.

Eine weitere Gliederungsebene findet sich bei der *Zeit*. Hier werden explizit die Begriffe *Zeitpunkt* und *Zeitspanne bzw. -dauer* gefordert. Genauso werden beim *Geld Stückelung, Preis* und *Geldbetrag* als weitere Schlüsselbegriffe platziert. In beiden Fällen werden die Begriffe der höheren Ebene noch weiter zerlegt in einzelne Teile oder Aspekte.

3.2.2.2. Messen

Abbildung 13: Netz zum Messen



Leuders und Barzel (2014) beschreiben die Kernidee des Messens in dem folgenden Satz: „Will man die Größe eines Objekts zahlenmäßig erfassen, so wählt man ein ‚kleines' Vergleichsobjekt und fragt, wie oft es in das zu erfassende Objekt passt" (Leuders & Barzel 2014, S. 50). Damit formulieren sie den Grundgedanken, der in dem Begriffsnetz zusätzlich zu den Punkten in der Begriffsliste als *Prinzip des Messens: „Passen in"* auftaucht *(vgl. Leuders & Barzel 2014, S. 50).* Messen beschreibt eine aktive Handlung. Dieser *Messvorgang* kann ein *indirekter Vergleich mit* einem beliebigen *Vergleichsgegenstand* oder aber *mit* einer *Einheit* sein (*vgl. Leuders & Barzel 2014, S. 50)*. Auch diese Schlüsselbegriffe finden sich so nicht in den Begriffslisten, werden aber an dieser Stelle zur Differenzierung mit aufgenommen. Am Ende eines solchen Messvorgangs steht ein *Messergebnis*.

Ziel ist die Bestimmung einer *Maßzahl* für die zu messende Größe (vgl. Eckhardt 1976, S. 96). Der Begriff der *Maßzahl* erscheint in diesem Themenbereich auf derselben Gliederungsebene wie *Messen*. Inhaltlich ist er als Ziel oder Ergebnis des Messvorgangs vielmehr eine Nebenkategorie zum *Messen* als eine Unterkategorie. Die *Maßzahl* wird daher gemeinsam mit der *Maßeinheit* in einem eigenen Begriffsnetz erkundet.

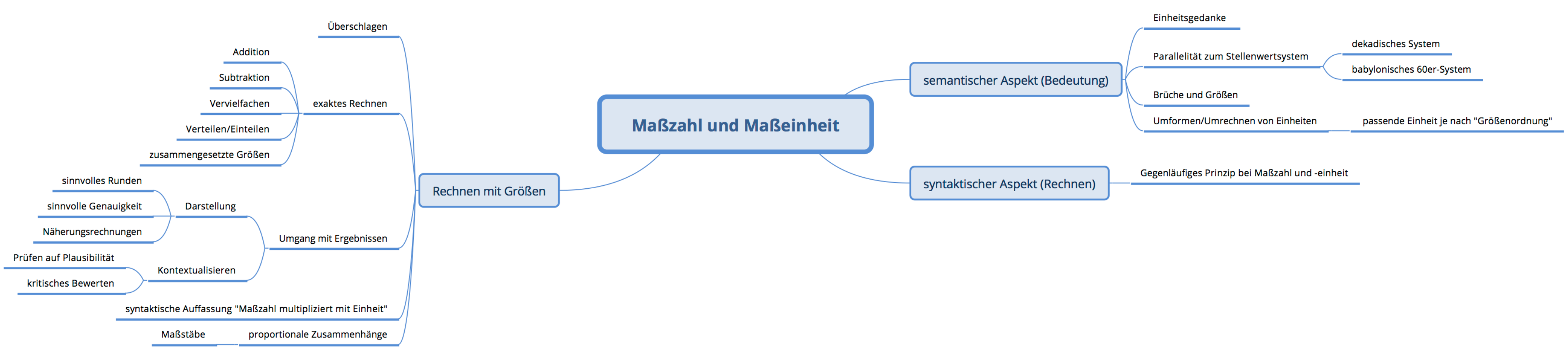
Zentral für die Handlung des Messens und daher an dieser Stelle als Unterkategorie angebunden ist das *Messinstrument, -werkzeug oder -gerät*. Die Lernenden sollen hierbei zwischen *selbstgefertigt* und *genormt* unterscheiden. Bei den *genormten* Messinstrumenten wird noch eine weitere Gliederungsebene eröffnet mit einzelnen Vertretern, die in den Rahmenlehrplänen explizit formuliert sind. Zusätzlich werden hier noch der *Meterstab* und die beiden *Winkelmesser Geodreieck* und *Winkelscheibe* als Messwerkzeuge aus dem Lebensumfeld der Lernenden mit aufgenommen. Ein letzter Begriff in diesem Kontext ist der der *Skala*. Als charakteristisches Merkmal wird sie bei den Messinstrumenten als dritte Unterkategorie genannt.

3.2.2.3. Maßzahl und Maßeinheit

Das nächste Begriffsnetz (siehe Abbildung 14) verbindet die bereits erwähnte *Maßzahl* als das Ergebnis eines Messvorgangs mit der gewählten *Maßeinheit*. Da beide in direktem Zusammenhang stehen und sich gegenseitig bedingen, werden sie an dieser Stelle auch gemeinsam dargestellt (vgl. Eckhardt 1976, S. 96).

Die beiden Kategorien *semantischer Aspekt (Bedeutung)* und *syntaktischer Aspekt (Rechnen)* beziehen sich auf die *Maßeinheit* und orientieren sich an den Ausführungen von Leuders und Barzel (vgl. Leuders & Barzel 2014, S. 55). Auf der nächsten Gliederungsebene wird zum einen der *Einheitsgedanke* in den Fokus genommen. Inhaltlich geht es hier um die formale mathematische Definition der Maßeinheit als „das kleinste Element von G […] oder ein willkürlich gewähltes Element, dem man die Zahl 1 zuordnet“ (Eckhardt 1976, S. 96). Parallel dazu können neben der 1 die Einheiten des jeweiligen Größenbereiches thematisiert werden. Da an dieser Stelle die Übersichtlichkeit und die Vollständigkeit der Einheiten aller genannten Größen antiproportional zueinander sind, wird auf eine Auflistung der Einheiten zu den einzelnen Größen verzichtet. Neben dem *Einheitsgedanken* werden zwei Unterkategorien eröffnet, die Verbindungen zu anderen noch folgenden Themen darstellen: die *Parallelität zum Stellenwertsystem* und die Verbindung zwischen *Brüchen* und *Größen*. Beim ersten werden der Vollständigkeit halber das *dekadische System* und das *babylonische 60er-System*, als die beiden auftretenden Stellenwertsysteme, noch weiter unterschieden.
Die letzte Unterkategorie zum *semantischen Aspekt* bildet das *Umformen* bzw. *Umrechnen von Einheiten*, kombiniert mit der Wahl einer *passenden Einheit je nach „Größenordnung“*.

Abbildung 14: Netz zu Maßzahl und Maßeinheit



Den Bezug zur *Maßzahl* hat die Kategorie, die überschrieben ist durch *Rechnen mit Größen*. Aus den Rahmenlehrplänen übernommen sind die drei Unterkategorien *Überschlagen*, *exaktes Rechnen* und *Umgang mit Ergebnissen*. Leuders und Barzel (2014) bringen in diesen Kontext noch zwei weitere Aspekte ein: Zum einen weisen sie auf die *syntaktische Auffassung* der Multiplikation zwischen Maßzahl und Maßeinheit hin, die mit fortschreitendem Lernen entwickelt wird (vgl. Leuders & Barzel 2014, S. 58). Zum anderen besteht die Verknüpfung zum Thema proportionale Zuordnung über den *proportionalen Zusammenhang* zwischen Größen (vgl. Leuders & Barzel 2014, S. 57). Hier ist das Rechnen mit *Maßstäben* angebunden. Die Unterkategorie des *exakten Rechnens* wird zur Verdeutlichung noch nach den vier möglichen Operationen zerlegt. Als fünfte Kategorie wird hier die Sonderrolle der *zusammengesetzten Größen* angeführt und damit verdeutlicht.

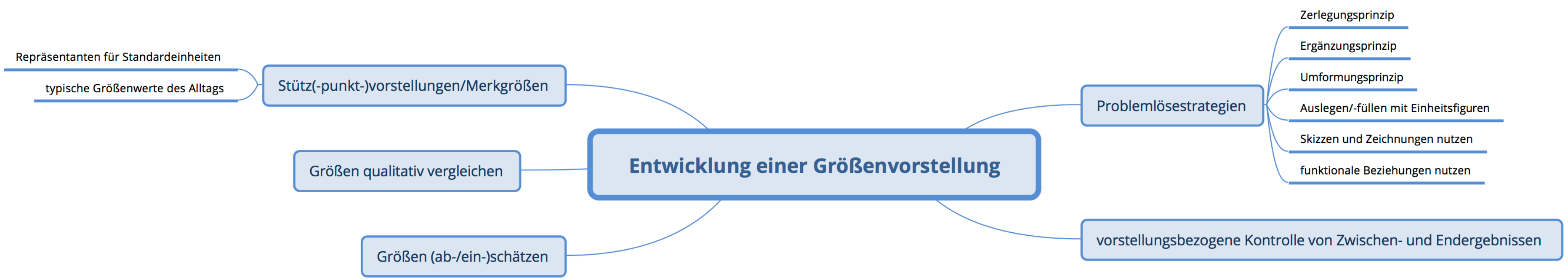
Beim *Umgang mit Ergebnissen* werden zwei Aspekte unterschieden, die insbesondere bei den Größen von Bedeutung sind: die *Darstellung* und das *Kontextualisieren*. Bei der *Darstellung* werden die drei wichtigen Punkte in diesem Zusammenhang genannt: *sinnvolles Runden, sinnvolle Genauigkeit* und *Näherungsrechnungen*. Wie in anderen Bereichen des Sachrechnens geht es ferner auch bei den Größen darum, die Ergebnisse am Ende im Kontext zu sehen (vgl. Greefrath 2010, S. 107). Dabei sind das *Prüfen auf Plausibilität* und das *kritische Bewerten* die beiden weiter ausdifferenzierten Unterpunkte.

Bei der Wahl und der Formulierung der Unterkategorien spielen die Ausführungen der genannten Autor*innen eine zentrale Rolle. So tauchen hier ergänzend zu den Inhalten in den Begriffslisten die folgenden Punkte auf: *exaktes Rechnen, proportionale Zusammenhänge, der Parallelität zu den beiden Stellenwertsystemen*, dem *dekadischen System* und *dem babylonischen 60er-System* und die Unterscheidung zwischen dem *semantischen* und dem *syntaktischen Aspekt* mit dem *gegenläufigen Prinzip bei Maßzahl und -einheit.*

3.2.2.4. Entwicklung einer Größenvorstellung

Die *Entwicklung einer Größenvorstellung* ist eng geknüpft an die Entwicklung von *Stütz(-punkt-)vorstellungen* oder *Merkgrößen*. Das können zum einen *Repräsentanten für Standardeinheiten* und zum anderen *typische Größenwerte des Alltags* sein. Mit ihrer Hilfe wiederum wird es den Lernenden möglich, *Größen qualitativ* zu *vergleichen* und *Größen ab-* oder *einzuschätzen*.
Beides sind ebenfalls zentrale Aspekte, wenn eine Vorstellung zu oder von Größen gewonnen werden soll (vgl. Leuders & Barzel 2014, S. 54).

Abbildung 15: Netz zur Entwicklung einer Größenvorstellung



Eher als Folge einer entwickelten Größenvorstellung wird eine weitere Kategorie aufgestellt: die *vorstellungsbezogene Kontrolle von Zwischen- und Endergebnissen*, was mit dem eben genannten *Prüfen auf Plausibilität* verbunden werden kann. Die Kategorie der *Problemlösestrategien* eröffnet weitere Möglichkeiten zur Ausdifferenzierung der Größenvorstellung, ohne konkret an eine bestimmte Größe gekoppelt zu sein. In der Literatur finden sich oftmals Beispiele zu den Größen der Geometrie: Hier werden das *Zerlegungsprinzip*, das *Ergänzungsprinzip*, das *Umformungsprinzip* und das *Auslegen/-füllen mit Einheitsfiguren* besonders anschaulich. Die beiden letztgenannten finden keine direkte Entsprechung in den Begriffslisten: *Skizzen und Zeichnungen nutzen* und *funktionale Beziehungen nutzen* sind zwar beides keine speziellen Problemlösestrategien im Kontext Größen; Gleichwohl sind es Strategien, die Lernende in diesem Kontext kennenlernen und dann nach Belieben auch bei der Entwicklung anderer Vorstellungen einsetzen sollen.

3.2.3. Begriffsnetz zum Themenbereich „Zahlen und Operationen“

Bei der Entwicklung der Netze zu den mathematischen Leitideen „Zahlen und Operationen“ sowie „Gleichungen und Funktionen“ kommt die folgende Überlegung zum Tragen: „Die Zuordnung einer inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz zu einer mathematischen Leitidee ist nicht in jedem Fall eindeutig, sondern davon abhängig, welcher Aspekt mathematischen Arbeitens im inhaltlichen Zusammenhang betont werden soll“ (KMK 2004, S. 9). In diesem Sinne erfolgt die Entwicklung der Netze in diesem und dem folgenden Abschnitt nicht immer analog zu den in den Rahmenlehrplänen gewählten Strukturierungen. Vollrath (1999) eröffnet in seinen Ausführungen zur Algebra in der Schulmathematik vier Themenstränge: Zahlen, Terme, Gleichungen und Funktionen (vgl. Vollrath 1999, S.1). Jeder dieser Themenstränge wird für sich erarbeitet. Gleichzeitig lassen sich über die Themenstränge hinweg Themenkreise finden, bei denen sich eine inhaltliche Vernetzung empfiehlt (vgl. Vollrath 1999, S.1). In der vorliegenden Arbeit wird die Einteilung von Vollrath (1999) übernommen. Zunächst werden einzelne Netze zu jedem Themenstrang entwickelt. Die inhaltlichen Verbindungen zwischen den Themensträngen werden an entsprechender Stelle thematisiert und fließen in die Gesamtheit der Darstellungen ein.

In diesem Abschnitt steht die Leitidee „Zahlen und Operationen“ im Fokus. Um beide Aspekte dieser Leitidee geht es bei Vollrath (1999) im Themenstrang „Zahlen“. Nach Siebel und Wittmann (2014) bilden das „inhaltliche Denken in Bezug auf Zahlen“ und „das Beherrschen des Kalküls“ das Fundament dieses Themenstrangs (vgl. Siebel & Wittmann 2014, S. 30). Zu ersterem gehört das „Verständnis der Eigenschaften von Zahlen verschiedener Zahlbereiche […] [und] der Operationen mit Zahlen“ (Siebel & Wittmann 2014, S. 30). Das „Beherrschen des Kalküls“ umfasst das „sichere und automatisierte sowie möglichst aufgabenadäquate Rechnen mit Zahlen“ (Siebel & Wittmann 2014, S. 32).

Aufbauend auf diesen Überlegungen, wird der Themenbereich „Zahlen und Operationen“ in drei Hauptthemen zerlegt: in *Zahlbereiche*, *Operationen* sowie *Rechengesetze und Rechenstrategien.* Zu jedem dieser drei wird ein eigenes Verknüpfungsbild entwickelt. Dabei beziehen sich die beiden Netze zu den *Zahlbereichen* und den *Operationen* auf den eben als erstes genannten Aspekt von Siebel und Wittmann (2014). Der zweite Aspekt spiegelt sich in dem Geflecht zu den *Rechengesetzen und Rechenstrategien* wider.

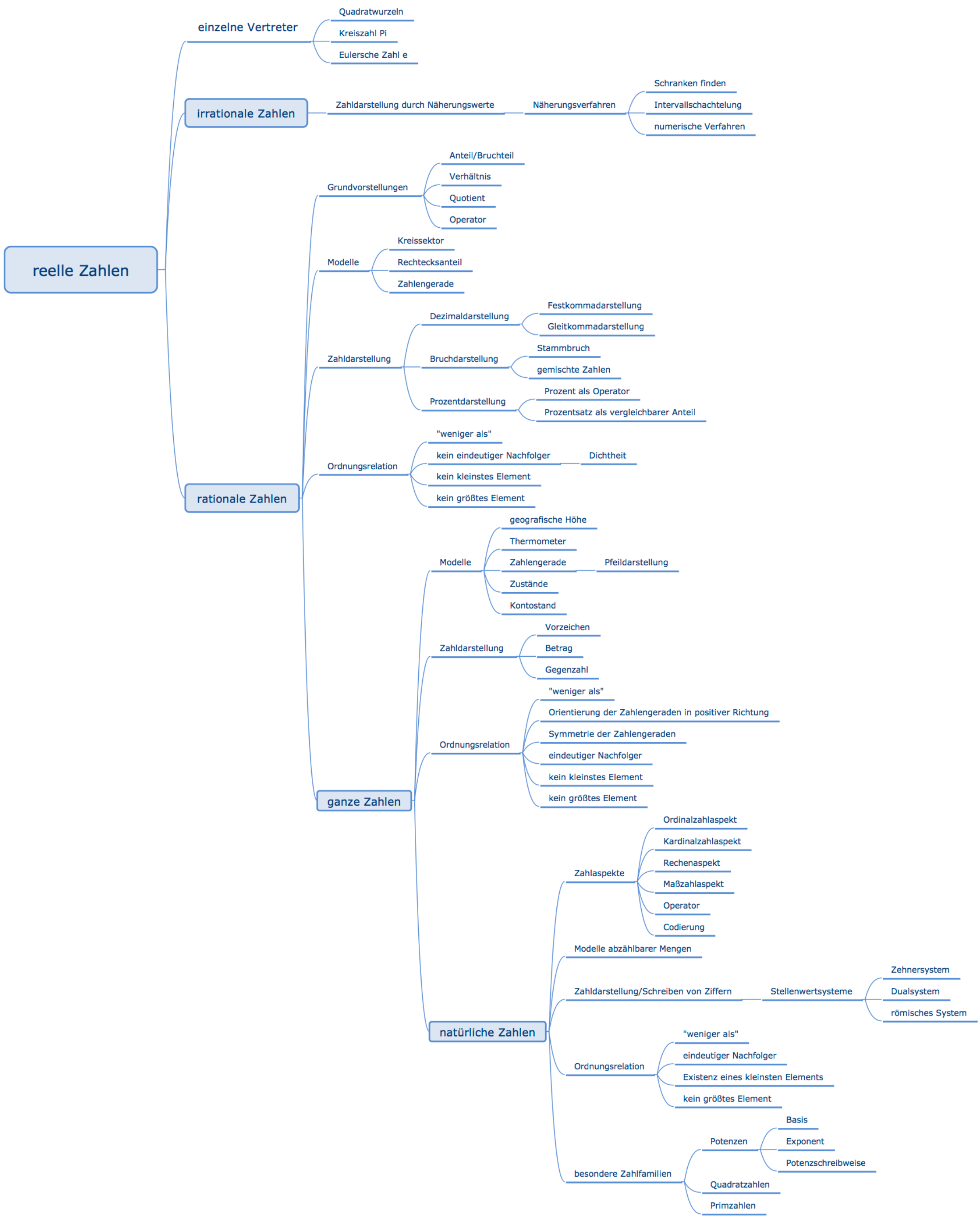
Abbildung 16: Netz zur Übersicht über den Themenbereich „Zahlen und Operationen“

Die entstehenden Netze sollen ebenfalls dem algebraischen Verständnis der Zahlen genügen (vgl. Vollrath 1999, S. 17). In dem Netz zu den *Zahlbereichen* finden sich die Inhalte zum Aufbau der Zahlbereiche mit den auf ihnen definierten Ordnungsrelationen. Das Netz zu den *Operationen* enthält sowohl die Inhalte zu den auf den Zahlbereichen definierten Rechenoperationen als auch weitere Operationen im Sinne von Aktionen, die mit Mengen oder Zahlen durchführbar sind. Im Netz zu den *Rechengesetzen und Rechenstrategien* werden die Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten der Rechenoperationen dargestellt und Strategien zusammengefasst, um das Rechnen mit Zahlen zu systematisieren oder zu vereinfachen. Die beiden Verknüpfungsbilder zu den *Operationen* und zu den *Rechengesetzen und Rechenstrategien* fokussieren sich auf die algebraische Struktur der Zahlen (vgl. Vollrath 1999, S. 18).

3.2.3.1. Zahlbereiche

Die in der Mathematik der Sekundarstufe I auftretenden vier *Zahlbereiche* bilden eine erste Strukturierung in diesem Netz (siehe Abbildung 17): die *natürlichen Zahlen*, die *ganzen Zahlen*, die *rationalen Zahlen* und die *reellen Zahlen.*

Abbildung 17: Netz zu Zahlbereichen



Die hier gewählte Anordnung als Baum spiegelt ihre innere Struktur wieder: Die *reellen Zahlen* vereinigen die *rationalen* und die *irrationalen Zahlen.* Eine Teilmenge der rationalen Zahlen sind die *ganzen Zahlen,* die wiederum die *natürlichen Zahlen* als Teilmenge enthalten.

Bei allen vier Zahlbereichen sollen die Lernenden inhaltliche Vorstellungen von den Zahlen und ihren Eigenschaften erwerben. Diese Vorstellungen entwickeln sich aus den folgenden Aspekten:

- *Modelle* bieten Anknüpfungspunkte an Alltagserfahrungen und werden insbesondere bei den *ganzen Zahlen* und bei den *rationalen Zahlen* zur Veranschaulichung verwendet (vgl. Siebel & Wittmann 2014, S. 39). In den Rahmenlehrplänen werden hierzu einige Modelle explizit als Lernziele formuliert, die daher in dem Netz auftauchen.
- In jedem Zahlbereich sind bestimmte Formen der *Zahldarstellung* charakteristisch. Damit ergeben sich das Thema der *Stellenwertsysteme* bei den natürlichen Zahlen, die Bedeutung des *Vorzeichens* bei den ganzen Zahlen, verschiedene *Darstellungsweisen* bei den rationalen Zahlen und das Thema der *Näherungswerte* bei den irrationalen Zahlen (vgl. Siebel & Wittmann 2014, S. 31).
- Für die Eigenschaften der Zahlen innerhalb der einzelnen Zahlbereiche beschreibend sind die in ihnen definierten *Ordnungsrelationen*. Auch sie bekommen ihren Platz in diesem Netz.
- Die *Zahlaspekte* bei den *natürlichen Zahlen* und die *Grundvorstellungen* bei den *rationalen Zahlen* bilden die Antworten auf die Frage: „In welchen Situationen treten [die entsprechenden Zahlen] auf und in welcher Weise werden sie dort verwendet?“ (Siebel & Wittmann 2014, S. 34). Diese Frage wird bei den beiden genannten Zahlbereichen gestellt. Sie verdeutlicht den Lernenden durch die *Zahlaspekte* bei den *natürlichen Zahlen*, die als erste entdeckt werden, wie vielfältig Zahlen einsetzbar und anwendbar sind. Mit den *Grundvorstellungen* bei den *rationalen Zahlen* werden die Lernenden für einen differenzierenden Umgang insbesondere mit den Bruchzahlen sensibilisiert.

Die vier thematisierten Aspekte strukturieren die Lerninhalte bei den einzelnen Zahlbereichen. *Grundvorstellungen* und *Zahlaspekte, Modelle* und *Ordnungsrelation* sind Ergänzungen zu den Schlüsselbegriffen auf den Listen. Es werden nicht in allen Zahlbereichen alle vier aufgegriffen. Die Aspekte sollen strukturierende Elemente für die einzelnen Lerninhalte sein, die in den Rahmenlehrplänen im jeweiligen Zahlbereich formuliert sind. In einzelnen Zahlbereichen werden sie durch u.a. *Grundvorstellungen* und *einzelne Vertreter* ergänzt.

Die nun folgende Beschreibung des Netzes erfolgt von unten nach oben. Den Start bilden die *natürlichen Zahlen*. Es folgen die *ganzen Zahlen*, die die *natürlichen Zahlen* enthalten. Damit thematisieren die eben genannten Aspekte bei den *ganzen Zahlen* die „Neuerungen“ oder Erweiterungen im Vergleich zu diesen bei den *natürlichen Zahlen*. Gleiches geschieht beim Übergang zu den *rationalen Zahlen*. Der Schritt zu den *reellen Zahlen* erfolgt über die Vereinigung der *rationalen Zahlen* mit den *irrationalen Zahlen*, die hier als eigene Menge von Zahlen behandelt werden. Der Schlüsselbegriff der *Zahlbereichserweiterung* aus der Begriffsliste ist demnach im Aufbau des Netzes visualisiert, taucht aber nicht noch zusätzlich als eigener Knoten auf.

Natürliche Zahlen

Bei den *natürlichen Zahlen* werden alle vier der oben genannten Aspekte beleuchtet. Unter den *Zahlaspekten* werden sechs Möglichkeiten genannt, wie natürliche Zahlen eingesetzt werden (vgl. Siebel & Wittmann 2014, S. 33): *Ordinalzahlaspekt, Kardinalzahlaspekt, Rechenaspekt, Maßzahlaspekt, Operator* und *Codierung,* wobei die beiden letztgenannten in Anlehnung an die genannten Autor*innen noch ergänzend zu der Begriffsliste aufgenommen werden. Den Lernenden sollen so die verschiedenen Arten der Verwendung verdeutlicht werden.

Unter dem Aspekt der *Zahldarstellung/Schreiben von Ziffern* sind die *Stellenwert-systeme* angesiedelt. Explizit gefordert werden in den untersuchten Rahmenlehrplänen das *Zehnersystem*, das *Dualsystem* und das *römische System*.

Bei den *natürlichen Zahlen* wird der Begriff der *Ordnungsrelation* mit vier Eigenschaften verknüpft, die diesen Aspekt weiter charakterisieren und daher zusätzlich zu den Inhalten auf der Begriffsliste in diesem Netz aufgenommen werden: *„weniger als“*, *eindeutiger Nachfolger*, *Existenz eines kleinsten Elements* und *kein größtes Element*. Sie entsprechen den Grundvorstellungen zur Ordnungsrelation auf den natürlichen Zahlen, die Siebel und Wittmann (2014) mit Bezugnahme auf Hefendehl-Hebeker und Prediger (2006) anführen (vgl. Siebel & Wittmann 2014, S. 30).

Anders als bei den *ganzen Zahlen* und bei den *rationalen Zahlen* werden in den Rahmenlehrplänen bei den *natürlichen Zahlen* keine Modelle ausdrücklich genannt. Gleichwohl wird hier der Aspekt beleuchtet und allgemein mit *Modelle abzählbarer Mengen* überschrieben. Damit steht er für alle möglichen diskreten *Modelle abzählbarer Mengen*, die den Lernenden im Unterricht begegnen können.

Zusätzlich zu den vier Aspekten werden bei den natürlichen Zahlen noch drei Teilmengen als *besondere Zahlfamilien* genannt, die in der Mathematik der Sekundarstufe I eine prominente Rolle einnehmen: die *Primzahlen*, die *Quadratzahlen* und die *Potenzen*. Bei den *Potenzen* werden der Vollständigkeit halber noch drei Schlüsselbegriffe angeknüpft, die diesen weiter charakterisieren: *Basis, Exponent* und *Potenzschreibweise*.

Ganze Zahlen

Bei den *ganzen Zahlen* werden drei der oben beschriebenen Aspekte beleuchtet: die *Modelle,* die *Zahldarstellung* und die *Ordnungsrelation*. Als direkte Erweiterung der *natürlichen Zahlen* werden keine neuen *Zahlaspekte* oder *Grundvorstellungen* aufgeschlüsselt (vgl. Siebel und Wittmann 2014, S. 31).

Um ganze Zahlen im Mathematikunterricht vorstellungsgestützt einzuführen und die unterschiedlichen Rechenoperationen auf ihnen zu definieren, eignen sich mehrere *Modelle* (vgl. Vollrath 1999, S. 52). Diese unterstützen die Erkenntnis, dass die *ganzen Zahlen* eine Erweiterung der *natürlichen Zahlen* sind. In den Rahmenlehrplänen werden die folgenden *Modelle* gefordert, die an dieser Stelle im Begriffsnetz der ganzen Zahlen aufgeführt sind: *geografische Höhe, Thermometer, Zustände, Kontostand* und die *Zahlengerade*. Inhaltlich direkt geknüpft an den Begriff der *Zahlengerade* ist die *Pfeildarstellung* bei den *ganzen Zahlen*. Da sie im Rahmen dieses Modells verwendet wird, ist dieser Schlüsselbegriff hier verknüpft und nicht, wie es auch möglich wäre, unter dem Aspekt der *Zahldarstellung*.

Bei der *Zahldarstellung* sind die Begriffe *Vorzeichen, Betrag und Gegenzahl* angesiedelt. Das Vorzeichen charakterisiert die Besonderheit der *ganzen Zahlen* als Erweiterung der *natürlichen Zahlen*. Der Begriff *Betrag* ist an dieser Stelle positioniert, weil seine Definition und sein Mechanismus im Kontext der *ganzen Zahlen* wirkt. Mit ihm ist der Begriff der *Gegenzahl* eng verbunden. Als Funktionswert der Betragsfunktion ist der *Betrag* eine Stelle zur Verknüpfung mit dem Netz zu den *Funktionen* (siehe 3.2.4.3.).

Zu den Eigenschaften der *Ordnungsrelation* bei den *natürlichen Zahlen* – *„weniger als“* , *eindeutiger Nachfolger* und *kein größtes Element* – kommen noch drei weitere Punkte hinzu: Bei den *ganzen Zahlen* existiert nun *kein kleinstes Element* mehr; *die Zahlengerade ist in positiver Richtung orientiert und symmetrisch*. Auch diese Punkte sind, wie bei den natürlichen Zahlen, Ergänzungen zu den Inhalten aus den Lehrplänen.

Rationale Zahlen

Bei den *rationalen Zahlen* werden alle vier oben definierten Aspekte beleuchtet. Die Bruchzahlen erweitern die bisherigen Zahlenmengen. Für sie sind neue *Grundvorstellungen* entscheidend, die als ein Aspekt auftauchen. Relevant für die Lernenden und daher hier angesiedelt sind Brüche als *Anteil/Bruchteil*, als *Verhältnis*, als *Quotient* und als *Operator*.

Für die Bruchzahlen eignen sich wieder *Modelle* zur Veranschaulichung: der *Kreissektor*, der *Rechtecksanteil* und die *Zahlengerade*. Anders als bei den *ganzen Zahlen* sind es in diesem Fall eher Visualisierungen als Alltagsphänomene, die unter diesem Aspekt genannt werden.

Der Begriff der *Ordnungsrelation* wird bei den rationalen Zahlen wieder durch Eigenschaften charakterisiert. Zu der bisher bekannten *„weniger als“*-Relation sowie dem nicht existierenden *kleinsten* und *größten Element* kommt noch hinzu, dass es zu einer beliebigen rationalen Zahl *keinen eindeutigen Nachfolger* mehr gibt. Hier anzuknüpfen ist der Begriff der *Dichtheit,* der als einziger dieses Absatzes auch auf der Begriffsliste auftaucht.

Als vierter Aspekt bei den rationalen Zahlen wird die *Zahldarstellung* beleuchtet. Dabei sind die *Dezimaldarstellung*, die *Bruchdarstellung* und die *Prozentdarstellung* zu unterscheiden. Der *Dezimaldarstellung* werden noch die *Festkomma-* und die *Gleitkommadarstellung* als mögliche Varianten zugeordnet. Bei der *Bruchdarstellung* sind die Begriffe *Stammbruch* und *gemischte Zahlen* angeknüpft, die jeweils eine Teilmenge der Bruchzahlen mit bestimmten Eigenschaften beschreiben und die eine besondere Darstellungsform haben. Bei der *Prozentdarstellung* werden noch die beiden Möglichkeiten *Prozent als Operator* und *Prozentsatz als vergleichbarer Anteil* angesiedelt, die das Konzept der *Prozentdarstellung* weiter aufschlüsseln.

Irrationale Zahlen

Bei den *irrationalen Zahlen* wird von den obigen Aspekten nur die *Zahldarstellung* beleuchtet. Hier wird der Schlüsselbegriff der *Näherungswerte* verknüpft. In diesem Kontext werden mögliche *Näherungsverfahren* in den Fokus genommen, wobei dieser Begriff zusätzlich zu den Inhalten der Liste aufgenommen wird, um hier die Kategorie zu benennen: Die Rahmenlehrpläne fordern das Verfahren *Schranken finden* sowie die *Intervallschachtelung* und als dritte Möglichkeit *numerische Verfahren.*

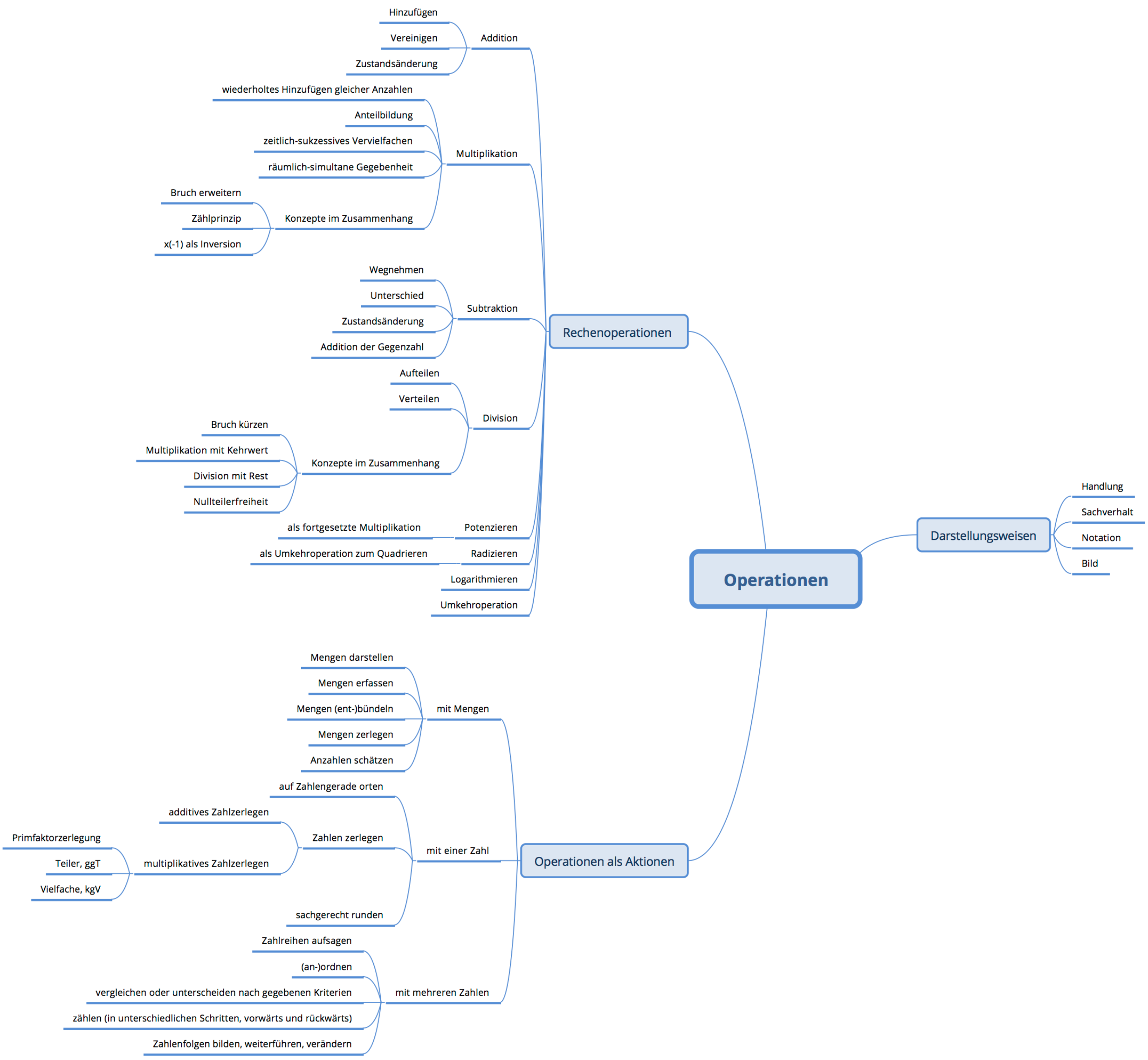
Reelle Zahlen

Der letzte Schritt in diesem Netz ist die Vereinigung der *rationalen* und der *irrationalen Zahlen* zu den *reellen Zahlen*.

Als einzige Ergänzung zu den bereits bei den rationalen und den irrationalen Zahlen genannten Punkten werden an dieser Stelle übergreifend und wie bei den *natürlichen Zahlen einzelne Vertreter* genannt: die *Quadratwurzeln,* die *Kreiszahl Pi* und *die Eulersche Zahl e,* die der Vollständigkeit halber an dieser Stelle ergänzt wird.

3.2.3.2. Operationen

Abbildung 18: Netz zu Operationen



Das Netz zu den *Operationen* gliedert sich in drei Bereiche. Einerseits umfasst es die Inhalte zu den auf den Zahlbereichen definierten *Rechenoperationen.* Andererseits werden die Inhalte gesammelt, die als *Operationen als Aktionen* im Sinne von Hantieren mit Mengen und Zahlen gefasst werden können. Den dritten Bereich bilden vier *Darstellungsweisen*, die in den untersuchten Rahmenlehrplänen unterschieden werden und für alle *Rechenoperationen* anwendbar sind und eingesetzt werden: *Handlung, Sachverhalt, Notation* und *Bild.* Sie tauchen an dieser Stelle im Verknüpfungsbild auf, um sie den Lernenden bewusst zu machen.

Rechenoperationen

Den *Rechenoperationen* werden alle Operationen zugeordnet, die im Rahmen der Schulmathematik auf den oben genannten Zahlbereichen definiert werden: die *Addition,* die *Multiplikation,* die *Subtraktion,* die *Division,* das *Potenzieren,* das *Radizieren* und das *Logarithmieren.* Bei jeder Operation sind die Begriffe angeknüpft, die jeweils die einzelnen Grundvorstellungen beschreiben (vgl. Siebel und Wittmann 2014, S. 32). Hier decken sich die Begriffslisten mit den in der Didaktik der Mathematik gängigen Grundvorstellungen (vgl. Hefendehl-Hebeker und Prediger 2006, S. 7). Zusätzlich wird an dieser Stelle inhaltlich passend noch der Begriff der *Umkehroperation* angebunden.

Bei der Multiplikation und bei der Division wird zudem jeweils ein weiterer Aspekt als *Konzepte im Zusammenhang* eröffnet. Hier geht es um Sachverhalte und um Verfahren nach Vollrath und Roth (2012), die im Rahmen dieser beiden Operationen in einzelnen Zahlbereichen beleuchtet werden (vgl. Vollrath und Roth 2012, S. 45). Im Rahmen der Multiplikation sind das die beiden Verfahren *Bruch erweitern* und das *Zählprinzip* sowie der Sachverhalt *x(-1) als Inversion.* Bei der Division sind das die drei Verfahren *Bruch kürzen*, *Multiplikation mit Kehrwert* und *Division mit Rest* sowie der Begriff der *Nullteilerfreiheit,* der hier der Vollständigkeit halber ergänzt wird.

Operationen als Aktionen

In den untersuchten Rahmenlehrplänen finden sich neben den bereits genannten und eben strukturierten Rechenoperationen noch weitere Operationen im Zusammenhang mit Mengen oder Zahlen. Diese Operationen beschreiben Handlungen, die die Lernenden im Umgang mit Mengen und Zahlen ausführen können sollen, und werden mit *Operationen als Aktionen* überschrieben. Um ein weiteres Merkmal zur Gliederung zu liefern, wird danach unterschieden, auf was bzw. auf wie viele Zahlen diese Operationen angewendet werden. So ergeben sich drei Gruppen: die, die *mit Mengen* arbeiten, die, die *mit einer Zahl* arbeiten und die, die *mit mehreren Zahlen* arbeiten.

Anknüpfend an den Kardinalzahlaspekt im Zahlbereich der natürlichen Zahlen werden von den Lernenden fünf Tätigkeiten im Umgang mit Mengen durchgeführt: *Mengen* werden *dargestellt* und *erfasst*, *Mengen* werden *ge- oder entbündelt, zerlegt* und ihre *Anzahlen geschätzt*.

Eine Zahl haben die Lernenden im Blick, wenn sie diese *auf* der *Zahlengerade orten* oder *sachgerecht runden* sollen. Die dritte Aktion, die von einer Zahl ausgeht, ist *Zahlen zerlegen*. Dabei werden zwei Formen unterschieden: das *additive Zahlzerlegen*, was dem Zerlegen von Mengen entspricht, und das *multiplikative Zahlzerlegen,* das an dieser Stelle der Vollständigkeit halber ergänzt wird, um diese zweite Variante zu beschreiben. Ziel dieser Unterscheidung ist, die Begriffe mit der zugrundeliegenden Handlung zu verknüpfen. Beim *multiplikativen Zahlzerlegen* angeknüpft sind die *Primfaktorzerlegung* als eine spezielle Form sowie die beiden charakterisierenden Schlüsselbegriffe *Teiler,* kombiniert mit dem Konzept des *größten gemeinsamen Teilers (ggT),* und *Vielfache,* mit dem Konzept des *kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV)*.

Die untersuchten Lehrpläne liefern zudem fünf Aktionen, die sich auf *mehrere Zahlen* beziehen: *Zahlreihen aufsagen*, Zahlen *(an-)ordnen* und *vergleichen oder unterscheiden nach gegebenen Kriterien, zählen (in unterschiedlichen Schritten, vorwärts und rückwärts)* sowie *Zahlenfolgen bilden, weiterführen* und *verändern.*

3.2.3.3. Rechengesetze und Rechenstrategien

Das dritte Hauptthema innerhalb dieses Themenbereichs ist überschrieben mit *Rechengesetze und Rechenstrategien*. Hier werden die Lerninhalte in den Fokus genommen, die sich mit dem Prozess des Rechnens als Ausführen der bereits oben genannten und strukturierten Rechenoperationen beschäftigen.

Wie in Abbildung 19 dargestellt, lassen sich drei Aspekte unterscheiden: Die *Rechengesetze* regulieren die Verknüpfungen der einzelnen Rechenoperationen. Wird die Aufmerksamkeit auf den Prozess der Rechnung gelegt – hier mit *Fokus auf Durchführung* überschrieben –, so finden sich zwei weitere Gesichtspunkte, die beleuchtet werden können und am Ende jeder Rechenoperation steht ein Ergebnis, das es zu überprüfen gilt. Diese Perspektive wird in Abgrenzung zur gerade genannten mit *Fokus auf Ergebnis* benannt.

Für die Lernenden werden im vorliegenden Netz acht *Rechengesetze* angeführt, die ihnen im Zusammenhang mit den Rechenoperationen begegnen. Zunächst einmal werden für sie die drei für die Algebra grundlegenden Gesetze relevant: das *Kommutativ-*, das *Assoziativ-* und das *Distributivgesetz*. Mit dem Potenzieren und dem

Radizieren werden die *Potenz-* und die *Wurzelgesetze* bedeutsam. Für längere Terme oder Termumformungen werden zwei Gesetze formuliert, die sich auf die Reihenfolge der Operationen innerhalb eines Terms beziehen: die *Klammerregel* und der Merksatz *Potenz-vor-Punkt-vor-Strich*. Das in den untersuchten Rahmenlehrplänen geforderte *gleichsinnige* und das *gegensinnige Verändern* wird mit *Ausgleichs- oder Konstanzgesetz* überschrieben.

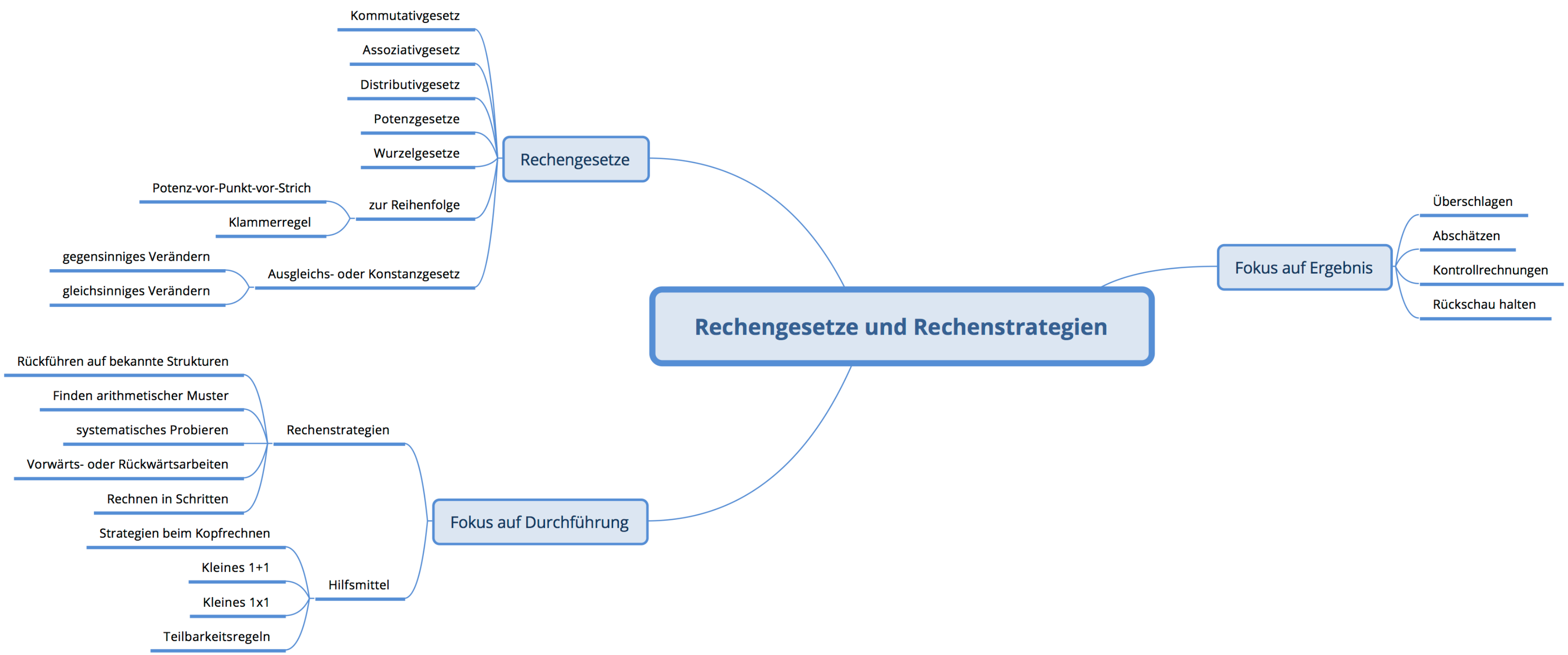
Für den Prozess des Rechnens bzw. der *Durchführung* einer oder mehrerer Rechenoperationen lernen die Schülerinnen und Schüler neben den geltenden Gesetzen *Rechenstrategien* und *Hilfsmittel* kennen, die ihnen diesen Weg erleichtern sollen. In den untersuchten Rahmenlehrplänen finden sich fünf *Strategien*, mit denen Rechenaufgaben angegangen werden können: das *Rückführen auf bekannte Strukturen*, das *Finden arithmetischer Muster*, das *systematische Probieren*, das *Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten* und das *Rechnen in Schritten*. Hier liegt der Fokus jeweils auf der Struktur und der Herangehensweise bei der Lösung.

Mit *Hilfsmittel* sind vier Konzepte überschrieben, durch deren Beherrschen die Lernenden sich die Durchführung von Rechenoperationen erleichtern und sie beschleunigen können: Neben den *Strategien beim Kopfrechnen* fordern die untersuchten Lehrpläne das *Kleine 1+1* und das *Kleine 1x1* sowie die *Teilbarkeitsregeln*.

Die untersuchten Lehrpläne benennen fünf Aufgabentypen, die innerhalb dieses Themenbereiches kennengelernt und bearbeitet werden sollen. Ebenso werden drei Arten aufgeschlüsselt, wie Rechenwege gestaltet sein sollen. Ein dritter Gesichtspunkt bezieht sich auf die Durchführung der Rechenoperationen im Kopf, halbschriftlich oder schriftlich, jeweils mit steigender Anzahl an Wertziffern. Alle drei Aspekte werden in den Netzen zu diesem Themenstrang nicht aufgegriffen. Hier werden keine expliziten Inhalte genannt, deren Beherrschen für die Lernenden von Bedeutung ist. Die Kenntnis bzw. das Wissen um die Inhalte wirkt sich indirekt auf den Lernprozess aus. Sie modellieren den Lernprozess darüber, dass sie die Aufgaben und die Anforderungen in den Aufgaben bestimmen. Deshalb wird auf ihr Erscheinen im vorliegenden Netz zu Gunsten der Übersichtlichkeit und der Schlankheit verzichtet.

Mit der Formulierung *Fokus auf Ergebnis* werden vier Strategien zusammengefasst, die alle zum Ziel haben, das gefundene Ergebnis einer Rechnung zu überprüfen. In den untersuchten Lehrplänen werden hierzu das *Überschlagen*, das *Abschätzen*, *Kontrollrechnungen* und *Rückschau halten* genannt.

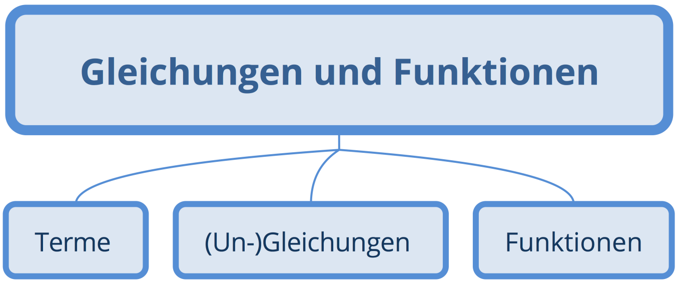
Abbildung 19: Netz zu Rechengesetzen und Rechenstrategien



3.2.4. Begriffsnetz zum Themenbereich „Gleichungen und Funktionen“

In diesem Abschnitt stehen die Inhalte aus dem Themenbereich „Gleichungen und Funktionen“ im Mittelpunkt. Die zugehörigen Inhalte finden sich auch hier in den zugehörigen Begriffslisten (siehe Tabelle 5, S. 60). Eine erste Untergliederung wird in Anlehnung an Vollrath (1999) unternommen. Wie weiter oben beschrieben, eröffnet er in seinen Ausführungen zur Algebra in der Schulmathematik neben dem Themenstrang „Zahlen“ noch drei weitere: Terme, Gleichungen und Funktionen (vgl. Vollrath 1999, S. 1). In dieser Weise werden zunächst die Schlüsselbegriffe einem dieser drei Themen zugeordnet (siehe Abbildung 29), und daran anknüpfend werden, jeweils in einem eigenen Unterabschnitt, Netze zu Termen, Gleichungen und Funktionen entwickelt.

Abbildung 20: Netz zur Übersicht über den Themenbereich „Gleichungen und Funktionen



3.2.4.1. Terme

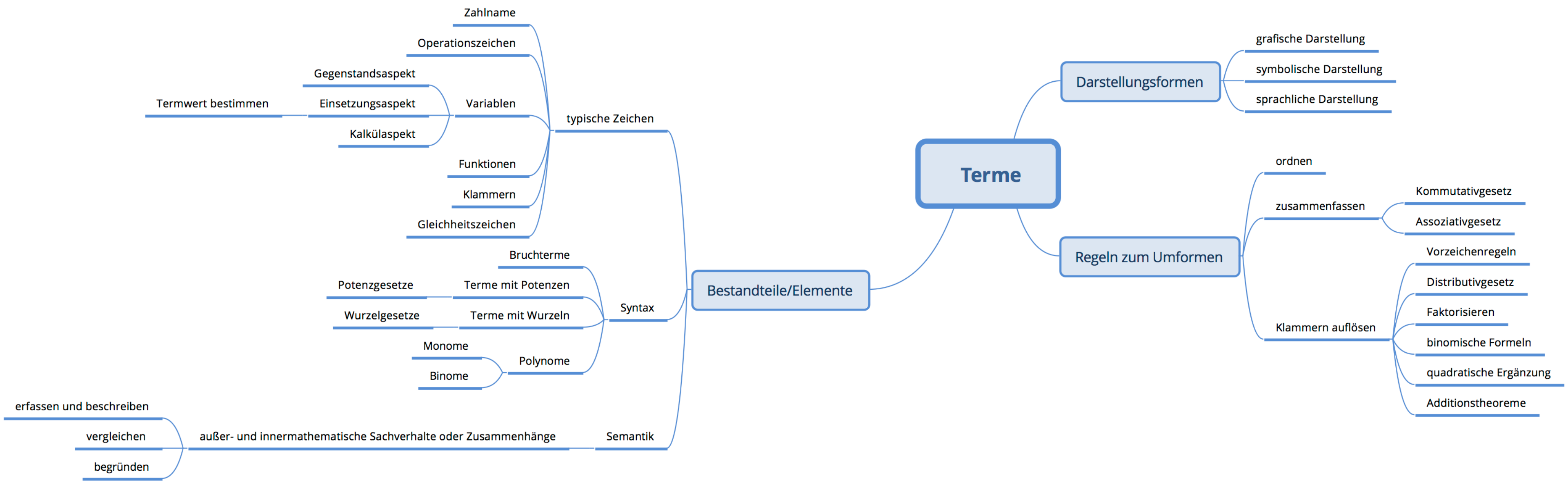
Wie Vollrath (1999) formuliert, werden Terme „in erster Linie als Ausdrucksmittel gesehen“ (Vollrath 1999, S. 65). Damit geht es in diesem Themenstrang darum, ebendiese formale Sprache mit den ihr zugrundeliegenden Regeln und Regel-hierarchien kennenzulernen (vgl. Vollrath 1999, S. 65). Den Lernenden soll bewusst werden, dass die Formelsprache „Trägerin mathematischer Gedanken“ ist (Vollrath 1999, S.117). Ziel ist es, sich ihrer formal und inhaltlich sicher zu bedienen (vgl. Vollrath 1999, S. 117).

Geleitet durch diese Gedanken, werden in dem vorliegenden Netz (siehe Abbildung 21) drei Aspekte beleuchtet: Zum einen werden die *Bestandteile* oder *Elemente*, aus der die Sprache der Terme besteht, gruppiert. Dazu gehören ebenfalls die entsprechende *Syntax* und *Semantik,* die als Begriffe hier noch ergänzt werden. Zum anderen werden die geltenden *Regeln zum Umformen* von Termen strukturiert. Den dritten Aspekt bilden die *Darstellungsformen*, die in der Schulmathematik in diesem Zusammenhang auftreten, wobei auch hier der Begriff als Bezeichnung dieses Aspektes ergänzt wird.

Ein Term, unabhängig von seiner Länge und seiner Komplexität, lässt sich in einzelne *Bestandteile oder Elemente* zerlegen. Er ist unter diesem Aspekt eine „Zeichenreihe, in der typische Zeichen aus dieser Sprache auftreten“ (Vollrath 1999, S. 67). Die *typischen Zeichen* können von verschiedener Art sein. Sie lassen sich unterscheiden in *Zahlname, Operationszeichen, Variablen, Funktionen* und *Klammern* sowie das *Gleichheitszeichen* (vgl. Vollrath 1999, S. 67). Ihre Auflistung soll den Lernenden eine Hilfe im Verständnis der Struktur eines Terms sein. Bei dem Begriff der *Variablen* sind noch die von Malle (1993) definierten drei Aspekte, der *Gegenstands-*, der *Einsetzungs-* und der *Kalkülaspekt* angeknüpft (vgl. Malle 1993, S. 46). Sie sind hier aufgeschlüsselt, um den Lernenden zu verdeutlichen, dass in der Mathematik diese drei Sichtweisen für den Gebrauch von Variablen existieren (vgl. Malle 1993, S. 49). Beim *Einsetzungsaspekt* wird noch eine Kompetenz verankert, die aus Sicht der Lernenden zunächst als die zentrale im Umgang mit Termen gesehen wird: das *Bestimmen* des *Termwerts*. Die Position an dieser Stelle soll verdeutlichen, dass der Termwert das Endprodukt der Belegung von Variablen mit Zahlwerten ist. Er ist ein Punkt im Netz zu Termen, allerdings eher am Rande und nicht mit dem zentralen Fokus, den ihm die Lernenden oftmals zumessen wollen. Viele von ihnen sehen das Hantieren mit Termen weniger als Erlernen einer Formelsprache als vielmehr eine Buchstabenrechnung, an deren Ende ein Wert berechnet wird (vgl. Vollrath 1999, S. 86). Von den hier genannten Begriffen, werden in den untersuchten Rahmenlehrplänen der *Termwert* und die *Variable* explizit genannt. Alle anderen Punkte sind in der Begriffsliste unter der *Notation algebraischer Terme* subsumiert, sind in diesem Netz aber in Anlehnung an die genannten Autoren zur vollständigen Auflistung ergänzt.

Nicht jede Aneinanderreihung einzelner Zeichen lässt sich als Term definieren. Das Stichwort dazu liefert den Lernenden der Aspekt *Syntax*. An dieser Stelle werden beispielhaft Arten von Termen genannt, die im Lernprozess nacheinander auftreten. Ihre Struktur wird immer komplexer. Im Laufe der Lernentwicklung und wie bei dem Netz zum Themenstrang „Zahlen“ begegnen die Schülerinnen und Schüler neuen Zahlbereichen und entsprechend neuen auf ihnen definierten Operationen. Als Bestandteile der Formelsprache wird diese dadurch kontinuierlich erweitert. Den Lernenden sollen die Parallelen zu den beiden Themensträngen „Zahlen“ und „Funktionen“ deutlich werden. Es werden hier beispielhaft die folgenden Familien innerhalb der Terme genannt: *Polynome* mit den einfachen Fällen, den *Monomen* und den *Binomen* sowie *Bruchterme*, *Terme mit Potenzen und Terme mit Wurzeln,* wobei nur die beiden letztgenannten in der Begriffsliste zu finden sind. Bei den *Termen mit Potenzen* kann über die *Potenzgesetze* und bei den *Termen mit Wurzeln* kann über die *Wurzelgesetze* eine direkte Verbindung zum Netz zu den Rechengesetzen und -strategien aus dem Themenstrang „Zahlen“ geknüpft werden.

Abbildung 21: Netz zum Themenstrang Terme



Ebenfalls aus der Sprachwissenschaft entliehen und in diesem Netz ergänzt, taucht der Begriff der *Semantik* bei den *Bestandteilen* oder *Elementen* auf. Im Sinne der Bedeutungslehre werden hier die Kompetenzen angesiedelt, die die Lernenden zur inhaltlichen Bedeutung eines Terms entwickeln sollen: e*rfassen und beschreiben*, *vergleichen* und *begründen,* jeweils im Hinblick auf *außer- und innermathematische Sachverhalte oder Zusammenhänge*.

Neben *Bestandteilen oder Elementen*, bei denen festlegt wird, „welche Zeichenreihen zulässig sind“ (Vollrath 1999, S. 67), gilt es für die Lernenden, *Regeln zum Umformen von Termen* kennenzulernen. Diese werden als zweiter Aspekt bei den Termen betrachtet. Sie lassen sich in drei Kategorien untergliedern, die die jeweiligen Umformungen charakterisieren und als Bezeichnungen dieser Unterkategorien noch ergänzt werden: o*rdnen*, z*usammenfassen* und *Klammern auflösen*. Diese Dreiteilung orientiert sich an den drei Schritten, die Vollrath (1999) zur Erarbeitung der Termumformungen nennt (vgl. Vollrath 1999, S. 103), und wird hier zur Typisierung genutzt. Das *Zusammenfassen* beinhaltet das *Kommutativ-* und das *Assoziativgesetz*. Die Kategorie *Klammern auflösen* wird noch weiter in die folgenden beispielhaften Regeln untergliedert: die *Vorzeichenregeln*, das *Distributivgesetz*, das *Faktorisieren*, die *binomischen Formeln*, die *quadratische Ergänzung* und die *Additionstheoreme.*

Wie eingangs beschrieben, werden als letzter Aspekt bei den Termen die unterschiedlichen *Darstellungsformen* beleuchtet, die die außer- und innermathematischen Sachverhalte oder Zusammenhänge formulieren. Um den Lernenden die Äquivalenz zwischen diesen Darstellungsformen vor Augen zu führen, werden sie hier noch weiter ausdifferenziert in die *grafische*, die *symbolische* und die *sprachliche Darstellung*.

3.2.4.2. (Un-)Gleichungen

Syntaktisch gesehen entsteht eine Gleichung durch die Verbindung von zwei Termen durch ein Gleichheitszeichen (vgl. Vollrath 1999, S. 192). Analog entsteht eine Ungleichung durch die Verbindung durch ein Vergleichszeichen. Bei den (Un-)Gleichungen ist wie bei den Termen der Gedanke leitend, dass sie ein bedeutsames Ausdrucksmittel in der Mathematik sind (vgl. Vollrath 1999, S. 193). Die in den Termen kennengelernte Formelsprache als „Trägerin mathematischer Gedanken“ (Vollrath 1999, S. 117) wird zu den Aussageformen der Gleichungen und in einer speziellen Erscheinungsform – einem Gleichungssystem – noch erweitert.

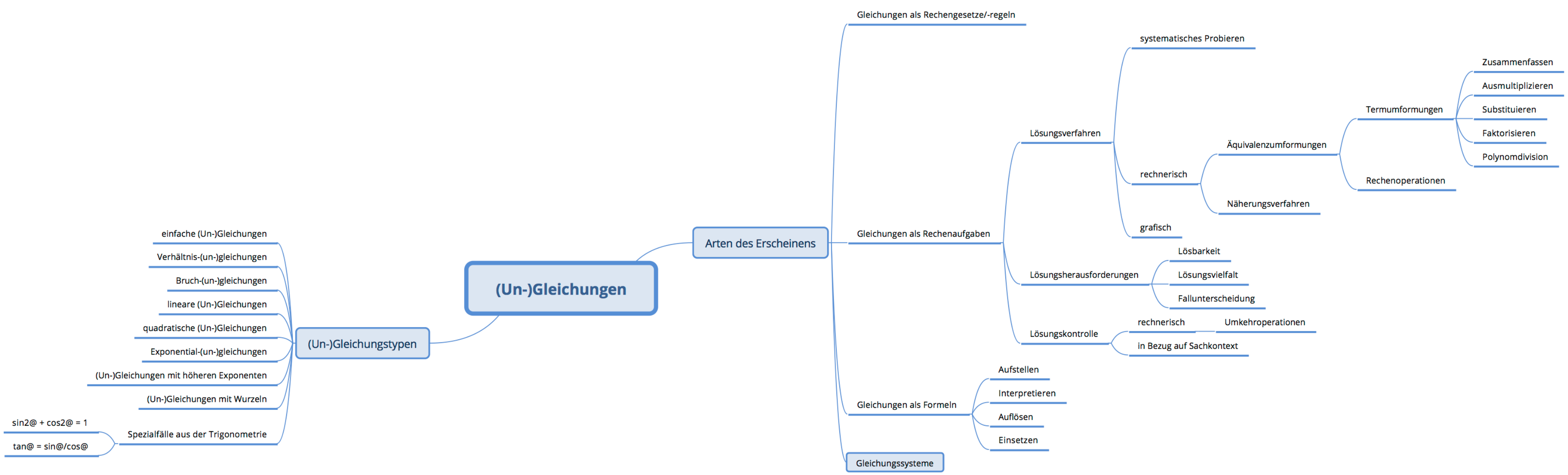
Angelehnt an Vollrath (1999) wird das Lernen im Zusammenhang mit (Un-)Gleichungen unter dem Aspekt des Lernens von Algorithmen betrachtet (vgl. Vollrath 1999, S. 199). Zentral ist hierbei das zielgerichtete und bestimmten Regeln folgende Umformen von (Un-)Gleichungen (vgl. Vollrath 1999, S. 199). Das Netz zu (Un-)Gleichungen (siehe Abbildung 22) fokussiert sich auf diesen Aspekt.

Zu (Un-)Gleichungen werden zwei Felder unterschieden, in die sich die Inhalte dieses Themenbereiches gliedern lassen. Es werden zum einen die einzelnen *(Un-)Gleichungstypen* aufgezählt. Zum anderen werden, was mit *Arten des Erscheinens* überschrieben ist, die Funktion oder Aufgabe und die Verwendung von (Un-)Gleichungen strukturiert.

Gleichungen und Ungleichungen werden zu *(Un-)Gleichungen* begrifflich verschmolzen und diese Formulierung bei allen Gleichungstypen fortgesetzt. Damit soll verdeutlicht werden, dass die Ungleichungen eine Fortführung bzw. eine Abwandlung des Gedankens der Gleichung sind und sich in dieselben Typen untergliedern lassen.

Den Lernenden begegnen auf ihrem Lernweg verschiedene *(Un-)Gleichungstypen*. Diese hängen jeweils von der Zahlenmenge und den auf ihr definierten Rechenoperationen ab, die bekannt sind oder zur Verfügung stehen. Neue *(Un-)Gleichungstypen* kommen hinzu, wenn eine Zahlbereichserweiterung stattgefunden hat. Die Auflistung soll den Lernenden die Vielfalt der (Un-)Gleichungen verdeutlichen und ihnen gleichzeitig eine Struktur geben, in die sich jede (Un-)Gleichung, die ihnen im Lernalltag begegnet, einordnen lässt.

Abbildung 22: Netz zum Themenstrang (Un-)Gleichungen



Es werden zunächst im Rahmen der natürlichen Zahlen *einfache (Un-)Gleichungen* kennengelernt, die zumeist argumentativ gelöst werden können. Es folgen mit der Erweiterung um die Bruchzahlen und die negativen Zahlen die *Verhältnis-* und *Bruch-(un-)gleichungen.* Auf Basis der Menge der rationalen Zahlen und parallel zur Entwicklung des Funktionsbegriffs tauchen die *linearen* und anschließend die *quadratischen (Un-)Gleichungen* auf (vgl. Vollrath 1999, S. 208). Mit dem Übergang zu den reellen Zahlen und Hand in Hand mit der Entwicklung der entsprechenden Funktionsfamilien kommen die *Exponential-(un-)gleichungen* sowie die *(Un-)Gleichungen mit höheren Exponenten* und die *mit Wurzeln* hinzu. Im Rahmen der Trigonometrie, wenn die trigonometrischen Funktionen eingeführt werden, tauchen zwei *Spezialfälle aus der Trigonometrie* auf: die trigonometrische Identität und die Definition des Tangens als Quotient aus Sinus und Cosinus.

Vollrath (1999) spricht davon, dass (Un-)Gleichungen zunächst auf drei Arten in Erscheinung treten (vgl. Vollrath 1999, S. 209). Diese Dreiteilung wird hier übernommen. Das Ziel ist dabei, dass die Lernenden einen differenzierten Blick im Erkennen und im Umgang mit (Un-)Gleichungen entwickeln. Unter den *Arten des Erscheinens* treten *Gleichungen als Rechengesetze oder -regeln* auf, *als Rechenaufgaben* oder, vor allem in Verbindung mit dem Themenbereich *Raum und Form,* als *Formeln.* Ergänzt wird diese Trias noch durch das Konzept der *Gleichungssysteme*.

Als Rechengesetze oder -regeln tauchen (Un-)Gleichungen insbesondere bei der Charakterisierung der natürlichen Zahlen und der rationalen Zahlen auf (vgl. Vollrath 1999, S. 209 und 213). Die (Un-)Gleichungen werden hier verwendet, um bereits verbal erfasste oder an Beispielen bewusst gemachte Regeln allgemein und mathematisch korrekt zu formulieren.

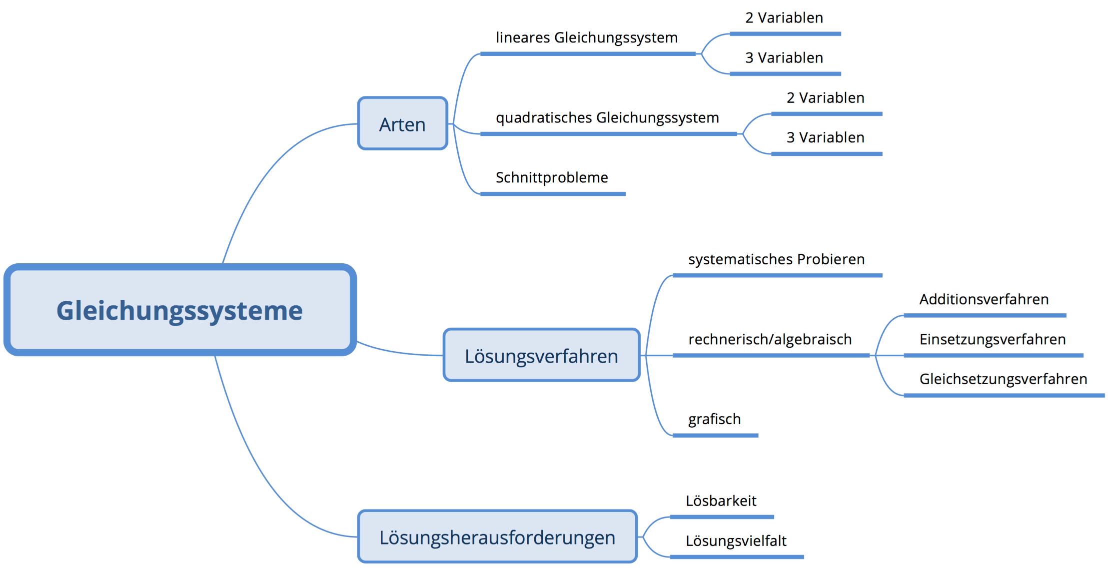
Bei den *(Un-)Gleichungen als Rechenaufgaben* geht es darum, die Fähigkeit des Rechnens zu sichern und zu vertiefen (vgl. Vollrath 1999, S. 209). Ziel ist es hier, eine (Un-)Gleichung zu lösen. Um dieses Ziel zu erreichen, werden *Lösungsverfahren* kennengelernt. Diese lassen sich unterscheiden in *systematisches Probieren* sowie *rechnerische* und *grafische Verfahren.* Die rechnerischen Verfahren können noch weiter differenziert werden in *Näherungsverfahren* und *Äquivalenzumformungen*. Um den Lernenden einen detaillierten Überblick zu geben, werden die *Äquivalenzumformungen* noch weiter untergliedert. Hier werden die *Rechenoperationen* von den *Termumformungen* unterschieden. Letztgenannte sind das *Zusammenfassen*, das *Ausmultiplizieren*, das *Substituieren*, das *Faktorisieren* und die *Polynomdivision,* wobei die beiden erstgenannten der Vollständigkeit halber ergänzt sind.

Bei einigen (Un-)Gleichungen stellen sich die folgenden drei *Lösungsherausforderungen*: Vor dem Hintergrund des zugrundeliegenden Zahlbereichs muss die *Lösbarkeit* geprüft, eine mögliche *Lösungsvielfalt* untersucht und gegebenenfalls eine *Fallunterscheidung* vorgenommen werden. Zum Abschluss soll eine *Lösungskontrolle* die vorliegenden Lösungen überprüfen, einerseits nach ihrer Sinnhaftigkeit in *Bezug auf den Sachkontext* und andererseits *rechnerisch*. Hier wird der Begriff der *Umkehroperationen* als ein probables Mittel zur Kontrolle einer möglichen Lösung verknüpft.

Wenn man die Sicht der Algebra einnimmt, können *(Un-)Gleichungen als Formeln* mit mehreren Variablen betrachtet werden, die normalerweise für Größen stehen (vgl. Vollrath 1999, S. 229). Hier angeknüpft sind vier wichtige Schritte, die die Lernenden in diesem Zusammenhang beherrschen sollen: das *Aufstellen* einer Formel, das *Interpretieren* einer Formel, das *Auflösen* einer Formel und das *Einsetzen* von Werten in eine Formel. Bei dieser Art des Erscheinens wird die Verbindung zum Themenbereich *Raum und Form* deutlich.

Die *Gleichungssysteme* werden bei den *Arten des Erscheinens* verortet. Sie erweitern die Idee der Gleichung dahingehend, dass sie zwei oder drei Gleichungen mit entsprechend zwei oder drei Variablen miteinander verbinden, die gleichzeitig erfüllt sein müssen. Die Gleichungssysteme werden im folgenden noch näher beleuchtet. Für eine bessere Übersichtlichkeit bilden die Gleichungssysteme den Hauptknoten in einem eigenen Netz.

Abbildung 23: Netz zu Gleichungssystemen



Bei den *Gleichungssystemen* werden drei Aspekte unterschieden. Zum einen sollen die Lernenden für die *Arten* sensibilisiert werden. Sie sollen erkennen, dass bei *zwei Variablen* zwei Gleichungen und bei *drei Variablen* drei Gleichungen verknüpft werden müssen. Dabei handelt es sich in der Sekundarstufe I hauptsächlich um *lineare* oder *quadratische* Gleichungen, die jeweils zu einem *Gleichungssystem* verbunden werden. *Schnittprobleme* werden an dieser Stelle noch eigens genannt, da sie häufig der Kontext sind, in dem Gleichungssysteme auftreten bzw. deren Lösung die Verwendung eines Gleichungssystems erfordert.

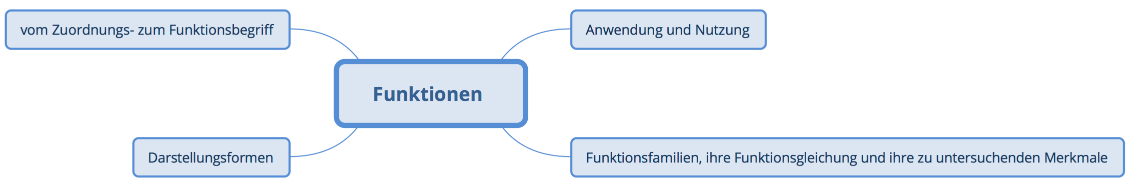
Analog zum Netz zu den (Un-)Gleichungen werden bei den Gleichungssystemen *Lösungsverfahren* genannt. In der Sekundarstufe I werden als Lösungsverfahren neben dem *systematischen Probieren* und dem *grafischen* Lösen üblicherweise drei *rechnerische* bzw. *algebraische* Verfahren entwickelt. Diese sind das *Additions-*, das *Einsetzungs-* und das *Gleichsetzungsverfahren*, mit denen und mit deren Vor- und Nachteilen sich die Lernenden vertraut machen (vgl. Vollrath 1999, S. 225).

Ebenfalls wie im Netz zu den (Un-)Gleichungen werden bei den Gleichungssystemen als dritter Aspekt noch *Lösungsherausforderungen* beleuchtet. In diesem Fall sind es die Frage nach der *Lösbarkeit* eines Gleichungssystems und die nach der *Lösungsvielfalt*. Beide Punkte sind bei der Arbeit mit Gleichungssystemen bzw. bei ihrer Lösung zentral und müssen von den Lernenden in diesem Kontext berücksichtigt und geklärt werden.

3.2.4.3. Funktionen

Wie Vollrath schreibt, ist „der Funktionsbegriff ein zentraler mathematischer Begriff der Neuzeit“ (Vollrath 1999, S. 181). Das Lernen des Funktionsbegriffs ist langfristig angelegt; über die Jahre hinweg entwickelt sich bei den Lernenden das intuitive Verstehen des Funktionsbegriffs zu einem formalen Verständnis (vgl. Vollrath 1999, S. 181). Die Inhalte in den untersuchten Lehrplänen zu diesem Themenstrang sind dementsprechend umfangreich. Zunächst werden sie in vier Hauptthemen zerlegt, wie in der folgenden Abbildung dargestellt.

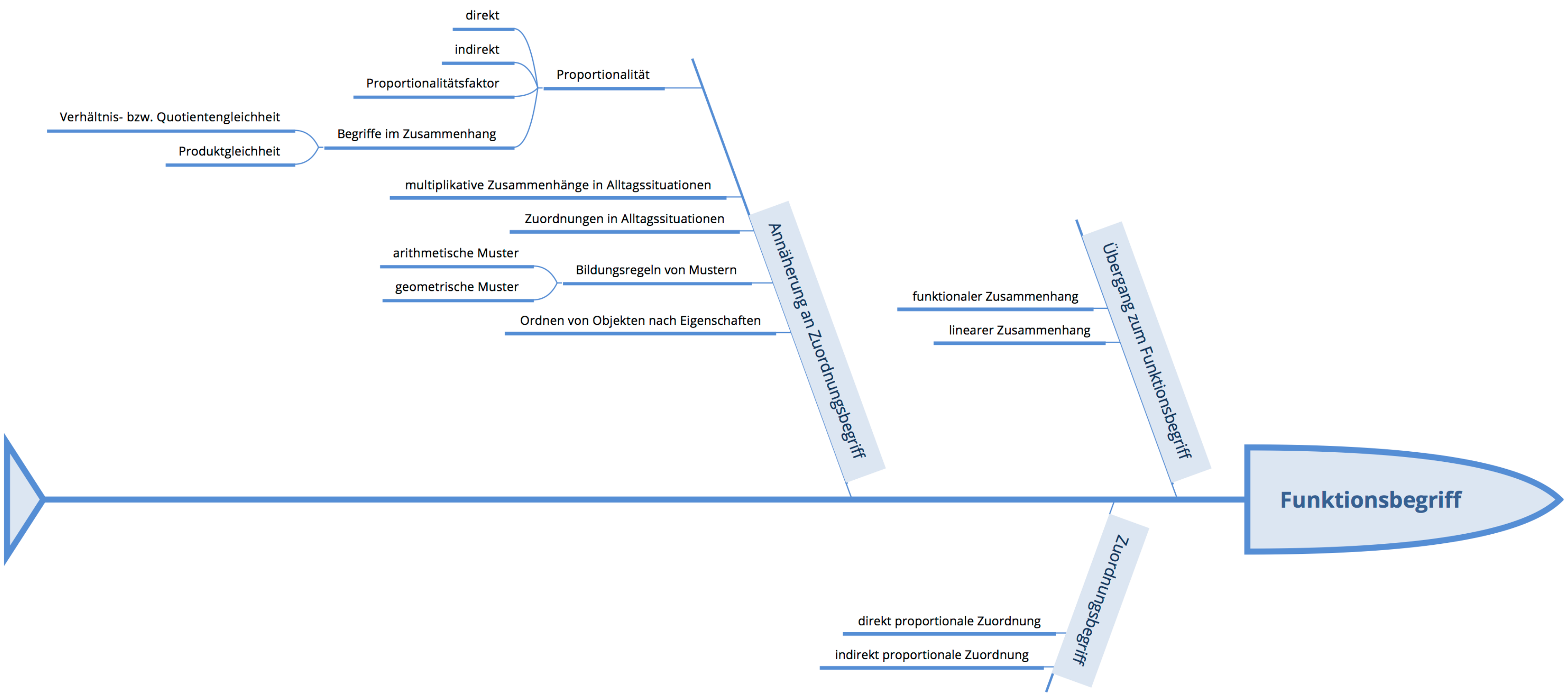
Abbildung 24: Netz zum Themenstrang „Funktionen“



Zu jedem der formulierten Hauptthemen wird ein eigenes Netz entwickelt, das den jeweiligen Aspekt näher betrachtet bzw. weiter aufschlüsselt. *Vom Zuordnungsbegriff zum Funktionsbegriff* beschreibt ein Netz, das die Inhalte zusammenführt, die den Zuordnungsbegriff aufbauen und charakterisieren und ihn dann weiterentwickeln zu einer ersten Definition des Funktionsbegriffs. Dieses Netz bildet einen Prozess ab, der im Laufe des Lernens stattfindet. Es ist daher, anders als alle bisher entwickelten Netze, nicht hierarchisch aufgebaut, sondern hat eher eine Ablaufstruktur (vgl. Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 28). Derselbe Aufbau liegt auch dem nächsten Netz zugrunde, das mit jeweilige *Darstellungsformen* überschrieben ist. Hier sind alle Inhalte gesammelt, die im Zusammenhang mit der Darstellung *geometrischer* sowie *arithmetischer Muster*, *Zuordnungen* und dann allgemein *aller Funktionsfamilien* in den untersuchten Rahmenlehrplänen auftauchen.

Im Zentrum des Themenstrangs stehen die einzelnen *Funktionsfamilien,* ihre jeweilige charakteristische *Funktionsgleichung und ihre zu untersuchenden Merkmale*, die sich die Lernenden im Laufe der Sekundarstufe I erschließen. Sie sind in einem Netz zusammengeführt. Es folgt noch ein weiteres Netz: *Anwendung und Nutzung* überschreibt Anwendungsbeispiele und Nutzungsmöglichkeiten, die in den untersuchten Lehrplänen explizit gefordert werden und sie den entsprechenden Funktionen zuordnet.

Abbildung 25: Netz vom Zuordnungs- zum Funktionsbegriff



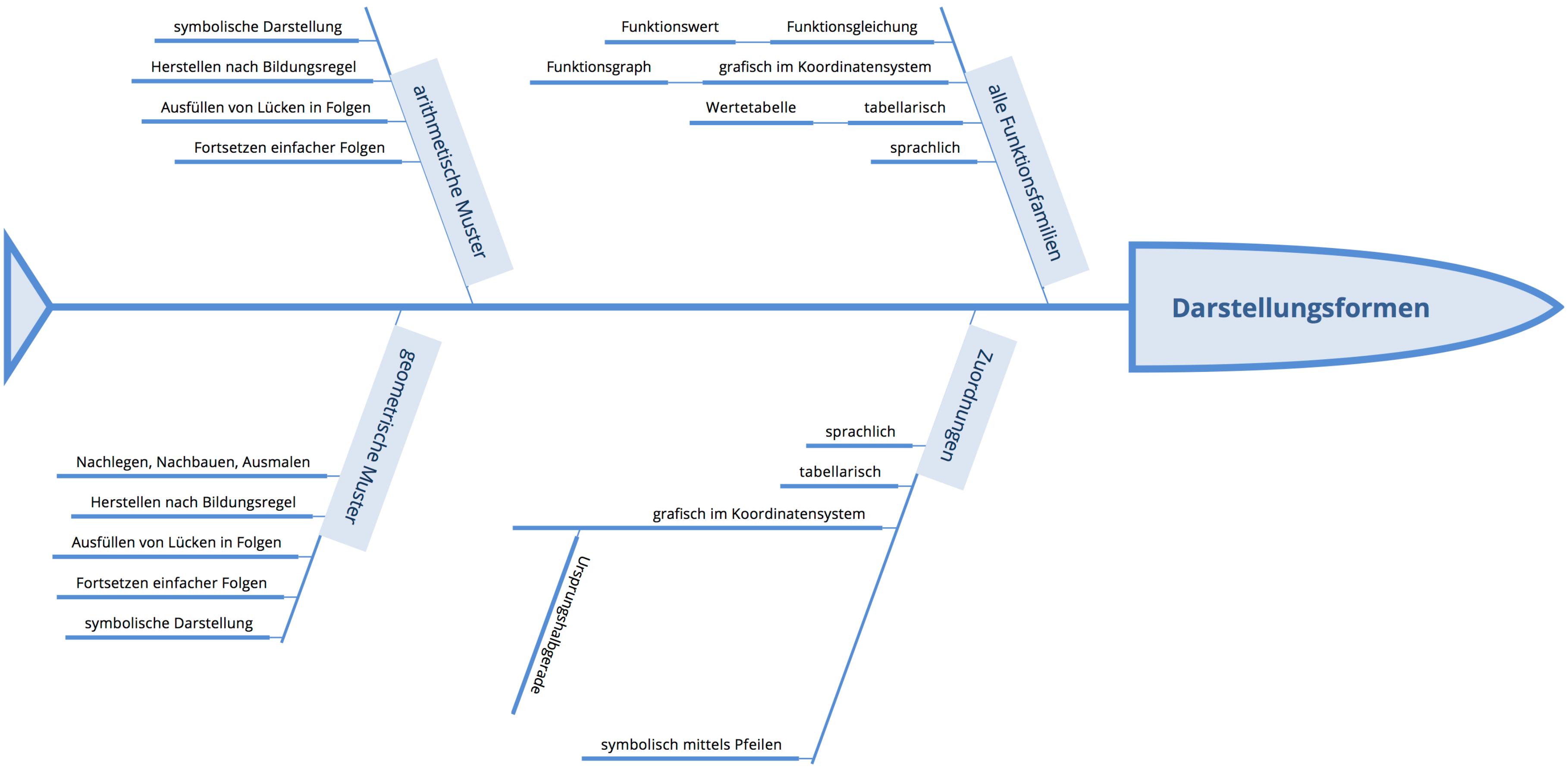
Vom Zuordnungs- zum Funktionsbegriff

Die Entwicklung des Funktionsbegriffs erfolgt schrittweise. Dem genetischen Prinzip folgend, wird das Lernen des Funktionsbegriffs langfristig geplant (vgl. Vollrath 1999, S. 137). Hier werden alle Inhalte gesammelt und dargestellt, die in den untersuchten Lehrplänen auftauchen und die Schritte bis hin zu einer ersten Vorstellung des Funktionsbegriffs benennen. Wie eingangs bereits beschrieben, wird ein Prozess dargestellt. Dementsprechend baut sich das vorliegende Netz (siehe Abbildung 25) von links nach rechts und innerhalb jedes Astes von der Mitte zum Rand hin auf.

Die ersten Schritte erfolgen als *Annäherung an* den *Zuordnungsbegriff.* Schon früh auf ihrer Reise durch diesen Themenstrang *ordnen* die Lernenden *Objekte nach* bestimmten *Eigenschaften*. Sie entwickeln *Bildungsregeln* zunächst von *geometrischen* und anschließend auch von *arithmetischen Mustern. In Alltagssituationen* tauchen dann die ersten *Zuordnungen* und *multiplikative Zusammenhänge* auf. Ein nächster wichtiger Schritt in Richtung Zuordnungsbegriff ist der der *Proportionalität*. Hier werden die *direkte* und die *indirekte Proportionalität* unterschieden und der Begriff des *Proportionalitätsfaktors* angeknüpft. Noch zwei weitere Konzepte stehen dort als Begriffe im Zusammenhang und erweitern das Wissensnetz: die *Produktgleichheit* und die *Verhältnis- bzw. Quotientengleichheit*.

Bei der Entwicklung des Zuordnungsbegriffs stehen die *direkt proportionale* und die *indirekt proportionale Zuordnung* im Fokus. Über den *linearen Zusammenhang* geht der Schritt zum *funktionalen Zusammenhang*. Es entstehen nun erste Vorstellungen zum *Funktionsbegriff*. Die Lernenden haben die unterste Stufe des von Vollrath (1999) formulierten Modells zum Lernen in Stufen erreicht, auf der sich der Funktionsbegriff als Phänomen etabliert und ein intuitives Verständnis entwickelt wird (vgl. Vollrath 1999, S. 138).

Abbildung 26: Netz zu den Darstellungsformen



Darstellungsformen

Den gerade beschriebenen Schritten lässt sich eine parallele Entwicklung der *Darstellungsformen* zuordnen. Im Netz in Abbildung 26 sind alle Inhalte gesammelt, die sich um die jeweilige Darstellung drehen.

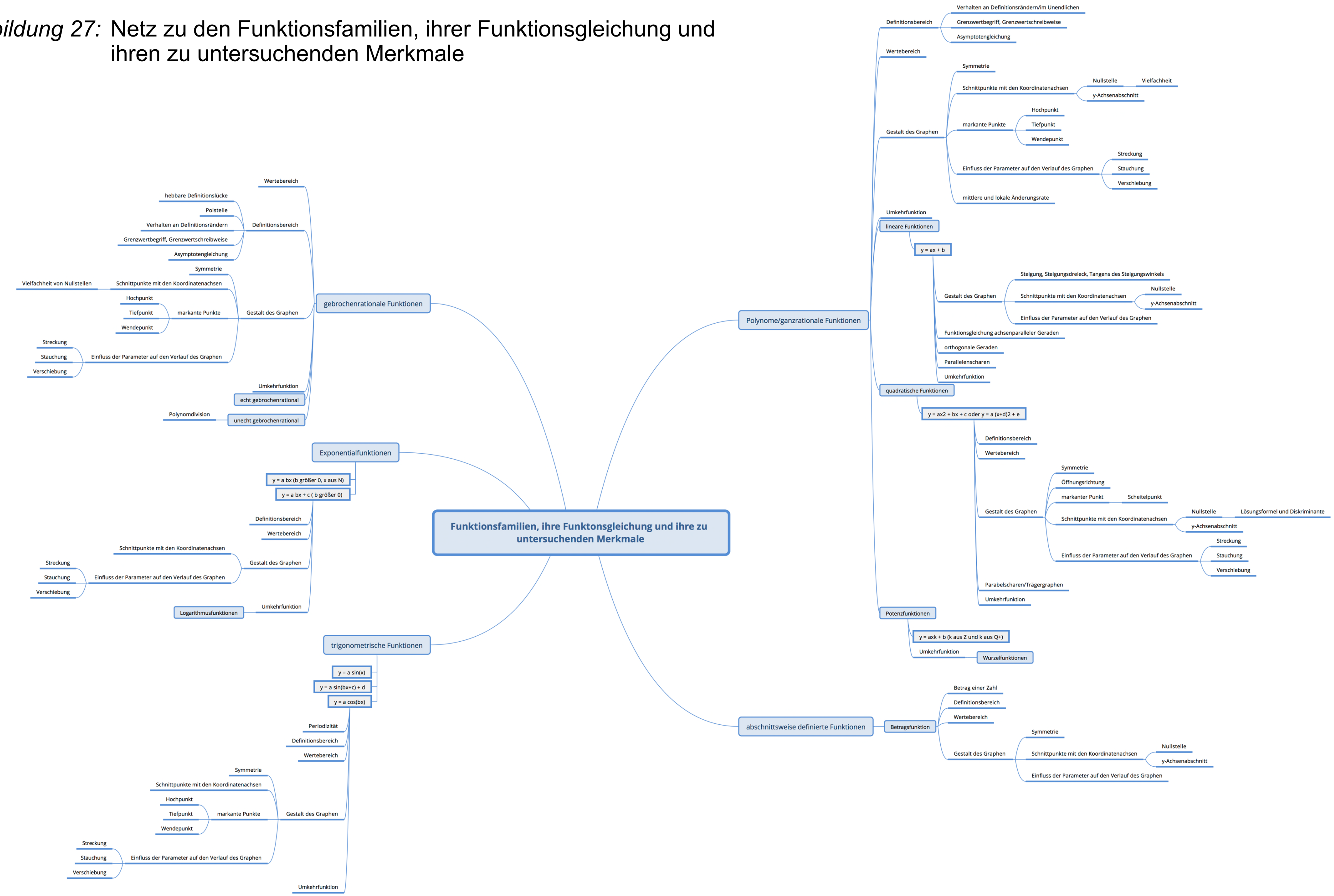
Auch dieses Netz ist als Verlauf oder Prozess zu lesen, den die Lernenden durchschreiten. Er ist parallel zu dem eben beschriebenen Weg der Entwicklung des Funktionsbegriffes über den Zuordnungsbegriff zu sehen.

Die Lernenden starten bei den *geometrischen Mustern* damit, diese *nachzulegen, nachzubauen und auszumalen*. Sie *stellen* geometrische Muster *nach* vorgegebenen *Bildungsregeln* selber *her*. Sie *füllen Lücken in Folgen* geometrischer Muster *aus* und *setzen einfache Folgen fort*. In ähnlicher Weise werden *arithmetische Muster nach vorgegebenen Bildungsregeln hergestellt*. Es werden *Lücken in Folgen ausgefüllt* und *einfache Folgen fortgesetzt*. Damit sind an dieser Stelle die enaktive und die ikonische Darstellungsebene des Brunerschen EIS-Prinzips berücksichtigt (vgl. Zech 2002, S. 104 sowie S. 117). Um die drei Repräsentationsebenen nach Bruner zu vervollständigen, wurde sowohl bei den geometrischen als auch bei den arithmetischen Mustern noch die *symbolische Darstellung* hinzugefügt, obgleich sie in den untersuchten Lehrplänen nicht auftaucht.

Zuordnungen werden von den Lernenden zunächst *sprachlich* erfasst und *tabellarisch* dargestellt. Sie werden *grafisch* ins *Koordinatensystem* übertragen und *symbolisch mittels Pfeilen* dargestellt. In diesem Zusammenhang taucht der Begriff der *Ursprungshalbgeraden* für die Lernenden auf und soll von ihnen verknüpft werden.

Für *alle Funktionsfamilien* lassen sich einige Punkte zur Darstellung verallgemeinern bzw. gemeinsam formulieren. Analog zu den Zuordnungen können Funktionen bzw. funktionale Zusammenhänge *sprachlich* gefasst und beschrieben werden. Auch eine Funktion kann *tabellarisch* dargestellt werden. An dieser Stelle wird der Vollständigkeit halber die *Wertetabelle* verknüpft. *Im Koordinatensystem* wird die Funktion *grafisch* mittels ihres *Funktionsgraphen* formuliert und auf symbolischer Ebene definiert die *Funktionsgleichung* eine Funktion. Hier wird der Begriff des *Funktionswertes* als basaler Baustein einer Funktion angegliedert.

Abbildung 27: Netz zu den Funktionsfamilien, ihrer Funktionsgleichung und ihren zu untersuchenden Merkmale



Funktionsfamilien, ihre Funktionsgleichung und ihre zu untersuchenden Merkmale

Den Lernenden begegnet im Verlauf eine große Vielzahl an Funktionen. In dem vorliegenden Netz (siehe Abbildung 27) geht es darum, Familien von Funktionen zu bilden und so den Lernenden eine Möglichkeit anzubieten, Funktionen, die sie kennenlernen oder die sie untersuchen, zu sortieren. Gleichzeitig werden zu jeder Familie Merkmale genannt, die entweder charakteristisch sind oder dabei helfen, „Familienmitglieder“ zu untersuchen und eine Vorstellung von ihnen zu bekommen.

In der vorliegenden Arbeit werden fünf Funktionsfamilien unterschieden, in die sich alle Funktionen einordnen lassen, die den Lernenden in der Sekundarstufe I und auch darüber hinaus begegnen. Die Familie der *Polynome* oder *ganzrationalen Funktionen* umfasst als Teilfamilien die *linearen Funktionen*, die *quadratischen Funktionen* und die *Potenzfunktionen*. Dabei wird, wie bereits bei der Entwicklung der Zahlbereiche, das Modell des Lernens durch Erweiterung als Lernmodell grundgelegt, wenn der Bereich der einen Funktionsfamilie zur nächsten überschritten wird (vgl. Vollrath 1999, S. 137). Als zweite Familie erscheinen die *gebrochenrationalen Funktionen,* die hier der Vollständigkeit halber aufgenommen sind, auch wenn sie vermutlich nur wenigen Lernenden im Rahmen der Sekundarstufe I begegnen werden. Die *Exponentialfunktionen* und die *Logarithmusfunktionen* als ihre Umkehrfunktionen bilden die dritte Familie. Die vierte Familie sind die *trigonometrischen Funktionen*. Die *abschnittsweise definierten Funktionen* bilden die fünfte Funktionsfamilie. Hier wird mit der *Betragsfunktion* allerdings nur ein Familienmitglied angeführt.

Bei allen Funktionsfamilien sind der Deutlichkeit halber die allgemeinen Funktionsgleichungen angeknüpft. Als zu untersuchende Merkmale einer Funktionsfamilie tauchen jedes Mal der *Definitionsbereich*, der *Wertebereich*, die *Gestalt des Graphen* und die *Umkehrfunktion* auf. Diese vier Merkmale werden dann bei jeder Familie bei Bedarf noch weiter aufgeschlüsselt und durch Schlüsselbegriffe ergänzt, die in den untersuchten Lehrplänen genannt und gefordert werden.

Bei den *Polynomen* oder *ganzrationalen Funktionen* wird der *Definitionsbereich* noch weiter aufgeschlüsselt. Hier geht es darum, das *Verhalten* der Funktion *an* den *Definitionsrändern* bzw. *im Unendlichen* zu untersuchen. In diesem Zusammenhang tauchen der *Grenzwertbegriff* und die *Grenzwertschreibweise* auf und auch der Begriff der *Asymptotengleichung*. Bei der *Gestalt des Graphen* sind die *Symmetrie* sowie die *Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen* und hier insbesondere die *Vielfachheit von Nullstellen* zu untersuchen. Als *markante Punkte* sind *Hoch-, Tief-* und *Wendepunkt* zu thematisieren. Weiter wird betrachtet, wie die *Parameter* den *Verlauf des Graphen* beeinflussen. Hier sind die *Streckung*, die *Stauchung* und die *Verschiebung* zu nennen.

Als letzter Punkt bei der *Gestalt des Graphen* sind die *mittlere* und die *lokale Änderungsrate* zu nennen. Der Wertebereich und die Umkehrfunktion werden nicht weiter aufgeschlüsselt.

Wie bereits formuliert bilden die *linearen Funktionen* eine Teilfamilie der *Polynome* oder *ganzrationalen Funktionen*. Neben der allgemeinen Funktionsgleichung ist der Unterpunkt zur *Gestalt des Graphen* ebenfalls noch weiter untergliedert. Hier sind die Begriffe der *Steigung* und des *Steigungsdreiecks* sowie die Verbindung zwischen der *Steigung* und dem *Tangens des Steigungswinkels* zu nennen. Auch die *Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen* sind von Bedeutung und werden mit *Nullstelle* und *y-Achsenabschnitt* noch genauer benannt. Ebenso wird der *Einfluss der Parameter auf den Verlauf des Graphen* thematisiert. Neben der *Umkehrfunktion* tauchen bei den linearen Funktionen noch drei weitere Schlüsselbegriffe auf: die *Funktionsgleichung achsenparalleler Geraden*, *orthogonale Geraden* und *Parallelenscharen*. Alle drei beschreiben Inhalte, die im Rahmen der Auseinandersetzung mit linearen Funktionen thematisiert und auf diese Weise in das vorliegende Netz eingeflochten werden.

Auch die *quadratischen Funktionen* sind eine Teilfamilie. *Definitionsbereich, Wertebereich* und die *Umkehrfunktion* werden nicht weiter differenziert. Bei der *Gestalt des Graphen* bilden die *Symmetrie* und die *Öffnungsrichtung* Unterpunkte. Der *markante Punkt* ist hier der *Scheitelpunkt*. Zu den *Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen* entwickeln die Lernenden eine *Lösungsformel*. Hier taucht der Begriff der *Diskriminante* auf. Wie allgemein bei den *Polynomen* sind bei der *Betrachtung des Einflusses der Parameter auf den Verlauf des Graphen* die *Streckung*, die *Stauchung* und die *Verschiebung* zu nennen. In diesem Kontext finden sich noch die beiden Schlüsselbegriffe *Parabelscharen* und *Trägergraphen*.

Bei den *gebrochenrationalen Funktionen* lassen sich die *echt gebrochenrationalen* von den *unecht gebrochenrationalen* unterscheiden. Bei den zweitgenannten ist die *Polynomdivision* als das probate Mittel angefügt. *Wertebereich* und *Umkehrfunktion* als zu untersuchende Merkmale sind auch hier nicht weiter aufgeschlüsselt. Beim *Definitionsbereich* tauchen die Begriffe *hebbare Definitionslücke* und *Polstelle* auf. Dabei ist ebenfalls das *Verhalten an* den *Definitionsrändern* zu untersuchen. Wie bei den *ganzrationalen Funktionen* bilden der *Grenzwertbegriff* und die *Grenzwertschreibweise* sowie die *Asymptotengleichung* weitere Unterpunkte. Für die *Gestalt des Graphen* sind wieder die *Symmetrie* zu untersuchen und die *Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen*. Die *Vielfachheit von Nullstellen* ist in diesem Zusammenhang ebenfalls interessant. Die *markanten Punkte* sind *Hoch-, Tief-* und *Wendepunkt*. Unter dem Stichwort *Einfluss der Parameter auf den Verlauf des Graphen* tauchen hier wieder *Streckung, Stauchung* und *Verschiebung* auf.

Eine dritte Familie bilden die *Exponentialfunktionen* und die *Logarithmusfunktionen*, wobei die einen die *Umkehrfunktionen* der anderen und daher als Nebenknoten angebunden sind. *Definitions*- und *Wertebereich* werden hier nicht weiter differenziert. Bei der *Gestalt des Graphen* sind die *Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen* von Interesse und der *Einfluss der Parameter auf den Verlauf des Graphen*. Auch hier wieder sind *Streckung, Stauchung* und *Verschiebung* die verknüpften Schlüsselbegriffe.

Bei den trigonometrischen Funktionen kommt zu den bislang genannten zu untersuchenden Merkmalen noch die *Periodizität* dazu. Der *Definitions*- und der *Wertebereich* sowie die *Umkehrfunktion* stehen für sich. Die *Gestalt des Graphen* wird wieder aufgeschlüsselt. Die *Symmetrie* und die *Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen* sind interessant, genauso auch die *markanten Punkte*, die wieder in *Hoch-, Tief*- und *Wendepunkt* unterschieden werden. Zuletzt wird auch bei den *trigonometrischen Funktionen* der *Einfluss der Parameter auf den Verlauf des Graphen* untersucht, unter Anwendung der drei Kriterien *Stauchung, Streckung* und *Verschiebung.*

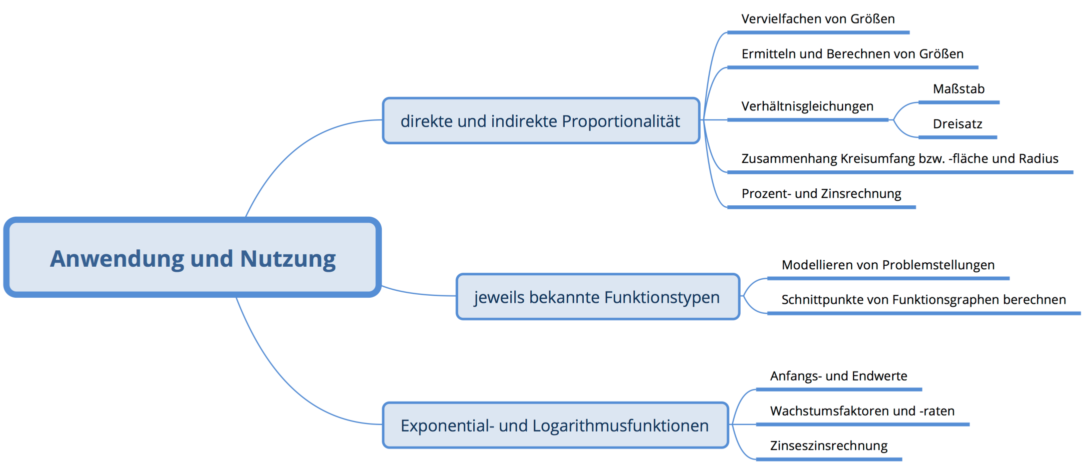
Als fünfte Familie wird die Familie der *abschnittweise definierten Funktionen* gegründet. Im Laufe der Sekundarstufe I wird ein Mitglied dieser Familie kennengelernt und daher hier als Beispiel angeführt: die *Betragsfunktion*. Bei dieser wird der Begriff des *Betrags einer Zahl* verknüpft. *Definitions*- und *Wertebereich* werden nicht weiter aufgeschlüsselt. Die *Gestalt des Graphen* wird noch weiter zerlegt in *Symmetrie*, *Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen*, die *Nullstelle* und den *y-Achsenabschnitt* sowie den *Einfluss der Parameter auf den Verlauf des Graphen*.

Anwendung und Nutzung

In den untersuchten Lehrplänen tauchen noch einige Inhalte auf, die die *Anwendung und* die *Nutzung* der Eigenschaften von Funktionen bzw. von funktionalen Zusammenhängen beschreiben oder fordern (siehe Abbildung 28).

Die Inhalte lassen sich nochmal unterteilen nach der Art des Zusammenhangs, um den es jeweils geht. Es ergeben sich die drei Unterkategorien *direkte und indirekte Proportionalität, jeweils bekannte Funktionstypen* sowie *Exponential- und Logarithmusfunktionen.*

Abbildung 28: Netz zur Anwendung und Nutzung



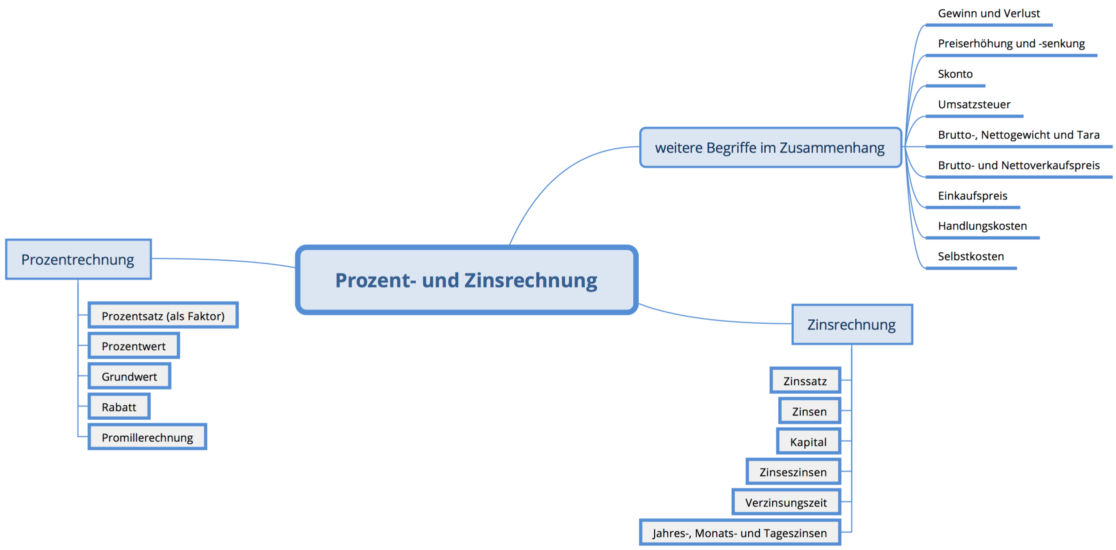
Die Unterpunkte zur *direkten und indirekten Proportionalität* sind Inhalte, die auch mit anderen Themenbereichen bzw. -strängen zusammenhängen und Möglichkeiten bieten, um Verknüpfungen zu schaffen. *Vervielfachen von Größen* und *Ermitteln und Berechnen von Größen* ziehen eine Verbindung zum Themenbereich „*Größen und Messen*". Die *Verhältnisgleichungen* tauchen auch bei den Gleichungstypen im Themenstrang „Gleichungen" auf. In dem hier vorliegenden Netz werden noch der *Maßstab*, der in Aufgaben zu *Verhältnisgleichungen* oftmals vorkommt, und der *Dreisatz* als Lösungsverfahren für Proportionalaufgaben ergänzt. Eine Anwendung der Proportionalität, die eine Verknüpfung zum Themenbereich „*Raum und Form*" darstellt, ist der *Zusammenhang* zwischen *Kreisumfang bzw. -fläche und* dem *Radius*. Einen letzten Unterpunkt bildet die *Prozent- und Zinsrechnung*. Ihr wird in der Schulmathematik, gemessen an der aufgewandten Zeit, eine große Rolle zuteil. An dieser Stelle geht es um die Zinsrechung als lineares Modell. Die Zinsrechnung wird nochmal im selben Netz aufgegriffen bei den Exponential- und Logarithmusfunktionen. Dort geht es um die *Zinseszinsrechnung* als exponentielles Modell. Der Unterschied soll durch die gewählte Anordnung deutlich werden. Gleichwohl bieten die beiden Stellen eine Möglichkeit zur Verknüpfung. In den untersuchten Rahmenlehrplänen tauchen einige Inhalte und Begriffe zur Prozent- und Zinsrechnung auf, so dass zu diesem Unterpunkt noch ein eigenes Netz folgt.

Bei den *jeweils bekannten Funktionstypen* sind als Anwendungsgebiete oder -aufgaben das *Modellieren von Problemstellungen* und das *Berechnen von Schnittpunkten von Funktionsgraphen* zu nennen. Insbesondere der erste Punkt ist sehr allgemein formuliert. Seine Nennung soll an dieser Stelle die Lernenden gerade hierfür sensibilisieren. Der Schlüsselbegriff der *Schnittpunkte* ist eine Stelle, an der eine Verknüpfung mit den *Gleichungssystemen* aus dem Netz zu den Gleichungen gebildet werden kann.

Die *Exponential- und Logarithmusfunktionen* werden noch einmal explizit als eigene Kategorie gewählt, auch wenn sie bereits eine Teilmenge der Kategorie der *jeweils bekannten Funktionstypen* sind. Zu ihnen werden die folgenden Inhalte als Anwendungsaufgaben direkt in den untersuchten Rahmenlehrplänen genannt und begründen daher hier die Wahl einer eigenen Kategorie: die *Anfangs- und Endwerte,* die *Wachstumsfaktoren und -raten* sowie die *Zinseszinsrechnung.*

Prozent- und Zinsrechnung

Abbildung 29: Netz zur Prozent- und Zinsrechnung



Zur *Prozent- und Zinsrechnung* tauchen in den untersuchten Lehrplänen zum einen die zentralen und charakteristischen Begriffe der beiden Themen auf. Zum anderen werden weitere Konzepte genannt, die mit mindestens einem von beiden oder in Aufgaben dazu erscheinen. Das soll den Lernenden transparent gemacht werden. Daher ist das vorliegende Netz zunächst dreigeteilt. Einmal werden die Schlüsselbegriffe zur *Prozentrechnung* gesammelt, einmal die zur *Zinsrechnung.* Die dritte Kategorie ist mit *weitere Begriffe im Zusammenhang* überschrieben.

Die zentralen Begriffe bei der Prozentrechnung sind der *Prozentsatz (als Faktor)*, der *Prozentwert* und der *Grundwert* sowie *Rabatt* und *Promillerechnung*. Bei der Zinsrechnung tauchen der *Zinssatz*, die *Zinsen* und das *Kapital,* die *Zinseszinsen* sowie die *Verzinsungszeit* und die unterschiedlichen Arten der *Jahres-, Monats- und Tageszinsen* auf. Entsprechend durch dieselbe Reihenfolge veranschaulicht ist die Äquivalenz der Begriffe *Prozentsatz (als Faktor)* und *Zinssatz*, *Prozentwert* und *Zinsen* sowie *Grundwert* und *Kapital*.

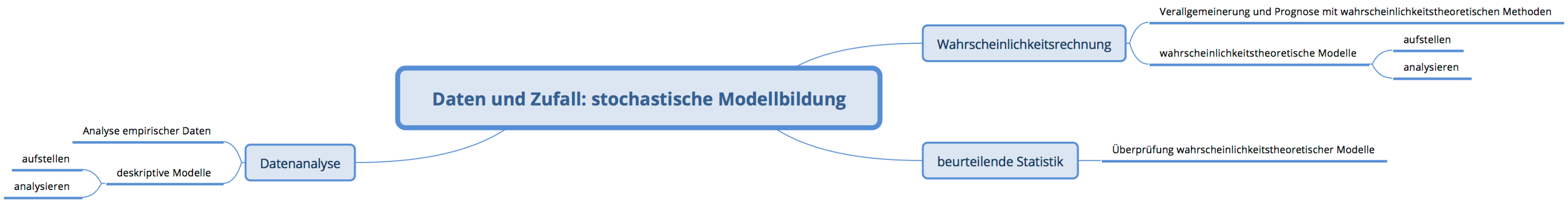
Die Kategorie der *weiteren Begriffe im Zusammenhang* sammelt Schlüsselbegriffe, die inhaltlich an die Prozent- oder Zinsrechnung angelehnt sind, oder die in diesem Kontext auftauchen. Es sind *Gewinn und Verlust*, *Preiserhöhung und -senkung*, *Skonto* und *Umsatzsteuer*. Dazu kommen *Brutto-, Nettogewicht und Tara*, *Brutto- und Nettoverkaufspreis* sowie *Einkaufspreis*, *Handlungskosten* und *Selbstkosten*. Die Lernenden sollen all diese Inhalte in diesem Kontext verorten können.

3.2.5. Begriffsnetz zum Themenbereich „Daten und Zufall“

Das auf die Leitidee „Daten und Zufall“ bezogene mathematische Sachgebiet ist die Stochastik (vgl. KMK 2012, S. 21). In dieser Leitidee wird die Datenanalyse mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung verbunden (vgl. Eichler & Vogel 2009, IX). Der Schwerpunkt in der Sekundarstufe I liegt dabei auf der Datenanalyse (vgl. KMK 2004, S. 12). Das spiegelt auch die Begriffsliste zu diesem Themenbereich wider (siehe Tabelle 6, S. 64). Eichler und Vogel (2009) fordern, dass die Lernenden die Stochastische Modellbildung als Dreischritt aus *Datenanalyse*, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* und *beurteilender Statistik* wahrnehmen sollen (vgl. Eichler & Vogel 2009, S. 241). Auch wenn die *beurteilende Statistik* formal erst in der Sekundarstufe II verortet ist, empfehlen die eben genannten Autoren, sie im Rahmen der Überprüfung stochastischer Modelle zumindest informell bereits in der Sekundarstufe I auftauchen zu lassen (vgl. Eichler & Vogel 2009, S. 240). In der vorliegenden Arbeit wurde die vorgestellte Dreiteilung als Übersicht und Gesamtschau über diesen Themenbereich gewählt. Dabei sind die Begriffe in diesem Netz Ergänzungen zu den Begriffslisten.

Den Lernenden kann so das Ineinandergreifen der drei Bereiche der Stochastik verdeutlicht werden. Eichler und Vogel (2009) formulieren dafür einen Modellierungskreislauf (vgl. Eichler & Vogel 2009, S. 242): Im Rahmen der *Datenanalyse* werden *empirische Daten* von Phänomenen der erlebten Umwelt in einer Stichprobe gesammelt und ihre Muster mit Hilfe von *deskriptiven Modellen* beschrieben (vgl. Eichler & Vogel 2009, S. 242). Die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* verallgemeinert die *deskriptiven Modelle* zu *wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellen*. Das ermöglicht Schätzungen zu untersuchten Phänomenen und *Prognosen* zu Mustern für eine Grundgesamtheit (vgl. Eichler & Vogel 2009, S. 242). Die *beurteilende Statistik* will eine *Überprüfung wahrscheinlichkeitstheoretischer Modelle* (vgl. Eichler & Vogel 2009, S. 242). Um den Lernenden diesen Zusammenhang zu verdeutlichen und die *Datenanalyse* der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* in gewisser Weise gegenüberzustellen, wurden die Hauptthemen bereits in diesem Netz einmal grob zerlegt.

Abbildung 30: Netz zur Übersicht über den Themenbereich „Daten und Zufall“



Die in den untersuchten Lehrplänen genannten Inhalte zur Leitidee „Daten und Zufall“ lassen sich der *Datenanalyse* und der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* zuordnen. Sie werden im Folgenden entsprechend zu zwei Netzen verknüpft. Motiviert durch die Ausführungen von Eichler und Vogel (2009), wurde der Vollständigkeit halber in der Übersicht zu diesem Themenbereich die *beurteilende Statistik* mit aufgenommen, wenngleich hierzu mangels explizit genannter Inhalte für die Sekundarstufe kein eigenes Netz entwickelt wird.

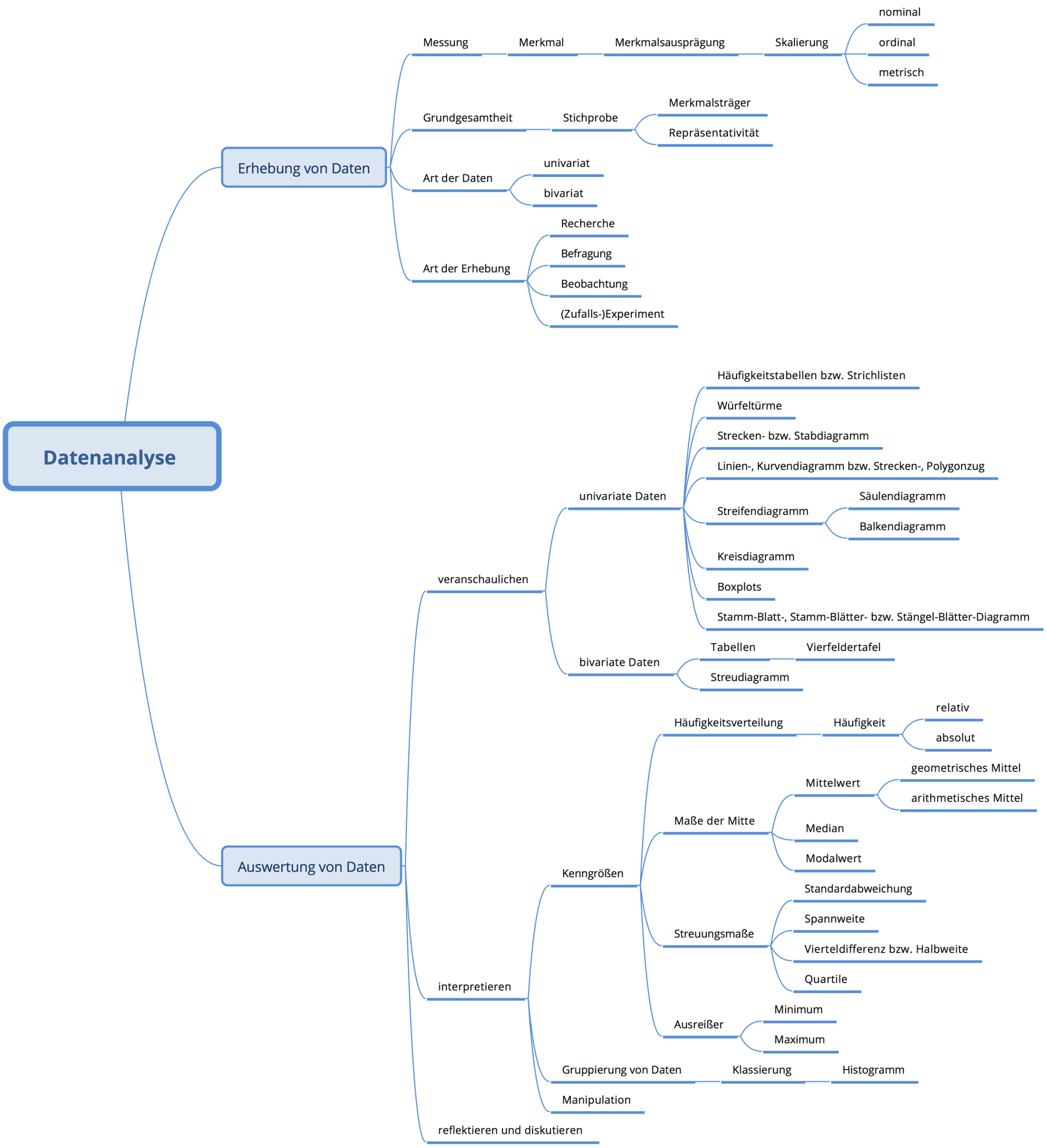
3.2.5.1. Datenanalyse

Die Inhalte zur Datenanalyse werden zunächst in zwei Unterthemen unterschieden (siehe Abbildung 31). Zum einen steht die *Erhebung von Daten* im Fokus. Hier geht es um allgemeine Begrifflichkeiten zur *Grundgesamtheit* sowie zur *Messung* von Daten und dann um unterschiedliche *Datenarten* und *Erhebungsarten*. Zum anderen wird die *Auswertung von Daten* thematisiert, angefangen von *veranschaulichen*, über *interpretieren* bis hin zu *reflektieren* und *diskutieren.*

Mit der vorliegenden Struktur wird den Lernenden eine Möglichkeit aufgezeigt, die wichtigen Aspekte und Inhalte bei der *Erhebung von Daten* in Zusammenhang zu setzen und sie so zu ordnen. Zunächst taucht hier die Inklusionskette der Begriffe *Grundgesamtheit*, *Stichprobe* und *Merkmalsträger* auf, wobei immer der erstgenannte den folgenden Begriff einschließt. Bei der Stichprobe wird auch die *Repräsentativität* als Stichwort verortet, die an dieser Stelle bedeutsam ist. Aus diesen Begriffen taucht nur die *Stichprobe* in den Begriffslisten auf. Alle anderen Begriffe werden der Vollständigkeit halber ergänzt. Wenn es um die *Messung* von Daten geht, sind bestimmte *Merkmale* von Interesse, die festgehalten werden. Um noch genauer ins Detail zu gehen, werden die unterschiedlichen *Merkmalsausprägungen* gemessen, was an dieser Stelle noch ergänzt ist. Weiter ist der Begriff der *Skalierung* verknüpft, der die Merkmalsausprägungen charakterisiert. Er wird zur Differenzierung noch weiter nach drei Skalierungsarten aufgeschlüsselt in *nominal*, *ordinal* und *metrisch* (vgl. Eichler & Vogel 2009, S. 5).

Bei der *Art der Daten,* die den Lernenden der Sekundarstufe I begegnen, und die sie analysieren, handelt es sich um *univariate* oder *bivariate* Daten, je nachdem, ob sie sich auf ein oder zwei Merkmale beziehen (vgl. Eichler & Vogel 2009, S. XII). Diese Punkte werden in Anlehnung an die Ausführungen der beiden Autoren hier ergänzt. Die Lernenden sollen statistische Erhebungen selbst planen und durchführen (vgl. KMK 2004, S. 12). Daher werden hier noch die folgenden *Arten der Erhebung* genannt: *Recherche*, *Befragung*, *Beobachtung* und das *(Zufalls-)Experiment,* wobei die *Beobachtung* hier der Vollständigkeit halber hinzugefügt wird.

Abbildung 31: Netz zur Datenanalyse



Die *Auswertung von Daten* umfasst wie oben formuliert drei Schritte, die die Lernenden gehen sollen, und nach denen hier eine Dreiteilung vorgenommen wird: Die Daten sollen *veranschaulicht* und inhaltlich *interpretiert* werden und die Grundlage für *reflektieren und diskutieren* von Argumenten bilden (vgl. AK Stochastik 2002, S. 2).

Die Möglichkeiten zur *Veranschaulichung* von Daten werden gruppiert nach der Art der Daten, um die es geht. So werden grafische Darstellungsmöglichkeiten für *univariate* und für *bivariate Daten* unterschieden. Es werden jeweils die Varianten vollständig aufgelistet. In der Begriffsliste tauchen sortierte Objektmengen und einfache Schaubilder auf, die hier als in den *Häufigkeitstabellen bzw. Strichlisten* enthalten gesehen werden. Sollten in den untersuchten Rahmenlehrplänen unterschiedliche Begriffe für dieselbe Variante auftauchen, werden alle genannt, wie es beispielsweise beim *Stamm-Blatt-, Stamm-Blätter- bzw. Stängel-Blätter-Diagramm* der Fall ist. Das *Streifendiagramm* wird als Unterkategorie hinzugefügt und weiter in *Säulen-* und *Balkendiagramm* untergliedert, weil beide Ausprägungen je nach Ausrichtung auftauchen. Bei den *bivariaten* Daten tauchen das *Streudiagramm* und bei den *Tabellen* noch die *Vierfeldertafeln* als eine spezielle Form auf, die den Lernenden begegnet.

Bei der *Interpretation* der Daten sind bestimmte *Kenngrößen* informativ und aussagekräftig (vgl. KMK 2004, S. 12). In der vorliegenden Arbeit werden unter diesem Aspekt vier Arten von *Kenngrößen* angeführt, die im Rahmen der Sekundarstufe I relevant sind: die *Häufigkeitsverteilung*, *Maße der Mitte*, *Streuungsmaße* und *Ausreißer,* wobei die beiden mittleren hier als Bezeichnungen der Unterkategorien zusätzlich eingefügt werden. Bei der *Häufigkeitsverteilung* ist der Begriff der *Häufigkeit* verortet, der dann noch weiter in die *absolute* und die *relative* Häufigkeit differenziert wird. Als *Maße der Mitte* dienen der *Modalwert*, der *Median* und der *Mittelwert*, bei dem der Vollständigkeit halber noch weiter zwischen dem *geometrischen* und dem *arithmetischen Mittel* unterschieden werden kann. Die *Streuungsmaße* geben eine Aussage über die Unterschiedlichkeit der Daten an. In den untersuchten Lehrplänen finden sich zu diesem Unterpunkt die *Standardabweichung*, die *Spannweite*, die *Vierteldifferenz bzw. Halbweite* und die *Quartile*. Als *Ausreißer* werden bei den Kenngrößen noch das *Minimum* und das *Maximum* hinzugefügt.

Im Rahmen der *Interpretation* von Daten kommen die Lernenden noch mit zwei weiteren Aspekten in Kontakt. Da ist zum einen das Stichwort *Manipulation*, mit dem sich im Umgang mit Daten auseinandergesetzt werden muss. Zum anderen stellt sich bei metrisch skalierten Daten die Frage nach der *Gruppierung von Daten*. In diesem Zusammenhang sollen die Lernenden *Klassierungen* vornehmen und Entsprechendes in einem *Histogramm* veranschaulichen können (vgl. AK Stochastik 2002, S. 4). Diese drei Begriffe sind hier ergänzend zu den Begriffslisten eingefügt.

Neben der *Veranschaulichung* und der *Interpretation* von Daten sollen die Lernenden Erkenntnisse und Argumente, die auf der Analyse von Daten beruhen reflektieren und beurteilen können (vgl. KMK 2004, S. 12). Auch dieser Aspekt, formuliert als *reflektieren und diskutieren*, gehört zur Auswertung von Daten und komplettiert an dieser Stelle die Inhalte aus den untersuchten Lehrplänen, die im Kontext der Datenanalyse genannt werden.

3.2.5.2. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Um die Inhalte auf den Begriffslisten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zu strukturieren, werden sie zunächst, wie in Abbildung 32 dargestellt, in zwei Bereiche unterteilt. Es werden zum einen alle Inhalte gesammelt, die ein *Zufallsexperiment* bzw. einen *zufälligen Vorgang* beschreiben und charakterisieren. Die anderen Inhalte stehen im Zusammenhang mit verschiedenen Aspekten des *Wahrscheinlichkeitsbegriffs*.

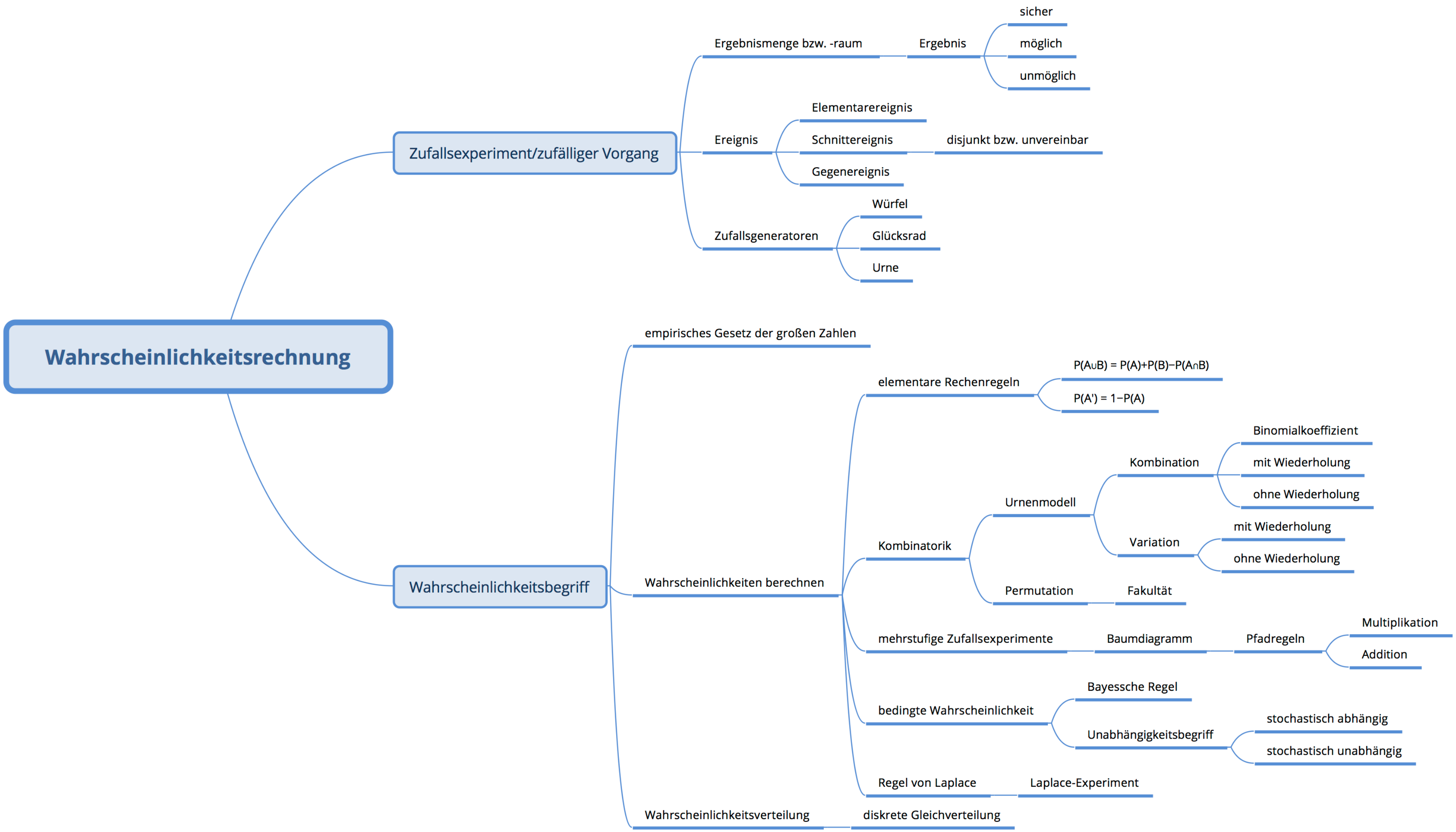
Ein *Zufallsexperiment* bzw. ein *zufälliger Vorgang* bildet die Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Beide Begriffe werden in den untersuchten Lehrplänen gleichbedeutend verwendet und tauchen daher an dieser Stelle auch beide auf. Weitere Unterscheidungen nach der Begrifflichkeit „Experiment“, wie sie beispielsweise Sill empfiehlt, werden hier nicht weiter verfolgt (vgl. Sill 1993, zitiert nach Eichler & Vogel 2009, S. 157). Dieser Aspekt könnte vielmehr während des Lernens von den Lernenden diskutiert werden. Unter dem eben genannten Punkt geht es um die Inhalte, die im Rahmen der Zufallsexperimente thematisiert werden. Zunächst ist hier der Begriff der *Ergebnismenge* bzw. des *Ergebnisraumes* zu nennen. Als deren bzw. dessen Element taucht das *Ergebnis* als Unterpunkt auf. Drei Adjektive werden in den untersuchten Rahmenlehrplänen genannt, um ein Ergebnis genauer zu charakterisieren: das *sichere*, das *mögliche* und das *unmögliche* Ergebnis. Alle drei Adjektive sind hier als weitere Unterpunkte angeknüpft.

Es folgt der Begriff des *Ereignisses*. Auch dieser wird noch weiter untergliedert in seine Bestandteile, das *Elementarereignis* und in eine mögliche Teilmenge, das *Schnittereignis*. Beim Schnittereignis wird die Eigenschaft *disjunkt bzw. unvereinbar* angeknüpft. Auch das *Gegenereignis* wird bei den Ereignissen verortet.

Der *Würfel*, das *Glücksrad* und die *Urne* werden in den untersuchten Rahmenlehrplänen explizit als Zufallsgeräte genannt. Sie werden im vorliegenden Netz mit *Zufallsgeneratoren* überschrieben und sind ebenfalls Unterpunkte beim *zufälligen Vorgang*.

Ein zweiter Bereich an Inhalten findet sich hinter dem *Wahrscheinlichkeitsbegriff*. Als Verknüpfungsmöglichkeit zur *Häufigkeit* in dem weiter oben beschriebenen Netz zur Datenanalyse taucht hier des *empirische Gesetz der großen Zahlen* auf, das über die relative Häufigkeit gewissermaßen einen Übergang zur Wahrscheinlichkeit darstellen kann. *Wahrscheinlichkeiten berechnen* überschreibt den nächsten Unterpunkt. Hier werden fünf Aspekte beleuchtet. Zunächst werden zwei *elementare Rechenregeln* angeknüpft, die sich auf die *Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses* beziehen und auf die *Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge von zwei Ereignissen*.

Abbildung 32: Netz zur Wahrscheinlichkeitsrechnung



Den zweiten Aspekt bildet die *Kombinatorik,* der der AK Stochastik (2002) eine Nebenrolle in der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* beimisst (vgl. AK Stochastik 2002, S. 2). Ihre Position als Unterpunkt soll verdeutlichen, dass sie dazu dient, Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Die *Kombinatorik* als Lehre von den Abzählverfahren wird noch weiter untergliedert. Einerseits ist die *Permutation* angebunden, die durch *Fakultät* berechnet wird. Andererseits taucht hier das *Urnenmodell* auf, das noch weiter und in Ergänzung zu den Begriffslisten in die zwei Varianten *Kombination* und *Variation* untergliedert wird. Bei beiden gibt es die zwei Möglichkeiten *mit* und *ohne Wiederholung*. Bei der *Kombination* ist zudem der *Binomialkoeffizient* verknüpft, der hier zur Berechnung verwendet wird.

Den dritten Unterpunkt bilden *mehrstufige Zufallsexperimente*, deren Wahrscheinlichkeiten über ein *Baumdiagramm* dargestellt und berechnet werden können. Hier folgen die *Pfadregeln der Multiplikation* und *der Addition,* die den Umgang mit einem *Baumdiagramm* vorschreiben.

Ebenfalls in den Kontext der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten gehört die *bedingte Wahrscheinlichkeit*. Hierzu taucht in den untersuchten Rahmenlehrplänen die *Bayessche Regel* auf, genauso wie der *Unabhängigkeitsbegriff*. Der *Unabhängigkeits-begriff* bezieht sich gewissermaßen auf das Verhältnis zweier Ereignisse. Daher erscheint er ebenfalls an dieser Stelle und wird hier zur Differenzierung noch weiter aufgeschlüsselt in die beiden Möglichkeiten *stochastisch abhängig* oder *stochastisch unabhängig*.

Als fünfter und letzter Punkt ist an dieser Stelle noch die *Regel von Laplace* angeknüpft zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei *Laplace-Experimenten*, d.h. wenn jeder Versuchsausgang eines Zufallsexperiments gleichwahrscheinlich ist. Deren Nennung wird hier ebenfalls ergänzt.

Einen letzten Unterpunkt beim *Wahrscheinlichkeitsbegriff* bildet der Begriff der *Wahrscheinlichkeitsverteilung*, der hauptsächlich in der Sekundarstufe II relevant wird, dennoch der Struktur wegen an dieser Stelle Aufnahme findet. Im Rahmen der Sekundarstufe I wird der erste Kontakt mit *diskreter Gleichverteilung* am Beispiel der *Laplace-Experimente* aufgenommen, ohne dass dieser Begriff aktiv eingeführt wird. Um eine Verortung dieser Grundlagen zu ermöglichen und darauf in der Sekundarstufe II aufbauen zu können, tauchen sie bereits hier auf.

3.3. Wie lässt sich diese Struktur visualisieren?

Im ersten Unterkapitel (siehe 3.1.) wurden zunächst alle Inhalte, um die es im Rahmen des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I geht, benannt und in Begriffslisten zusammengestellt. Diese Inhalte wurden im zweiten Unterkapitel (siehe 3.2.) in einen

Zusammenhang gebracht: Mögliche Beziehungen zwischen ihnen wurden formuliert und zu Netzen zu jedem der fünf in den Lehrplänen festgelegten Themenbereiche zusammengefügt.

Wie in den Ausführungen zum Mind-Mapping (siehe 2.2.2.1.) erarbeitet und in 2.3.1. zusammengefasst, wird das Lernen grundsätzlich gefördert durch eine kreative und visuell spannende Aufbereitung der Inhalte. In 2.3.2. wurden vier Kriterien festgelegt, denen die entstehende Lernhilfe genügen soll. In diesem Unterkapitel geht es insbesondere um das an vierter Stelle genannte: Die Darstellung soll Aufmerksamkeit generieren und helfen, den Fokus auf einzelne Aspekte zu richten.

Dieses allgemein formulierte Kriterium wird basierend auf den Ausführungen zu den Gedächtnistechniken unter 2.2.3. noch weiter ausdifferenziert. Karsten (2011) nennt sieben Faktoren, die bedeutsam für die Anwendung und entscheidend für die Wirksamkeit einer Gedächtnistechnik sind und daher nun beim letzten Schritt der Entwicklung der Lernhilfe zum Tragen kommen: Transformation, Assoziation, Fantasie, Emotion, Logik, Lokalisation und Visualisierung (vgl. 2.2.3.). In diesem Unterkapitel geht es darum, all diese Kriterien auf die entstehende Lernhilfe anzuwenden.

Die Grundidee wurde bereits in 2.3.1. formuliert: Die in 3.2. geschaffene Struktur aus den einzelnen Netzen wird mit der Weltkarte verknüpft. Dabei geht es im Sinne der Locimethode darum, die Gedächtnisleistung zu steigern, indem zu lernende Inhalte mit markanten Orten eines vertrauten Weges verknüpft werden. Eine Variante dieser Methode nutzt eine vorgegebene Abfolge von Bildern, mit denen im Lernprozess einzelne Inhalte vor dem geistigen Auge visuell verknüpft werden sollen. Zentral ist in beiden Fällen die visuelle Verschränkung des zu lernenden Inhalts mit dem Bild oder mit der bildlichen Vorstellung des gewählten Ortes. Das so entstehende Bild soll lebhaft und farbig gestaltet sein und emotional aktivierend wirken (vgl. 2.2.3.). Im geistigen Abschreiten des Weges oder im Betrachten der Bilderfolge werden dann die jeweils verknüpften Inhalte wachgerufen und somit leichter und besser erinnert.

3.3.1. Verknüpfung mit Weltkarte

Die Inhalte der Schulmathematik der Sekundarstufe I werden in eine Weltkarte eingebettet. Als eben beschriebener vertrauter Weg oder Bilderfolge werden eine Weltkarte und dann auf weiteren Gliederungsebenen Karten der Kontinente, Länderkarten und bei Bedarf ergänzende Detailkarten verwendet. Es ist davon auszugehen, dass ihr Aufbau und ihre grobe Struktur den Lernenden der Sekundarstufe I bekannt sind und sie deshalb mit einer gewissen Vertrautheit betrachtet werden. Die so entstehenden Karten werden im letzten Arbeitsschritt, wie bei einem

Weltatlas aus der Geografie, zu einem Atlas zusammengestellt: dem *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I*.

Auf diesen Karten bekommen alle vorgestellten Schlüsselbegriffe aus 3.1. und 3.2. einen Platz. Sie werden entsprechend ihrer Verbindungen und ihrer Position innerhalb der in 3.2. entwickelten Netze auf der Welt verortet. Wie in diesem Unterkapitel beschrieben, folgen die Netze bis auf drei (vgl. 3.2.3.1. sowie 3.2.4.3.) einer hierarchischen Struktur. Eben diese Struktur – in der Themen immer weiter aufgeschlüsselt werden, indem sie in Unterthemen oder einzelne Schlüsselbegriffe ausdifferenziert oder zerlegt werden (vgl. 3.2.) – wird mit Hilfe der Karten aufgegriffen: Aus jeder Karte kann ein Ausschnitt gewählt und auf einer weiteren Karte noch genauer betrachtet werden. Die Spezialfälle für die drei eben beschriebenen Netze wird in 3.3.2. bei der Beschreibung der einzelnen Karten separat thematisiert. Entscheidend bei jedem auftretenden Schlüsselbegriff sind seine Position im hierarchischen Gefüge, seine über- und seine untergeordneten Themen sowie seine nebengeordneten Schlüsselbegriffe. Die Struktur der einzelnen Netze bekommt ihre Entsprechung in den verschiedenen Karten und den darin visualisierbaren Strukturebenen.

Bei der Wahl und in der Gestaltung der Karten geht es darum, für die verschiedenen Hierarchiestufen der Netze eine visuelle Entsprechung zu schaffen. Dabei sollen, wie schon bei der Entwicklung der Netze, neben dem eben genannten vierten Kriterium aus 2.3.2. auch die drei anderen handlungsleitend sein. Ziel ist es, schon für junge Lernende zu Beginn der Sekundarstufe I einen möglichst niederschwelligen Zugang zur Arbeit mit den Karten zu schaffen.

Die Durchsicht aller Netze zeigt, dass zehn unterschiedliche Hierarchiebenen benötigt werden, um für die Hauptthemen, Themen und Unterthemen mitsamt aller Schlüsselbegriffe entsprechende Strukturen auf den Karten festlegen zu können. Anknüpfend an Strukturen, die auch in der realen Welt auftreten, werden auf den Karten die folgenden zehn Stufen eröffnet: Welt – Kontinent – Land – Großregion – Bundesland – Region – Stadt – Stadtteil – Sehenswürdigkeit – Detail einer Sehenswürdigkeit.

Auf diese Weise sind Orte festgelegt, mit denen die zu erlernenden Inhalte im Sinne der Locimethode verknüpft werden. In 2.2.3. werden nach Karsten (2011) Regeln formuliert, die bei der Wahl einer Ortsreihenfolge zu berücksichtigen sind. Sie finden in der hier vorgestellten Visualisierung Anwendung: Mit der Welt wurde eine vertraute oder bekannte Umgebung gewählt. Zwar verringert sich der Bekanntheitsgrad vermutlich mit jeder Hierarchieebene. Dennoch bleibt die Systematik bestehen und können innerhalb eines Landes oder auch analog innerhalb einer Region etc. markante Punkte festgelegt werden, die dann beim Erinnern abgelaufen werden können. Die

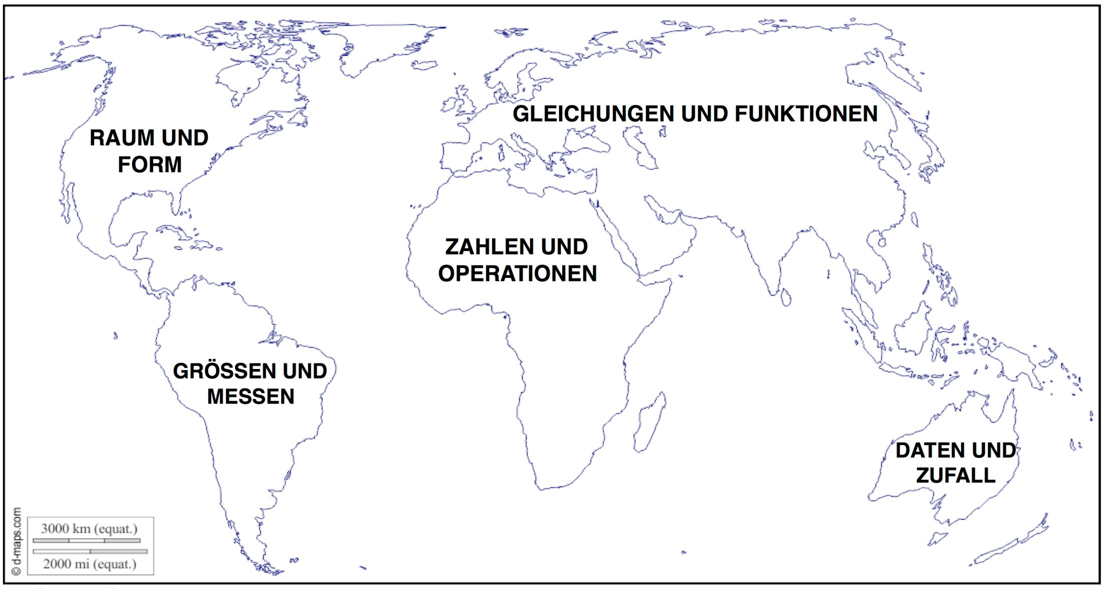
Orte lassen sich eindeutig reihen oder bei Bedarf durchnummerieren, und der Betrachtungswinkel ist durch die Gestaltung der Karten festgelegt. Die gewählten Orte sind einprägsam, haben untereinander einen mäßigen Abstand und jeweils auf derselben Hierarchieebene ein ähnliches Ausmaß. Ihre Position ist dauerhaft, und sie unterscheiden sich in ausreichendem Maße. Die Anzahl der Orte entspricht der Anzahl der abzulegenden Inhalte.

Im folgenden Abschnitt werden die Kartentypen vorgestellt, in denen die eben genannten zehn Stufen dargestellt, und in die die einzelnen Netze eingebettet werden. Der Fokus liegt dabei darauf, die Struktur der Netze zu visualisieren und die Position der einzelnen Schlüsselbegriffe innerhalb des Gesamtgefüges in eine Karte zu übersetzen und so begreifbar zu machen.

3.3.2. Beschreibung der einzelnen Kartentypen

Die *Weltkarte* steht allem voran als Zusammenschau und gibt einen Gesamteindruck von der „Welt der Mathematik" der Sekundarstufe I. In Abbildung 33 ist diese Weltkarte skizziert.

Abbildung 33: Weltkarte der Schulmathematik der Sekundarstufe I



https://d-maps.com/carte.php?num_car=3267&lang=de

RAUM UND FORM = Kontinent
Objekte = Land
EINDIMENSIONAL = Großregion innerhalb eines Landes
Flächen aus Flächen = Bundesstaat/Bundesland etc.
schief = Region innerhalb eines Bundesstaates
Dreieck = Stadt

Dreiecksarten = Stadtteil
Begriffe = Sehenswürdigkeit
Satz des Thales = Detail einer Sehenswürdigkeit
~~Weitere, thematische Zerlegungsmöglichkeiten:~~
stumpfwinklig (z.B. nach Winkelgrößen)
= verschiedenseitig (z.B. nach Seitenlängen)

Diese Welt wurde in 3.2. zunächst in fünf Themenbereiche gegliedert, die dann weiter in Hauptthemen unterteilt wurden. Zu jedem dieser Hauptthemen wurde ein eigenes Netz entwickelt, das das jeweilige Hauptthema weiter aufschlüsselt und die zugehörigen Schlüsselbegriffe zusammenfügt. Für die fünf Themenbereiche wird die erste Gliederung der Weltkarte in Kontinente genutzt. In der nächsten Ebene werden die Hauptthemen einzelnen Ländern auf dem entsprechenden Kontinent zugeordnet. Analog zur Unterteilung der Hauptthemen in Unterthemen und einzelne Schlüsselbegriffe werden auf den Länderkarten die eben genannten Stufen (Großregion – Bundesland – Region – Stadt – Stadtteil – Sehenswürdigkeit – Detail einer Sehenswürdigkeit) eingetragen. Neben der *Weltkarte* entstehen so *Kontinentalkarten* und *Länderkarten*.

In einigen Netzen treten neben vielen Hierarchiebenen auch Unterthemen mit mehreren weiteren Unterthemen oder zahlreichen zugeordneten Schlüsselbegriffen auf. Um die Komplexität zu reduzieren und die Darstellung übersichtlich zu halten, werden in diesen Fällen noch *Detailkarten* entwickelt. Auf ihnen werden ebensolche Unterthemen vergrößert dargestellt.

Es folgen drei Unterabschnitte, die jeweils einen der genannten Kartentypen in den Fokus nehmen und allgemein beschreiben. Dabei wird ein Überblick über die Karten dieses Typs gegeben und auf Besonderheiten bei der Gestaltung eingegangen. Diese Beschreibungen sollen parallel und ergänzend zur Betrachtung der einzelnen Kartenbeispiele erfolgen.

3.3.2.1. Karten der Kontinente

Analog zur Strukturierung der physischen Welt in Kontinente wird die „Welt der Mathematik“ der Sekundarstufe I, wie in 3.1.2. beschrieben, zunächst in fünf Themenbereiche gegliedert: *Raum und Form*, *Größen und Messen*, *Zahlen und Operationen*, *Gleichungen und Funktionen* sowie *Daten und Zufall*. Bei der Entwicklung der Netze wurden unter 3.2.4. im Themenbereich „Gleichungen und Funktionen“ Vollrath (1999) folgend die drei Themen *Terme*, *Gleichungen* und *Funktionen* betrachtet, die eng miteinander verbunden sind. Um die Nähe zwischen den Themenbereichen aufzugreifen und zu visualisieren, werden sie, wie in Tabelle 8 dargestellt und in Abbildung 33 visualisiert, auf die physischen Kontinente verteilt:

Tabelle 8: Verteilung der Themenbereiche auf die Kontinente

Kontinent	**Themenbereich**
Nordamerika	Raum und Form
Südamerika	Größen und Messen

Kontinent	**Themenbereich**
Afrika	Zahlen und Operationen
Europa und Asien	Gleichungen und Funktionen
Australien	Daten und Zufall

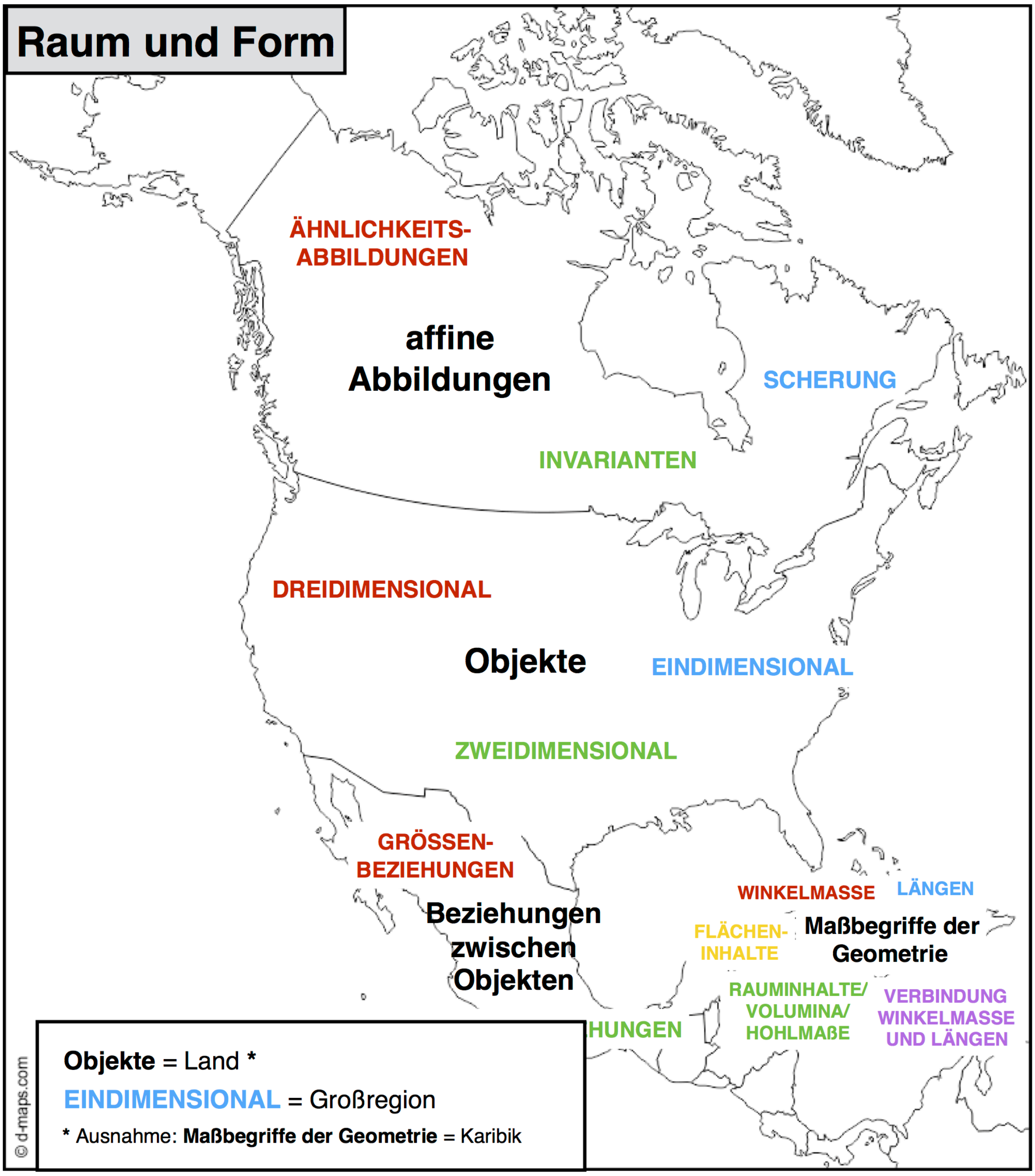
Die inhaltliche Verbindung zwischen den Themenbereichen „Raum und Form“ sowie „Größen und Messen“ spiegelt sich in der räumlichen Nähe zwischen Nord- und Südamerika. Sie eröffnet zudem die Möglichkeit, dass, wie in 3.2.1.6. beschrieben, die *Maßbegriffe der Geometrie* als Brücke zwischen den beiden Themenbereichen dargestellt werden können.

Die eben beschriebene enge Verknüpfung zwischen *Terme*, *Gleichungen* und *Funktionen* als Struktur des Themenbereichs „Gleichungen und Funktionen“ wird dadurch aufgegriffen, dass sie auf die Landmasse der beiden Kontinente Europa und Asien verteilt werden, wobei *Gleichungen* die Verbindung zwischen *Termen* und *Funktionen* bilden. Die geografische Nähe Afrikas wird genutzt, um Vollrath (1999) folgend die Verbindung zum Themenbereich „Zahlen und Operationen“ zu visualisieren (vgl. 3.2.3.).

An dieser Stelle wird eine Sache deutlich, die sich auch im Weiteren auf den anderen Karten findet: Nicht alle Kontinente, die es auf der Welt gibt, werden als Verknüpfungsstelle für einen Themenbereich genutzt. Genauso werden auch nicht unbedingt alle Länder eines Kontinentes verwendet, die es dort in der physischen Welt zu finden gibt, oder es tauchen nicht alle möglichen Städte auf. Gleichwohl wird eine Zuordnung geschaffen, die jedem Schlüsselbegriff aus den Netzen eine Struktur auf einer der Karten zuweist.

Abbildung 34 zeigt ein Beispiel für eine Kontinentalkarte. Dargestellt ist der Themenbereich „Raum und Form“*,* der mit Nordamerika verknüpft ist.

Abbildung 34: Beispiel für eine Kontinentalkarte zum Themenbereich „Raum und Form“



https://d-maps.com/carte.php?num_car=1405&lang=de

3.3.2.2. Karten der Länder

Eine Länderkarte im *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* stellt ein Hauptthema eines Themenbereiches mit all seinen zugeordneten Unterthemen und Inhalten dar. Es geht darum, die in den Netzen auftauchenden Schlüsselbegriffe innerhalb eines solchen Landes zu positionieren und ihnen durch die Zuordnung zu einer der unter 3.3.1. genannten Strukturen eine Verknüpfungsmöglichkeit zu geben.

Dadurch soll die Position eines Schlüsselbegriffes innerhalb des hierarchischen Gefüges aller Inhalte desselben Hauptthemas sichtbar werden. Zur Verfügung stehen die folgenden Hierarchieebenen: Großregion – Bundesland – Region – Stadt – Stadtteil – Sehenswürdigkeit – Detail einer Sehenswürdigkeit. Allgemein gilt, dass die Struktur der Hauptthemen in den Netzen übertragen wird auf diese sieben Gliederungsebenen. Dabei können einzelne Gliederungsebenen, wie beispielsweise die Unterteilung der Bundesländer in Regionen und weiter in Bezirke, übersprungen werden, wenn weniger Ebenen benötigt werden. Die Schlüsselbegriffe, die an den Enden der Äste in den Netzen auftauchen, werden bei flachen Hierarchien als Städte gekennzeichnet und in stärker verästelten Hierarchien als Stadtteile oder als Sehenswürdigkeiten, an einzelnen Stellen auch noch als Details einer Sehenswürdigkeit. Im Anhang finden sich nochmals alle Netze, wobei dort bei jedem Schlüsselbegriff kenntlich gemacht ist, welcher der genannten Hierarchieebene er zugeordnet ist. Abbildung 35 gibt ein Beispiel für eine Länderkarte zum Hauptthema „Objekte“ (vgl. 3.2.1.1.).

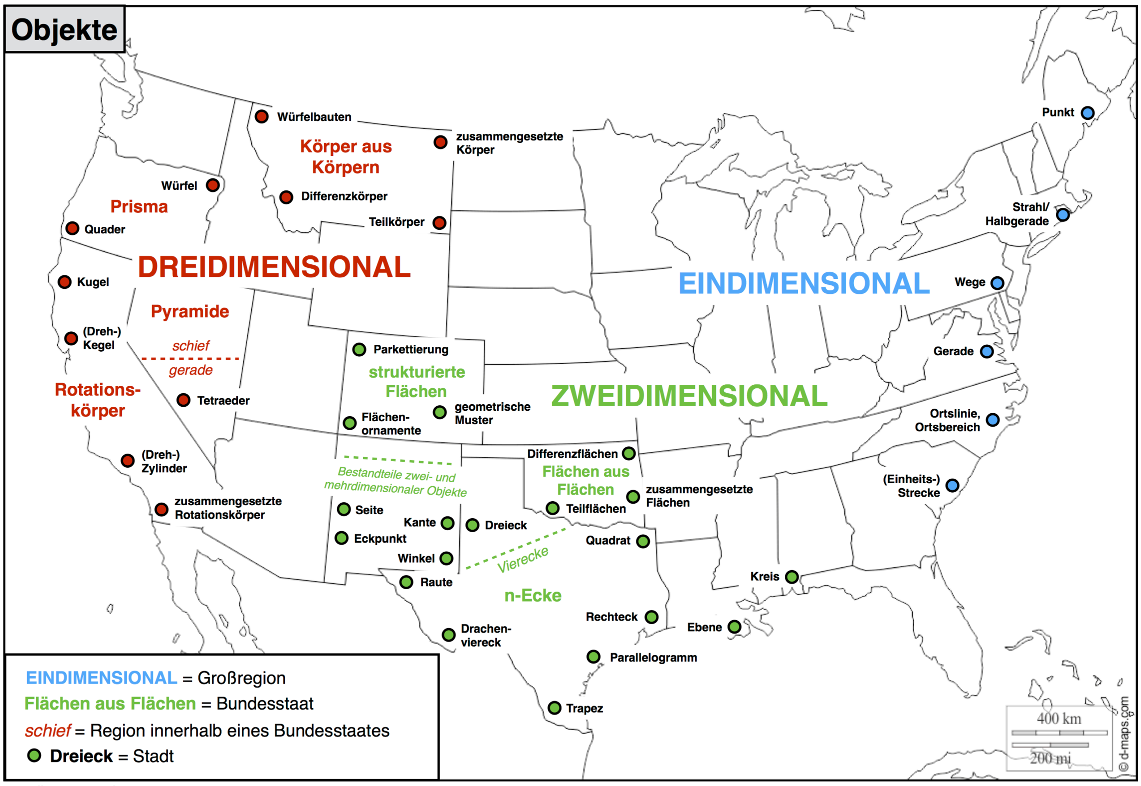
Bei den *Länderkarten* treten zwei Spezialfälle auf. Im ersten Spezialfall wird, wie in 3.2.1. beschrieben, ein Land unter einem weiteren Blickwinkel bzw. unter einem neuen Aspekt betrachtet. Hier werden also auf einer bereits entwickelten Länderkarte zu einem Hauptthema bei den unterschiedlichen Orten zusätzliche Informationen durch eine besondere farbliche Gestaltung eingeflochten. Abbildung 36 liefert eine solche thematische Länderkarte zu den besonderen Darstellungsformen (vgl. 3.2.1.2.). Tabelle 9 gibt eine Übersicht über die betreffenden Länder und die zugehörigen Länderkarten.

Tabelle 9: Übersicht über Länder und ihre thematischen Länderkarten

Land (Hauptthema)	thematische Länderkarte
Affine Abbildungen (3.2.1.5.)	Konstruktion bestimmter Objekte
Objekte (3.2.1.1.)	Konstruktion bestimmter Objekte
	Besondere Darstellungsformen

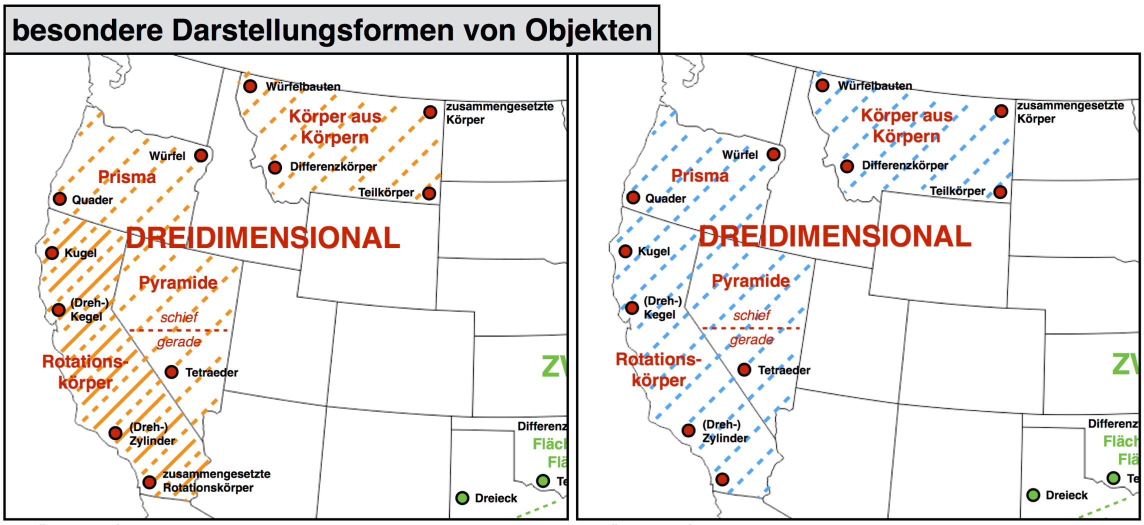
Der zweite Spezialfall umfasst die beiden eben erwähnten Hauptthemen mit Ablaufstruktur (vgl. 3.2.4.3.) und die Zahlbereiche, die einer Inklusionshierarchie folgen (vgl. 3.2.3.1.). In diesen drei Fällen werden spezielle Länderkarten gewählt, auf denen durch prägnante Flussläufe ein Verlauf von der Quelle bis zur Mündung visualisierbar wird.

Abbildung 35: Beispiel für eine Länderkarte zum Hauptthema „Objekte“ (vgl. 3.2.1.1.)



https://d-maps.com/carte.php?num_car=1683&lang=de

Abbildung 36: Beispiel für eine thematische Länderkarte zu den besonderen Darstellungsformen (vgl. 3.2.1.2.)



https://d-maps.com/carte.php?num_car=1683&lang=de https://d-maps.com/carte.php?num_car=1683&lang=de

zweidimensional: Körpernetze, Schrägbilder, (Schrägbildachse, Verzerrungsmaßstab, Verzerrungswinkel), Baupläne, Aufsichten, Ansichten (Vorderansicht, Seitenansicht), Lagepläne, Grundrisszeichnungen

zweidimensional zusätzlich: Axial-schnitte von Rotationskörpern (Rotationsachse, Mantellinie)

dreidimensional: (maßstabsgetreue) Modelle

3.3.2.3. Detailkarten

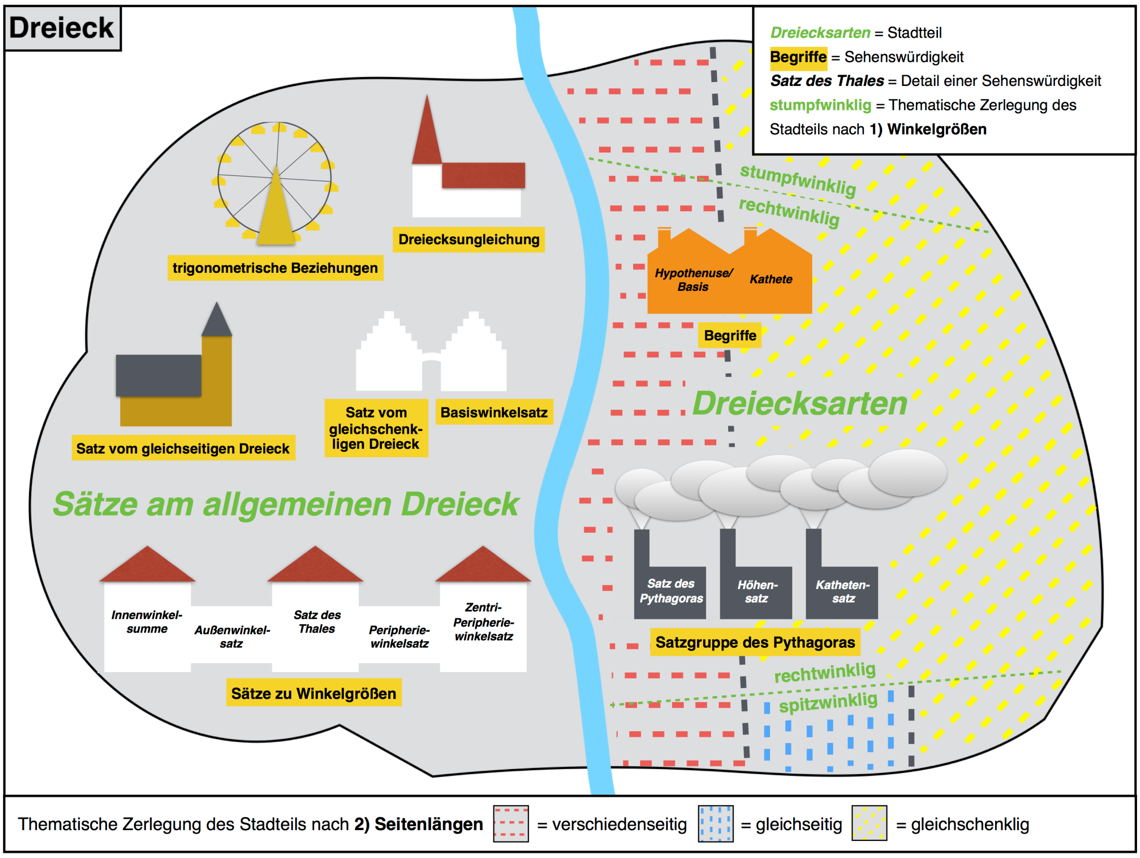
Wie oben angekündigt, sind einige Netze an bestimmten Stellen so stark verzweigt oder vereinen dort so viele Schlüsselbegriffe, dass die entsprechende Länderkarte hier noch durch eine Detailkarte erweitert wird. Diese soll einen genaueren und differenzierteren Blick ermöglichen und zugleich die Übersichtlichkeit der gesamten Karte bewahren. Insgesamt ergeben sich sechzehn solcher Detailkarten. Tabelle 10 gibt einen Überblick darüber, für welches Land welches Detail auf einer separaten Karte betrachtet wird.

Tabelle 10: Länder und ihre zugehörigen Detailkarten

Land (Hauptthema)	**zugehörige Detailkarten**
Affine Abbildungen (3.2.1.5.)	geometrische Begriffe im Zusammenhang
	Vergrößern/Verkleinern
Objekte (3.2.1.1.)	Winkel (3.2.1.1.1.)
	Kreis (3.2.1.1.2.)
	Dreieck (3.2.1.1.3.)
Operationen (3.2.3.2.)	Konzepte im Zusammenhang (Multiplikation)
	Konzepte im Zusammenhang (Division)
	Zahlen zerlegen
Gleichungen (3.2.4.2.)	rechnerische Lösungsverfahren
	Gleichungssysteme
Funktionen (3.2.4.3.)	Prozent- und Zinsrechnung
Wahrscheinlichkeitsrechnung (3.2.5.2.)	Kombinatorik
	mehrstufige Zufallsmodelle

Es werden Strukturen auf unterschiedlichen Ebenen unter die Lupe genommen. Die Detailkarten werden sowohl für Großregionen, Bundesländer und Regionen als auch für Städte und Stadtteile entwickelt, je nach Notwendigkeit. Abbildung 36 gibt ein Beispiel für eine solche Detailkarte. Hier wird die Stadt, die als Ort zur Verknüpfung für das Netz zum Dreieck (vgl. 3.2.1.1.3.) gewählt wurde, näher betrachtet.

Abbildung 37: Beispiel für eine Detailkarte zum Dreieck (vgl. 3.2.1.1.3.)



Am Ende werden alle auf diese Weise erstellten Karten in sachlich korrekter Reihung aneinandergefügt, wodurch aus ihnen das fertige Produkt entsteht: der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I*. Ideengebend sind dabei Weltatlanten aus der Geografie, wie beispielsweise der Diercke Weltatlas (2015), der ebenfalls in den Schulen zum Einsatz kommt.

Somit ist der Prozess abgeschlossen, einen *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* als eine Lernhilfe zu entwickeln, der den in 2.3. formulierten Kriterien genügt. Dieser Entwicklungsprozess bildete zugleich die Beantwortung der beiden Forschungsfragen aus 1.2.

3.4. Diskussion getroffener Entscheidungen

Bei den einzelnen Entwicklungsschritten des *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* wurden die jeweils zugrundeliegenden Gedanken und Überlegungen ausführlich dargestellt und so das Vorgehen detailliert begründet. Dabei wurde betont, dass die gewählten Handlungsschritte jeweils eine von theoretisch mehreren möglichen Varianten darstellen, und dass auf diese Weise eine mögliche Gesamtstruktur für die Inhalte der Mathematik der Sekundarstufe I entsteht. Sie ist nicht die einzige begründbare Gesamtstruktur, aber sie ist in sich gut begründet.

In diesem letzten Unterkapitel werden nun einzelne Entscheidungen aus dem Prozess in 3.1. bis 3.3. erneut aufgegriffen. Sie werden hier kritisch reflektiert und exemplarisch mit möglichen Handlungsalternativen diskutiert. So bieten sie eine Grundlage, an der anknüpfend in Kapitel 5 weitere Forschungsfragen erarbeitet werden.

3.4.1. Entscheidung für Lehrpläne als Quelle

Wie in 2.3. formuliert, war es das Ziel der praktischen Umsetzung, eine Lernhilfe zu entwickeln, die gelingendes Lernen fördert, indem sie das, was gelernt werden soll, strukturiert. Daraus abgeleitet, wurde in 3.1. zunächst herausgearbeitet, um welche Inhalte es im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I geht. Als Quelle wurden die gesetzlichen Planungsgrundlagen für den Mathematikunterricht gewählt. Das geschah in dem Wissen, dass es sich hierbei um normative Vorgaben handelt, die jeweils die Ausgestaltung politischer Vorgaben durch ein Autor*innenteam sind. Damit stellen diese Planungsgrundlagen nur eine – gleichwohl sehr umfassende – Auswahl von Fachinhalten dar, erheben aber keinen Anspruch auf Vollständigkeit aus fachwissenschaftlicher Perspektive.

Dieser Feststellung folgend, hätte ergänzend zu den Lehrplänen der Blick noch stärker auf die Fachwissenschaft gerichtet werden können, um die Sammlung der Inhalte zu vervollständigen. Exemplarisch für die Geometrie liefert beispielsweise Wellnitz (2013) eine „schematische Darstellung des geometrischen Theoriegebäudes“ (Wellnitz 2013, S. 398). Er kategorisiert die Aussagen zur „abstrakten Geometrie“, zur „Geometrie mit Längenmaß“ und zur „Geometrie mit Längen- und Winkelmaß“ nach „Axiomen der Theorie“, nach „ableitbaren Grundtatsachen“ und nach „Sätzen“ (Wellnitz 2013, S. 398). So entsteht eine Systematik, die zwar durchaus den Anspruch an Vollständigkeit in diesem Themenbereich erfüllt, deren Adressat*innen aber Lehrende, Studierende oder Dozierende sind (vgl. Wellnitz 2013, S. 7). In der vorliegenden Arbeit geht es um eine andere Schwerpunktsetzung: Hier stehen die Lernenden der Sekundarstufe I im Fokus, ihre Sprache, ihre Möglichkeiten und ihr Verständnis für mathematische

Zusammenhänge. Ziel war es daher, genau die Inhalte zu identifizieren, mit denen sich die Lernenden im Mathematikunterricht auseinandersetzen und deren Formulierungen ihnen im Unterricht begegnen werden, ohne sich an einer Diskussion über die Lehrpläne zu beteiligen und deren Gehalt kritisch zu hinterfragen oder sie gar zu überarbeiten.

Alternativ zu den Lehrplänen hätten die Inhalte auch dort gesammelt werden können, wo die Planungsgrundlagen bereits umgesetzt sind: in Lehrwerken oder auf digitalen Lernplattformen, in oder auf denen die Inhalte bereits für die Nutzung durch die Lernenden aufbereitet sind. Hier liegt der Fokus darauf, dass sich die Lernenden mit Hilfe dieses Mediums den Stoff der Mathematik der Sekundarstufe I – als Gesamtgebilde aus den einzelnen Inhalten – erarbeiten und erschließen.

Genau darin liegt die Schwierigkeit: Die Inhalte sind bereits eingekleidet in ein System aus didaktischen und pädagogischen Überlegungen. Im Gegensatz zu den Lehrplänen, die als Richtschnur und damit auch wie eine Art Aufzählung aller Inhalte der Mathematik der Sekundarstufe I zu verstehen sind, liegt in den Lehrwerken das Augenmerk darauf, diese einzelnen Inhalte anschaulich, verständlich und erlernbar werden zu lassen. Eine Analyse der Lehrwerke müsste also zunächst die einzelnen Inhalte wie eine Art Skelett freilegen und sie systematisch aus den Ebenen der Gestaltung sowie der didaktischen Überlegungen und Konzepte herausschälen. Zudem liefern auch die Lehrwerke letztlich nur eine Auswahl von Fachinhalten, die sich an den normativen Planungsgrundlagen orientieren.

Auf Basis dieser Gedanken wurden die gesetzlichen Planungsgrundlagen gewählt, um eine präzise und passgenaue Antwort auf die Frage zu bekommen, um welche Inhalte es im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I geht.

3.4.2. Entscheidung über Auswahl und Anzahl der verwendeten Lehrpläne

Mit der Auswahl der Lehrpläne für Mathematik, wie sie in 3.1. erörtert wurde, wurde eine möglichst umfassende Sammlung aller Inhalte der Sekundarstufe I angestrebt. Da sich die Lehrpläne der Bundesländer als gemeinsame Grundlage auf die Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss der KMK (2004) beziehen, wurden in der vorliegenden Arbeit ebendiese sowie beispielhaft die Lehrpläne der genannten Bundesländer analysiert.

Alternativ hätten hier noch mehr Bundesländer berücksichtigt werden können. Jedoch zeigt bereits die Analyse der gewählten Lehrpläne in der Anzahl und in den Formulierungen der Inhalte wenig Unterschiede, was vermutlich daraus resultiert, dass die Lehrpläne aller Bundesländer auf derselben, bereits genannten Basis der Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (KMK 2004) entwickelt wurden. Der Nutzen einer Analyse aller deutschen Lehrpläne wäre daher wohl sehr klein ausgefallen im Vergleich zu dem Mehraufwand, den die Analyse 13 weiterer solcher Dokumente erfordert hätte.

Stattdessen wurde als Ergänzung noch der Blick über die Landesgrenzen nach Österreich und auf die deutschsprachige Schweiz gerichtet, um hier zwei Planungsgrundlagen zu finden, die unabhängig vom Konsens der Kultusministerkonferenz (2004) für den Mathematikunterricht in diesen beiden deutschsprachigen Ländern formuliert wurden.

Selbstverständlich hätte der Blick auch noch weiter, und zwar über die Grenzen der deutschen Sprache hinaus wandern können. Es hätten einzelne Länder zum Vergleich festgelegt und deren Planungsgrundlagen analysiert werden können. Die Schwierigkeit bei diesem Vorgehen besteht schon allein auf sprachlicher Ebene darin, die einzelnen Inhalte zu identifizieren und sie in einem sprachlichen Pendant zu dem gewählten deutschen Schlüsselbegriff zu fassen. Nach Abwägung von zu treibendem Aufwand und Nutzen für die Fragestellung geht es deshalb in der vorliegenden Arbeit um den deutschsprachigen Raum, zumal auch der Einsatz an deutschsprachigen Schulen vorgesehen ist.

3.4.3. Entscheidung für die inhaltsbezogenen Kompetenzen

Bei der Festlegung der aufzunehmenden Inhalte standen die inhaltsbezogenen Kompetenzen im Fokus. Die entwickelte Lernhilfe bildet diese eine Dimension des in 3.1.1. vorgestellten dreidimensionalen Modells mathematischer Kompetenzen ab (vgl. SenBJF & MBJS 2020, S. 5). Dementsprechend nicht abgebildet sind die prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen und die Anforderungsniveaus (vgl. SenBJF & MBJS 2020, S. 5). Eine Hinzunahme dieser beiden Dimensionen verlässt die rein inhaltliche Ebene und bringt fachdidaktische Elemente mit hinein.

Die Entscheidung dafür, nur eine Dimension abzubilden, bietet einen Anknüpfungspunkt für weitere Forschungs- und Entwicklungsfragen, die in Kapitel 5 formuliert werden. Bei diesen geht es um Möglichkeiten, wie die Lernenden in der Arbeit mit dem *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* auch für die beiden anderen Dimensionen sensibilisiert werden können.

3.4.4. Entscheidung für Einfachheit, Klarheit und Übersichtlichkeit

In 2.3.2. wurde ein Kriterium formuliert, dass bei allen Entwicklungsschritten der Lernhilfe handlungsleitend war: Die Komplexität sollte möglichst gering gehalten werden und die Konzentration auf dem Wesentlichen liegen. Ziel dieser beiden Aspekte war es, in der Gestaltung des *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* für Einfachheit, Klarheit und Übersichtlichkeit zu sorgen. Beide Gesichtspunkte führten zu den folgenden drei Entscheidungen:

Erstens wurden aus den untersuchten Lehrplänen die relevanten Themen und Inhalte extrahiert und in möglichst selbsterklärenden Schlüsselbegriffen formuliert. Hier hätten auch zusätzlich Formeln oder weitergehende Differenzierungen aufgenommen werden können als diejenigen, die in den Quellen explizit genannt wurden. Das jedoch hätte zu zusätzlichen Knoten oder Unterknoten in den entwickelten Netzen geführt, wodurch dementsprechend die Komplexität zugenommen hätte. Jede tiefere Erkundung der Inhalte, die sich hinter einem Schlüsselbegriff verbergen, soll im Rahmen des Unterrichts erfolgen. In Kapitel 4.4. werden hierfür Ideen gesammelt und dargestellt.

Zweitens ging es in 3.2. darum, wie diese Schlüsselbegriffe zusammenhängen, und wie sie strukturiert werden können. Dabei wurde der Anspruch formuliert, dass die entstehenden Netze eine Struktur zwischen den Inhalten sichtbar machen sollen, die aus fachwissenschaftlicher Perspektive korrekt ist. Um das zu erreichen, wurden zu jedem Hauptthema Autor*innen gewählt, die sich mit dem Aufbau und der Struktur ebendieses Themas eingehend befassen oder befasst haben. Je nach Themenbereich ließen sich auch andere Ansätze finden, die an der ein oder anderen Stelle zu einer abweichenden Strukturierung führen würden. Daher wird an dieser Stelle noch einmal wiederholt und betont, dass es sich bei den entwickelten Netzen um eine von mehreren möglichen Varianten handelt, den entsprechenden Themenbereich aus mathematischer Sicht korrekt zu strukturieren. Entscheidungsleitend war stets die Überlegung, dass die Netze schon zu Beginn der Sekundarstufe I zum Einsatz kommen und für diese Zielgruppe einfach, klar und übersichtlich gestaltet sein sollen.

Drittens führte die Orientierung an der genannten Zielgruppe noch dazu, dass jeder Schlüsselbegriff grundsätzlich nur eine Position in einem der Netze hat. Jeder Schlüsselbegriff wird einem Thema oder einem Oberbegriff zugeordnet, in dessen Begleitung er dann im Gehirn abgespeichert werden kann. Eine Ausnahme bilden die Stellen, an denen zwei Netze miteinander verknüpft werden: Dann taucht der Begriff, der als Bindeglied fungiert, in beiden Netzen auf. Entscheidend ist, wo und in welchem Netz ein Schlüsselbegriff eine sinnstiftende Position bekommt, d.h. eine Position, die aufgrund ihrer Lage eine Aussage über den entsprechenden Schlüsselbegriff und sein

Verhältnis bzw. seine Verbindungen zu anliegenden Schlüsselbegriffen liefert. Weniger wichtig ist, welche Positionen innerhalb welcher Netze für ihn möglich wären. Hier steht wieder das Anliegen im Fokus, die Klarheit und die Übersichtlichkeit der Netze zu bewahren.

In ähnlicher Weise war es auch nicht das Ziel, alle möglichen Verbindungen einzuzeichnen, die ein Schlüsselbegriff mit anderen eingehen könnte. Würde man das Ziel verfolgen, möglichst viele Verbindungen zwischen einzelnen Schlüsselbegriffen zu finden, so bekäme man ein extrem verwobenes Gebilde. Dieser Gedanke, wenngleich nicht ins Extrem gesteigert, kann allerdings im Unterricht weiter verfolgt werden. Denn die Atlaskarten können und sollen als Grundlage dafür dienen, inhaltliche Verbindungen zu finden und zu thematisieren. Dieser Aspekt wird ebenfalls in 4.4. noch einmal aufgegriffen.

3.4.5. Entscheidung für eine Weltkarte als Visualisierung

In 3.3. führte die Anwendung der Locimethode zur Entscheidung für eine Weltkarte als Grundlage, auf der die „Welt der Schulmathematik“ aufgebaut wird. Die Locimethode fordert eine vertraute Grundstruktur, in der Orte oder Plätze festgelegt sind oder bestimmt werden können, an denen bzw. mit denen die zu erlernenden Inhalte verknüpft oder abgelegt werden. Dabei sind die in 2.2.3. festgelegten Kriterien für die Orte entscheidend. Die Lernenden werden in den wenigsten Ländern, mit denen die mathematischen Inhalte verknüpft sind, persönlich gewesen sein. Allerdings lassen sich bekannte Strukturen, wie die Heimatstadt oder das Heimatland, Küstenstrukturen oder Seen, Gebirgsregionen oder Flussläufe die man kennt, auch auf dieselbe Struktur in einem anderen Land oder auf einem anderen Kontinent übertragen. Reisen, Erzählungen, Film- und Fotoaufnahme sowie alle möglichen Informationen, die die Lernenden zu einem Ort auf der Weltkarte haben, schaffen Anknüpfungspunkte für kreative und visuell anregende Bilder für die zu lernenden Inhalte. Es steigt das wahrgenommene Maß an Vertrautheit für die festgelegten Orte oder Plätze auf der Weltkarte. Diese Vertrautheit kann auch im Rahmen des Mathematikunterrichts durch entsprechende Informationen noch gefördert werden.

Eine weitere denkbare Grundlage könnte der menschliche Körper als vertraute Grundstruktur sein. Hier stellt sich allerdings die Frage, welche Entsprechungen für die in 3.3.1. erörterten 10 Hierarchieebenen gefunden werden können, und ob auf den einzelnen Hierarchieebenen die notwendigen Körperstrukturen vertraut genug sind, dass alle Schlüsselbegriffe verortet werden können.

Eine zweite Idee könnte es sein, eine Stadt als Grundstruktur zu wählen. Die Herausforderung ist hierbei, eine Stadt zu finden, die erstens groß genug ist, dass auch hier genügend Hierarchieebenen geschaffen werden können, und die zweitens so vertraut ist, dass die Lernenden sie als Grundstruktur verwenden können, und das nach Möglichkeit im gesamten deutschsprachigen Raum in gleicher Weise. Bei einer Weltkarte kann davon ausgegangen werden, dass sie für alle Lernenden der Sekundarstufe I einen gewissen und vergleichbaren Grad an Vertrautheit hervorruft oder diese Vertrautheit wie eben beschrieben gefördert werden kann.

Als weitere Alternative könnte auch eine frei erfundene, eigene „Welt der Schulmathematik" entwickelt werden, um die Netze visuell spannend einzubetten. Ein Beispiel, das die Bezeichnung Landkarte der Mathematik im Namen trägt, findet sich im Online-Angebot der Fachberatung Mathematik des Regierungsbezirks Düsseldorf (2020): „Die Advance-Organizer Landkarte der Mathematik". Hier werden die Themen der Jahrgänge 5 bis 10, die den Doppeljahrgängen zugeordnet und entsprechend farbig markiert sind, nach den vier Themen der Sekundarstufe II in vier Quadranten sortiert.

Den Hintergrund für diese Themensammlung bildet eine angedeutete Landkarte. Die Struktur der Landkarte bleibt jedoch ohne Einfluss oder Beziehung zur Struktur der Themen. Eine Ausrichtung oder Orientierung an den Himmelsrichtungen könnte durch die angedeutete Kompassrose beabsichtigt sein. Zudem beinhaltet der Begriff der Landkarte in diesem Beispiel die räumliche Gruppierung der Themen, aber keine weiteren räumlichen Beziehungen der Themen untereinander. Mit den einzelnen Themen ist jeweils ein Advance Organizer zu diesem Thema hinterlegt, der die entsprechenden Inhalte liefert und sie miteinander in Beziehung setzt (siehe 2.2.2.3.). Dabei taucht auf dieser Ebene die Landkarte im Hintergrund nicht mehr auf.

Noch in zwei weiteren Beispielen werden Themen aus der Mathematik visualisiert und ebenfalls durch räumliche Nähe inhaltlich miteinander in Beziehung gesetzt. So liefert die „Map of Mathematics" von Walliman (2017) auf einer Seite eine Übersicht über alle Themen und Inhalte der Mathematik und strukturiert sie nach verwandten Themenbereichen. „The Land of Middle Math" von Brückler (2003) ist eine Landkarte mit Meeren und Kontinenten, Inseln, Flüssen, Seen, Wäldern, Gebirgen und Ebenen, die jeweils für Themenbereiche, Themen und Inhalte der Mathematik stehen.

Alle drei Beispiele visualisieren die Inhalte der Mathematik, die beiden letztgenannten auch weit über die Themen der Sekundarstufe I hinaus. Alle drei schaffen eine Struktur, an der sich die Lernenden orientieren können, wenn sie selber eine Struktur für ihr eigenes Wissensnetz im Gehirn aufbauen. Allerdings kann bei allen drei Beispielen nicht von der Wirkweise der Locimethode (siehe 2.2.3.) ausgegangen werden. Das dritte Beispiel liefert als einziges eine Grundstruktur mit Orten oder Plätzen, mit denen die Inhalte visuell verknüpft sind. Um hier die Locimethode zu nutzen, müssen die Lernenden diese Grundstruktur aber zunächst kennenlernen und verinnerlichen, um dann im nächsten Schritt die Inhalte damit zu verknüpfen. Der Aufwand, um einen ähnlichen Nutzen zu erzeugen, wie ihn eine Weltkarte liefert, ist vermutlich deutlich höher.

Der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* ist gedacht als ein Material, mit dem sich die Lernenden im Lernprozess auseinandersetzen, das betrachtet, aber gleichzeitig auch bearbeitet werden soll. Mit ihm und in ihm sollen die Schlüsselbegriffe erforscht und erkundet, Verbindungen zwischen ihnen gezogen und Zusammenhänge erkannt, diskutiert und reflektiert werden.

4. Ausblick: Einsatz im Unterricht

In Kapitel 1 wurden zwei Aspekte beschrieben, um die es im Mathematikunterricht gehen sollte: zum einen die Verknüpfung der mathematischen Themen und Inhalte zu einem Wissensnetz, zum anderen die Entwicklung einer Vorstellung von der „Welt der Schulmathematik“. Wie in 1.2. dargestellt, erhalten beide Punkte im Unterricht in der Regel nicht die notwendige Aufmerksamkeit. Genau an dieser Stelle kommt nun der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* zum Einsatz: Er visualisiert für die Lernenden ein Wissensnetz, in dem die Themen und Inhalte des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I miteinander verbunden sind. Gleichzeitig liefert er durch seinen Aufbau und seine Struktur ein detailreiches Bild der „Welt der Schulmathematik“.

In diesem Kapitel wird der Blick auf die Unterrichtspraxis gerichtet: Basierend auf Theorien zum Unterricht werden Ideen und Möglichkeiten zum Einsatz des *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* vorgestellt. Es werden zunächst die Zielgruppen definiert und beschrieben, für die die Lernhilfe entwickelt wurde. Anknüpfend an Erkenntnisse zur Rolle von Lernintentionen und von Feedback auf das Lernen wird das Potenzial herausgearbeitet, das die Arbeit mit dem *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* bezogen auf diese beiden Konstrukte birgt. Einsteigend in die Diskussion über analoge und digitale Medien im Unterricht, werden Überlegungen formuliert, in welcher Form die Lernhilfe technisch umgesetzt werden kann. Aufbauend auf den Kernprozessen im mathematischen Erkenntnisgewinn (vgl. Leuders & Prediger 2012 sowie Leuders, Hußmann, Barzel & Prediger 2011), werden Szenarien dafür skizziert und reflektiert, wann die Lernhilfe gewinnbringend in den Lernprozess eingebunden werden kann.

4.1. Wer sind die Adressat*innen?

Als Adressat*innen für den *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* lassen sich zwei Gruppen definieren. Zum einen und wohl auch in erster Linie richtet er sich, wie in 1.2. formuliert, an die Lernenden auf ihrer Reise durch die „Welt der Schulmathematik“. Zum anderen gehören auch diejenigen, die die Lernenden begleiten, zur Zielgruppe. Das umfasst die Lehrenden in den Schulen genauso wie die Eltern und die Nachhilfelehrer*innen. Im Folgenden werden die beiden Adressat*innengruppen getrennt voneinander betrachtet und die jeweilige Verwendung des Atlas skizziert.

4.1.1. Die Lernenden

Grundlegend ist, dass jede*r Lernende ihren oder seinen eigenen *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* hat, der während des Arbeitens im Rahmen des Mathematikunterrichts ein ständiger Begleiter ist. Vergleichbar dem in 3.4. erwähnten Diercke Weltatlas (2015) der Geografie, soll auch der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* immer wieder zur Hand genommen werden, wenn es darum geht, sich in den Inhalten der Schulmathematik zurechtzufinden. So hat der oder die Lernende im eigenen Lernprozess stets die Möglichkeit, durch den Blick auf die entsprechende Karte den aktuellen Inhalt bzw. ein momentan bearbeitetes Detail in eine übergreifendere Struktur aller verwandten und verbundenen Inhalte einzubetten. Neue Inhalte können an bereits bekannte angeknüpft oder die Schritte zu weiteren Themen geplant und festgelegt werden. So findet mit der Zeit eine immer stärkere Vernetzung der gelernten Inhalte statt, und es wird ein immer tieferes Verständnis für die „Welt der Schulmathematik" entwickelt.

Die Arbeit mit dem *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* ermöglicht den Blick von oben, aus einer Art Vogelperspektive, auf den eigenen Lernprozess und die damit verbundenen Erkenntnisse, und zwar vor, während und nach einzelnen Lernschritten. Hier geht es um die Reflexion des eigenen Lernens und um die Kommunikation über erlernte Inhalte. Beides geschieht zumeist im Austausch mit anderen. In Kapitel 1 wurde als ein Ziel von Schule definiert, dass die Schüler*innen zu Gestalter*innen des eigenen Lernens werden sollen (vgl. SenBJF & MBJS 2020). Das geschieht als Prozess, in dem die Freiheit und damit auch die Verantwortung für das eigene Lernen wachsen.

4.1.2. Die Lernbegleiter*innen

In diesem Abschnitt geht es um diejenigen, die die oder den Lernende*n auf ihrem oder seinem Weg durch die Schulmathematik begleiten. Auch für sie hat der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* mehrere Funktionen.

Er gibt ihnen einen Überblick über die zu erlernenden Themen und Inhalte und stellt damit eine anschauliche Ergänzung oder sogar eine Alternative zur Nutzung der Lehrpläne dar. Der hierarchische Aufbau der Netze, wie er im Unterkapitel 3.2. dargestellt ist, kann bei der Planung von Unterricht Impulse dafür geben, welche Inhalte sich wie vernetzen lassen, und wo man von einem Thema ausgehend weiter anknüpfen kann. Von dieser Orientierung profitieren auch Eltern und Nachhilfe-lehrer*innen, die oftmals keine besondere Expertise für die Inhalte der Mathematik mitbringen, aber trotzdem die Lernenden mit ihren aktuellen Fragen und Schwierigkeiten abholen wollen, um sie bei ihrem Erkenntnisgewinn zu unterstützen.

In diesem Sinne bieten die Karten aus 3.3. eine Visualisierung an, die in Gesprächen mit den Lernenden als gemeinsame Grundlage verwendet werden kann. Das können Fachgespräche über die Inhalte sein, in denen es um die nun bereits mehrfach erwähnte Vernetzung oder Verortung in der „Welt der Schulmathematik" geht. Ebenso können die Karten als Basis für Feedback über zurückliegende Lernschritte oder zur Planung der weiteren Lernreise genutzt werden. Konkret können Städte festgelegt werden, die innerhalb eines Landes nacheinander bereist werden sollen, oder welche vielleicht auf Grund des momentanen Anforderungsniveaus gar nicht von Interesse sind. Es kann auch in der Rückschau ein Land betrachtet und dazu thematisiert werden, welche Bundesländer intensiver erkundet wurden und in welchen Regionen erst wenige Besuche stattgefunden haben oder welche Städte noch unbekannt geblieben sind.

Diese Funktion des *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* als Kommunikationsmedium zwischen Lernenden und Lernbegleiter*innen wird im nächsten Unterkapitel noch eingehender betrachtet.

4.2. Welchem Zweck in der Kommunikation kann die Lernhilfe dienen?

Hattie (2013) liefert zwei Aspekte als Beiträge zum Lernen, die in diesem Abschnitt genauer beleuchtet werden: Er betont die Wichtigkeit von Lernintentionen („learning intentions" als Faktor innerhalb der Kategorie „Teaching strategies") für den Lernerfolg und die Bedeutung von Feedback („feedback" als Faktor innerhalb der Kategorie „Teaching strategies") für die Lernmotivation[3]. Beides sind Punkte, die im Austausch zwischen Lernenden und ihren Begleiter*innen thematisiert und formuliert werden. Für diesen Austausch bildet der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* ein unterstützendes Kommunikationsmedium, mit dessen Hilfe konkrete Vereinbarungen besonders gut veranschaulicht und festgehalten werden können.

Es folgt ein kurzer Einblick in die Ergebnisse von Hatties Metaanalyse (2013) zu beiden Aspekten, um deren Bedeutsamkeit für das Lernen herauszuarbeiten. In beiden Fällen wird auch die jeweilige Funktionsweise des Atlas in diesem Kontext berücksichtigt.

---

[3] Die Zuordnung des englischen Originalbegriffs erfolgte mit Hilfe der folgenden Internetquelle: http://www.visiblelearningmetax.com (letzter Zugriff am 04.09.2020 um 21:32)

Der Autor definiert zunächst Lernintentionen als das, „was wir im Hinblick auf den Fortschritt der Schülerinnen und Schüler innerhalb einer bestimmten Unterrichtseinheit oder Unterrichtsstunde bezüglich Fähigkeiten, Wissen, Einstellungen und Werten zu erreichen versuchen“ (Hattie 2013, S. 194). Diese müssen klar sein, „damit die Lernenden wissen, was sie in der Unterrichtsstunde lernen sollen“ (Hattie 2013, S. 194). Gleichzeitig sieht er Lernintentionen als „Basis für die Bewertung dessen, was die Lernenden gelernt haben“ (Hattie 2013, S. 194). In diesem Kontext unterstreicht er, dass es darum geht, „angemessen anspruchsvolle Ziele zu setzen, eine Selbstverpflichtung […] zur Zielerreichung zu initiieren und die Absicht zu wecken, Strategien zur Zielerreichung umzusetzen“ (Hattie 2013, S. 195). Wenn Hattie (2013) von „klaren Zielen, Lernintentionen und Erfolgskriterien“ spricht, dann meint er, dass „Lernende ein angemessenes Verständnis dafür haben, wo sie sich befinden, wo sie hingehen, wie es dort aussehen wird und wohin sie von dort weitergehen werden“ (Hattie 2013, S. 197). Diesen Gedanken folgend, besteht das Potenzial der Atlaskarten darin, als Grundlage zu dienen, auf der Lernintentionen diskutiert, festgelegt und festgehalten sowie im Anschluss überprüft werden können.

Bei Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl (2004) findet sich eine allgemeine Aussage allgemein zu den Mapping-Techniken, die an dieser Stelle, an der es um die Kommunikation zwischen den Adressat*innen der entwickelten Lernhilfe geht, ebenfalls gut hineinpasst: „Mapping-Techniken erleichtern die Herstellung eines gemeinsamen Verständnisses […] Man ist dazu gezwungen, das eigene Vorverständnis, die eigene Perspektive zu erklären und zu rechtfertigen“ (Nückles, Gurlitt, Pabst & Renkl 2004, S. 11). Hier wird ein zentraler Gedanke formuliert, der den Kern von Kommunikation erfasst: Es geht darum, sich als Sender einer Nachricht so verständlich zu machen und sich so klar auszudrücken, dass die eigenen Überlegungen für den Empfänger deutlich werden. Das kann gerade für Lernende eine zusätzliche Herausforderung darstellen, wenn das neu Gelernte erklärt und in eigene Worte gefasst werden soll. Hier liefert der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* strukturelle und inhaltliche Impulse.

Der zweite Aspekt, der mit Hilfe der Atlaskarten greifbar gemacht und belegt werden kann und der einen positiven Effekt auf die Lernmotivation hat, ist das Feedback. Hattie (2013) definiert Feedback als eine Information, „die von einem Akteur (z.B. Lehrperson, Peer, Buch, Eltern oder die eigene Erfahrung) über Aspekte der eigenen Leistung oder des eigenen Verstehens gegeben wird“ (Hattie 2013, S. 206). Es ist damit eine „Folge der Leistung“ (Hattie 2013, S. 207).

Um die Bedeutsamkeit von Feedback herauszuarbeiten, bezieht sich Hattie auf Baker, Gersten und Lee (2002), die auf das wiederkehrende Ergebnis hinweisen, „dass ein Informieren der Lehrpersonen und Lernenden über den jeweiligen Lernstand die mathematische Lernleistung deutlich steigert“ (Hattie 2013, S. 172). An einer zweiten Stelle geht es darum, „dass Feedback zu den stärksten Einflüssen auf die Leistung zählt“ (Hattie 2013, S. 206). Dabei unterstreicht Hattie (2013), „dass dasjenige Feedback entscheidend ist, das die Lernenden erhalten, und auf das sie reagieren“ (Hattie 2013, S. 207).

Es ist ihm wichtig zu zeigen, „dass der Hauptzweck von Feedback darin besteht, die Diskrepanzen zwischen dem aktuellen Verständnis und der Leistung auf der einen Seite und einer Lernintention oder einem Ziel auf der anderen Seite zu verringern“ (Hattie 2013, S. 208). Laut dieses Modells beantwortet effektives Feedback drei Fragen: „‚Wohin gehe ich?‘ (Lernintentionen/Ziele), ‚Wie komme ich voran?‘ (Selbstbewertung und Selbsteinschätzung) und ‚Wohin geht es danach?‘ (Fortschreiten, neue Ziele). Ein ideales Lernumfeld bzw. eine ideale Lernerfahrung ist dann gegeben, wenn sowohl Lehrpersonen als auch Lernende Antworten auf alle diese Fragen suchen“ (Hattie 2013, S. 210). Hier kann der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* als Gesprächsgrundlage einen entscheidenden Beitrag leisten: Mit seiner Hilfe können Antworten auf die eben gestellten Fragen gefunden und an Schlüsselbegriffen festgemacht werden. Hattie (2013) bezieht sich auf Sadler (1989), wenn er schreibt, dass „es das Schließen der Lücke zwischen dem Ort, wo die Lernenden stehen und dem Ort, wo sie hinwollen [ist], das zur Wirksamkeit des Feedbacks führt“ (Hattie 2013, S. 210).

In diesem Unterkapitel wurde das Potenzial der Arbeit mit dem *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* bezogen auf zwei lernförderliche Aspekte in der Interaktion zwischen Lernenden und Lernbegleiter*innen hervorgehoben. In den nächsten beiden Unterkapiteln folgen Überlegungen, wie der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* im Unterricht zum Einsatz kommen kann.

4.3. Analog oder digital – Wie kann der Atlas realisiert werden?

In diesem Unterkapitel stehen die Art der Präsentation bzw. die Gestaltung des neuen Materials im Fokus. Es werden zwei Varianten in den Blick genommen: die analoge und die digitale Option. Sie sollen hier nicht gegeneinander stehen und in ihren Vorteilen abgewogen werden. Vielmehr werden zwei Möglichkeiten skizziert und charakterisiert, die durchaus auch nebeneinander existieren können.

Als analoges Medium orientiert sich der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I*, wie bereits an zwei anderen Stellen im Text aufgegriffen, am Diercke Weltatlas (2015) in seiner bekanntesten Form. In diesem Fall erscheint er gebunden als Buch, in dem jede Karte eine Seite oder eine Doppelseite ausfüllt. In Kapitel 3.3.

wurde bereits die Aufbereitung der in 3.1. und 3.2. beschriebenen und miteinander vernetzten Inhalte eingehend thematisiert. Das Ergebnis sind fünf Kartentypen (vgl. 3.3.). Aus jedem der in 3.2. entwickelten Netze entsteht eine Karte eines dieser Typen. Bücher sind nach wie vor ein zentrales und übliches Material für die Arbeit im Unterricht. Der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* ist bewusst für die Hand des oder der Lernenden entwickelt. Jede*r soll sein oder ihr eigenes Material auf dem Tisch liegen haben, um die eigene „Lernreise" zu planen, sich unterwegs immer wieder zu orientieren oder die einzelnen Schritte zu dokumentieren. Mit den Karten soll gearbeitet werden. Deshalb ist es im analogen Format z.B. möglich, einzelne Aspekte wie bestimmte Regionen oder Städte hervorzuheben oder Stichworte zu ergänzen.

Eine zweite denkbare Variante ist der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* als digitales Medium. Auch dieses bietet eine gewisse Offenheit: Die Karten bzw. die einzelnen Informationen auf den Karten können z.B. mit Hyperlinks ergänzt werden. Die Karten bilden dann die Oberfläche, von der aus man inhaltlich in die Tiefe gehen kann. Hier können die Schlüsselbegriffe noch weiter ausdifferenziert und beschrieben werden. Ebenso ist es möglich, Materialien zur Erarbeitung, zum Sichern oder Systematisieren oder auch zum Vernetzen der entsprechenden Themen oder Inhalte zu verankern (vgl. dazu 4.4.). Weiter können Verlinkungen zwischen einzelnen Schlüsselbegriffen hinterlegt werden, die die Lernenden auf ihren Lernwegen lenken. Ebenfalls an einer solchen Oberfläche können die Lernenden eigene Arbeitsprodukte oder Dokumentationen an der entsprechenden Stelle speichern. Damit liefern die Karten zusätzlich die Möglichkeit, auch den Aspekt der Bewertung verorten zu können – sei es über festgelegte und an entsprechenden Stellen verankerte Bewertungskriterien, oder sei es die Dokumentation von Bewertungen im Rahmen der „Lernreise".

Vieles ist möglich. Die Beschreibungen werden an dieser Stelle nicht noch weiter ausgeführt. Sie sollen als Impulse dienen, eine geeignete Form zu finden, in der der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* um- und dann im jeweiligen Unterricht eingesetzt werden kann. Entscheidend ist dabei, dass eine möglichst gute Passung gefunden wird mit den anderen Medien, die im Unterricht zum Einsatz kommen.

4.4. In welcher Phase des Unterrichts kann das Instrument zum Einsatz kommen?

In diesem Unterkapitel geht es um die Frage, wann der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* im Unterricht eingesetzt werden kann. Um einen Rahmen zu schaffen, in den mögliche Einsatzszenarien eingebettet werden können, wird ein Modell zur Strukturierung von Unterricht verwendet. Allgemein ist es das Ziel solcher

Modelle, „lernpsychologische und fachdidaktische Theorieelemente so miteinander […] [zu] verbinden, dass sie handlungswirksam für die Planung, Gestaltung und Erforschung von Unterricht werden können“ (Prediger, Hußmann, Leuders & Barzel 2014, S. 3). In Anlehnung an Leuders und Prediger (2012) wird in der vorliegenden Arbeit das Modell der Kernprozesse verwendet. Wenn man den Ausführungen von Prediger et al. (2014) folgt, liefert dieser Ansatz eine geeignete und flexible Struktur für Unterricht, die sich an den Lernenden und ihren Denkhandlungen im Erkenntnisprozess orientiert und situationsangemessene didaktische Entscheidungen begründen lässt (vgl. Prediger et al. 2014, S. 3).

Dabei wird der Unterricht als Prozess mathematischen Erkenntnisgewinns in Phasen untergliedert. Die genannten Autor*innen betonen bei ihrem Ansatz – und grenzen sich damit zugleich von klassischen Phasenmodellen ab –, dass die Abfolge der definierten Phasen flexibel zu verstehen ist. Das verdeutlichen sie, indem sie die Bezeichnung „Kernprozesse“ wählen (vgl. Leuders & Prediger 2012, S. 40). Als solche definieren sie „fachspezifisch charakterisierbare Situationen mit unterschiedlicher epistemologischer Qualität“ (Leuders & Prediger 2012, S. 39). Wie auch Leuders et al. (2011) unterscheiden Leuders & Prediger (2012) die folgenden fünf Kernprozesse (Leuders & Prediger 2012, S. 39 f.):

- „der Kernprozess des Anknüpfens an Vorerfahrungen und Interessen,
- der Kernprozess der Erkundens neuer Zusammenhänge,
- der Kernprozess des Austauschens unterschiedlicher Wege,
- der Kernprozess des Ordnens als Systematisieren und Sichern,
- der Kernprozess des Vertiefens durch Üben und Wiederholen“.

Mit der Unterscheidung der fünf Phasen können der Einsatz und die Anwendung des *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* noch differenzierter vorgenommen werden. Daher werden alle fünf Kernprozesse verwendet, auch wenn in anderen und späteren Arbeiten zu Differenzierungsansätzen die fünf Phasen zu vier (vgl. Hußmann, Barzel, Leuders & Prediger 2013; Barzel, Hußmann, Leuders, Prediger 2011; Prediger, Leuders, Barzel & Hußmann 2013) bzw. zu drei (vgl. Prediger et al. 2014) zusammengefasst wurden. Der Kernprozess des Austauschens unterschiedlicher Wege wird hier, in Anlehnung an das KOSIMA-Unterrichtskonzept, beim Erkunden integriert (vgl. Barzel et al. 2011, zitiert nach Leuders & Prediger 2012, S. 50). Im zweiten Fall verbindet der erste Kernprozess des Erkundens das Anknüpfen an Vorerfahrungen mit dem Erarbeiten neuer Zusammenhänge, was ebenfalls das Austauschen unterschiedlicher Wege umfasst (vgl. Prediger et al. 2014, S. 3).

4.4.1. Beim Anknüpfen an Vorerfahrungen und Interessen

Im Rahmen dieses ersten Kernprozesses hat der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* die Funktion, zu den zu erarbeitenden Inhalten all jene weiteren zu liefern, die hiermit verbunden sind, und die so potenzielles Vorwissen darstellen. Das Augenmerk liegt dabei auf den angrenzenden bzw. verknüpften Schlüsselbegriffen, die Vorwissen repräsentieren, was eine Form der Vorerfahrung ist. Dieses Vorwissen ergänzt den von Leuders und Prediger (2012) genannten „Einbezug subjektiver Interessen", mit denen sie sich auf Prenzel (1988) beziehen (Leuders & Prediger 2012, S. 40). Es sollen im Unterricht „gezielt diejenigen Vorerfahrungen aktiviert [werden], an welche sich eine fachlich tragfähige Anknüpfung lohnt" (Reinmann-Rothmeier & Mandl 2001, zitiert nach Leuders und Prediger 2012, S. 40).

Warum das Anknüpfen an Vorerfahrungen und mit Hilfe des Atlas an Vorwissen lernförderlich wirkt, wurde unter 2.1. mit dem Blick auf Gedächtnisprozesse und Gedächtnissysteme herausgearbeitet: Die Aufnahme und die Speicherung neuer Informationen wird durch bereits im Gehirn verankerte Informationen moderiert und mitbestimmt. Zum einen erfolgt das über die zentrale Rolle der Aufmerksamkeit, die überhaupt erst ermöglicht, dass eine bestimmte Information ins Gehirn gelangen kann (vgl. 2.1.1.2. und 2.1.1.3.). Mit Hilfe der Karten kann die Aufmerksamkeit auf die zu erarbeitenden Inhalte, repräsentiert beispielsweise als Städte, Regionen, Bundesländer etc. gelenkt werden. Zum anderen werden, wie in 2.1.2. beschrieben, inhaltlich verbundene Informationen auch gemeinsam gespeichert. So kann eine Aktivierung des Vorwissens die Organisation von Wissen erleichtern und verbessern. Bei den Netzwerkmetaphern unter 2.1.2.3. wurden Bilder dafür formuliert, wie man sich das vorstellen kann.

Im lernpsychologischen Rahmen unter 2.2. wurde zudem bereits ein zentraler Gedanke konstruktivistischer Lerntheorien aufgegriffen, den auch Leuders und Prediger (2012) in diesem Kontext nennen, um die Wichtigkeit des Anknüpfens herauszuarbeiten: Demnach erfolgt jede Wahrnehmung „auf Basis bisher gesammelter Erfahrungen" (Glasersfeld 1991, zitiert nach Leuders und Prediger 2012, S. 40). Menschen konstruieren „neues Wissen, indem sie neue Erfahrungen in existierende kognitive Strukturen integrieren und zu bisherigen Erfahrungen situationsbezogen in Beziehung setzen" (Glasersfeld 1991, zitiert nach Leuders und Prediger 2012, S. 40). Hier werden dieselben Gedanken, die eben unter der neuropsychologischen Perspektive formuliert wurden, nun aus Sicht der Lernpsychologie gefasst.

An Vorwissen anzuknüpfen, kann im Unterricht konkret durch drei Fragen angeregt werden:

- Wo war ich schon?

- Was erinnere ich, dort entdeckt, erkundet oder gelernt zu haben?
- Wohin kann ich von dort aus weiter gehen?

Dabei kann die erste Frage unterschiedlich weit gefasst sein. Sie kann auf verschiedenen der in 3.3. genannten Hierarchieebenen untersucht und unterschiedlich offen gestellt werden. Die zweite Frage birgt die Gefahr, bei einer negativen Antwort eher motivationshinderlich zu wirken, und muss daher entsprechend umsichtig begleitet werden. Auch bei der dritten Frage benötigen unterschiedliche Lernende vermutlich eine unterschiedlich enge Begleitung, um zu Punkten zu gelangen, die nach Leuders und Prediger (2012) „für die Weiterarbeit aus fachlicher Sicht fruchtbar gemacht werden können“ (Leuders und Prediger 2012, S. 41). Gallin und Ruf (1998) folgend soll in diesem Kernprozess eine „hinreichend offene Einstiegssituation den Schülerinnen und Schülern genügend Raum lassen für eine ‚individuelle Positionsbestimmung‘“ (Gallin & Ruf 1998, zitiert nach Leuders & Prediger 2012, S. 44).

4.4.2. Beim Erkunden neuer Zusammenhänge

Im Kernprozess des Erkundens neuer Zusammenhänge spielt der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* eine eher sekundäre Rolle. Er liefert eine Zusammenschau der wichtigen Inhalte zu einem Thema und zeigt ihre Verbindungen untereinander auf. Die Erarbeitung des neuen Wissens und der Aufbau neuer mathematischer Konzepte erfolgt, wie Leuders und Prediger (2012) es formulieren, in einer „substantiellen Lernumgebung“ (Wittmann, 1995, zitiert nach Leuders & Prediger 2012, S. 44), die als „kognitiv aktivierend auf verschiedenen Zielebenen zugleich“ beschrieben ist (Leuders & Holzäpfel, 2011, zitiert nach Leuders & Prediger 2012, S. 44). In einer solchen Lernumgebung ist der Atlas für die Lernenden wohl eher ein Randprodukt. Ihre Aufmerksamkeit liegt auf der Bearbeitung gestellter Erkundungsaufträge und auf dem Entdecken neuer Inhalte.

Bezogen auf diesen Kernprozess, liefert die entwickelte Lernhilfe vielleicht einen größeren Beitrag für diejenigen, die das Lernen begleiten. Sie können die Karten nutzen, um die miteinander in Verbindung stehenden Inhalte zu einem Thema auszumachen, Kernideen dazu zu entwickeln sowie Aufträge und Aufgaben zu formulieren.

4.4.3. Beim Austauschen über unterschiedliche Wege

Ähnlich wie beim Kernprozess des Erkundens neuer Zusammenhänge spielt der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* auch beim Austauschen für die Lernenden eher eine nebengeordnete Rolle. Mit den Schlüsselbegriffen kann er dabei unterstützen, Formulierungen zu finden, die das eigene Vorgehen und die entwickelten

Wege beschreiben. Es geht in dieser Phase um eine „intensive Reflexion“ und darum, den „Facettenreichtum an Zugangsweisen, Repräsentationen und Strategien zu erleben, zu vergleichen und zu reflektieren“ (Leuders & Prediger 2012, S. 51). Dafür benötigen die Lernenden eine Sprache, die dem Anspruch an Verwendung der Fachsprache gerecht wird und dabei der Lerngruppe verständlich ist.

In diesem Prozess des Austauschens können „fachlich gehaltvolle, relevante Unterscheidungen“ (Leuders & Prediger 2012, S. 51) mit Hilfe der Orte auf den Karten verbalisiert werden.

4.4.4. Beim Ordnen als Systematisieren und Sichern

Im vierten Kernprozess des Ordnens geht es darum, durch Systematisieren und Sichern aus den neu erworbenen Inhalten nachhaltig Wissen aufzubauen und zu festigen (vgl. Leuders und Prediger 2012, S. 53). Hier sollen gemachte Erfahrungen reflektiert, eigene Entdeckungen regularisiert, einzelne Wissensbausteine vernetzt und das neu Gelernte dokumentiert werden (vgl. Leuders und Prediger 2012, S. 53).

Die Autor*innen formulieren zwei Anforderungen an die Qualität dieses Kernprozesses (vgl. Leuders und Prediger 2012, S. 54): Zum einen sollen die Inhalte so ausgewählt werden, dass ein möglichst breites Wissensprofil gesichert wird (vgl. Prediger et al. 2014, S. 7). Das umfasst „alle Arten prozeduralen und konzeptuellen Wissens“ (Prediger et al. 2014, S. 7), womit beispielsweise Begriffe, Sätze, Verfahren und Strategien gemeint sind und nicht nur Rechenregeln (vgl. Prediger, et al. 2014, S. 7). Und es schließt ebenfalls mehrere Facetten mit ein, wie beispielsweise „explizit[e] Formulierung[en], Vorstellungen und Darstellungen, [und] Abgrenzungsbeispiele“ (Prediger et al. 2014, S. 7). Zum anderen sollen die Lernenden mit einer möglichst hohen Eigenaktivität einbezogen werden (vgl. Leuders und Prediger 2012, S. 54).

Der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* kann für beide Aspekte gewinnbringend eingesetzt werden: Alle wichtigen Begriffe und Sätze tauchen auf einer der Karten auf. Hier findet sich eine Sammlung, deren Elemente bereits in Beziehung gesetzt wurden. Sie bietet damit eine Grundlage, auf der oder mit deren Hilfe diese Vernetzungen reflektiert werden können. Auch das Regularisieren dessen, was von den Schüler*innen erarbeitet wurde, kann auf der Basis dessen, was auf den Karten sichtbar ist, stattfinden (vgl. Gallin & Ruf 1998, zitiert nach Prediger et al. 2014, S. 7). Die Lernenden können eigene Erkenntnisse und Vorstellungen oder Abgrenzungsbeispiele und Strategien auf den Karten oder in Bezug zu den Karten dokumentieren und so ihre individuelle, auf die eigenen Bedürfnisse zugeschnittene Variante des Atlas schaffen. In der Auseinandersetzung mit den auf den Karten verwendeten Schlüsselbegriffen können die eigenen Gedanken noch weiter ausgeschärft werden. In dieser

Phase ist es möglich, die Lernenden gerade durch die Arbeit mit und an den eigenen Karten aktiv einzubeziehen und zu beteiligen, was die Qualität dieses Kernprozesses, wie eben formuliert, entsprechend steigert (vgl. Leuders und Prediger 2012, S. 54).

Hier also kommt dem *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* wieder eine wichtigere Rolle zu: Er ist wesentlicher Bestandteil der Gespräche und Grundlage für die eben beschriebenen Tätigkeiten.

4.4.5. Beim Vertiefen durch Üben und Wiederholen

Im fünften Kernprozess ändert sich das wieder: Hier ähnelt die Funktion der Lernhilfe eher seiner Rolle beim Erarbeiten und beim Austauschen. In dieser Phase geht es darum, die erworbenen Kompetenzen zu konsolidieren und die Wissensbestände zu flexibilisieren (vgl. Leuders und Prediger 2012, S. 56). Das wird unterstützt und gefördert, wenn beim Üben und beim Anwenden der entsprechende Wissensinhalt transparent wird und dieser im Rahmen der bekannten Strukturen auf den Karten verortet werden kann. Den Ausführungen zu den Gedächtnisprozessen (vgl. 2.1.1.2.) folgend und in der Tradition bereits existierender Lernhilfen (vgl. 2.2.2.), wird das Erinnern eines Lösungsweges oder eines Zusammenhangs erleichtert, wenn die Orte auf den Karten im Atlas als Abrufhilfen fungieren können.

Damit wurde in diesem vierten Kapitel ein Ausblick auf den Einsatz des *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* in der Praxis gegeben. Im nächsten Kapitel folgt zunächst das Fazit zur vorliegenden Forschungsarbeit. Im Anschluss werden Forschungsfragen entwickelt, die sich zum einen als theoretischer Forschungsausblick aus der Diskussion der praktischen Umsetzung in 3.4. ergeben. Zum anderen werden Fragen formuliert, mit denen sich die skizzierten Ideen für den Einsatz im Unterricht weiter untersuchen lassen.

5. Fazit und weiterführende Forschungsfragen

Das Ziel der vorliegenden Forschungsarbeit war es, ein Instrument zu schaffen, das den Lernenden hilft, ein Bild von der „Welt der Mathematik“ zu entwickeln – der Mathematik als deduktiv geordneter Welt eigener Art (vgl. Winter 1995, S. 37) und der Mathematik als „Beziehungsgefüge“ (Vollrath & Roth 2012, S. 26). Damit soll die in Kapitel 1 dargestellte Lücke geschlossen werden, die sich im Unterrichtsalltag auftut, wenn in der Regel der Blick nur unzureichend auf das große Ganze aller mathematischen Inhalte der Sekundarstufe I gelenkt wird. Denn genau dieser Blick ist entscheidend, um zu erkennen, wie die Inhalte miteinander in Beziehung stehen. Er soll den Lernenden Orientierung geben und über ein vernetztes und vernetzendes Lernen zu einem tieferen Verständnis der Inhalte führen.

Um diese Lernhilfe zu entwickeln, wurden die beiden folgenden Forschungsfragen formuliert:

1. Wie lassen sich die Inhalte der Mathematik der Sekundarstufe I so in einem Netz darstellen, dass
   a. die gezogenen Verbindungen mathematisch korrekt sind und
   b. durch sie die existierende mathematische Struktur deutlich wird?
2. Wie kann diese Struktur in einer Lernhilfe visualisiert werden, die auf die Funktionsweise des Gehirns abgestimmt ist und in ihrem Aufbau das Lernen, Speichern und Erinnern mathematischer Inhalte möglichst gut unterstützt?

In Kapitel 2 wurde zunächst die zweite Forschungsfrage beantwortet. Dazu wurden Erkenntnisse aus den Neurowissenschaften zur Funktionsweise des Gehirns zusammengetragen (vgl. 2.1.) und mit Erkenntnissen aus der Lernpsychologie zum Aufbau von Lernhilfen (vgl. 2.2.) zusammengeführt. In 2.3.2. wurden daraus Kriterien für die Struktur der zu entwickelnden Lernhilfe abgeleitet, die anschließend in der praktischen Umsetzung zur Anwendung kamen.

In den ersten beiden Unterkapiteln von Kapitel 3 stand die Beantwortung der ersten Forschungsfrage im Fokus. Zunächst wurden basierend auf ausgewählten Lehrplänen alle Inhalte der Mathematik der Sekundarstufe I gesammelt und in Begriffslisten zusammengeführt (vgl. 3.1.). In 3.2. wurden inhaltliche Verbindungen zwischen diesen Inhalten erarbeitet und zu Netzen zusammengefügt, die so die mathematische Struktur der entsprechenden Themenbereiche abbilden. Beides wurde mit Hilfe von Strukturierungsansätzen von Autor*innen aus der Fachwissenschaft auf mathematische Korrektheit geprüft.

In 3.3. kam dann noch einmal die zweite Forschungsfrage zum Tragen: Hier wurde eine Visualisierung für die entwickelten Netze vorgestellt, die auf eine zusätzliche Steigerung der Gedächtnisleistung abzielt. Die Schritte zur Beantwortung dieser beiden Fragen führten zum *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I*.

Die Idee der vorliegenden Forschungsarbeit wurde von einem zentralen Gedanken für das Lernen in der Schule eingerahmt: Die Lernenden sollen zu Gestaltenden des eigenen Lebens und damit auch des eigenen Lernens werden. Sie sollen lernen, mehr Freiheit und damit auch mehr Verantwortung für das eigene Lernen zu übernehmen. Das soll im Rahmen der Schulzeit entwickelt und gefördert werden (vgl. SenBJF & MBJS 2020). Dieser Gedanke wurde in Kapitel 4 etwas enger gefasst und auf das Lernen im Mathematikunterricht konzentriert: Hier wurden Ideen und Möglichkeiten formuliert, wie das geschaffene Instrument im Unterricht eingesetzt werden kann und damit beide Punkte – mehr Freiheit und auch mehr Verantwortung für das individuelle Lernen – in die Hand der Lernenden gelangen können.

Die vorliegende Forschungsarbeit reiht sich, wie in 1.2. formuliert, in das Forschungsfeld der Mathematikdidaktik ein, in dem unter anderem die Entwicklung und Erforschung von Lernmaterial betrieben wird. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Entwicklung einer Lernhilfe. Mögliche Folgearbeiten können und sollen darin bestehen, den *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* als Lernmaterial zu erforschen. Dazu wird im Folgenden ein Forschungsausblick in zwei Richtungen gegeben.

In Unterkapitel 3.4. wurden die unternommenen Schritte zur Entwicklung des *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* reflektiert und getroffene Entscheidungen in Abwägung mit möglichen Alternativen diskutiert. Aus diesem Vorgehen werden nun weiterführende Forschungsfragen abgeleitet, die die neu entstandene Lernhilfe genauer untersuchen. Anknüpfend an die Überlegungen aus Kapitel 4, werden im zweiten Unterkapitel Forschungsfragen zum Einsatz im Unterricht entwickelt.

5.1. Forschungsfragen zur entwickelten Lernhilfe

Ein erstes mögliches Forschungsfeld ergibt sich aus der Sammlung der Inhalte, um die es im Rahmen des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I geht (vgl. 3.1.). Dabei kann eine erste Fragestellung in Richtung der Vollständigkeit der Menge aller Inhalte zielen: Mittels einer qualitativen Inhaltsanalyse können auch die Lehrpläne der verbleibenden 13 Bundesländer daraufhin durchleuchtet werden, ob sich noch Inhalte finden lassen, die bislang nicht in den Begriffslisten und damit nicht in den Netzen auftauchen.

Eine zweite Fragestellung kann sich mit der Entwicklung eines anderssprachigen *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* beschäftigen. In einem ersten Schritt werden Länder eines weiteren Sprachraumes festgelegt, die diesen dann beispielhaft vertreten. Analog zum Vorgehen in 3.1. werden deren gesetzliche Planungsgrundlagen analysiert und alle Inhalte wieder in Schlüsselbegriffen festgehalten. In einem dritten Schritt können noch die Inhalte in den beiden Sprachen verglichen werden, um mögliche Unterschiede festzuhalten. Ziel dieser Fragestellung ist es, keine reine Übersetzung des *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* anzufertigen, sondern ein Instrument zu entwickeln, das zugeschnitten ist auf die jeweils geltenden Anforderungen in den gewählten Ländern.

Ein zweites mögliches Forschungsfeld setzt bei der Wahl der Schlüsselbegriffe an. Wie in 3.4. beschrieben, war es das Ziel, sie so zu formulieren, dass sie selbsterklärend sind. Interessant wäre, das noch genauer empirisch zu beleuchten. Mittels einer Befragung kann sowohl bei den Lernenden als auch bei den Lehrenden analysiert werden, was sich für die entsprechende Personengruppe hinter den Schlüsselbegriffen verbirgt. Aufschlussreich wäre hierbei, Gemeinsamkeiten und Unterschiede herauszuarbeiten und zu benennen.

Zudem wurde in 3.1. einleitend Bezug genommen auf ein dreidimensionales Modell mathematischer Kompetenzen (vgl. SenBJF & MBJS 2020, S. 5). Dieses Modell betrachtet das, was im Rahmen des Mathematikunterrichts gelernt werden soll, in drei Dimensionen. Im *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* wird bislang nur die Dimension der mathematischen Inhalte abgebildet. In diesem Zusammenhang kann eine weitere eher qualitative Forschungs- oder Entwicklungsaufgabe darin bestehen, auch die beiden anderen Dimensionen zu integrieren. Es geht darum, eine Visualisierung oder eine Umsetzung für die prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen zu finden, die ihren Charakter fasst und sich mit der Struktur und der Funktionsweise des *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* vereinbaren lässt. In gleicher Weise geht es darum, auch die Anforderungsbereiche mit einzubinden.

Darüber hinaus bieten die in 3.2. entwickelten Netze Ansatzpunkte für ein weiteres Forschungsfeld: Hier kann zum einen mit einem stoffdidaktischen Ansatz die Struktur in den Blick genommen werden. Zu einzelnen Themen können Autor*innen gesucht werden, die andere Aspekte beleuchten, oder die die Themen in einer anderen Art und Weise untergliedern und strukturieren. Auf Basis dieser Ansätze können neue Netze entwickelt und diese im Unterschied zu den bestehenden betrachtet werden. Dabei geht es immer darum, die Verständlichkeit und die Nachvollziehbarkeit für die formulierte Zielgruppe im Blick zu behalten und zu überprüfen.

Im selben Forschungsfeld können die gerade angesprochene Verständlichkeit und Nachvollziehbarkeit der gezogenen Verbindungen zwischen den Schlüsselbegriffen für die oder den Lernende*n Ziel der Forschung werden. Es geht hierbei darum, eine Forschungsfrage zu entwickeln und eine Methode zu finden, die untersuchen lässt, ob die gewählten Verknüpfungen für die einzelnen Lernenden wie in 3.4. formuliert sinnstiftend sind oder nicht.

5.2. Forschungsfragen zum Einsatz im Unterricht

Zum Schluss wird der Fokus auf den Einsatz des *Atlas der Schulmathematik der Sekundarstufe I* im Unterricht gerichtet. Allgemein geht es hier um die Frage, ob die neu entwickelte Lernhilfe das erfüllt, was die Idee bei der Konzeption war: Fördert sie tatsächlich über die Strukturierung der Inhalte gelingendes Lernen? Dabei handelt es sich um eine lernpsychologische Fragestellung, deren Beantwortung sich aus den in diesem Forschungsbereich gängigen Methoden bedienen würde. In diesem Zusammenhang kann auch der Einfluss der Nutzung des *Atlas der Schulmathematik der Sekundarstufe I* auf Variablen, die einen zentralen Einfluss auf das Lernen ausüben – wie beispielsweise die Motivation –, in den Blick genommen werden.

In ähnlicher Wiese können in diesem Zusammenhang die in 4.2. formulierten Überlegungen zu den Lernintentionen und zum Feedback untersucht werden. Wie praktikabel und wie hilfreich ist der *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* bei der Formulierung und Aufrechterhaltung von Lernintentionen? Hier geht es darum, die Lernintentionen der Lernenden zu erfassen und die Rolle des Atlas in diesem Prozess zu beobachten, zu analysieren und mit anderen Varianten dieser oder ähnlicher Lernhilfen zu vergleichen. Gleiches gilt in Bezug auf Feedback: Wie hilfreich und gewinnbringend sind die Atlaskarten bei der Formulierung und bei der Dokumentation von Feedback zum Lernprozess der einzelnen Lernenden?

Noch eine dritte Frage wäre aus lernpsychologischer Perspektive zu untersuchen: Funktioniert die Hypothese der Locimethode mit der Weltkarte als bekannter Grundstruktur? Dabei ist zum einen von Bedeutung, ob eine Weltkarte in der Zielgruppe überhaupt den angenommenen hohen Grad an Vertrautheit hervorruft. Zum anderen ist zu untersuchen, ob die Verschränkung zwischen den Orten auf den Karten und den zu lernenden Schlüsselbegriffen so stattfindet, dass sie die Erinnerungsleistung beim Lernen steigert.

Ein weiteres Forschungsfeld nimmt die Einführung des *Atlas der Schulmathematik der Sekundarstufe I* im Unterricht in den Blick. Interessant ist es, den Prozess zu begleiten, wenn die analoge Version (vgl. 4.3.) im Unterricht vorgestellt wird, ein erstes Kennenlernen stattfindet und die Nutzung definiert und umgesetzt sowie von Lernenden und Lernbegleiter*innen reflektiert wird. Auf diese Weise kann die Praktikabilität der entwickelten Lernhilfe untersucht werden. Die Lernbegleiter*innen können befragt werden, ob sie einen Mehrwert im Einsatz des Atlas erkennen, und wenn ja, worin er für sie besteht.

Im letzten Forschungsfeld, das hier skizziert wird, werden beispielsweise mittels eines Design-Based-Research-Ansatzes konkrete Einsatzszenarien für den *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* entwickelt. Diese können sich auf den Einsatz in einer Klasse einer bestimmten Schule beziehen, die sich als Versuchsgruppe zur Verfügung stellt. In diesem Fall geht es darum, entsprechend zu den Einsatzideen aus 4.4. für die einzelnen Phasen Arbeitsaufträge zu formulieren, die jeweils zur Arbeit mit dem Atlas anregen sollen. Gleichzeitig kann eine Verbindung zu anderen verwendeten Lernmaterialien, wie beispielsweise dem Schulbuch, geschaffen werden. So können verschiedene Szenarien für unterschiedliche Lernumgebungen und Unterrichtsformate entwickelt und nach Möglichkeit sogar einem Praxistest unterzogen werden. Je nach Stand der Digitalisierung kann zudem eine digitale Version mit ihren in 4.3. skizzierten Möglichkeiten in einem solchen Kontext konkretisiert und weiterentwickelt werden.

Mit dem *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* wurde eine Lernhilfe entwickelt, die einen großen Beitrag leistet, wenn es darum geht, den Lernenden Orientierung zu geben und über die Vernetzung der Inhalte ein tieferes Verständnis für die Mathematik der Sekundarstufe I zu fördern. Die Lernhilfe steht auf einem soliden Fundament aus neurowissenschaftlichen und lernpsychologischen Erkenntnissen. Sie wurde entwickelt mit dem prüfenden Blick der Fachwissenschaft und folgt didaktischen Überlegungen zum Einsatz im Unterricht. Nun fehlt dem *Atlas der Schulmathematik für die Sekundarstufe I* nur noch die praktische Vollendung: der Schritt in den Verlag und danach der direkte Weg in die Klassenzimmer.

Anhang

Literaturverzeichnis

[AK Stochastik] Arbeitskreis Stochastik in der Schule in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. (2002). *Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts*. Verfügbar unter https://www.math.uni-frankfurt.de/ak-stochastik/files/bildungspolitische-stellungnahme.pdf (letzter Zugriff am 07.02.2019).

Ausubel, David Paul (1960). The use of advance organizers in the learning and retention of meaningful verbal material. *Journal of educational Psychology, 51 (*5), 267-272.

Barzel, Bärbel; Hußmann, Stephan; Leuders, Timo & Prediger, Susanne (2011). Kontexte und Kernprozesse – Ein theoriegeleitetes und praxiserprobtes Schulbuchkonzept. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*, 71-74.

Bauer, Thomas & Hefendehl-Hebeker, Lisa (2019). *Mathematikstudium für das Lehramt an Gymnasien: Anforderungen, Ziele und Ansätze zur Gestaltung.* Wiesbaden: Springer Spektrum. Verfügbar unter https://doi.org/10.1007/978-3-658-26682-0 (letzter Zugriff am 07.04.2020 um 12:45).

Biehler, Rolf (2014). Leitidee Daten und Zufall – Fundamentale Ideen aus Sicht der Statistik. In: Helmut Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik. Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II*. Seelze: Friedrich Verlag. (S. 69-92).

Birkenbihl, Vera F. (2011). *Stroh im Kopf: Vom Gehirn-Besitzer zum Gehirn-Benutzer* (51. Auflage). München: mvg Verlag.

Brückler, Franka Miriam (2003). *The Land of Middle Maths*. Verfügbar unter https://web.math.pmf.unizg.hr/~bruckler/smotra03/mm_color.jpg (letzter Zugriff am 16.07.2020 um 23:06).

[BMBWF] Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung (2021). *Allgemeinbildende höhere Schulen (AHS)*. Verfügbar unter https://bildung.bmbwf.gv.at/schulen/bw/abs/ahs.html (letzter Zugriff am 07.09.2020 um 00:44).

Buzan, Tony & Buzan, Barry (2013). *Das Mind-Map-Buch: Die beste Methode zur Steigerung ihres geistigen Potenzials.* Verfügbar unter http://ebookcentral.proquest.com (letzter Zugriff am 08.05.2018).

[D-EDK] Deutschschweizer Erziehungsdirektorenkonferenz (Hrsg.) (2016). *Lehrplan 21 Mathematik* – von der D-EDK Plenarversammlung am 31.10.2014 zur Einführung in den Kantonen freigegebene Vorlage (bereinigte Fassung vom 29.02.2016). Verfügbar unter https://v-fe.lehrplan.ch/container/V_FE_DE_Fachbereich_MA.pdf (letzter Zugriff am 24.4.2020 um 11:46).

[D-EDK] Deutschschweizer Erziehungsdirektorenkonferenz (Hrsg.) (2021). *Lehrplan 21 – Das Wichtigste im Überblick.* Verfügbar unter https://lehrplan21.ch/sites/default/files/lp21_leporello_a4.pdf (letzter Zugriff am 07.09.2020 um 00:39).

[Diercke Weltatlas] Michael, Thomas & Albrecht, Michael (Leitung Westermann Kartografie) (2015). *Diercke Weltatlas*. Braunschweig: Westermann Gruppe.

Eckhardt, Heinz (1976). Größenbereiche. In: Otto Botsch & Heinz Eckhardt, *Ebene Geometrie – Größenbereiche*. (Seitenzahl?) Frankfurt/Main: Verlag Moritz Diesterweg.

Eichler, Andreas & Vogel, Markus (2009). *Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik* (1. Aufl.). Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Elliot, Elaine S. & Dweck, Carol S. (1988). Goals: An approach to motivation and achievement. *Journal of Personality and Social Psychology, 54(1)*, 5-12.

[Fachberatung Mathematik des Regierungsbezirks Düsseldorf] Fachberaterinnen und Fachberater für die Gesamt-, Sekundar-, Gemeinschafts- und PRIMUS-Schulen (Sekundarstufe I) im Regierungsbezirk Düsseldorf (2020). Die Advance-Organizer Landkarte der Mathematik. Verfügbar unter http://www.myartproject.de/index.php?id=49 (letzter Zugriff am 16.07.2020 um 22:09).

Franke, Marianne (2001). *Didaktik der Geometrie* (1. Nachdruck). Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Freudenthal, Hans (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe: Bd. 1 und 2*. Stuttgart: Klett.

Gerrig, Richard J. & Zimbardo, Philip G. (2008). *Psychologie* (18., aktualisierte Auflage). München: Pearson Deutschland GmbH.

Greefrath, Gilbert (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Gruber, Thomas (2018). *Gedächtnis* (2., überarbeitete Auflage). Berlin: Springer Verlag. Verfügbar unter https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-662-56362-5.pdf (letzter Zugriff am 16.08.2019).

Hattie, John (2013). *Lernen sichtbar machen* (Überarbeitete deutschsprachige Ausgabe von „Visible Learning" besorgt von Wolfgang Beywl & Klaus Zierer). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Hefendehl-Hebeker, Lisa & Prediger, Susanne (2006). *Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern - Zahlvorstellungen wandeln.* In: Praxis der Mathematik in der Schule 48(11), 1-7. Vorfassung des Artikels verfügbar unter www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/06-PM-H11-Hefendehl-Prediger-Zahlen.pdf (letzter Zugriff am 26.08.2020 um 22:13).

Helmke, Andreas & Weinert, Franz E. (1997). Bedingungsfaktoren schulischer Leistungen. In: Franz E. Weinert,(Hrsg.), *Psychologie des Unterrichts und der Schule* (S. 71-176). Göttingen: Hogrefe.

Hölzl, Reinhard (2014). Ähnlichkeit. In: Hans-Georg Weigand, Andreas Filler, Reinhard Hölzl, Sebastian Kuntze, Matthias Ludwig, Jürgen Roth, Barbara Schmidt-Thieme & Gerald Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (2., verbesserte Auflage) (S. 214-237). (eBook). Heidelberg: Springer.

Hoffmann, Joachim & Engelkamp, Johannes (2013). *Lern- und Gedächtnispsychologie*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

Holland, Gerhard (2001). *Geometrie in der Sekundarstufe: Didaktische und methodische Fragen* (2. Auflage). Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Hußmann, Stephan; Barzel, Bärbel; Leuders, Timo & Prediger, Susanne (2013). Fachspezifische Differenzierungsansätze für unterschiedliche Unterrichtsphasen. *Beiträge zum Mathematikunterricht (2013)*, 488-491.

[IDM-AECC-M] Institut für Didaktik der Mathematik – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – Fakultät für interdisziplinäre

Forschung und Fortbildung Alpen-Adria-Universität Klagenfurt (Hrsg.)(2007). Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe (Version 4/07). Verfügbar unter https://www.aau.at/wp-content/uploads/2017/10/Standardkonzept_Version_4-07.pdf (heruntergeladen am 05.03.2020 um 11:10).

Karsten, Gunther (2011). Mnemotechniken – Strategien für außergewöhnliche Gedächtnisleistungen. In: Martin Dresler (Hrsg.), *Kognitive Leistungen: Intelligenz und mentale Fähigkeiten im Spiegel der Neurowissenschaften (kursiv gesetzt)* (S. 57-76). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Kliegl, Reinhold; Smith, Jacqui & Baltes, Paul B. (1989). Testing-the-limits and the study of adult age differences in cognitive plasticity of a mnemonic skill. *Developmental Psychology, 25(2)*, 247-256. DOI 10.1037/0012-1649.25.2.247.

Kondo, Yumiko; Suzuki, Maki; Mugikura, Shunji; Abe, Nobuhito; Takahashi, Shoki; Iijima, Toshio & Fujii, Toshikatsu (2005). Changes in brain activation associated with use of a memory strategy: A functional MRI study. *NeuroImage, 24*, 1154-1163.

Krauter, Siegfried (2008). *Fachdidaktische Beiträge zum Sachrechnen im Mathematikunterricht* (Version: Januar 2008). Skript der PH Ludwigsburg. https://www.ph-ludwigsburg.de/fileadmin/subsites/2e-imix-t-01/user_files/Veranstaltungsmaterialien_offen/Zusatzmaterialien/Skripte_Krauter/FD_Sachrechnen.pdf (letzter Zugriff am 27.07.2017 um 20:35).

[KMK] Kultusministerkonferenz (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). Berlin. Verfügbar unter https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf (letzter Zugriff am 16.05.2020 um 11:04).

[KMK] Kultusministerkonferenz (2004). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Beschluss vom 04.12.2003).* München: Wolters Kluwer. Verfügbar unter https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (letzter Zugriff am 07.12.2016 um 13:49).

Lercher, Andreas (2017). *Mindmanager 2017: mindmapping | visualisierung | selbstmanagement*. Retrieved from http://ebookcentral.proquest.co (Created from fuberlin-ebooks on 2018-05-08 06:47:14.).

Leuders, Timo & Barzel, Bärbel (2014). Größen, Maße und Messen. In: Helmut Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik: Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek I und II* (S. 48-68). Seelze: Kallmeyer in Verbindung mit Klett Friedrich Verlag GmbH.

Leuders, Timo & Holzäpfel, Lars (2011). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft, 39*, 213-230.

Leuders, Timo; Hußmann, Stephan; Barzel, Bärbel & Prediger, Susanne (2011) (Hrsg.). Das macht Sinn! Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule 53(37),* 2-9.

Leuders, Timo & Prediger, Susanne (2012). Differenziert differenzieren! – Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen. In: Rebecca Lazarides & Angela Ittel (Hrsg.). *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht – Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 35-66). Bad Heilbronn: Julius Klinkhardt Verlag.

Ludwig, Matthias & Weigand, Hans-Georg (2014). Konstruieren. In: Hans-Georg Weigand, Andreas Filler, Reinhard Hölzl, Sebastian Kuntze, Matthias Ludwig, Jürgen Roth, Barbara Schmidt-Thieme & Gerald Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (2., verbesserte Auflage) (S. 55-80). (eBook). Heidelberg: Springer.

Mahler, Nicole & Kölm, Jenny (2019). Mittelwerte und Streuungen der im Fach Mathematik erreichten Kompetenzen. In: Petra Stanat, Stefan Schipolowski, Nicole Mahler, Sebastian Weirich, Sofie Henschel (Hrsg.), *IQB-Bildungstrend 2018: Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I im zweiten Ländervergleich.* Münster/New York: Waxmann. (S. 200-212).

Malle, Günther (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra: mit vielen Beispielaufgaben.* Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg.

McCabe, Jennifer A. (2015). Location, Location, Location! Demonstrating the Mnemonic Benefit of the Method of Loci. *Teaching of Psychology, 42(2*), 169-173. DOI 10.1177/0098628315573143.

Metzig, Werner & Schuster, Martin (2016). *Lernen zu lernen: Lernstrategien wirkungsvoll einsetzen*. (9. Auflage). (eBook). Berlin, Heidelberg: Springer.

Nückles, Matthias; Gurlitt, Johannes; Pabst, Tobias & Renkl, Alexander (2004). *Mind Maps & Concept Maps: Visualisieren, Organisieren, Kommunizieren.* München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

Padberg, Friedhelm & Benz, Christiane (2011). *Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung.* (4. Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Prediger, Susanne; Hußmann, Stephan; Leuders, Timo & Barzel, Bärbel (2014). Kernprozesse – Ein Modell zur Strukturierung von Unterrichtsdesign und Unterrichtshandeln. In: Isabell Bausch, Guido Pinkernell, Oliver Schmitt (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung. Festschrift für Regina Bruder*. Münster: WTM Verlag. Verfügbar unter https://www.researchgate.net/publication/261402350_Kernprozesse_–_Ein_Modell_zur_Strukturierung_von_Unterrichtsdesign_und_Unterrichtshandeln/link/557b206a08ae26eada8afddc/download (letzter Zugriff am 02.07.2020 um 22:52). (S. 81-92).

Prediger, Susanne; Leuders, Timo; Barzel, Bärbel & Hußmann, Stephan (2013). Anknüpfen, Erkunden, Ordnen, Vertiefen – ein Modell zur Strukturierung von Design und Unterrichtshandeln. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, *(2013)* 769-772.

Putnam, Adam L. (2015). Mnemonics in Education: Current Research and Applications. *Translational Issues in Psychological Science, 1(2)*, 130-139.

Reiss, Kristina & Hammer, Christoph (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik: Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. Basel: Birkhäuser.

Roppelt, Alexander; Penk, Christiane; Pöhlmann, Claudia & Pietsch, Elke (2013). Der Ländervergleich im Fach Mathematik. In: Hans Anand Pant, Petra Stanat, Ulrich Schroeders, Alexander Roppelt, Thilo Siegle & Claudia Pöhlmann (Hrsg.), *IQB-Ländervergleich 2012: Mathematische und naturwissenschaftliche*

Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann. (S. 123-140).

Roth, Jürgen & Wittmann, Gerald (2014). Ebene Figuren und Körper. In: Hans-Georg Weigand, Andreas Filler, Reinhard Hölzl, Sebastian Kuntze, Matthias Ludwig, Jürgen Roth, Barbara Schmidt-Thieme & Gerald Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (2., verbesserte Auflage) (S. 123-156). (eBook). Heidelberg: Springer.

Ruf, Urs & Gallin, Peter (1998). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik: Bd. 1: Austausch unter Ungleichen.* Seelze: Kallmeyer in Verbindung mit Klett Friedrich Verlag GmbH.

Seemüller, Anna & Dresler, Martin (2011). Psychologie und Neurobiologie außergewöhnlicher Gedächtnisleistungen. In: Martin Dresler (Hrsg.), *Kognitive Leistungen: Intelligenz und mentale Fähigkeiten im Spiegel der Neurowissenschaften* (S. 77-88). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

[SenBJF & MBJS] Senatsverwaltung für Bildung Jugend und Familie (Berlin) & Ministerium für Bildung, Jugend und Sport Land Brandenburg (Hrsg.): Rahmenlehrplan Teil C Mathematik: Jahrgangsstufen 1-10. Amtliche Fassung (pdf-Datei). 2015. Verfügbar unter https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/Teil_C_Mathematik_2015_11_10_WEB.pdf (letzter Zugriff am 31.03.2020 um 21:50).

[SenBJF & MBJS] Senatsverwaltung für Bildung Jugend und Familie (Berlin) & Ministerium für Bildung, Jugend und Sport Land Brandenburg (Hrsg.): Rahmenlehrplan Online Berlin-Brandenburg: Herzlich Willkommen. 2020. Verfügbar unter https://bildungsserver.berlinbrandenburg.de/rlp-online/ (letzter Zugriff am 23.03.2020 um 10:17).

Siebel, Franziska & Wittmann, Gerald (2014). Zahl und Variable. In: Helmut Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik*, Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II. Seelze: Friedrich Verlag GmbH. (S. 30-47).

Spitzer, Manfred (2014). *Lernen: Gehirnforschung und die Schule des Lebens.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

[ISB] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München (2020). LehrplanPLUS für Gymnasien: Fachprofil Mathematik. Verfügbar unter https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachprofil/gymnasium/mathematik (letzter Zugriff am 07.04.2020 um 13:10).

[ISB] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München (2010). Der Lehrplan für das Gymnasium in Bayern im Überblick. Verfügbar unter https://www.isb.bayern.de/download/1555/broschuere-der-lehrplan-im-ueberblick.pdf (letzter Zugriff am 24.04.2020 um 12:38).

Vester, F. (2016). *Denken, Lernen, Vergessen: Was geht in unserem Kopf vor, wie lernt das Gehirn und wann lässt es uns im Stich?* (37. Auflage). München: dtv.

Vollrath, Hans-Joachim & Roth, Jürgen (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (2. Auflage) Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag. Verfügbar unter https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-8274-2855-4.pdf (letzter Zugriff am 09.03.2020 um 09:14).

Vollrath, Hans-Joachim (1999). *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Wagenschein, Martin (1970). *Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken: Bd. 1.* Stuttgart: Klett.

Wahl, Diethelm (2013). *Lernumgebungen erfolgreich gestalten: Vom trägen Wissen zum kompetenten Handeln* (3. Auflage mit Methodensammlung). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Wahl, Diethelm (2011). Der Advance Organizer: Einstieg in eine Lernumgebung. In: Hans-Ulrich Grunder, Heinz Moser & Katja Kansteiner-Schänzlin, *Professionswissen für Lehrerinnen und Lehrer 1-10.* Verfügbar unter https://www.prof-diethelm-wahl.de/Textbeispiel%20Advance%20Organizer.pdf (letzter Zugriff am 31.08.2020 um 0:50).

Walliman, Dominic (2017). *The Map of Mathematics*. Verfügbar unter https://www.youtube.com/watch?v=OmJ-4B-mS-Y (letzter Zugriff am 16.07.2020 um 23:00).

Weigand, Hans-Georg (2014a). Begriffslernen und Begriffslehren. In: Hans-Georg Weigand, Andreas Filler, Reinhard Hölzl, Sebastian Kuntze, Matthias Ludwig, Jürgen Roth, Barbara Schmidt-Thieme & Gerald Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der*

Geometrie für die Sekundarstufe I (2., verbesserte Auflage) (S. 99-122). (eBook). Heidelberg: Springer.

Weigand, Hans-Georg (2014b). Ziele des Geometrieunterrichts. In: Hans-Georg Weigand, Andreas Filler, Reinhard Hölzl, Sebastian Kuntze, Matthias Ludwig, Jürgen Roth, Barbara Schmidt-Thieme & Gerald Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (2., verbesserte Auflage) (S. 13-34). (eBook). Heidelberg: Springer.

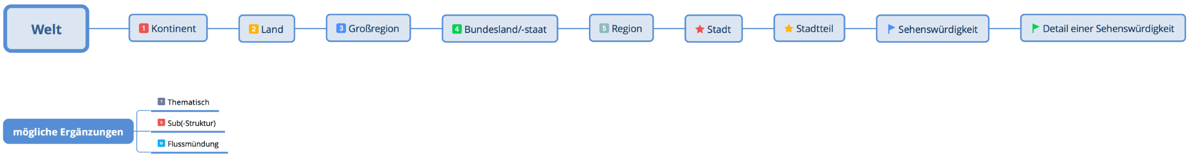
Wellnitz, Malte (2013). *Fachdidaktische Diskussionen zur Algebra, Zahlentheorie, Graphentheorie und Geometrie für Schule und Universität.* Verfügbar unter https://www.zhb-flensburg.de/fileadmin/content/spezial-einrichtungen/zhb/dokumente/dissertationen/wellnitz/dissertation-malte-wellnitz.pdf (letzter Zugriff am 18.07.2020 um 22:16).

Winter, Heinrich (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61,* 37-46. Verfügbar unter https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/69/80 (letzter Zugriff am 24.08.2020 um 21:14).

Wittmann, Erich_Ch. (2015). Strukturgenetische didaktische Analysen – empirische Forschung „erster Art“. *Mathematica Didactica, 38,* 239-255. Verfügbar unter http://www.mathematica-didactica.com/altejahrgaenge/md_2015/md_2015_Wittmann_Stoffdidaktik.pdf (letzter Zugriff am 07.05.2020).

Zech, Friedrich (2002). *Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und Praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik.* 10. Auflage. Weinheim: Beltz.

Legende zu den Netzen mit Hierachieebenen



Netze mit Hierarchieebenen

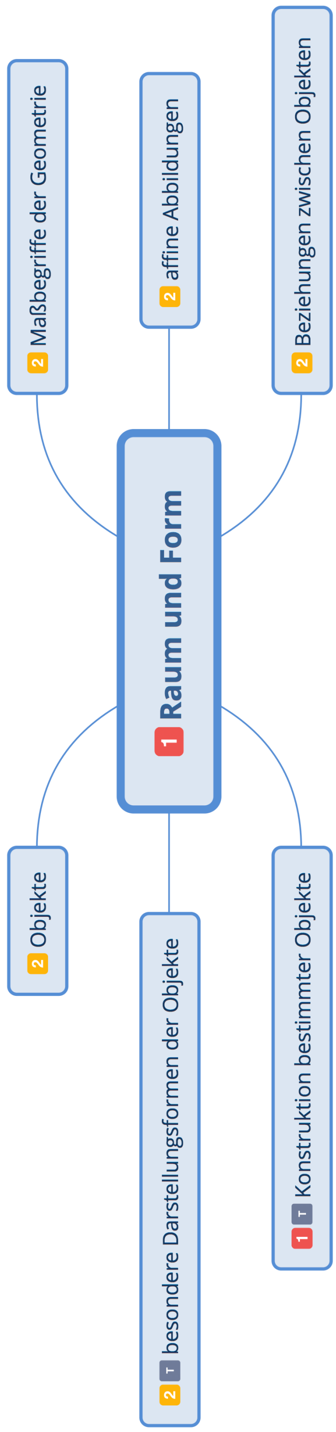


Abbildung A1: Netz zur Übersicht über den Themenbereich „Raum und Form“ mit Hierarchieebenen

Abbildung A2: Netz zu den Objekten mit Hierarchieebenen

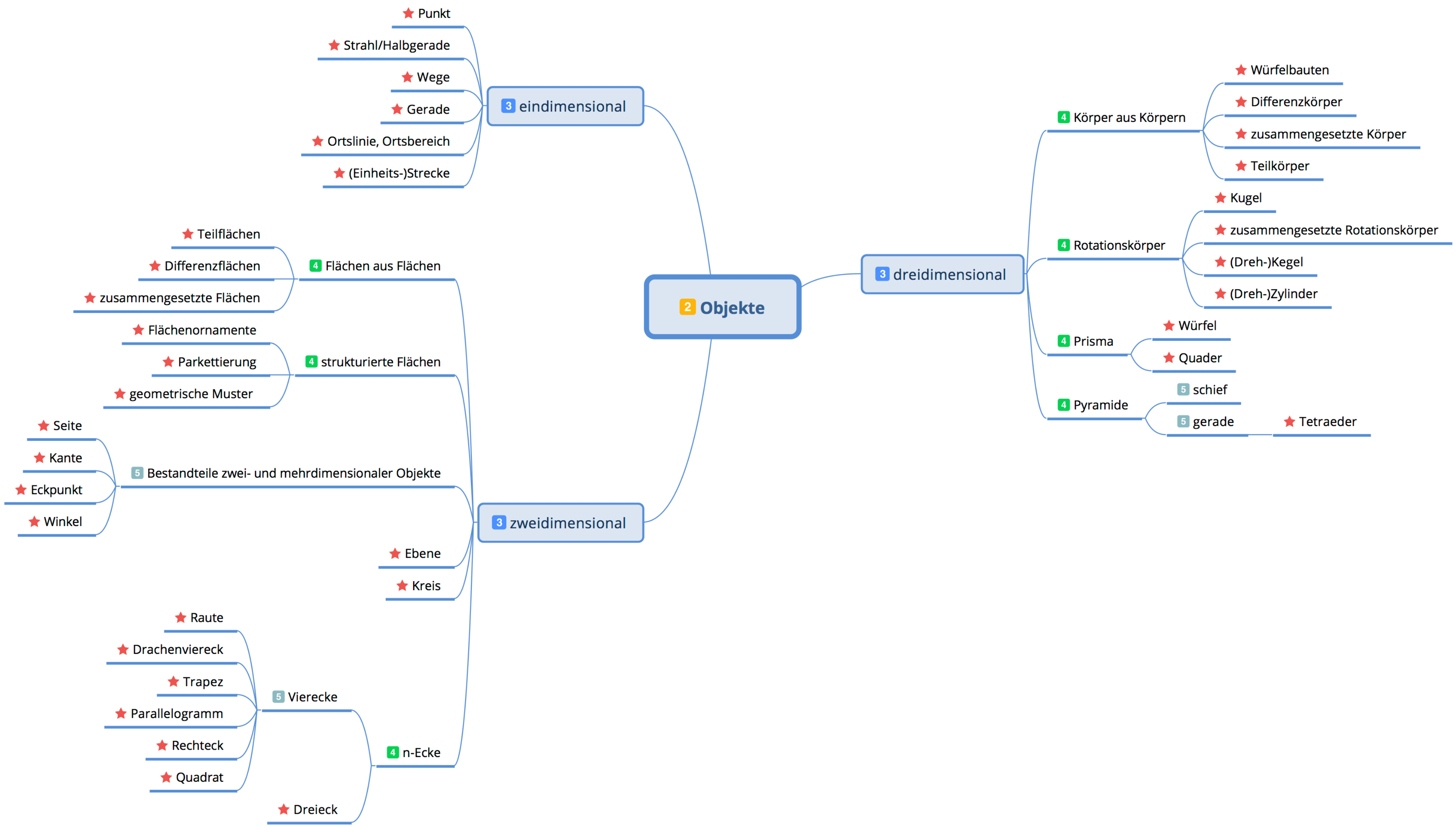


Abbildung A3: Netz zum Winkel mit Hierarchieebenen

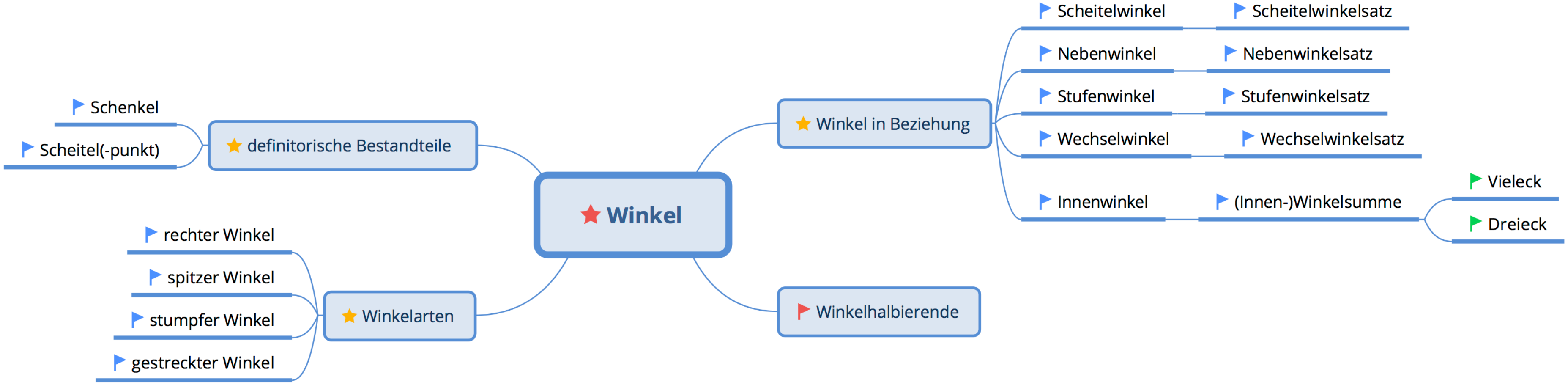


Abbildung A4: Netz zum Kreis mit Hierarchieebenen

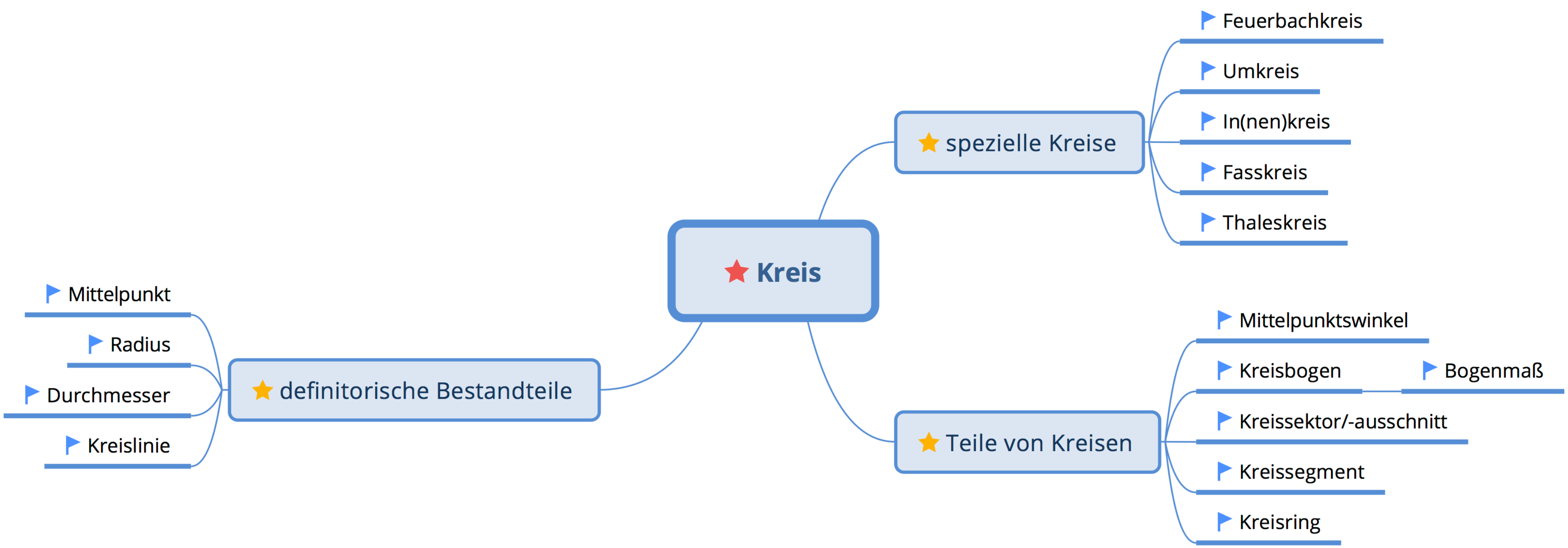


Abbildung A5: Netz zum Dreieck mit Hierarchieebenen

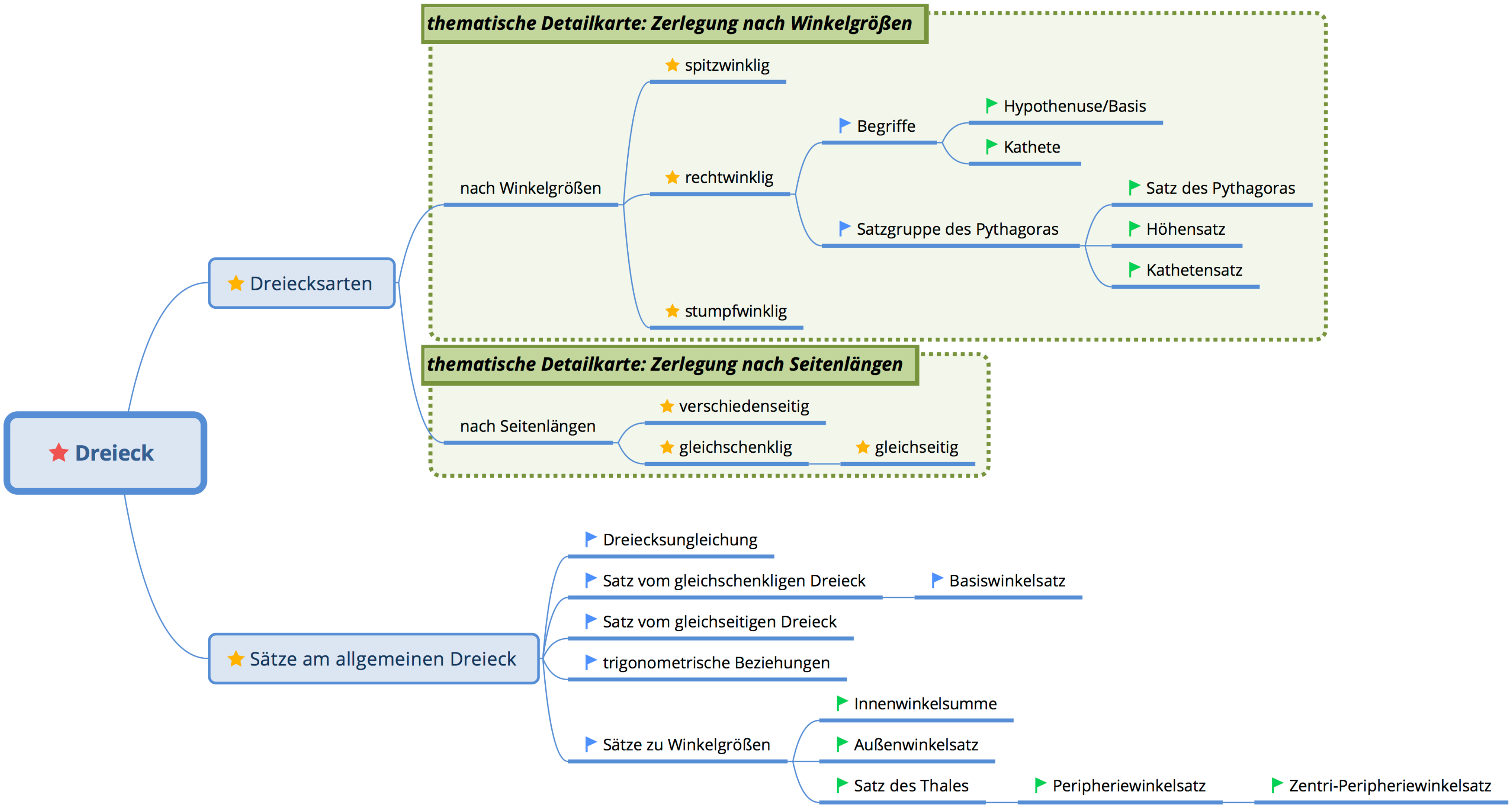


Abbildung A6: Netz zu den besonderen Darstellungsformen der Objekte mit Hierarchieebenen

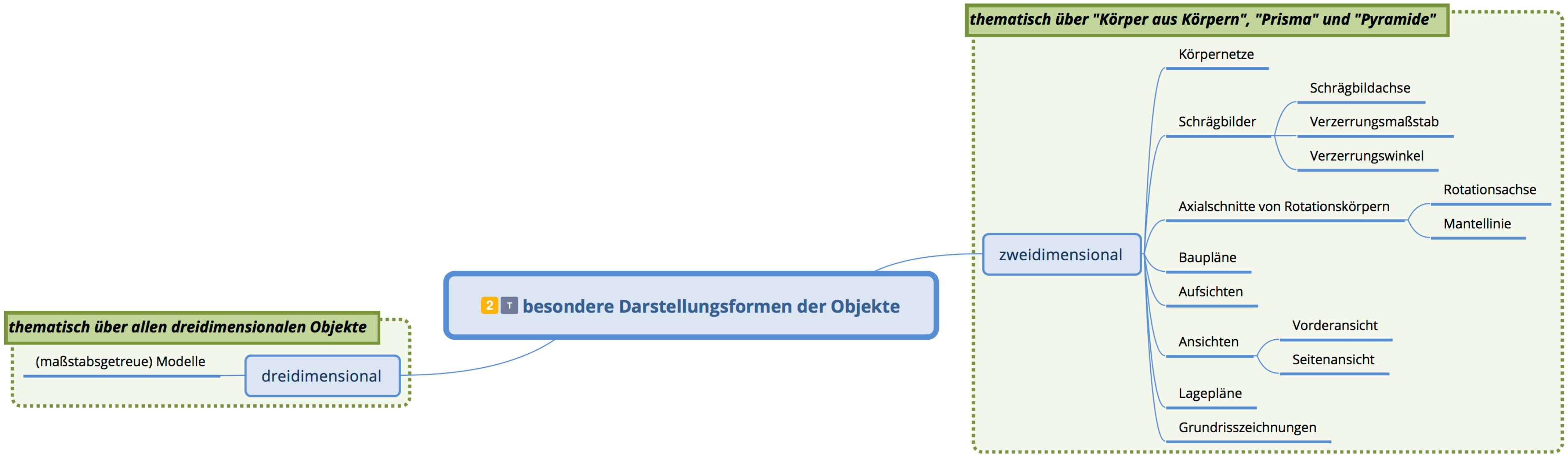


Abbildung A7: Netz zur Konstruktion bestimmter Objekte mit Hierarchieebenen

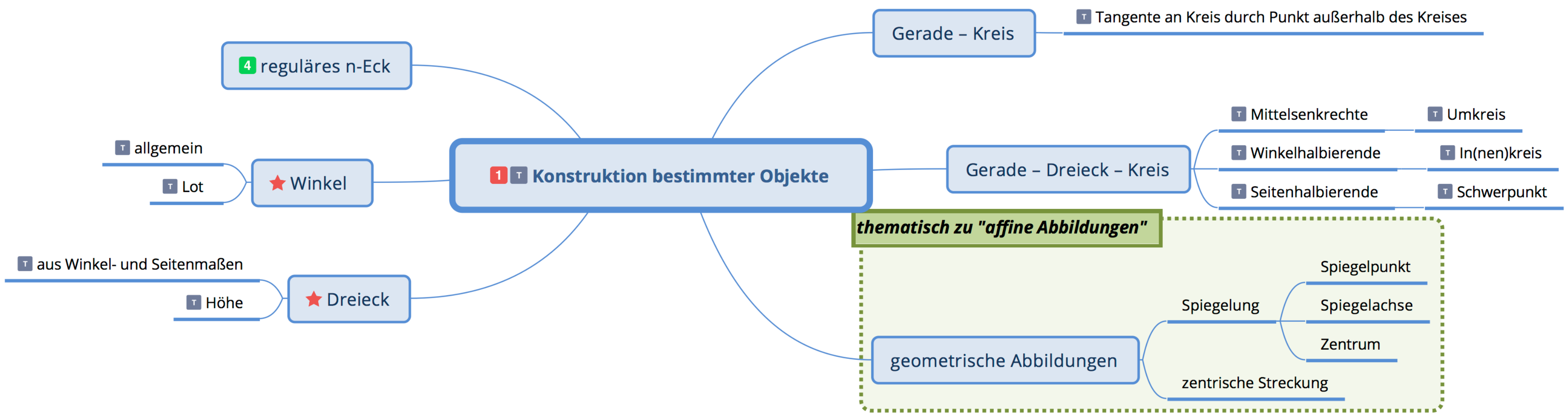


Abbildung A8: Netz zu Beziehungen zwischen Objekten

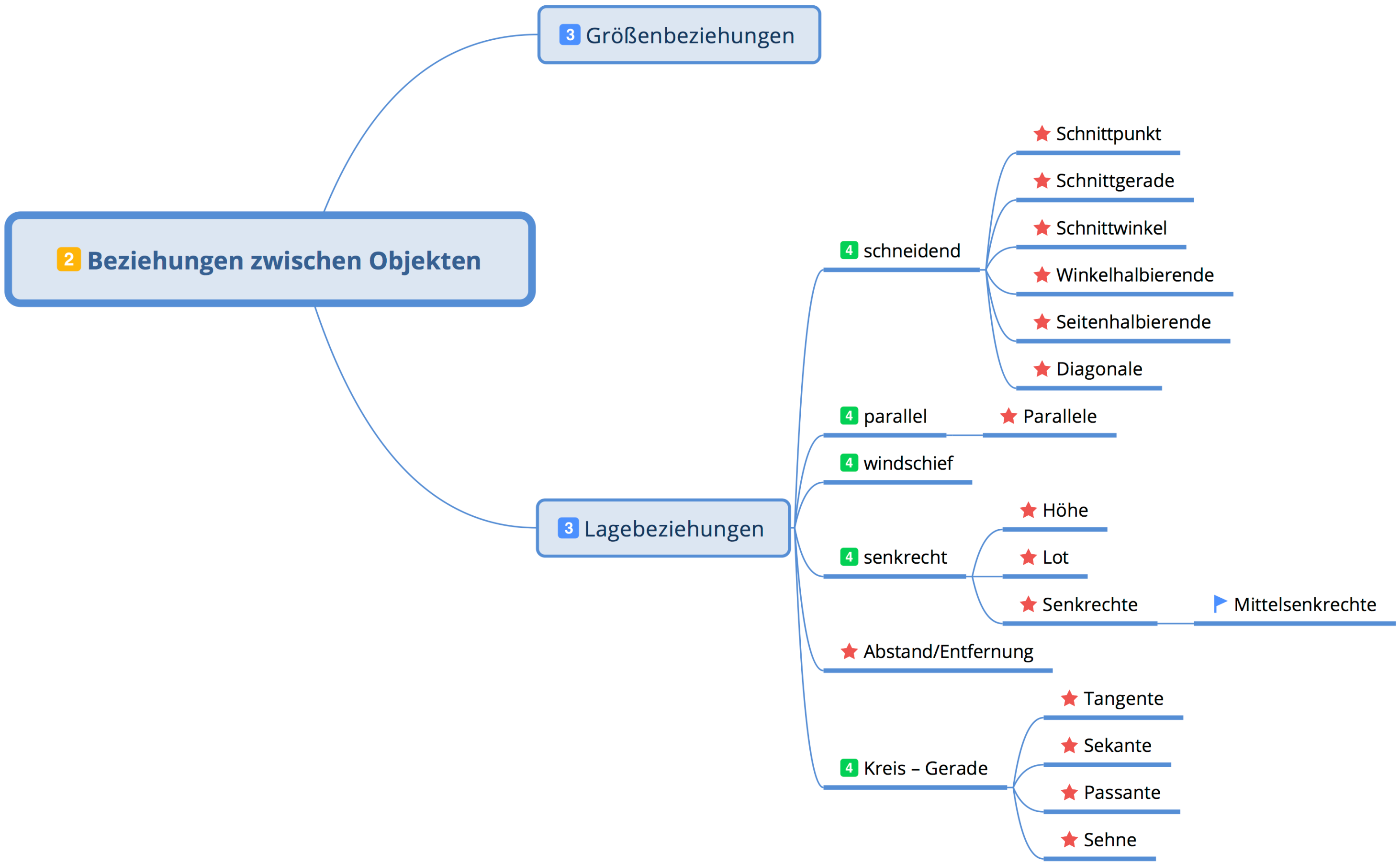


Abbildung A9: Netz zu den affinen Abbildungen mit Hierarchieebenen

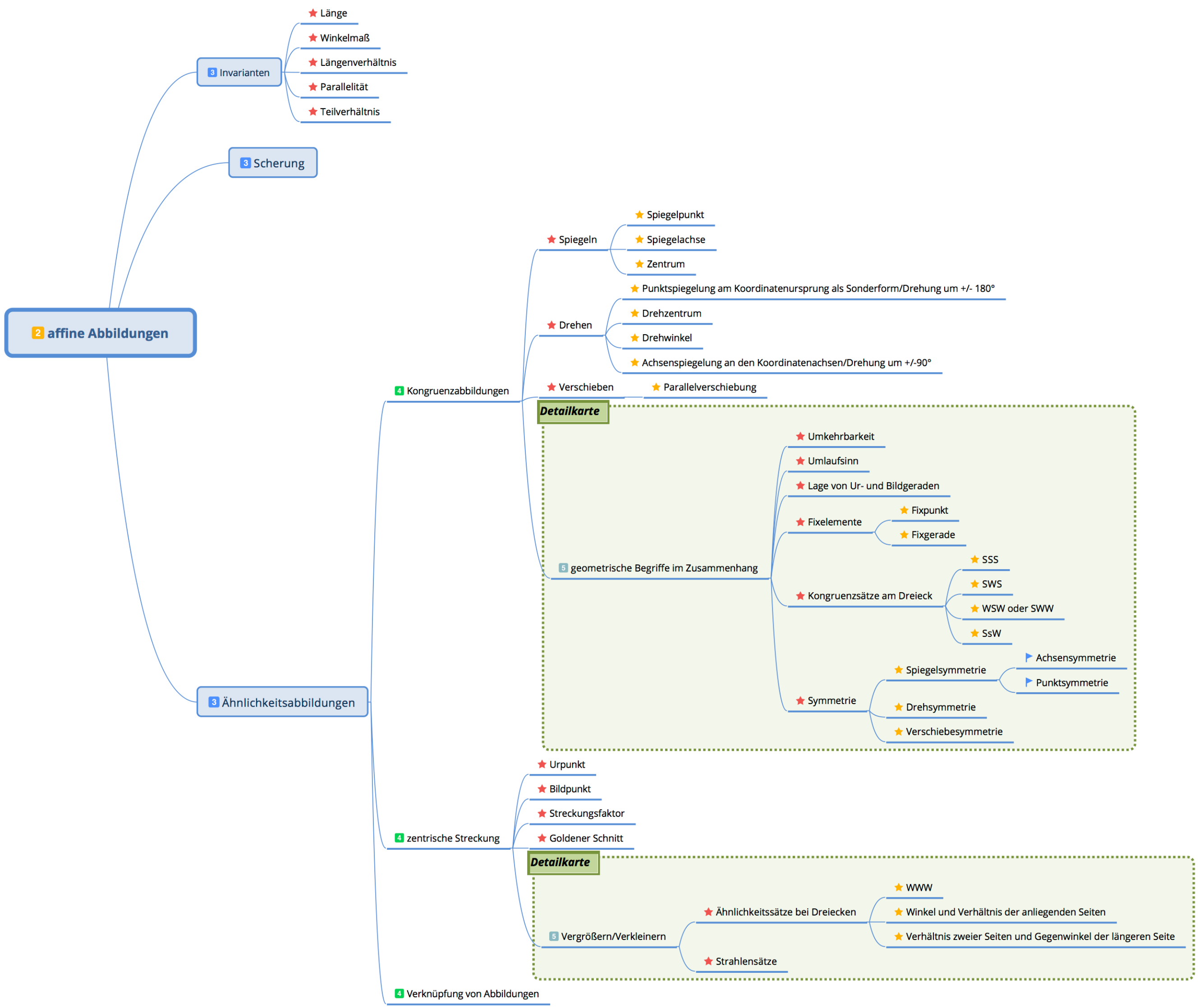


Abbildung A10: Netz zu den Maßbegriffen der Geometrie mit Hierarchieebenen

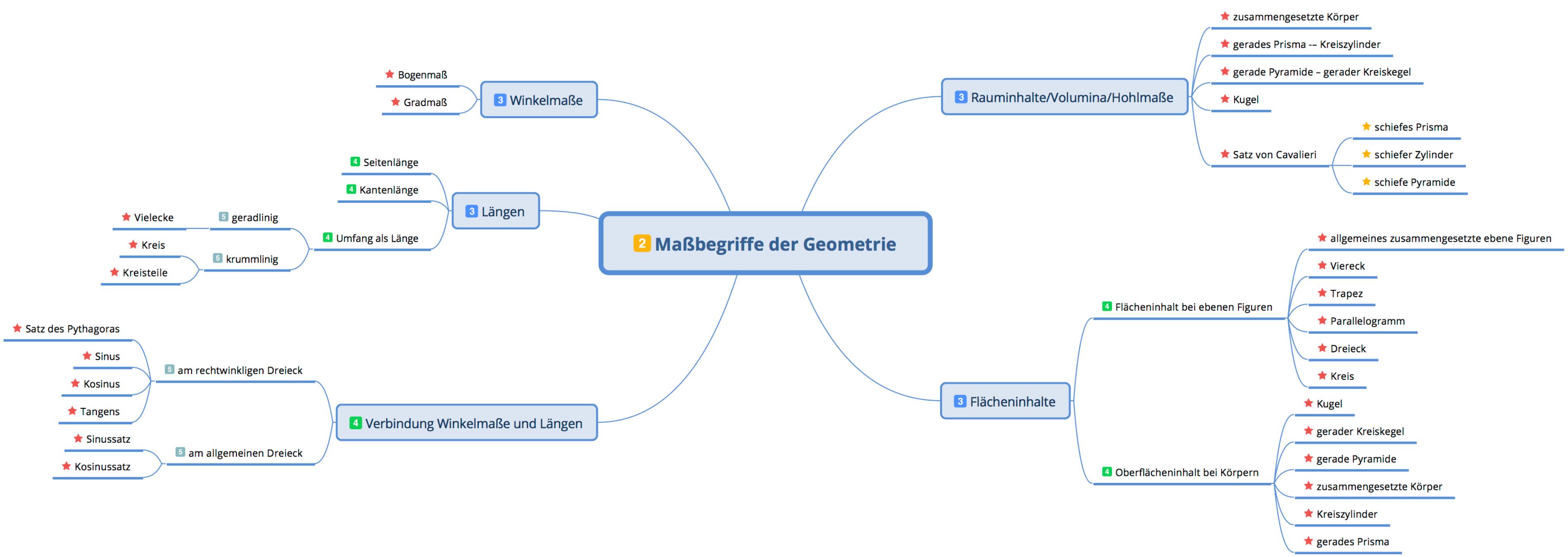


Abbildung A11: Netz zur Übersicht über den Themenbereich „Größen und Messen“ mit Hierarchieebenen

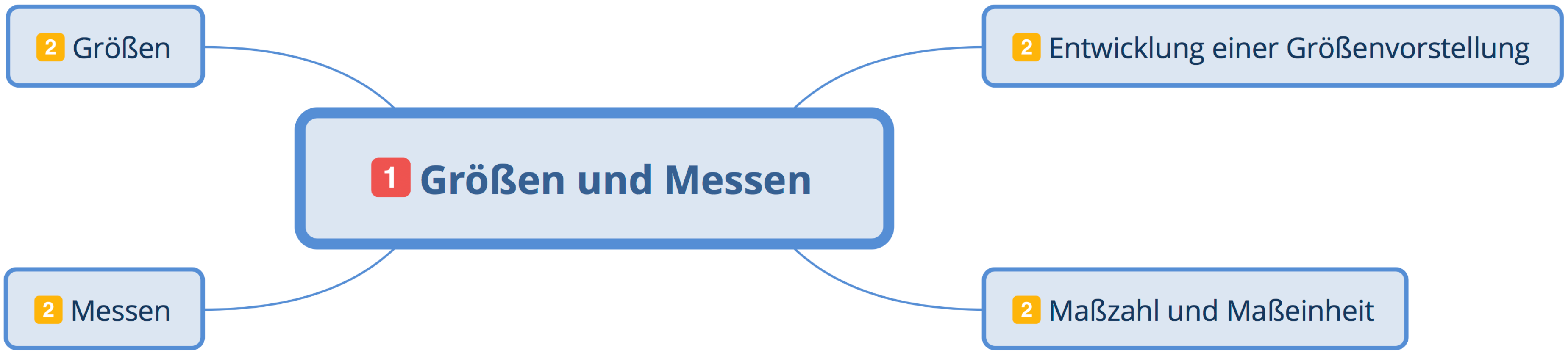


Abbildung A12: Netz zu Größen mit Hierarchieebenen

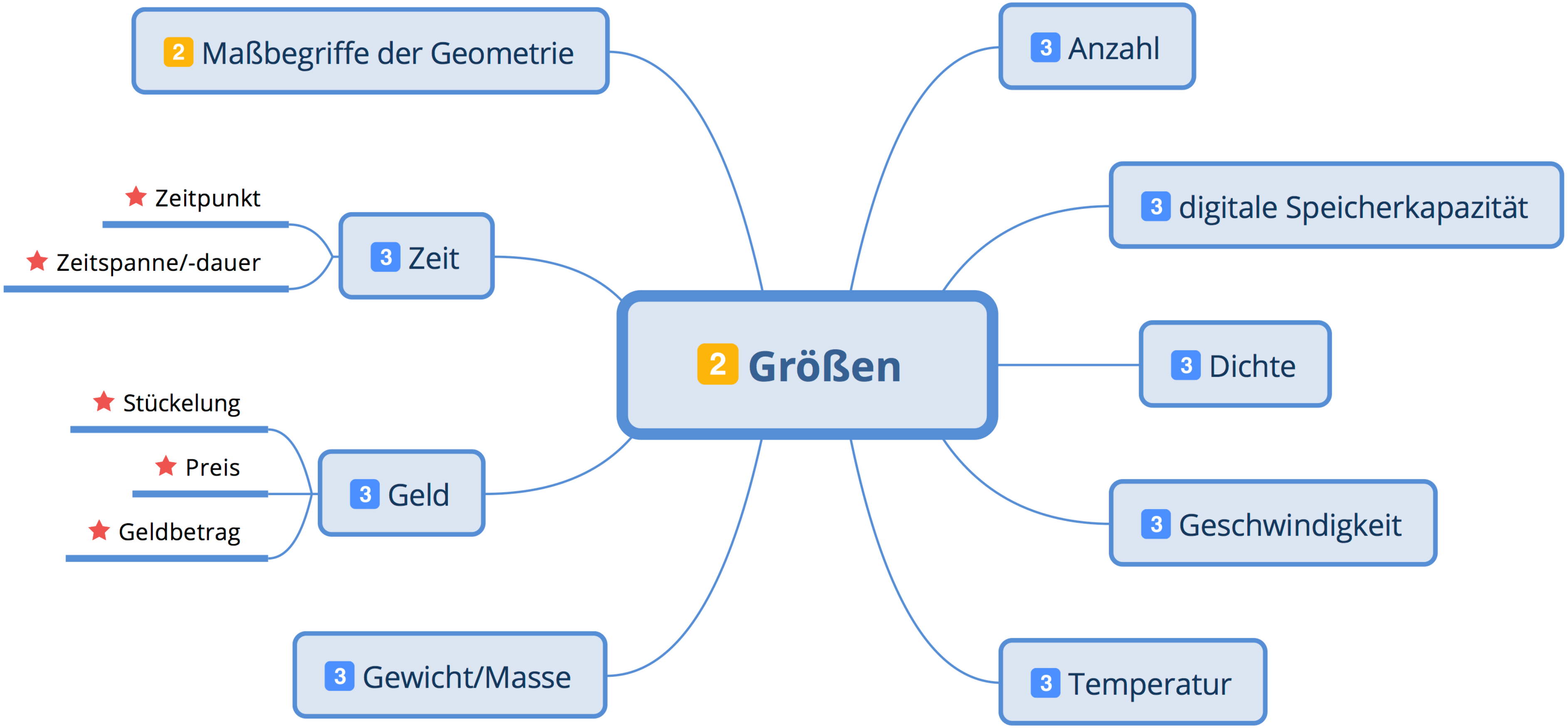


Abbildung A13: Netz zum Messen mit Hierarchieebenen

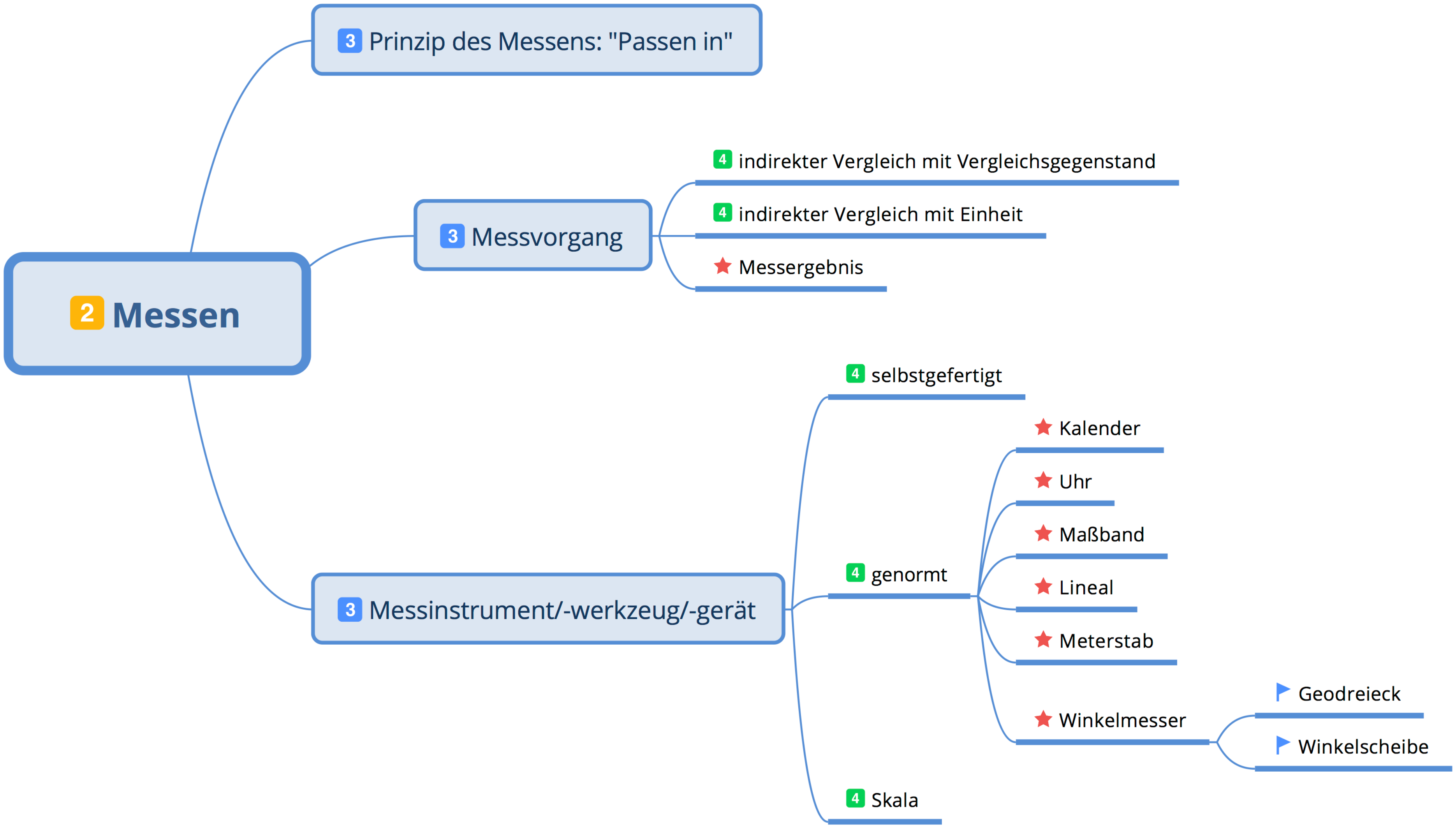


Abbildung A14: Netz zu Maßzahl und Maßeinheit mit Hierarchieebenen

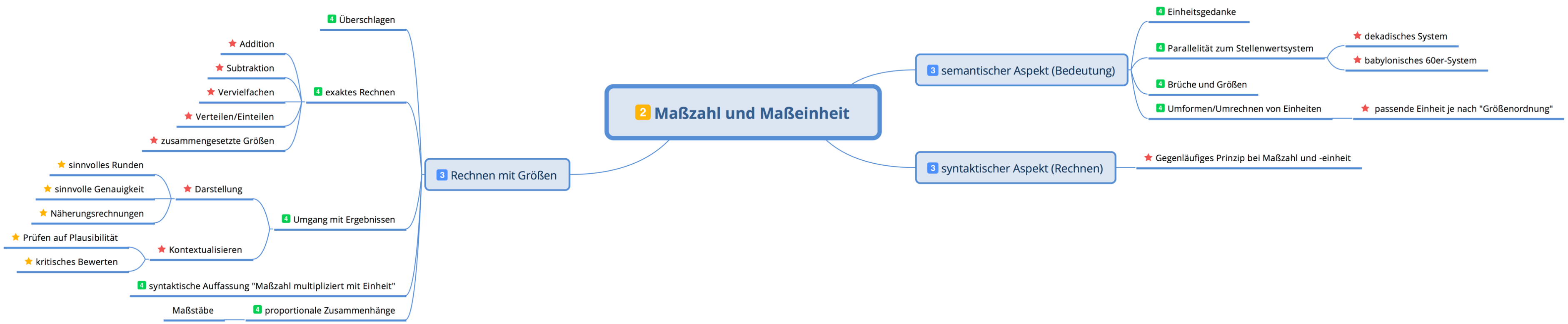


Abbildung A15: Netz zur Entwicklung einer Größenvorstellung mit Hierarchieebenen

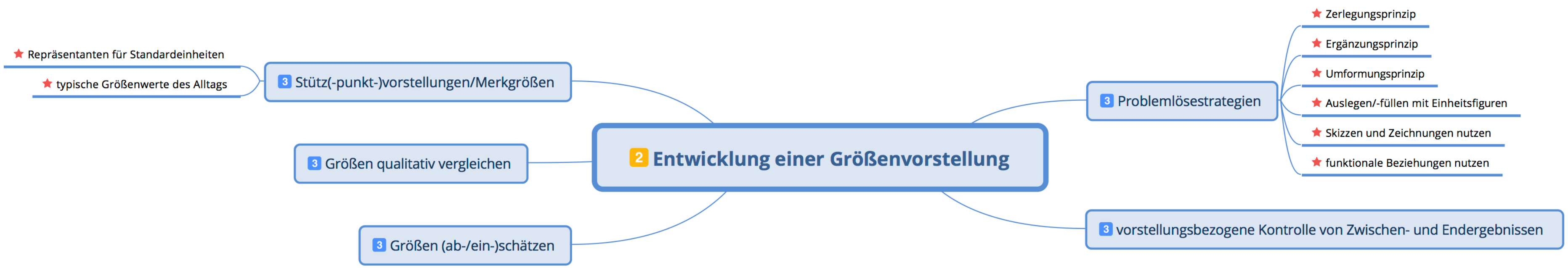


Abbildung A16: Netz zur Übersicht über den Themenbereich „Zahlen und Operationen“ mit Hierarchieebenen

Abbildung A17: Netz zu Zahlbereichen mit Hierarchieebenen

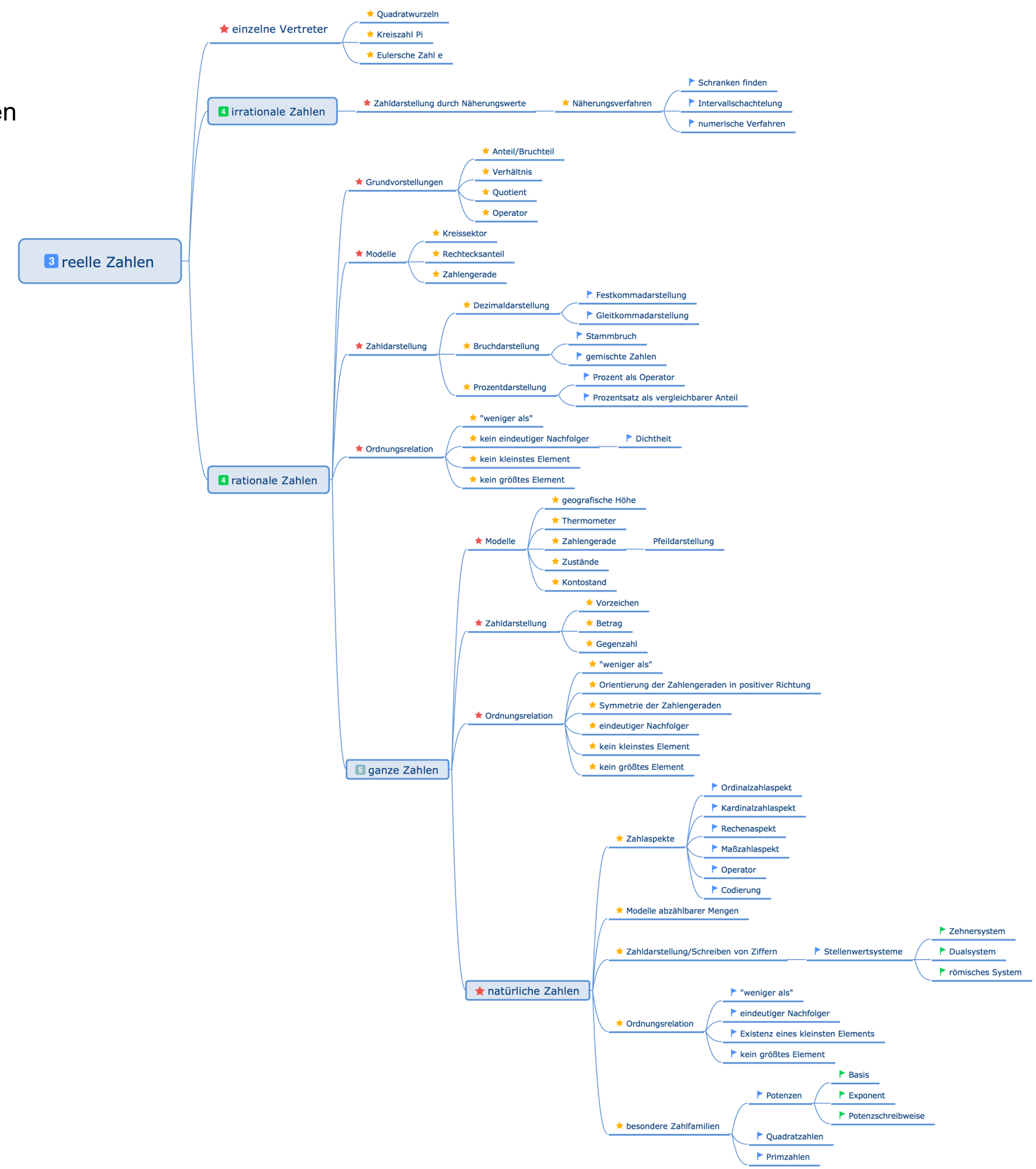


Abbildung A18: Netz zu Operationen mit Hierarchieebenen

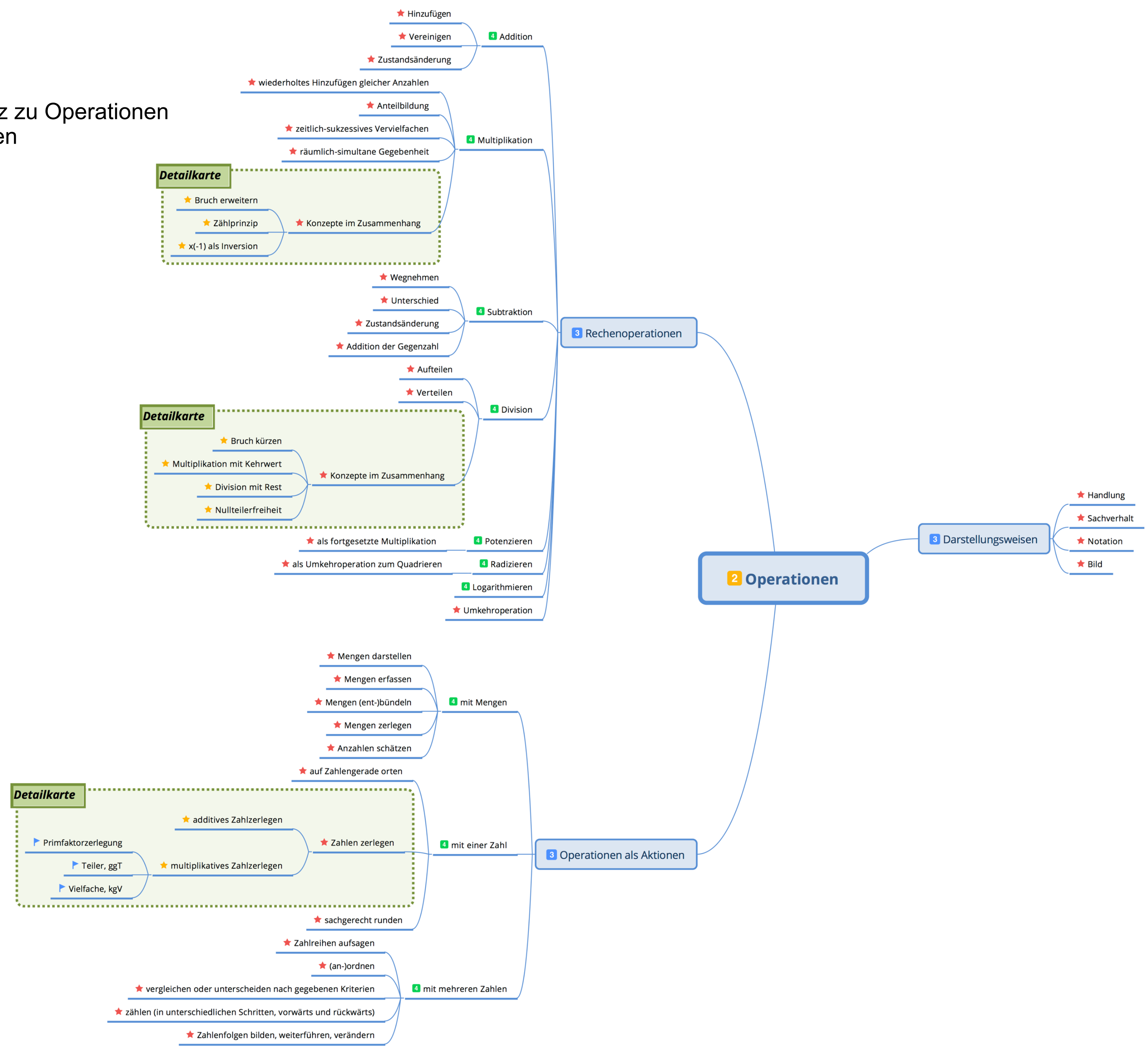


Abbildung A19: Netz zu Rechengesetzen und Rechenstrategien mit Hierarchieebenen

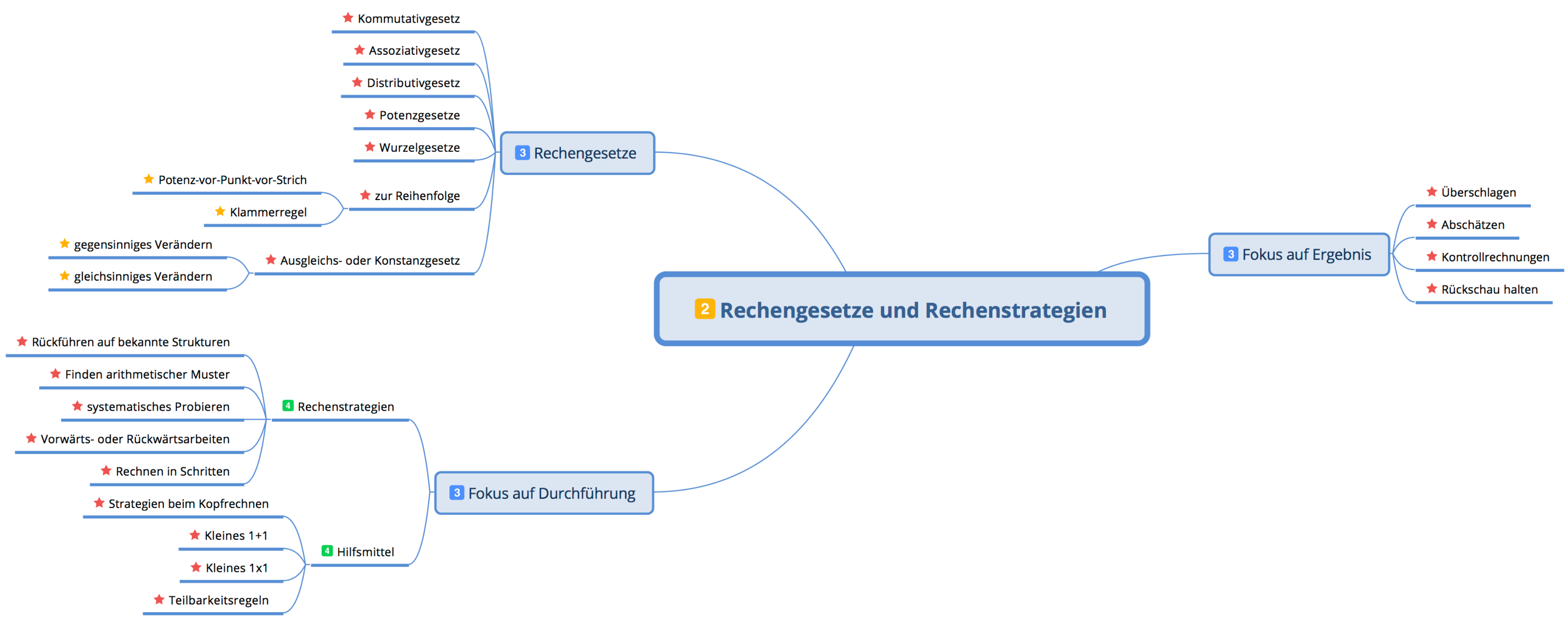


Abbildung A20: Netz zum Überblick über den Themenbereich „Gleichungen und Funktionen“ mit Hierarchieebenen

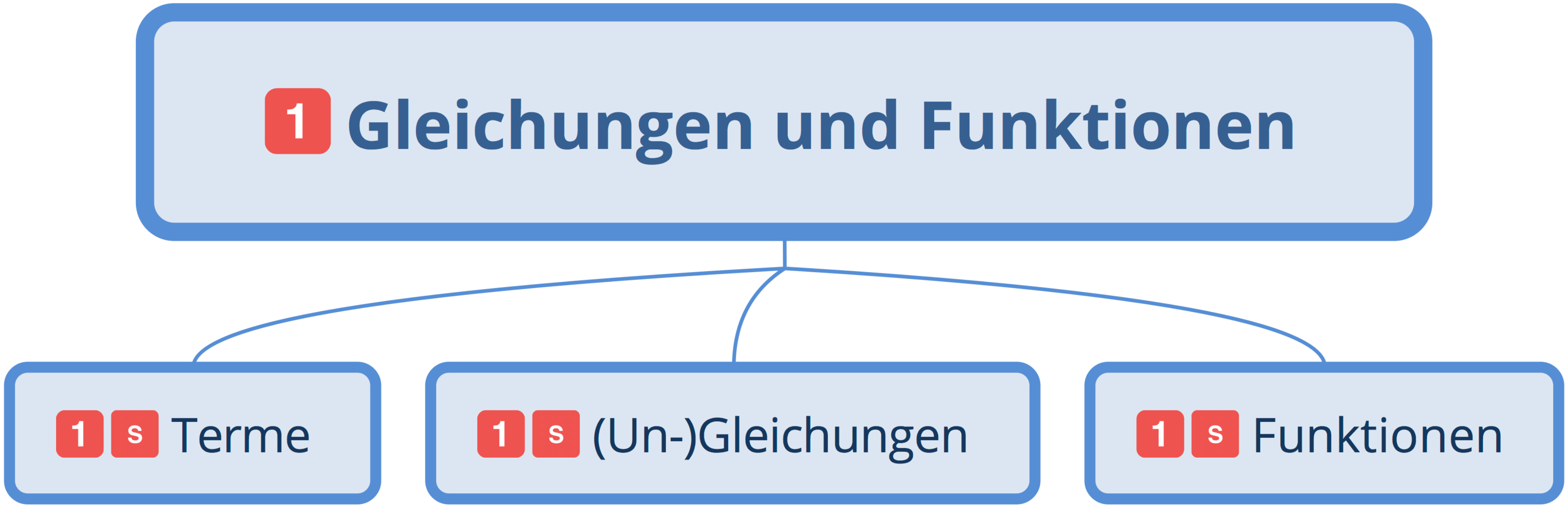


Abbildung A21: Netz zum Themenstrang Terme mit Hierarchieebenen

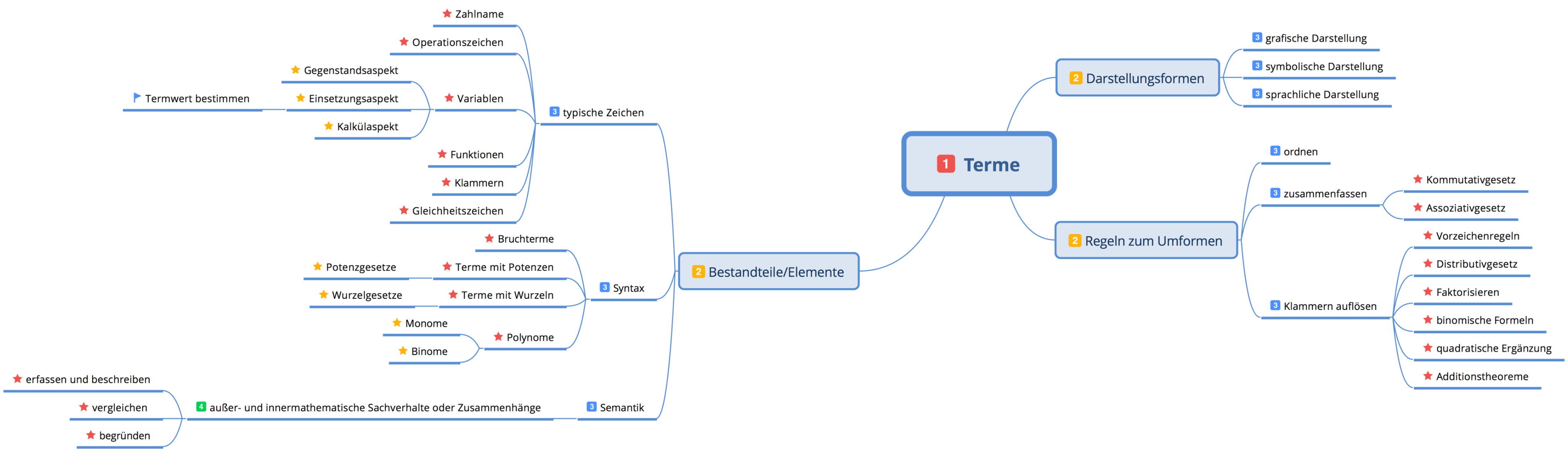


Abbildung A22: Netz zum Themenstrang (Un-)Gleichungen mit Hierarchieebenen

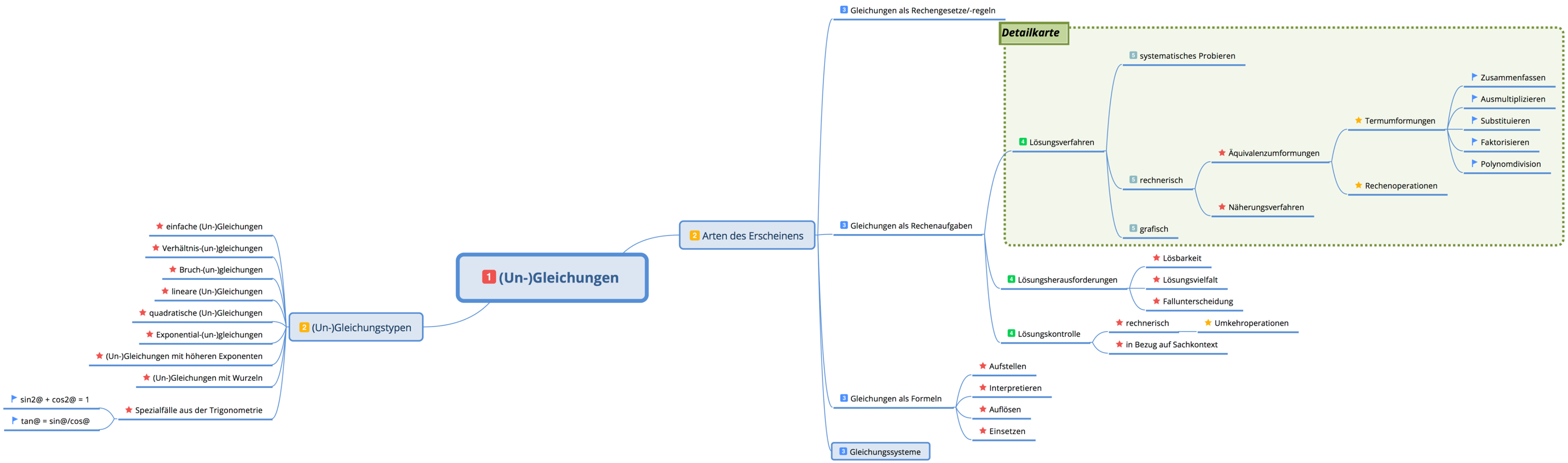


Abbildung A23: Netz zu Gleichungssystemen mit Hierarchieebenen

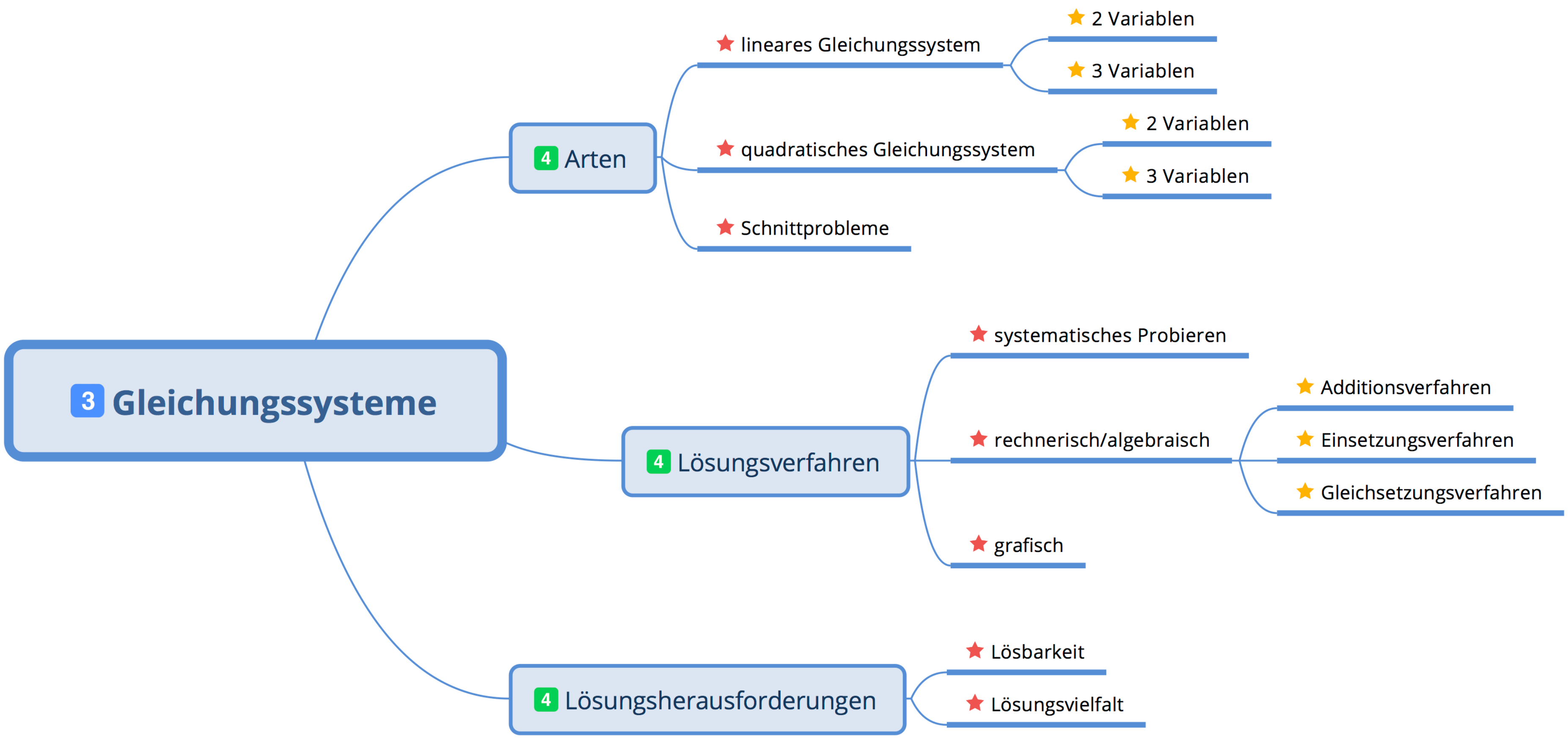


Abbildung A24: Netz zum Themenstrang „Funktionen“ mit Hierarchieebenen

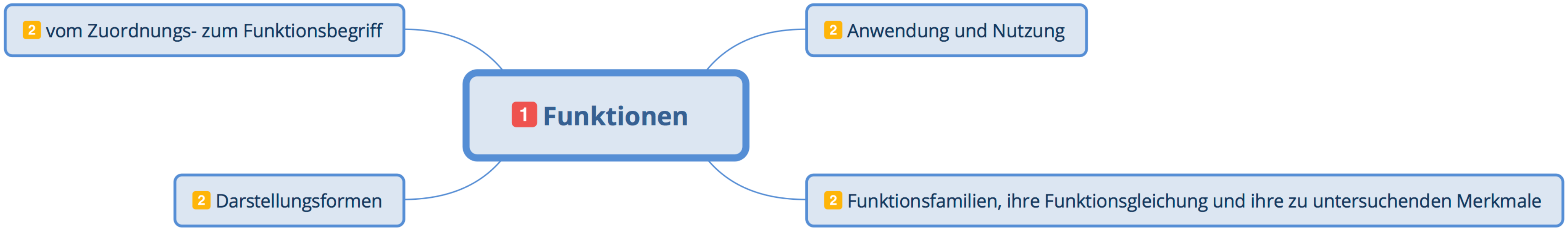


Abbildung A25: Netz vom Zuordnungs- zum Funktionsbegriff mit Hierarchieebenen

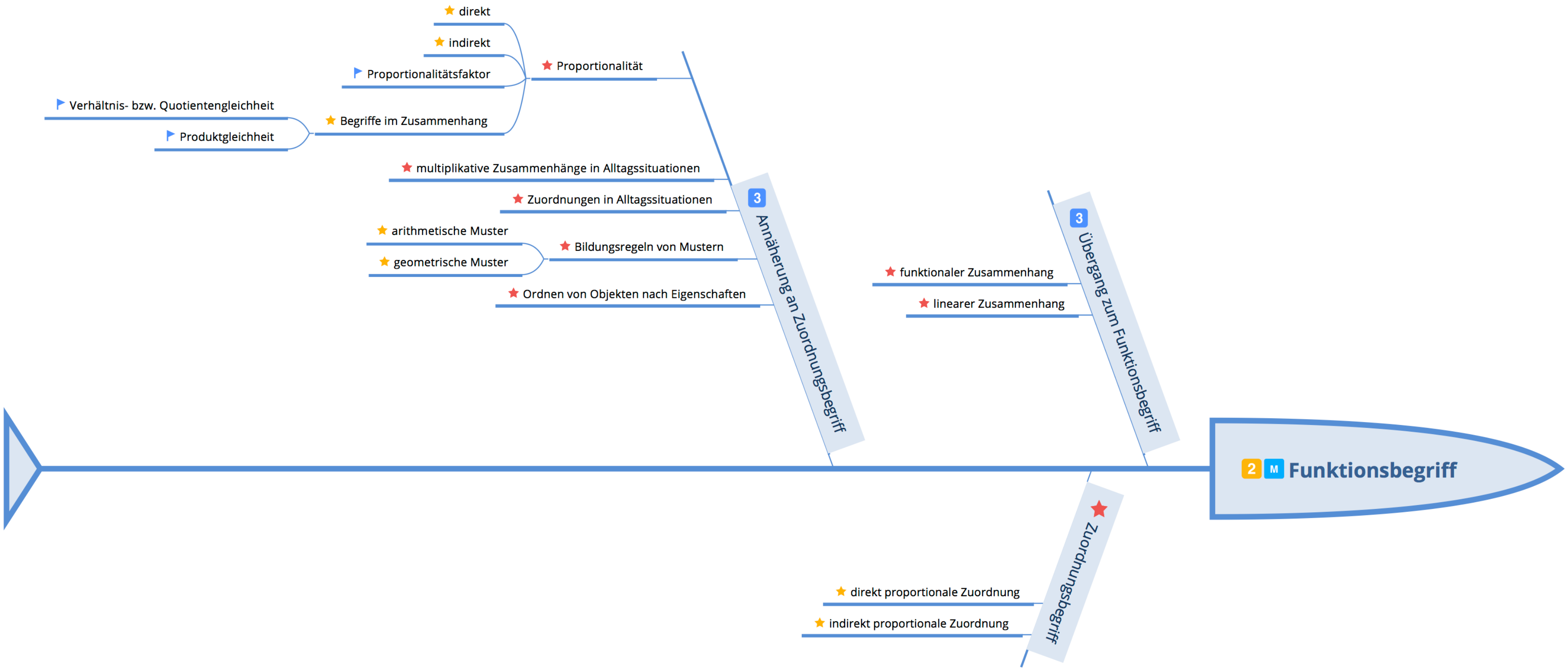


Abbildung A26: Netz zu den Darstellungsformen mit Hierarchieebenen

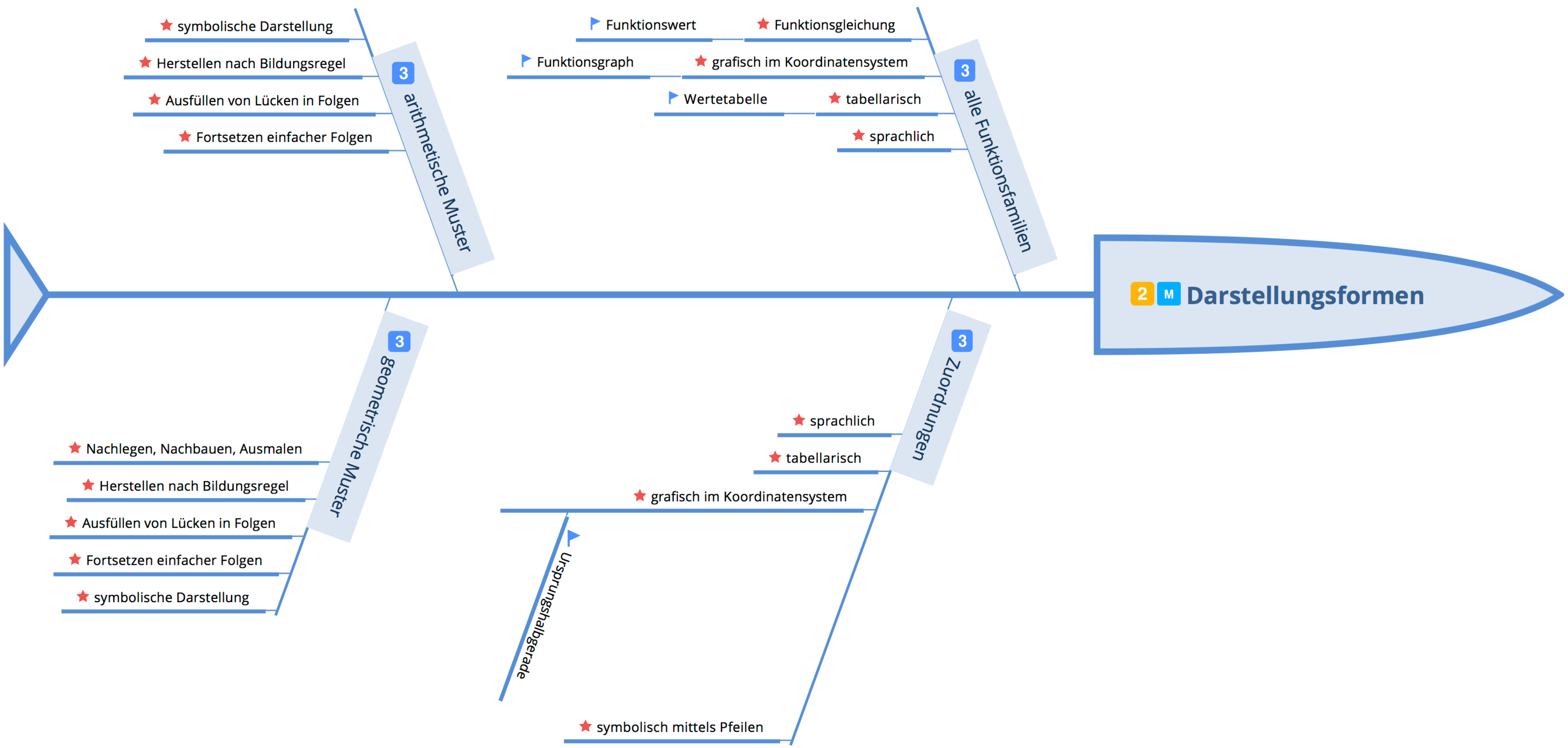


Abbildung A27: Netz zu den Funktionsfamilien, ihrer Funktionsgleichung und ihren zu untersuchenden Merkmalen mit Hierarchieebenen

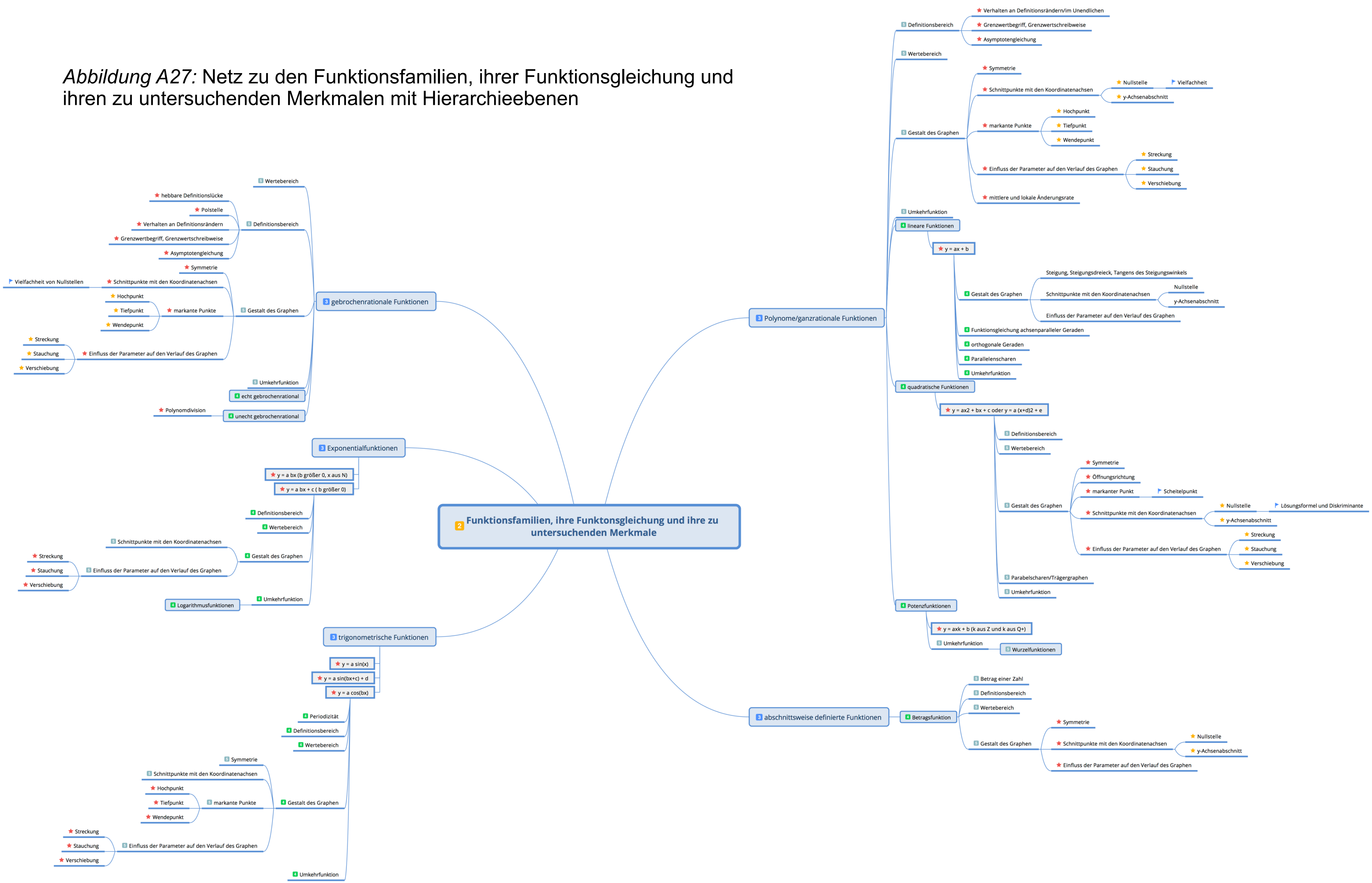


Abbildung A28: Netz zur Anwendung und Nutzung mit Hierarchieebenen

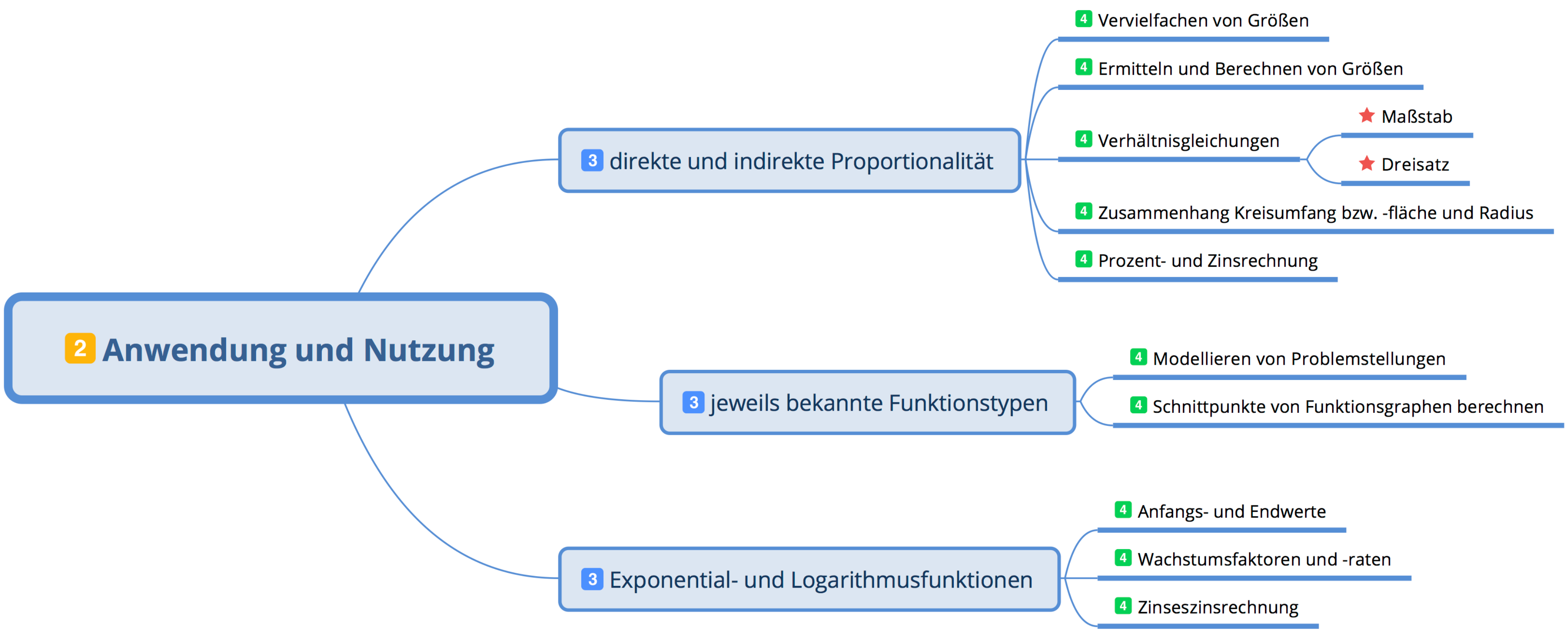


Abbildung A29: Netz zur Prozent- und Zinsrechnung mit Hierarchieebenen

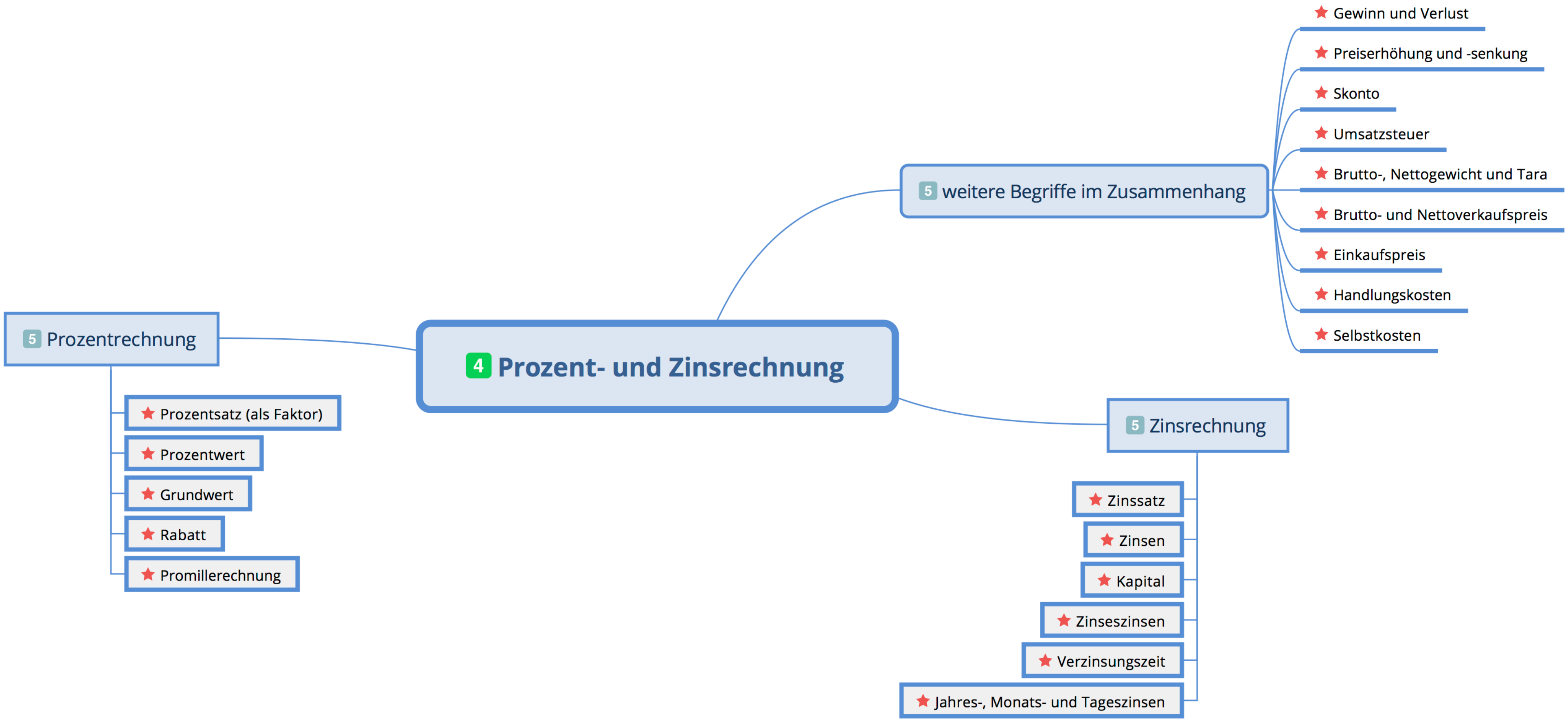


Abbildung A30: Netz zur Übersicht über den Themenbereich „Daten und Zufall“ mit Hierarchieebenen

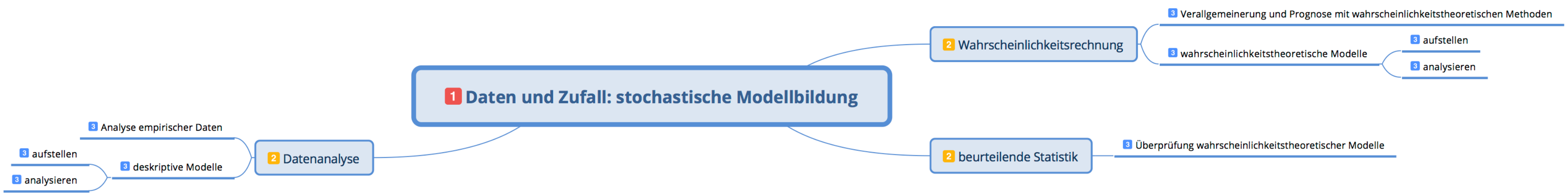


Abbildung A31: Netz zur Datenanalyse mit Hierarchieebenen

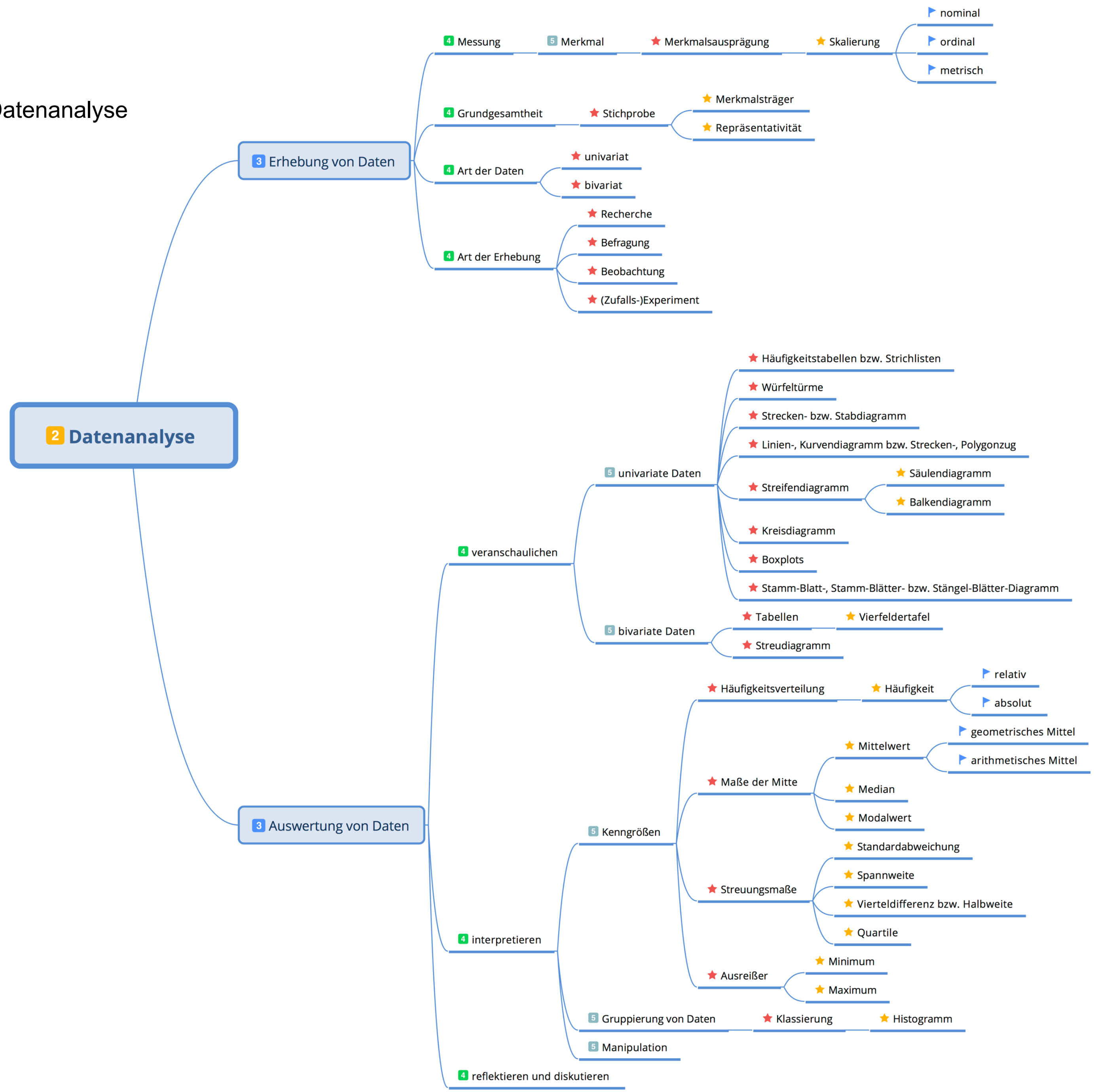
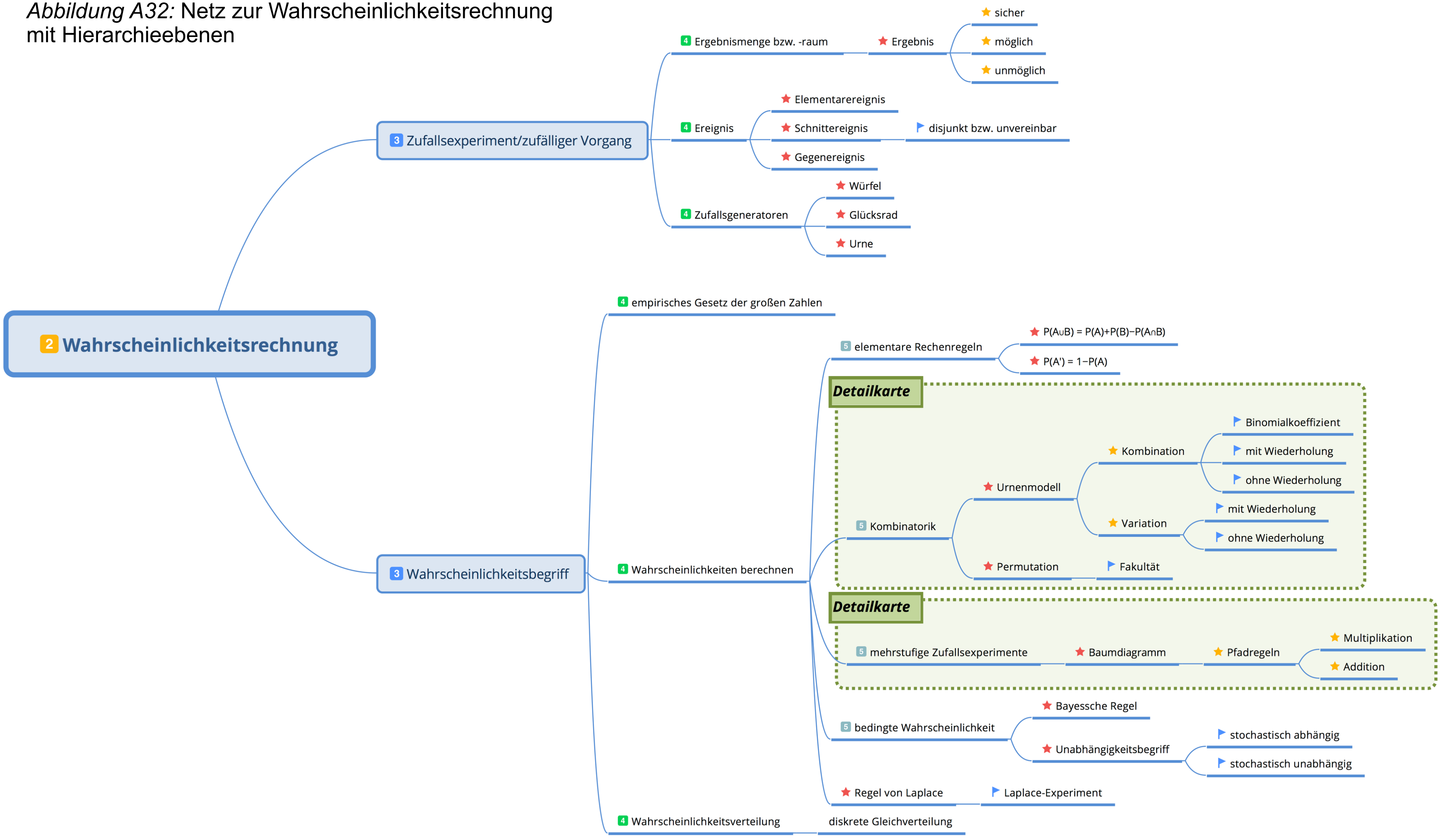


Abbildung A32: Netz zur Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Hierarchieebenen



Selbstständigkeitserklärung

Name: Brunner
Vorname: Elisabeth

Ich erkläre gegenüber der Freien Universität Berlin, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Die vorliegende Arbeit ist frei von Plagiaten. Alle Ausführungen, die wörtlich oder inhaltlich aus anderen Schriften entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Diese Dissertation wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch in keinem früheren Promotionsverfahren eingereicht.

Mit einer Prüfung meiner Arbeit durch ein Plagiatsprüfungsprogramm erkläre ich mich einverstanden.

Datum: 7. September 2020