

# 6. Vektormesonen

Das Vektormeson ist in der Natur nur als Resonanz bekannt. Innerhalb der QCD in der Valenzquark-Approximation ist es jedoch ein stabiles Teilchen. Wir werden in diesem Kapitel zuerst das Problem der chiralen Extrapolation diskutieren. Ergebnisse für das Vektormeson im chiralen Limes erlauben dann eine Aussage über die Diskretisierungsfehler und damit über den Erfolg des Verbesserungsprogramms. Schließlich werden wir die Ergebnisse dazu verwenden, Aussagen über die Massen von Vektormesonen zu machen, die s- oder c-Quarks enthalten.

## 6.1. Chirale Extrapolation

Um Aussagen über das  $\rho$ -Meson zu machen, ist es erforderlich, die Ergebnisse in den chiralen Limes zu extrapolieren. Für kleine Quarkmassen ist nach Rechnungen der chiralen Störungstheorie [78] (siehe Abschnitt 4.3) die Masse des Vektormesons  $m_V$  in der Valenzquark-Approximation proportional zur pseudoskalaren Masse  $m_{PS}$  und somit proportional zur Wurzel der Quarkmasse. Dies führt zu dem Extrapolationsansatz

$$am_V = aM_V + \sum_{k>0} b_k (am_{PS})^k, \quad (6.1)$$

wobei  $M_V$  die Masse des Vektormesons im chiralen Limes bezeichnet. Numerisch erweist es sich jedoch als schwierig, zu entscheiden, ob  $b_1 \neq 0$  ist, wie es die chirale Störungstheorie vorsieht.

Bei diesem Ansatz sind die Massen in Einheiten von  $a^{-1}$  gegeben, wobei der Gitterabstand  $a$  eine Funktion der Eichfeldkopplung  $\beta$  ist. Wir werden dies in diesem Abschnitt durch einen Index deutlich machen und den Gitterabstand mit  $a_\beta$  bezeichnen. Wir gehen nun davon aus, dass ein (dimensionsloser) Skalenfaktor  $s_\beta$  bekannt ist, der eine Umrechnung auf eine von  $\beta$  unabhängige Skala erlaubt. Das Produkt  $s_\beta a_\beta$  ist dann konstant und unabhängig von  $\beta$ . Ein Beispiel für einen solchen Skalenfaktor ist  $r_0/a_\beta$ , welches durch die Gleichung (4.13) gegeben ist.

Ersetzen wir in Gleichung (6.1)  $am_V \rightarrow s_\beta a_\beta m_V$  und analog die anderen Massen, dann erhalten wir einen von  $\beta$  unabhängigen Extrapolationsansatz. Damit wäre eine Anpassung dieses Ansatzes an den kompletten Datensatz und somit eine zuverlässigere Aussage über  $b_1$  möglich. Allerdings werden bei einem solchen Vorgehen Diskretisierungsfehler vernachlässigt. Gehen wir davon aus, dass die Diskretisierungsfehler von der Ordnung  $O(a^2)$  sind, so sollten diese proportional  $s_\beta^{-2}$  verschwinden. Diskretisierungsfehler können somit dadurch berücksichtigt werden, dass die Massen mit einem Faktor  $(1 + d s_\beta^{-2})$  multipliziert werden. A priori muss davon ausgegangen werden, dass der Koeffizient  $d$  für verschiedene Massen unterschiedliche Werte annimmt. Wie wir später sehen werden, ist  $d$  im Allgemeinen klein. Dies wird somit a posteriori rechtfertigen, dass wir  $d$  vorerst für alle Massen gleich annehmen.

Wir machen nun den Fitansatz

$$\tilde{s}_\beta a_\beta m_V = \frac{\tilde{s}_\beta a_\beta M_V + \sum_{k=1}^{K-1} b_k (\tilde{s}_\beta a_\beta m_{\text{PS}})^k + b_K c_{K-1} (\tilde{s}_\beta a_\beta m_{\text{PS}})^K}{1 + c_{K-1} (\tilde{s}_\beta a_\beta m_{\text{PS}})^{K-1}} \quad (6.2)$$

wobei  $\tilde{s}_\beta = (1 + d s_\beta^{-2}) s_\beta$  ist. Der Ansatz ist so gewählt, dass für  $m_{\text{PS}} \rightarrow 0$  und  $K > 2$

$$\tilde{s}_\beta a_\beta m_V \simeq \tilde{s}_\beta a_\beta M_V + b_1 \tilde{s}_\beta a_\beta m_{\text{PS}} \quad (6.3)$$

ist. Bei diesem Padé-artigen Ansatz wurde auch berücksichtigt, dass für große (entartete) Quarkmassen die Differenz zwischen der Masse des pseudoskalaren und des Vektormesons kleiner wird und somit  $m_V \propto m_{\text{PS}}$  ist.

Wir können mit dieser Gleichung ohne Kenntnis eines Skalenfaktors einen Fit an unsere Daten machen, indem wir außer dem Produkt  $a_\beta M_V$  und den Koeffizienten  $b_k$  sowie  $c_{K-1}$  auch  $\tilde{s}_\beta$  als freien Parameter verwenden. Zur Fixierung der Skala setzen wir  $\tilde{s}_{\beta=6.0} = 1$ , so dass wir alle Größen mit Dimension einer Masse in Einheiten von  $a_{\beta=6.0}^{-1}$  erhalten.

Um die Übereinstimmung mit den Aussagen der chiralen Störungstheorie zu testen, haben wir diese Fits zum einen mit  $b_1$  als freien Parameter und zum anderen mit festem  $b_1 = 0$  durchgeführt. Im ersten Fall fanden wir eine gute Übereinstimmung mit unseren Ergebnissen für  $K = 4$ . Die Extrapolation der Masse des Vektormesons wird jedoch unzuverlässig, wenn der Koeffizient  $c_3$  groß wird. Wir fanden jedoch, dass die Resultate innerhalb der Fehler im Bereich  $0.5 \leq c_3 \leq 5$  konstant sind. Wir haben diesen Koeffizienten daher auf den Wert  $c_3 = 1$  fixiert. Die Fitergebnisse sind in den Spalten „Pad1“ und „Pad2“ der Tabelle 6.1 auf Seite 76 dokumentiert.

Die Ergebnisse dieser Fits sind in den Abbildungen 6.1 und 6.2 graphisch dargestellt. Wir finden, dass alle Ergebnisse für die Masse des Vektormesons als Funktion der pseudoskalaren Masse auf eine universelle Kurve fallen. Für

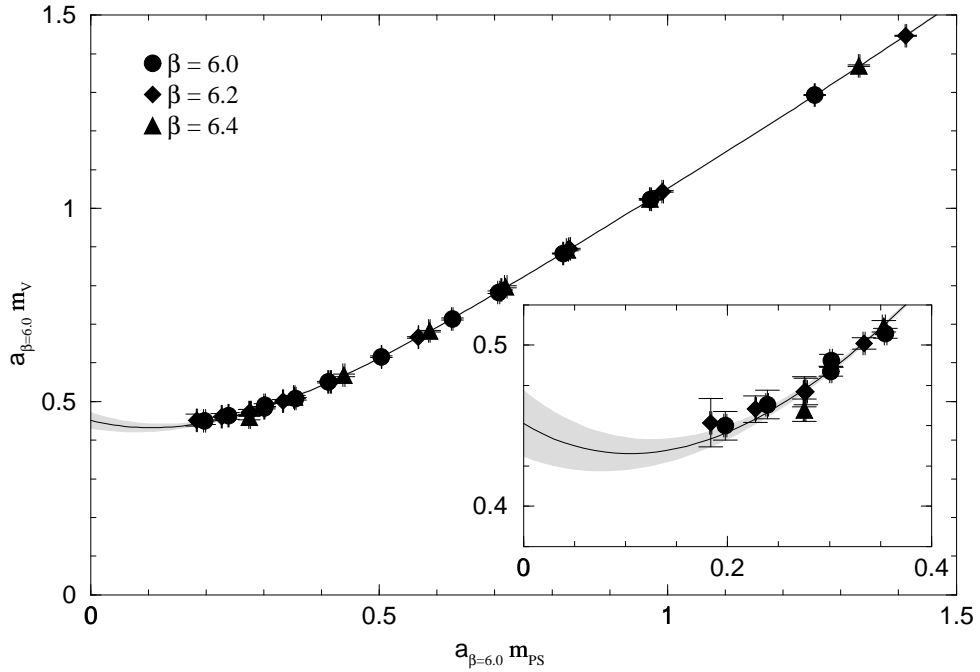


Abbildung 6.1.: Masse des Vektormesons  $m_V$  als Funktion der Masse des pseudoskalaren Mesons  $m_{PS}$ . Die Linie stammt von einem Fit an Gleichung (6.2) mit  $K = 4$  und  $b_1$  als freien Parameter.

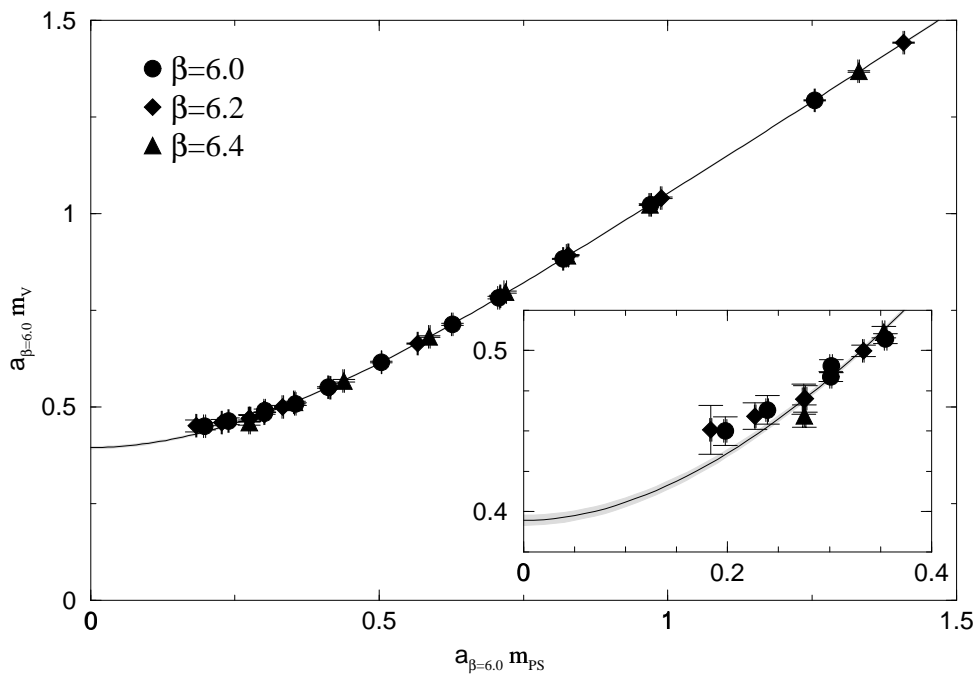


Abbildung 6.2.: Wie Abbildung 6.1, jedoch für  $b_1 = 0$ .

$a_{\beta=6.0}m_{\text{PS}} \gtrsim 0.6$  (dies entspricht  $m_{\text{PS}} \gtrsim 1.3$  GeV) finden wir ein deutlich lineares Verhalten, wobei  $m_{\text{PS}}/m_{\text{V}} \simeq 1$  ist. Erst für kleine Massen beginnen  $m_{\text{PS}}$  und  $m_{\text{V}}$  deutlich voneinander abzuweichen. Vergleicht man die beiden Abbildungen im Bereich kleiner Quarkmassen, so wird deutlich, dass der Ansatz der chiralen Störungstheorie eine wesentlich bessere Beschreibung unserer Simulationsergebnisse liefert. Dies ist auch in den unterschiedlichen Werten für  $\chi^2$  pro Freiheitsgrad abzulesen. Das Vorzeichen des Koeffizienten  $b_1$  stimmt mit den Erwartungen der chiralen Störungstheorie überein (siehe Abschätzung von  $C_{1/2}$  in Abschnitt 4.3). Sein Betrag ist jedoch deutlich kleiner, als eine (grobe) Abschätzung der Parameter der chiralen Störungstheorie erwarten lässt. Die CP-PACS-Kollaboration [116] fand bei ihren Simulationen mit Wilson-Fermionen einen noch kleineren Wert von  $b_1 = -0.071(8)$ .

Fit	Pad1	Pad2	Pol1	Pol2
$a_{\beta=6.0}M_{\text{V}}$	0.451(20)	0.3946(31)	0.460(26)	0.4010(34)
$b_1$	-0.38(13)	0 (fixed)	-0.39(17)	0 (fixed)
$b_2$	2.06(30)	1.208(39)	1.85(36)	1.031(38)
$b_3$	-1.39(28)	-0.617(66)	-0.92(24)	-0.373(46)
$b_4$	1.365(91)	1.119(29)		
$c_3$	1 (fixed)	1 (fixed)		
$\tilde{s}_{\beta=6.2}$	1.3734(75)	1.3701(74)	1.3754(81)	1.3741(82)
$\tilde{s}_{\beta=6.4}$	1.828(12)	1.826(12)	1.832(13)	1.833(14)
$\chi_{\text{pdf}}^2$	0.6	0.9	0.7	1.0

Tabelle 6.1.: Ergebnisse der Fits an Gleichung (6.2) („Pad1“ und „Pad2“) und (6.4) („Pol1“ und „Pol2“).

Um tatsächlich auszuschließen, dass die Ergebnisse durch die Berücksichtigung von Resultaten bei schweren Quarkmassen beeinflusst wurden, haben wir diese Fits außerdem mit einem polynomialen Ansatz

$$\tilde{s}_{\beta} a_{\beta} m_{\text{V}} = \tilde{s}_{\beta} a_{\beta} M_{\text{V}} + \sum_{k=1}^K (\tilde{s}_{\beta} a_{\beta} m_{\text{PS}})^k \quad (6.4)$$

durchgeführt. Den Fitbereich haben wir dabei auf  $0 \leq a_{\beta=6.0}m_{\text{PS}} < 0.75$  beschränkt. Die Daten konnten gut mit einem kubischen Polynom beschrieben werden. Die Fitergebnisse sind in den Spalten „Pol1“ und „Pol2“ der Tabelle 6.1 aufgelistet. Innerhalb der Fehler sind die Resultate für  $a_{\beta=6.0}M_{\text{V}}$  und  $b_1$  für die Fits „Pad1“ und „Pol1“ einerseits und „Pad2“ und „Pol2“ andererseits in guter Übereinstimmung.

Die Ergebnisse für  $\tilde{s}_{\beta}$  stimmen bei allen Fits überein. Sind die Diskretisierungsfehler klein, so sollte  $\tilde{s}_{\beta} \simeq a_{\beta=6.0}/a_{\beta}$  sein. In Tabelle 6.2 werden die

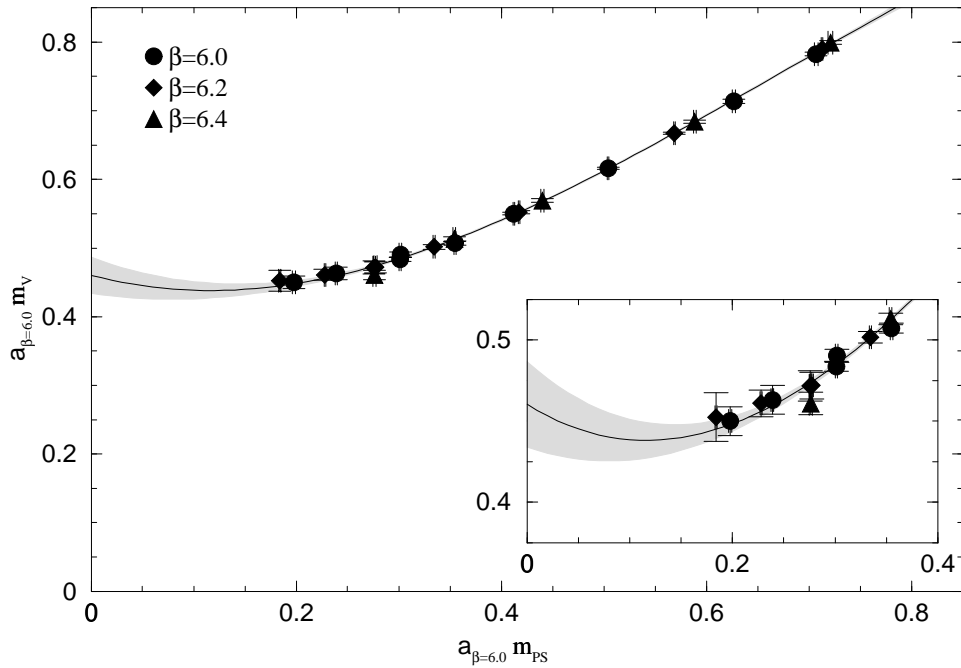


Abbildung 6.3.: Masse des Vektormesons  $m_V$  als Funktion der Masse des pseudoskalaren Mesons  $m_{PS}$ . Die Linie stammt von einem Fit an Gleichung (6.4) mit  $K = 3$  und  $b_1$  als freien Parameter.

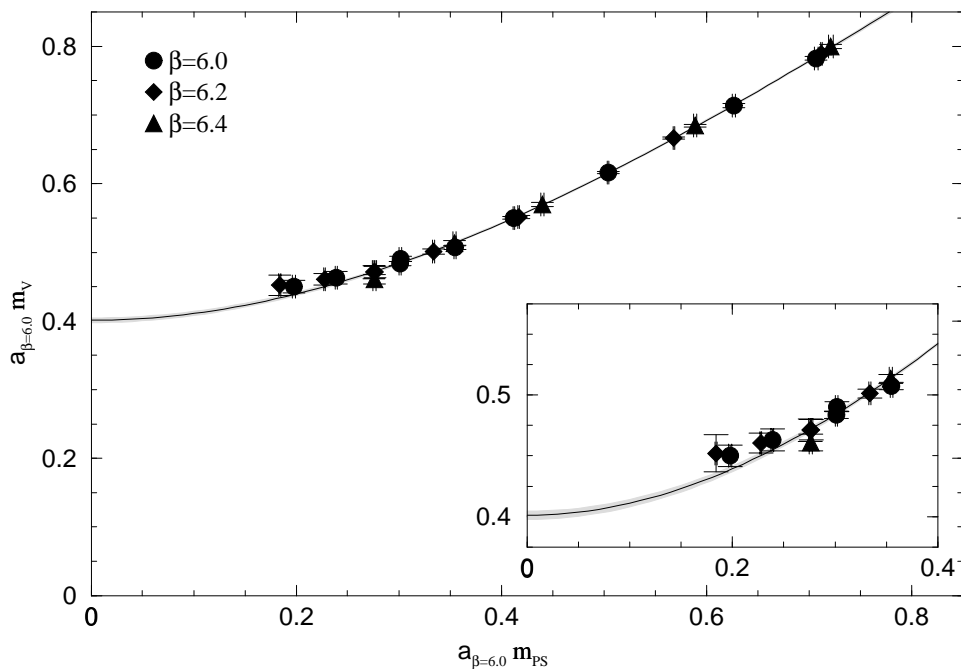


Abbildung 6.4.: Wie Abbildung 6.3, jedoch für  $b_1 = 0$ .

gemittelten Ergebnisse für  $\tilde{s}_\beta$  mit den Resultaten verglichen, die man für die  $r_0$ -Skala mit Hilfe von Gleichung (4.13) erhält. Die Übereinstimmung ist bemerkenswert. Dies ist ein Indiz dafür, dass Diskretisierungsfehler tatsächlich klein sind. Da wir hier Annahmen über diese Fehler machen mussten, halten wir dieses Verfahren allerdings nicht für zuverlässig, um die Masse des  $\rho$  im Kontinuumslimit zu bestimmen.

$\beta$	$\tilde{s}_\beta$	$r_0(\beta)/r_0(\beta = 6.0)$
6.2	1.37(1)	1.371
6.4	1.83(1)	1.818

Tabelle 6.2.: Vergleich der Ergebnisse für  $\tilde{s}_\beta$  mit der  $r_0$ -Skala.

## 6.2. Masse des $\rho$ -Mesons im Kontinuumslimit

Nachdem wir im vorhergehenden Abschnitt die Artefakte der Valenzquark-Approximation identifiziert haben, werden wir nun, um eine kontrollierte Kontinuumsextrapolation durchführen zu können, die Ergebnisse für konstante Eichfeldkopplung  $\beta$  in den chiralen Limes extrapolieren. Ähnlich wie bei den Quarkmassen (siehe Abschnitt 5.3) fanden wir im vorhergehenden Abschnitt für  $m_q \lesssim m_{\text{strange}}$  signifikante Abweichungen vom Verhalten der Masse des Vektormesons, was man ohne die Valenzquark-Approximation in diesem Bereich erwarten würde. Da dieses Verhalten ein Artefakt dieser Näherung und somit unphysikalisch ist, werden wir bei diesen Extrapolationen die Ergebnisse bei kleinen Quarkmassen verwerfen.<sup>1</sup>

Wenn wir unsere Ergebnisse für die Masse des Vektormesons  $m_V$  quadratisch als Funktion des Quadrats der pseudoskalaren Masse  $m_{\text{PS}}$  auftragen, so finden wir einen im gesamten Datenbereich in erster Näherung linearen Zusammenhang. Wir erwarten daher, dass ein Ansatz, bei dem wir die Krümmung durch einen Term  $\propto m_{\text{PS}}^3$  berücksichtigen, zu wesentlich stabileren Ergebnissen führt. Wir machen daher den „*phänomenologischen*“ Ansatz

$$(am_V)^2 = (aM_V)^2 + b_2 (am_{\text{PS}})^2 + b_3 (am_{\text{PS}})^3, \quad (6.5)$$

wobei  $aM_V$  die Masse des Vektormesons im chiralen Limes bezeichnet. Hier ist anzumerken, dass sich dieser Ansatz nur um Terme  $O(m_{\text{PS}}^4)$  von dem im vorhergehenden Abschnitt verwendeten polynomialen Ansatz unterscheidet. Die Ergebnisse dieser Extrapolation sind in Tabelle 6.3 aufgelistet und in den Abbildungen 6.5 bis 6.7 graphisch dargestellt.

<sup>1</sup> Dies ist eine Änderung des zuvor [121, 122] angewandten Verfahrens.

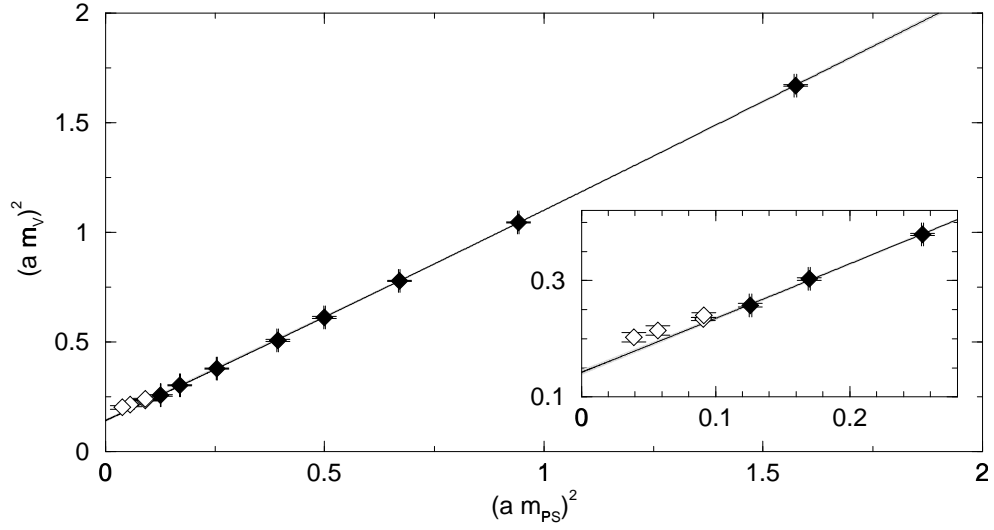


Abbildung 6.5.: Chirale Extrapolation der Masse des Vektormesons für  $\beta = 6.0$ . Die Linie stammt von einem Fit an Gleichung (6.5), bei dem die mit offenen Symbolen dargestellten Datenpunkte nicht berücksichtigt wurden.

$\beta$	$aM_V$	$b_2$	$b_3$	Fitbereich	$\chi_{\text{pdf}}^2$
6.0	0.3774(43)	0.910(20)	0.049(15)	$\kappa \leq 0.1338$	0.5
6.2	0.2764(29)	0.910(15)	0.066(14)	$\kappa \leq 0.1351$	1.0
6.4	0.2062(30)	0.921(22)	0.077(31)		0.3

Tabelle 6.3.: Resultate für die chirale Extrapolation der Masse des Vektormesons mit Hilfe von Gleichung (6.5).

In Abbildung 6.7 sind neben den Ergebnissen für Vektormesonen mit zwei entarteten Quarkmassen  $m_{q_1} = m_{q_2}$  auch die Resultate für  $m_{q_1} \neq m_{q_2}$  eingezeichnet. Innerhalb der Fehler weichen letztere nicht von einem Fit an Gleichung (6.5) ab, bei dem nur die Daten für entartete Quarkmassen berücksichtigt wurden.

Bei der Extrapolation in den Kontinuumslimit gehen wir davon aus, dass wir lediglich Diskretisierungsfehler proportional  $a^2$  haben. Unter Verwendung der  $r_0$ -Skala machen wir daher den Ansatz

$$r_0 m_\rho = \left[ 1 + d \left( \frac{a}{r_0} \right)^2 \right] \frac{r_0}{a} a M_V. \quad (6.6)$$

Wenn wir  $r_0$  mit Hilfe von Gleichung (4.13) bestimmen und  $aM_V$  Tabelle 6.3 entnehmen, so ergibt ein Fit an diese Gleichung  $d = 0.2 \pm 1.4$  und  $r_0 m_\rho =$

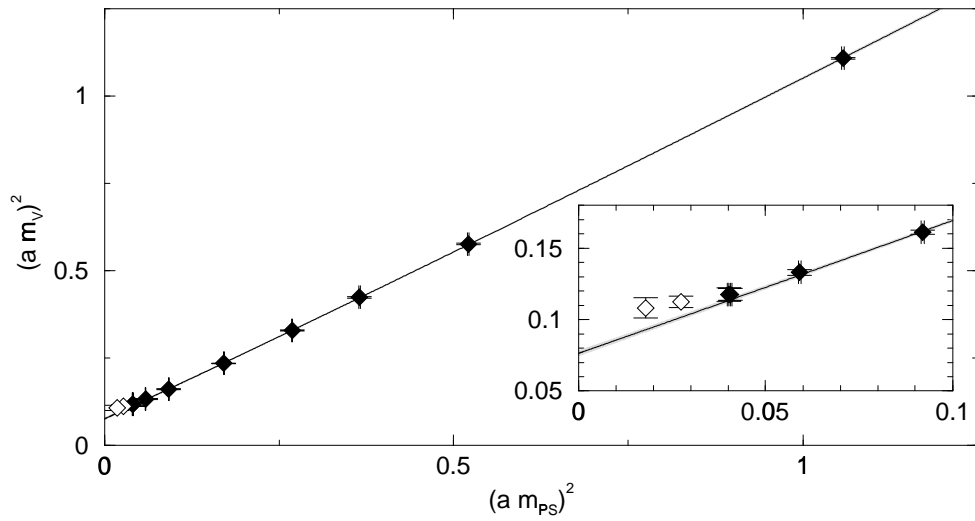


Abbildung 6.6.: Wie Abbildung 6.5, jedoch für  $\beta = 6.2$ .

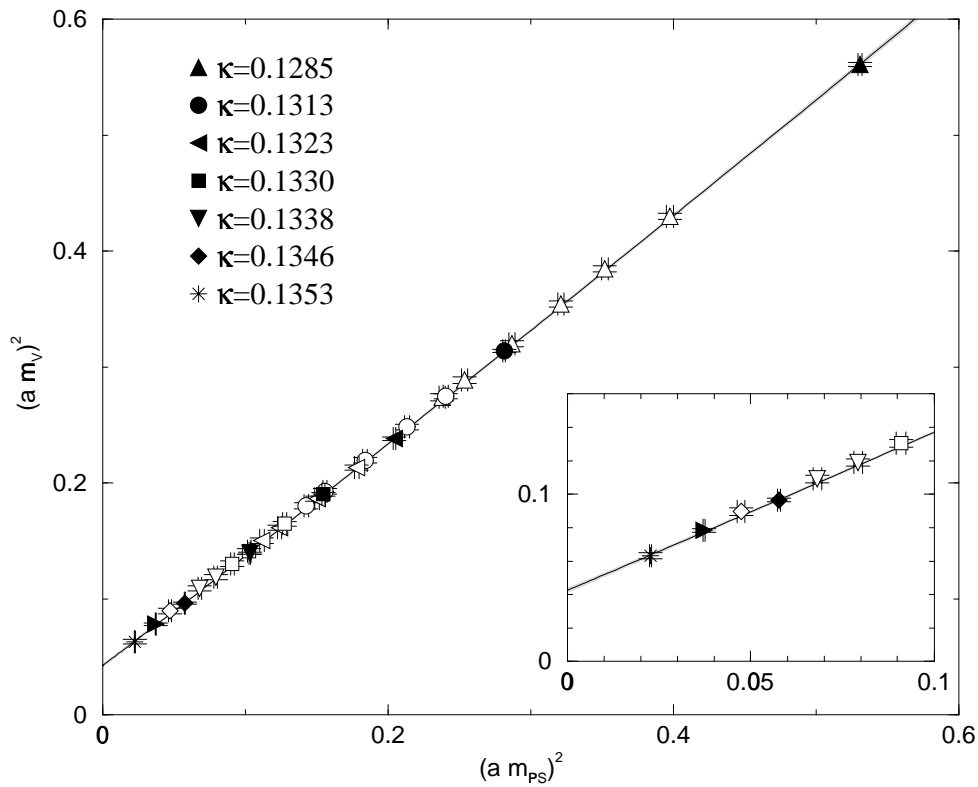


Abbildung 6.7.: Wie Abbildung 6.5, jedoch für  $\beta = 6.4$ . Mit offenen Symbolen sind die Massen eingetragen, für die die Quarkmassen verschieden sind. Beim Fit blieben diese unberücksichtigt.



2.021(35). Mit  $r_0 = 0.5\text{fm}$  als Umrechnungsfaktor ergibt sich

$$m_\rho = 797(13) \text{ MeV} \quad (6.7)$$

Dieser Wert liegt knapp 4% über dem experimentellen Wert [37] des  $m_{\rho(770)} = 770.0(8) \text{ MeV}$ . Allerdings haben wir bei einem Vergleich zu berücksichtigen, dass es bei der Wahl der Skala eine Unsicherheit in der Größenordnung von 10% gibt (siehe Abschnitt 4.5). Das Ergebnis dieses Fits ist in Abbildung 6.8 dargestellt.

Die Diskretisierungsfehler erweisen sich somit für die Masse des Vektormesons im chiralen Limes als sehr klein. Der Wert im Kontinuumsimes unterscheidet sich weniger als 0.3% vom Ergebnis bei  $\beta = 6.0$ . Dies ist konsistent mit den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnitts und macht die überraschend gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen für  $\tilde{s}_\beta$  und den entsprechenden Werten der  $r_0$ -Skala plausibel (siehe Tabelle 6.2).

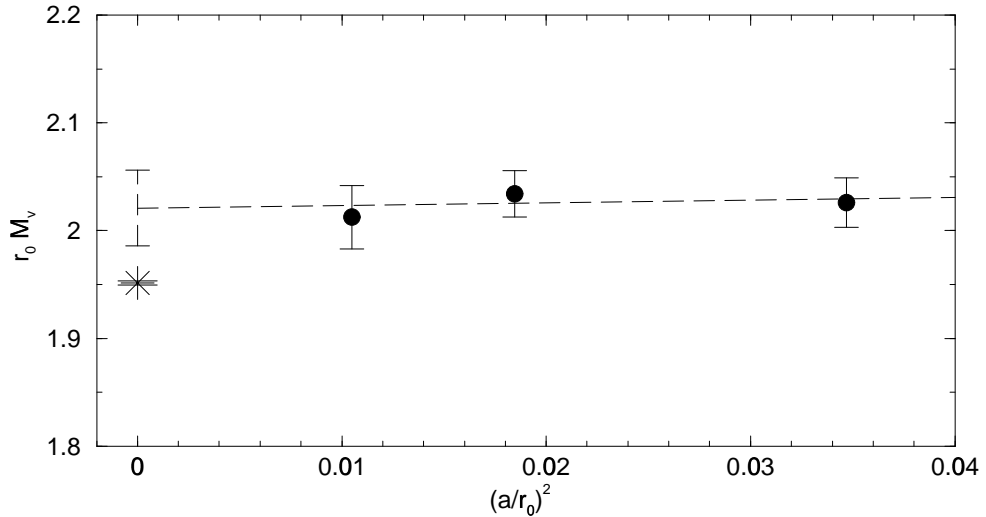


Abbildung 6.8.: Kontinuumsextrapolation der Masse des Vektormesons. Die Linie stammt von einem Fit an Gleichung (6.6). Der experimentelle Wert ist mit einem Stern (\*) eingezeichnet.

### 6.3. Der J-Parameter

Um Artefakte der Valenzquark-Approximation durch Vergleich mit experimentellen Werten zu bestimmen, haben Lacock und Michael [123] vorgeschlagen, den wie folgt definierten Parameter

$$J = m_V \left. \frac{dm_V}{dm_{\text{PS}}^2} \right|_{\frac{m_V}{m_{\text{PS}}} = 1.8} \quad (6.8)$$

zu betrachten. Der Parameter ist dimensionslos und dort zu berechnen, wo das Verhältnis der Massen des Vektor- und pseudoskalaren Mesons  $m_V/m_{\text{PS}} = 1.8$  ist, dies entspricht in etwa dem experimentellen Verhältnis von  $K^*$ - zu  $K$ -Meson. Es ist somit keine Wahl der Skala erforderlich.

Aus den experimentellen Daten haben Lacock und Michael  $J = 0.48(2)$  gefunden. Mit Hilfe von Gleichung (6.5) erhalten wir

$$J = \frac{1}{2}b_2 + \frac{3}{4}b_3m_{\text{PS}}. \quad (6.9)$$

Gleichung (6.5) kann ferner dazu verwendet werden, ein  $m_{\text{PS}}$  zu finden, so dass  $m_V/m_{\text{PS}} = 1.8$  ist. Unter Verwendung der Ergebnisse in Tabelle 6.3 erhalten wir die in Tabelle 6.4 dokumentierten Werte für  $J$ .

$\beta$	$J$
6.0	0.464(10)
6.2	0.4638(76)
6.4	0.468(12)

Tabelle 6.4.: Resultate für den in Gleichung (6.8) definierten Parameter  $J$ .

Auch hier sind die Diskretisierungsfehler klein. Eine in  $a^2$  lineare Extrapolation in den Kontinuumslimit ergibt

$$J = 0.467(14) \quad (6.10)$$

Dieser Wert ist in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die Valenzquark-Approximation bis in den Bereich der  $s$ -Quarkmasse gute Ergebnisse liefert.<sup>2</sup>

## 6.4. Fixierung der Parameter für schwere Hadronen

Um Ergebnisse für Teilchen mit einem oder mehreren  $s$ - oder  $c$ -Quarks zu erhalten, müssen wir einen Zusammenhang herstellen zwischen den physikalischen Quarkmassen und dem Kopplungsparameter  $\kappa$  oder der Masse des pseudoskalaren Mesons  $m_{\text{PS}}$ . Es kann hier verschieden vorgegangen werden, wobei nach der vorangegangenen Diskussion der Wahl der Skala (siehe Abschnitt 4.5) durchaus unterschiedliche Resultate zu erwarten sind:

<sup>2</sup> Wir kommen damit zum gegenteiligen Ergebnis wie die UKQCD-Kollaboration [64].

1. Ohne eine zusätzliche Skala zu verwenden, kann das experimentelle Verhältnis der Massen der pseudoskalaren Mesonen K, D und  $D_s$  zu den Massen der Vektormesonen  $K^*$ ,  $D^*$  und  $D_s^*$  verwendet werden, um mit Hilfe von Gleichung (6.5)  $am_{\text{PS}}$  geeignet zu bestimmen. Mit Hilfe von Gleichung (5.3) kann dann  $\kappa_{\text{up,down}, \dots}$  bestimmt werden. Wir sind dann jedoch nicht mehr in der Lage, Aussagen über die Masse schwerer Vektormesonen zu machen.
2. Bei Kenntnis einer geeigneten Skala, beispielsweise der  $r_0$ -Skala, können wir uns auf die Verwendung experimenteller Ergebnisse für die Massen der pseudoskalaren Mesonen beschränken.

Wir werden in diesem Abschnitt die Ergebnisse beider Verfahren angeben. Im Rest der Arbeit werden wir jedoch ausschließlich die des letzteren verwenden.

Bei der Umrechnung experimenteller Werte werden wir elektromagnetische Selbstenergien vernachlässigen.<sup>3</sup> Das u- und d-Quark werden wir als entartet betrachten. Unter der Annahme, dass das Quadrat der pseudoskalaren Masse proportional der Masse der darin enthaltenen Quarks ist, verwenden wir daher die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} m_\pi &= \sqrt{(m_{\pi^\pm}^2 + m_{\pi^0}^2) / 2} = 137.3 \text{ MeV} \\ m_K &= \sqrt{(m_{K^\pm}^2 + m_{K^0}^2) / 2} = 495.7 \text{ MeV} \\ m_D &= \sqrt{(m_{D^\pm}^2 + m_{D^0}^2) / 2} = 1867.0 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Für alle anderen Teilchensorten sind die Massendifferenzen experimentell  $< 1\%$  und daher in diesem Kontext vernachlässigbar. Verwenden werden wir  $m_{\rho(770)} = 770.0(8) \text{ MeV}$ ,  $m_{K^*(892)} = 891.7 \text{ MeV}$ ,  $m_{D^{*\pm}(2010)} = 2010.0(5) \text{ MeV}$ ,  $m_{D_s} = 1968.5(6) \text{ MeV}$  sowie  $m_{D_s^*} = 2112.4(7) \text{ MeV}$ . Alle experimentellen Werte wurden [37] entnommen.

Da es kein pseudoskalares Meson bestehend aus zwei Strange Quarks  $s\bar{s}$  gibt, verwenden wir die Masse eines hypothetischen „ $\eta_s$ “ Mesons. Dessen Masse lässt sich unter der gleichen Annahme wie oben wie folgt bestimmen:

$$m_{\eta_s} = \sqrt{2m_K^2 - m_\pi^2} \simeq 687 \text{ MeV} \quad (6.11)$$

Die Ergebnisse der Umrechnung in Gittereinheiten sind in Tabelle 6.5 und 6.6 zusammengestellt.

---

<sup>3</sup> Für die pseudoskalaren K-Mesonen wird der elektromagnetische Beitrag zur Masse auf unter 3 eV geschätzt [124].

	$m_{\text{PS}} (1)$				$m_{\text{PS}} (2)$			
	Exp.	$\beta=6.0$	$\beta=6.2$	$\beta=6.4$	Exp.	$\beta=6.0$	$\beta=6.2$	$\beta=6.4$
$\bar{u}$	$\pi, \rho$	0.0683	0.0500	0.0373	$\pi$	0.0648	0.0473	0.0357
$\bar{t}$	$K, K^*$	0.2481	0.1817	0.1359	$K$	0.2340	0.1707	0.1287
$\bar{s}$					„ $\eta_s$ “	0.3243	0.2366	0.1784
$\bar{c}$	$D, D^*$	0.8272	0.6035	0.4583	$D$	0.8814	0.6429	0.4848
$\bar{c}$	$D_s, D_s^*$	0.8443	0.6158	0.4679	$D_s$	0.9293	0.6778	0.5111

Tabelle 6.5.: Massen pseudoskalarer Mesonen mit verschiedenen Kombinationen von  $u$ -/ $d$ - ( $1$ ),  $s$ - und  $c$ -Quarks. Der linke Teil und der rechte Teil der Tabelle unterscheiden sich durch die im Text beschriebenen Verfahren. Die Umrechnung in Gittereinheiten im rechten Teil erfolgte mit Hilfe der  $r_0$ -Skala.

Wir können nun mit Hilfe von Gleichung (5.3) und  $m_\pi$  den Wert des Kopplungsparameters  $\kappa$  bestimmen, der den leichten  $u$ - und  $d$ -Quarks entspricht. Dieses Ergebnis kann dazu genutzt werden, um  $\kappa_{\text{strange}}$  mit Hilfe von  $m_K$  zu bestimmen. Für schwerere Quarkmassen können wir aufgrund des eingeschränkten Fitbereichs nicht erwarten, dass der durch Gleichung (5.3) gegebene Ansatz noch zulässig ist.

	$\kappa (1)$			$\kappa (2)$		
	$\beta=6.0$	$\beta=6.2$	$\beta=6.4$	$\beta=6.0$	$\beta=6.2$	$\beta=6.4$
$\kappa_1$	0.135254	0.135809	0.135796	0.135250	0.135814	0.135799
$\kappa_{\text{strange}}$	0.133824	0.134803	0.134993	0.133985	0.134925	0.135077

Tabelle 6.6.: Bestimmung von  $\kappa_1$  und  $\kappa_{\text{strange}}$ .

## 6.5. Vektormesonen mit $s$ - und $c$ -Quarks

Setzen wir die Werte für die Masse pseudoskalarer Mesonen aus dem rechten Teil von Tabelle 6.5 in Gleichung (6.5) ein, so erhalten wir die Massen der Vektormesonen mit einem oder mehreren  $s$ - oder  $c$ -Quarks. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.7 auf Seite 86 aufgelistet und in den Abbildungen 6.9 bis 6.12 als Funktion des Gitterabstandes dargestellt.

Nach einer Extrapolation in den Kontinuumslimites mit dem Ansatz

$$r_0 m_V^{(\beta=\infty)} = \left[ 1 + d \left( \frac{a}{r_0} \right)^2 \right] \frac{r_0}{a} a m_V^{(\beta)} \quad (6.12)$$

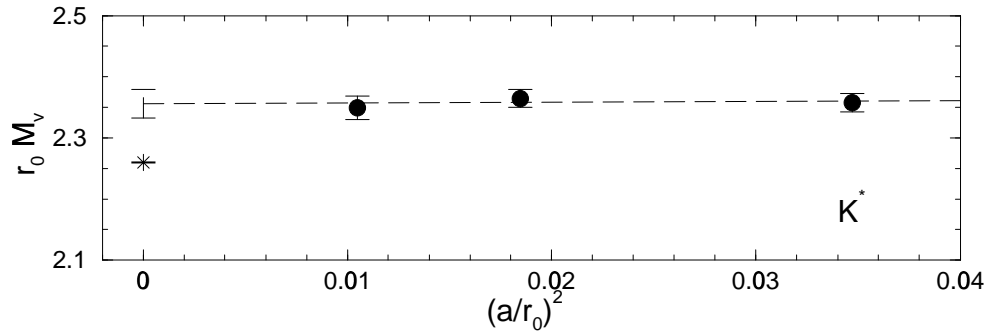


Abbildung 6.9.: Kontinuumsextrapolation der Masse des  $K^*$  Mesons. Die gestrichelte Linie stammt von einem Fit an Gleichung (6.12). Der experimentelle Wert ist mit einem Stern (\*) dargestellt.

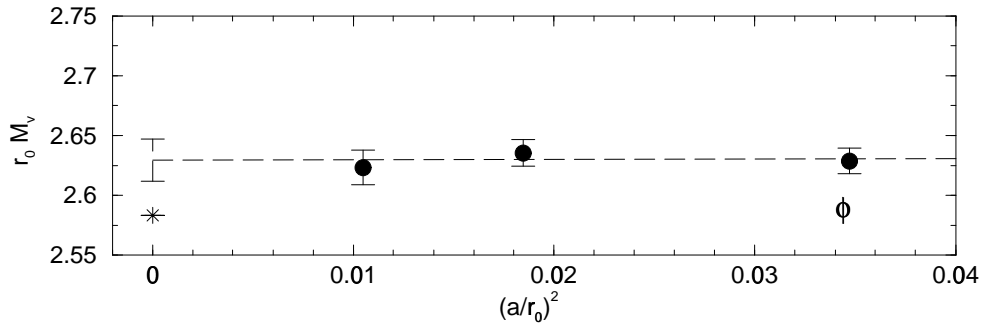


Abbildung 6.10.: Wie Abbildung 6.9, jedoch für das  $\phi$  Meson.

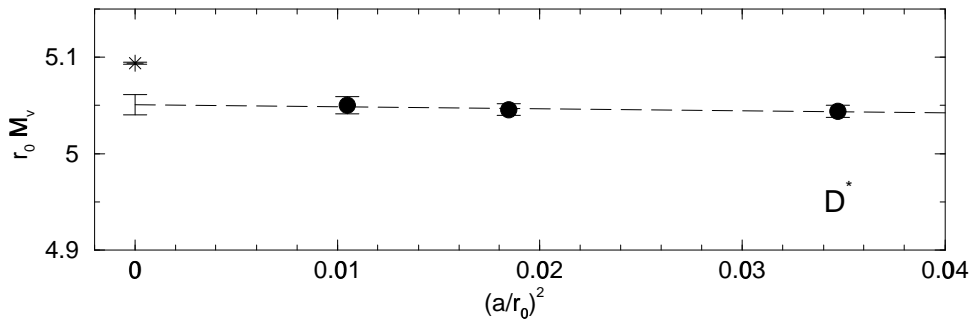


Abbildung 6.11.: Wie Abbildung 6.9, jedoch für das  $D^*$  Meson.

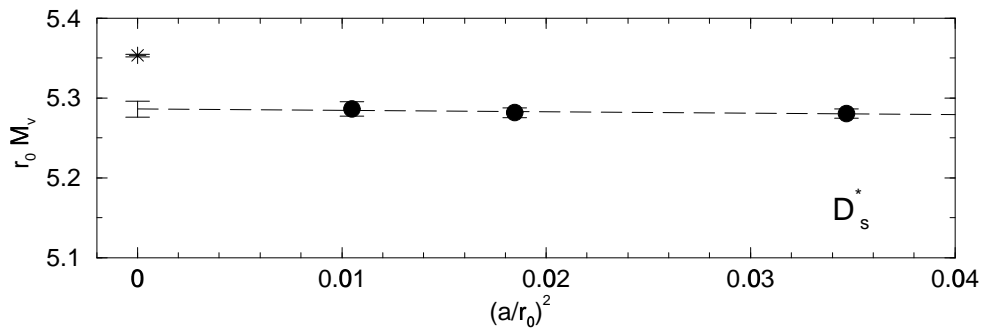


Abbildung 6.12.: Wie Abbildung 6.9, jedoch für das  $D_s^*$  Meson.

erhalten wir die in Tabelle 6.8 dokumentierten Resultate. Verwenden wir

$\beta$	6.0	6.2	6.4
$am_{K^*}$	0.4392(28)	0.3213(20)	0.2407(20)
$am_\phi$	0.4897(20)	0.3581(15)	0.2688(15)
$am_{D^*}$	0.9396(12)	0.68561(82)	0.51745(90)
$am_{D_s^*}$	0.9837(11)	0.71765(85)	0.54165(90)

Tabelle 6.7.: Massen schwerer Vektormesonen.

$r_0^{-1} = 394.6$  MeV als Umrechnungsfaktor, so finden wir

$$m_{K^*} = 930(9) \text{ MeV} \quad (6.13)$$

$$m_\phi = 1037(7) \text{ MeV} \quad (6.14)$$

$$m_{D^*} = 1993(4) \text{ MeV} \quad (6.15)$$

$$m_{D_s^*} = 2086(4) \text{ MeV} \quad (6.16)$$

Die Abweichungen von den experimentellen Werten [37]  $m_{K^*(892)} = 891.7(3)$  MeV,  $m_{\phi(1020)} = 1019$  MeV,  $m_{D^{*\pm}(2010)} = 2010.0(5)$  MeV sowie  $m_{D_s^*} = 2112.4(7)$  MeV sind kleiner als 5%.

	$d$	$r_0 m_V^{(\beta=\infty)}$
$K^*$	0.13(95)	2.356(24)
$\phi$	0.03(69)	2.629(18)
$D^*$	-0.20(37)	5.051(10)
$D_s^*$	-0.17(39)	5.286(10)

Tabelle 6.8.: Ergebnis der Kontinuumsextrapolation der Massen schwerer Vektormesonen mit Hilfe von Gleichung (6.12).

## 6.6. Massenaufspaltung

Die Aufspaltung zwischen den Massen des pseudoskalaren und Vektormesons ist auf dem Gitter definiert als

$$a^2 \Delta_{V-PS}^2 = (am_V)^2 - (am_{PS})^2 \quad (6.17)$$

Es ist bemerkenswert, dass der Unterschied zwischen den Quadraten der Massen der Vektormesonen und denen der entsprechenden pseudoskalaren Mesonen bis zu den b-Quarks relativ konstant ist. So ist

$$\begin{aligned}
 m_\rho^2 - m_\pi^2 &= 0.57 \text{ GeV}^2 \\
 m_{K^*} - m_K^2 &= 0.55 \text{ GeV}^2 \\
 m_{D^*} - m_D^2 &= 0.55 \text{ GeV}^2 \\
 m_{D_s^*} - m_{D_s}^2 &= 0.59 \text{ GeV}^2 \\
 m_{B^*} - m_B^2 &= 0.49 \text{ GeV}^2
 \end{aligned}$$

Auf dem Gitter erweist sich die Massenaufspaltung als eine sehr sensible Größe. Unsere Ergebnisse für  $a^2 \Delta_{V-PS}^2$  finden sich in Anhang A.5 und sind in Abbildung 6.13 graphisch dargestellt. Die Abweichungen von den experimentellen Ergebnissen sind teilweise auf die Ambiguität bei der Wahl der Skala zurückzuführen, die hier quadratisch eingeht und somit besonders ins Gewicht fällt.

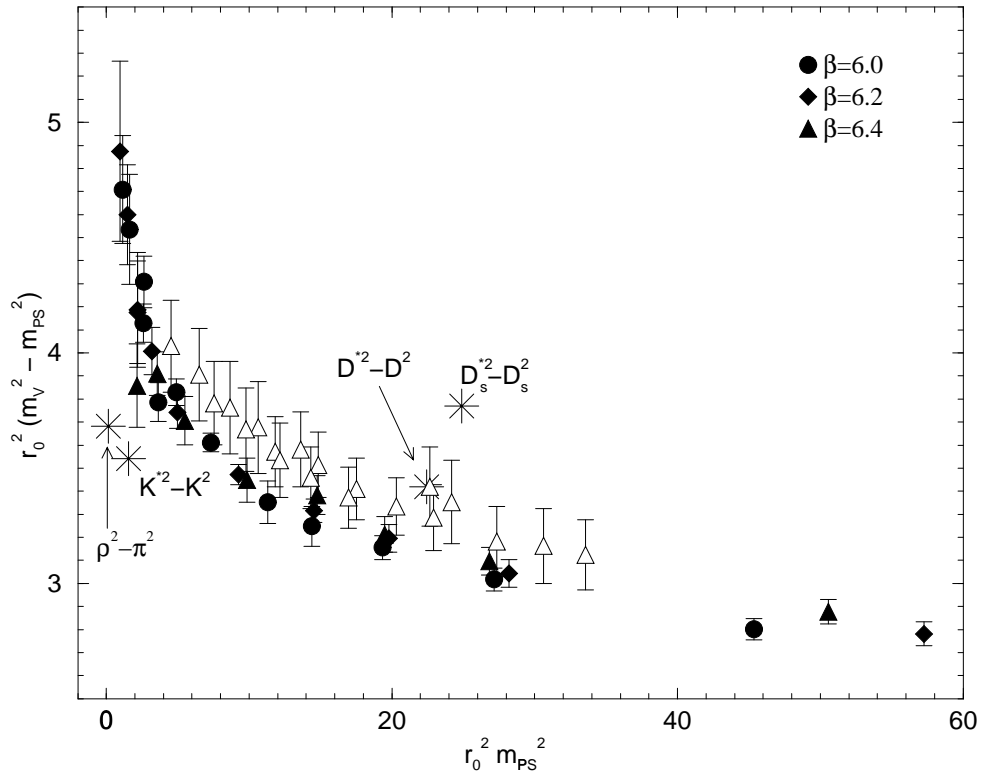


Abbildung 6.13.: Massenaufspaltung  $\Delta_{V-PS}^2$  als Funktion der pseudo-skalaren Masse  $m_{PS}$ . Mit geschlossenen Symbolen sind die Ergebnisse mit entarteten Quarkmassen  $m_{q_1} = m_{q_2}$  dargestellt. Die offenen Symbole ( $\Delta$ ) zeigen die Resultate für  $m_{q_1} \neq m_{q_2}$  bei  $\beta = 6.4$ . Die experimentellen Werte sind mit einem Stern ( $*$ ) dargestellt.

