



Berichte des Deutschen Wetterdienstes

239

Die Erschließung der Rossby-Welle durch Lärmfilterung

von
Prof. Dr. Fritz Herbert



Zitationsvorschlag:

Herbert, Fritz (Hrsg.: Deutscher Wetterdienst): Die Erschließung der Rossby-Welle durch Lärmfilterung.

Offenbach am Main: Selbstverlag des Deutschen Wetterdienstes, 2012.

(Berichte des Deutschen Wetterdienstes ; 239)

ISBN 978-3-88148-458-9

ISSN der Onlineausgabe: 2194-5969

ISSN der Druckausgabe: 0072-4130

ISBN 978-3-88148-458-9

Nutzungsbedingungen



Dieses Dokument steht unter folgender Creative Commons-Lizenz

Sie dürfen das Werk bzw. den Inhalt unter folgenden Bedingungen vervielfältigen, verbreiten und öffentlich zugänglich machen: Sie müssen den Namen des Autors/Rechteinhabers in der von ihm festgelegten Weise nennen. Dieses Werk bzw. dieser Inhalt darf nicht für kommerzielle Zwecke verwendet werden und es darf nicht bearbeitet, abgewandelt oder in anderer Weise verändert werden.

Mit der Verwendung dieses Dokumentes erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Herausgeber und Verlag:

Deutscher Wetterdienst
Frankfurter Straße 135
D- 63067 Offenbach am Main
Internet: www.dwd.de
Mail: bibliothek@dwd.de

Anschrift des Autors:

Prof. Dr. Fritz Herbert
J. W. Goethe-Universität
Campus Bockenheim
D- 60325 Frankfurt am Main

Die Erschließung der Rossby-Welle durch Lärmfilterung

Von Fritz Herbert,

Theoretische Meteorologie, Universität Frankfurt a.M.¹⁾

(August 2011 und Januar 2012)

Inhaltsverzeichnis

Abstract	5
Zusammenfassung	5
1 Einleitung	6
2 Das Basisgleichungssystem	8
3 Die charakteristischen Operator- und Eigenwertgleichungen	10
4 Charakteristische Lösungen und ihre Anfangsfilteradjustierung	12
5 Lärmfilternde Operatoren und diagnostische Differentialrelationen	14
6 Prognostische lärmfilternde Modelle	17
7 Die Relevanz des Terms βu in prognostischen Filtermodellen	20
8 Schlußbetrachtung	26
Literaturverweise	27
Anhang	28

¹⁾Adresse: Prof. Dr. F. Herbert, J.W.Goethe-Universität, Campus Bockenheim, D-60325 Frankfurt a. M.

Abstract

With the mathematical tools of noise filtering, which played an important role in the experienced numerical weather prediction during its early stage, the question is treated how the Rossby wave mode occurring in the linearized equations of a rotating β -plane barotropic shallow-water model develops while the simultaneous inertial-gravity wave modes are suppressed by means of variable filtering conditions.

First some basic relations of a noise free adjustment of the initial variable fields are illustrated. Then the investigation concentrates to prognostic noise filtering model equations (sect. 5, 6, 7). This analysis in dependence on the degree of filtering leads to partly extended wave speeds compared with Rossby's conventional synoptic-scale formula (filter degree zero). They can even have unexpected new effects that may primarily count in the long wave spectrum.

Zusammenfassung

Mit dem mathematischen Werkzeug zur Filterung von Lärmprozessen, die für die Praktizierung der numerischen Wettervorhersage in ihrer Anfangszeit eine große Rolle gespielt hat, wird an den linearisierten Gleichungen für ein barotropes Flachwassermodell im β -Format die Frage behandelt, wie sich der Rossby-förmige Wellenmodus entwickelt, wenn gleichzeitige Trägheitsschwerewellenmoden infolge von veränderlichen filternden Gleichungen unterdrückt werden.

Zunächst werden einige analytische Grundbeziehungen einer lärmfreien Adjustierung von Anfangsfeldern ausgeführt. Dann richtet sich die Untersuchung auf lärmfilternde prognostische Modellgleichungen (Absch. 5, 6, 7). Aus dieser Analysis in Abhängigkeit von der Filterstufe findet man im Vergleich mit der konventionellen synoptisch-skaligen Rossby-Formel, die der Filterstufe Null entspricht, zum Teil erweiterte Wellengeschwindigkeiten der Rossby-förmigen Physik. Dabei treten sogar unerwartete neue Effekte auf, die wohl primär im Langwellenspektrum zählen.

1 Einleitung

Mit der aufstrebenden numerischen Computer-Wettervorhersage vor 50-60 Jahren rückte eine absolut grundlegende Frage aus einer gewissen Nebenrolle in den Fokus: wie können sogenannte Lärmwellen von den meteorologisch repräsentativen Rossby-Wellen, die von speziellen Formen der primitiven atmosphärischen Gleichungen simultan beschrieben werden, so getrennt werden, daß man eine Ausschaltung der Lärmwellen erreicht, während die Rossby-Wellen verschont oder doch wenigstens mit möglichst guter Genauigkeit erhalten bleiben? Anders gesagt, geht es um den zu vermeidenden Effekt, daß kurzperiodische (Schall-Schwere-) Oszillationen meteorologisch längerfristige Tendenzen verfälschen. Zu diesem Thema, das nach 1950 bald mit dem Paradigma-Titel 'meteorological noise-filtering' figurierte, hat in einer Reihe von internationalen Wissenschaftlern am meisten wahrscheinlich K. Hinkelmann mit seiner Forschungsgruppe im DWD gearbeitet (z.B. Hinkelmann 1951, 1962, 1966). Es möge mir hier erlaubt sein, zudem auf ein interessantes Interview des WMO-Bulletins mit Prof. Hinkelmann zu verweisen (viz. WMO Bulletin 1985), wenngleich auch das meteorologische Lärmproblem darin nur beiläufig zur Sprache kommt. Stattdessen verdanken wir P. Thompson (1987) mit einer rückblickenden Fallstudie eine Würdigung der wissenschaftlichen Leistung in dieser Materie.

Was ich in dieser Abhandlung ausführen möchte, hat mit der heutigen meteorologischen Dynamik und Prognose nur noch wenig zu tun. Ähnliche oder die gleichen Überlegungen hätten ebenso gut vor drei bis vier Dekaden angestellt werden können. Ich habe damals eine eigene Arbeit zu dem Thema der schrittweisen charakteristischen Lärmfilterung veröffentlicht (Herbert, 1971), allerdings geht es darin um einen ganz anderen Gleichungssatz und dementsprechend andere Wellentypen (Schall- und interne Schwellen). Eine andere Arbeit mit einer ähnlichen Tendenz, jedoch um Coriolis-Effekte erweitert, stammt von A. Wiin-Nielsen, zudem ist sie auf die Anfangsbedingungen ausgerichtet (Wiin-Nielsen, 1978), und es könnte wohl mehr dergleichen geben, die mir nicht zur Kenntnis gekommen sind.

Im vorliegenden Manuskript nun geht es um eine β -Ebenenmodellierung mit den einfachen barotropen Flachwassergleichungen (die Basisdgl. siehe Abschnitt 2). Ich hätte auch gezögert, diese Thematik hier noch einmal vorzubringen, gäbe es da nicht doch einige gute Gründe dafür, daß eine erneute Lärmausschluss-Untersuchung der synoptisch-skaligen Modellgleichungen, die das gemischte Spektrum von Rossby- und Trägheitsschwerewellen als Eigenmoden (normal modes) einschließen, auch heute nicht ohne meteorologisches Interesse ist.

Um meine Hauptfeststellung gleich vorweg zu nehmen: die originäre Rossby'sche Wellengeschwindigkeit (ggf. mit Deformationsradius-Korrektur) wird üblicherweise als Ausdruck einer abgeschlossenen Theorie angesehen. Ich behaupte, daß dies sich bei einer näheren Betrachtung mit Hilfe der Methode der progressiven charakteristischen Lärmfilterung als unrichtig herausstellt. Es zeigt sich, daß tatsächlich Rossby-artige Wellengeschwindigkeiten mit einer sogar partiell neuen strukturellen Form zu erwägen sind, zumindest in grundsätzlicher Hinsicht, d.h. möglicherweise auch anwendungsbezogen.

Warum aber erscheint mir die elementare Kernfrage des "alten" Rossby-Wellenproblems der Mühe ei-

ner eingehenden Untersuchung mit Hilfe des Werkzeugs der Lärmwellenfilterung wert? Kann doch diese Theoriebasis gar nicht mehr zum Rückgrat der modernen atmosphärischen Dynamik gerechnet werden, denn diese hat sich vollends neuen Zielen zugewandt und arbeitet dabei mit ganz anderen Gleichungssystemen, in denen zugegebenermaßen die Lärmfilterung allerhöchstens eine untergeordnete Rolle spielt. Zudem sehe ich auch die lauten und heftigen Anhänger der geläufigen praxis- und zweckgebundenen Auffassung in der (rechnenden) Meteorologie, die sich leidenschaftlich gegen grundsätzliche a priori'sche Versuche in der atmosphärischen Dynamik wenden.

Nun gibt es eben die traditionellen ad hoc-Modelle der Rossby-Physik mit einer intuitiven meteorologischen Kompetenz, weil sie auf gewissen geschwindigkeitsdivergenten Vereinfachungen (d.h. Quasi-Geostrophie) beruhen – die gleichsam aber kein einsichtiges physikalisches Leitprinzip darstellen. Sie gelten in dem Sinn, daß sie sehr anschauungsbequem und auf synoptisch-großskalige Phänomene, wo Schwerewelleneinfluss als vernachlässigbar gilt, gut projizierbar sind, als absolut indiskutabel. Dem ist aber nicht so, versucht man die Rossby'sche Wellenphysik systematisch mit Hilfe stringenter Filtertechnik zwecks Ausschaltung von Lärmwellen zu entwerfen. Natürlich werden die klassischen Formeln für die Rossby'sche Wellengeschwindigkeit davon nicht in Frage gestellt; was sich allerdings zeigt, ist, daß darüber hinaus physikalisch erweiterte und genauere Phasengeschwindigkeiten zu finden sind, ohne ihren praktischen Nutzen in der meteorologischen Anwendung voreilig bewerten zu wollen. Diese Zusammenhänge sind in den Abschnitten 5b), 6 und 7 behandelt. Die vorausgehenden Basisabschnitte 2 und 3 behandeln das vollständige Gleichungssystem sowie die charakteristische Eigenmodenanalyse. Bleiben noch die Zwischenabschnitte 4 und 5a). Aus eigener Erfahrung weiß ich, daß nur noch wenige der heutigen Meteorologen – Wissenschaftler oder praktisch tätige – mit den begrifflichen Grundlagen der Lärmfiltertechnik hinlänglich vertraut sind. Man versteht die prinzipiellen Kriterien der Lärmwellenunterdrückung am allereinfachsten, wenn man den Filtereffekt zuerst an den charakteristischen Eigenlösungen zur Anfangszeit $t = 0$ studiert. Deshalb ist das Wichtigste darüber in kompakter Form in den Abschnitten 4 und 5a) ausgeführt.

Die Lehrbücher der Meteorologie haben der Lärmtheorie wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Doch in einem älteren amerikanischen Werk (Haltiner und Williams, 1980) kann man einige Auszüge aus Hinkelmann (1951) und Phillips (1960) zur Anfangsadjustierung von Rossby-Trägheitsschwere-Normalmodenlösungen finden, und immerhin gibt es in J. Holtons heutigem Standardwerk eine kompakte Charakterisierung der Filterung von meteorologischen Lärmprozessen (Holton, 2004, Ch. 13.2). Sie erörtert die spezifische Filterrelevanz in der numerischen Wetterprognose – worin wohl alle folgen können, wenn auch vielleicht mit etwas treffenderen Begründungen –, befasst sich jedoch nicht mit der Abhängigkeit der längerfristigen (Rossby-) Tendenzen zur Unterdrückung von kurzperiodischen Lärmoszillationen.

Nun ist diese Sache keine Frage der Adjustierung von Anfangswerten. D.h. die Lärmfilterung wird nicht quasi-empirisch zu einer Anfangszeit $t = 0$ ein für allemal geregelt, sondern durch Reduzierung der dynamischen Freiheitsgrade auf dem Umweg über charakteristische diagnostische Ersatzdifferentialgleichungen. Genau das ist das Leitmotiv der folgenden Untersuchungen.

Zuvor möchte ich aber erklären, daß mit dieser Abhandlung die historische Denkweise in der Meteorologie, den klassischen mechanistischen Konzepten folgend, nicht neu propagiert werden soll. Es gibt unter den Fachkollegen bekanntlich einige, die mit dem mechanistischen Format aufgewachsen und ihm treu geblieben sind, und darum einer weitgreifenden, thermodynamisch geprägten neuen atmosphärischen Physik entgegenstehen. Aber den neuen Weg einzusehen, ist keine Altersfrage, selbst als Anhänger der mechanistischen Schule, die auch mich früh beeindruckte, wohl in erster Linie, weil sie für die numerische Kurzfrist-Wetterprognose (bis zu 3 Tagen) so viel zu leisten vermochte. Allerdings: der Mechanik-Anspruch auf absolute Dominanz in der Meteorologie war schlechthin verdächtig.

Mit der Hinwendung zu den modernen physikalischen Theorien – klassische und erweiterte irreversible Thermodynamik, Nichtlinearität und Stabilität u.ä. – wurde eine Weiterentwicklung und neue Ausrichtung der Meteorologie möglich. Zur modernen Interpretation des Fachs gehört durchaus auch, daß man sich auf herausragende Wissenschaftler, illustre Namen wie Prigogine, Haken, Lorenz, Lyapunov, Nambu stützen kann; das bedarf keiner Rechtfertigung.

Bei alledem wäre es aber eine gleichsam idealistische und verkehrte Annahme, daß in der Meteorologie alter Denkschule bereits alles getan bzw. alle möglichen Erkenntnisse gefunden seien, und man sich deshalb nicht mehr weiter bemühen müsse. Sogar in einem solch engen wissenschaftlichen Kontext ist der Glaube an das Absolute eine Täuschung. Meine kleine Untersuchung eines elementaren, sehr speziellen Beispiels soll zeigen, daß die einfachste wissenschaftliche Vorstellung von der meteorologischen Technik der Atmosphäre (als Rossby-Physik bezeichnet) noch nicht komplett ist.

2 Das Basisgleichungssystem

In dieser Abhandlung will ich auf einen bewährten meteorologischen Grobzugang zur Erdatmosphäre zurückgreifen, d.h. eine sich starr drehende, inkompressible und homogene flüssige Substanz, die außerdem in vertikal-hydrostatischem Gleichgewicht geschichtet ist – so ähnlich wie ein flacher rotierender Wassertank. Eine zweckdienliche mathematische Darstellung dieses insbesondere synoptischskalig gebräuchlichen barotropen Flachwassermodells läßt sich dadurch gewinnen, daß man das Geopotential der freien Modelloberfläche ($\phi = gH$) zusammen mit der Vorticity (ζ) und Divergenz (D), beide im Austausch für die horizontalen Windkomponenten, sowie die drei konjugierten partiellen Differentialgleichungen für ζ , D und ϕ verwendet.

Sodann wird dieses Gleichungssystem einer mathematischen Linearisierung unterzogen, um einfachere analytische Untersuchungen mit Hilfe von sinusoidalen Wellenlösungen zu ermöglichen. Bei der Ableitung derartiger linearer Differentialgleichungen (vgl. Anhang) führe ich einige pragmatische Vereinfachungen für die drei Feldvariablen ein: beispielsweise einen stationären Grundzustand mit konstanter geostrophischer Zonalgeschwindigkeit, $\vec{v} = (\bar{u}, 0)$ in Verbindung mit einem quasi-variablen Geopotential $\bar{\phi}_0 + \bar{\phi}(y)$, d.h. wahlweise nur als $\bar{\phi} = \bar{\phi}_0 = konst.$ oder mit einer geostrophischen y -Abhängigkeit ($\partial\bar{\phi}/\partial y = -f_0\bar{u} = konst.$), und außerdem, zugunsten eines geringeren rechnerischen Aufwands, daß

die Störungsvariablen ζ' , D' und ϕ' nur Funktionen der zonalen Länge und der Zeit, also von x und t sind. Der so resultierende Satz von linearen, autonomen Differentialgleichungen lautet:

$$\begin{aligned} Q\zeta' + f_0D' + \beta v' &= 0 \\ QD' - f_0\zeta' + [\beta u'] + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} &= 0 \\ Q\phi' + \bar{\phi}_0D' - f_0\bar{u}v' &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

enthaltene Definitionen:

$$Q = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} = \text{linearisierter totaler Zeitableitungsoperator}$$

$$\text{sowie } v' = v, \text{ weil } \bar{v} = 0, \zeta' = \frac{\partial v}{\partial x} \text{ und } D' = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Während der Bearbeitung bis zu Abschnitt 6 soll das Basissystem (1) in der Version ohne den Klammerterm $\beta u'$ in der QD' -Gleichung verwendet werden. Danach wird diese Standardvernachlässigung aufgegeben, und in Abschnitt 7 ist dann die spezielle Frage zu klären, wie weit der prognostische Filterungsprozess vom $\beta u'$ -Term im vollen Modell (1) abhängt.

Für analytische Ausführungen, wie sie hier anstehen, ist eine Matrixdarstellung von (1) nützlich; auf diese Weise kann man – Strichindizierung sowie βu -Term nun weggelassen – entweder schreiben

$$\begin{pmatrix} Q \frac{\partial}{\partial x} + \beta & f_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -f_0 \frac{\partial}{\partial x} & Q \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -f_0 \bar{u} & \bar{\phi}_0 \frac{\partial}{\partial x} & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \\ \phi \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

$$\text{d.h. in abstrakter Form: } A \cdot \vec{X} = 0$$

oder, für eine Cayley-Hamilton'sche Bestimmung passend,

$$Q \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v \\ u \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta & -f_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ f_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ f_0 \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} & -\bar{\phi}_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \\ \phi \end{pmatrix} \quad (2a)$$

$$\text{d.h. in abstrakter Form: } Q \frac{\partial}{\partial x} \vec{X} = B \cdot \vec{X}$$

In (2) sowie (2a) ist $\vec{X} = (v, u, \phi)^T$ und A bzw. B die jeweilige 3×3 -Koeffizienten-Operatormatrix. Weil A wie B rein linearen Charakter besitzen, reicht es aus, eine partielle sinusförmige Wellenlösung von der Form

$$\begin{pmatrix} v \\ u \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{u} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} e^{ik(x-ct)} \quad \text{oder} \quad \vec{X} = \vec{\hat{X}} e^{ik(x-ct)} \quad (3)$$

zu betrachten, wobei folgende Größen verwendet werden: c = charakteristische Wellen- (oder Phasen-) geschwindigkeit, $k = 2\pi/\lambda$ = Wellenzahlparameter mit λ = Wellenlänge sowie $\hat{v}, \hat{u}, \hat{\phi}$ = Amplituden (konst. angenommen) der Feldvariablen und $\vec{\hat{X}} = (\hat{v}, \hat{u}, \hat{\phi})^T$ = Amplitudenvektor.

3 Die charakteristischen Operator- und Eigenwertgleichungen

Die nächsten Schritte stehen nun damit in Zusammenhang, daß eine allgemeine Lösung durch Superposition aller Teillösungen gemäß der Formulierung (3), wobei zu jeder ein bestimmter Eigenwert $c(k)$ gehört, zu erhalten ist. Zur dafür notwendigen Ableitung der charakteristischen Eigenwertgleichung geht man üblicherweise so vor, daß man (3) in (2) einsetzt, wobei die Differentialoperatoren als endliche wellenperiodische Terme auftreten:

$$\frac{\partial}{\partial x} = ik \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -k^2 \quad , \quad Q = ik(\bar{u} - c) \quad (4)$$

Sodann ist der resultierende Satz von drei homogenen linearen Gleichungen für die Amplituden $\hat{v}, \hat{u}, \hat{\phi}$ zu lösen. Es ist aber ebenso möglich, von diesem Lösungsweg ohne Schaden abzuweichen, indem man direkt mit (2) oder (2a) eine notwendige Bedingung für nichttriviale Lösungsvektoren (v, u, ϕ) berechnet. Zu diesem Zweck muß die Determinante der Koeffizienten-Operatormatrix verschwinden: $\det A = 0$, oder gegebenenfalls $\det(B - EQ \partial/\partial x) = 0$, mit E = Einheitsmatrix, und indem man diese Berechnung erledigt, erhält man die folgende charakteristische Operatorgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x} Q^3 + \beta Q^2 - \left(\bar{\phi}_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - f_0^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} Q - \left(\beta \bar{\phi}_0 + f_0^2 \bar{u} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

Was (5) nun schlicht vermittelt, ist die äquivalente Differentialgleichung dritter Ordnung (Q -Ableitung betreffend) zu den drei Basisdifferentialgleichungen von jeweils erster Ordnung. Es ist nach Maßgabe von (5) nur konsequent, jetzt auch die Operatorausdrücke (4) einzusetzen, um auf diesem Weg die algebraische Eigenwertgleichung zu berechnen; das ergibt für c bzw. für $a = \bar{u} - c$ die gesuchte Polynomrelation:

$$a^3 - \frac{\beta}{k^2} a^2 - \left(\bar{\phi}_0 + \frac{f_0^2}{k^2} \right) a + \frac{\beta \bar{\phi}_0 + f_0^2 \bar{u}}{k^2} = 0 \quad , \quad (6)$$

bzw. in der Form

$$a \left[a^2 - \frac{\beta}{k^2} a - c_g^2 \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2} \right) \right] + c_g^2 \left(\frac{\beta}{k^2} + \frac{\bar{u}}{R_d^2 k^2} \right) = 0 \quad , \quad (6a)$$

wobei die traditionellen Größen $c_g = \sqrt{\bar{\phi}_0}$ (Flachwasser-Schwerewellengeschwindigkeit) und $R_d = \sqrt{\bar{\phi}_0}/f_0$ (Rossby'scher Korrektur- oder Deformationsradius) Eingang finden.

Es lohnt sich, die durch (6) spezifizierte Polynomfunktion 3. Grades etwas genauer anzusehen. Sie hat die Normalform $Z_3(a) = a^3 + pa^2 + qa + r$, mit den Koeffizienten $p = -\beta/k^2$, $q = -(\bar{\phi}_0 + f_0^2/k^2)$ und $r = (f_0^2\bar{u} + \beta\bar{\phi}_0)/k^2$.

Aus der Diskriminante für Nullstellen und Kurvenverlauf geht unter Beachtung der charakteristischen Größenordnungen von β/k^2 und $\bar{\phi}_0$ sowie der Annahme $\bar{u} < (\bar{\phi}_0 + f_0^2/k^2)^{1/2}$ hervor, daß $Z_3(a)$ in der graphischen Darstellung (die das Diagramm in Abb. 1 illustriert) eine kubische Parabel beschreibt, die ein Maximum und ein Minimum besitzt. Sie nimmt von $-\infty$ bis zum Maximum zu, fällt dann bis zum Minimum ab, um danach bis zu $+\infty$ anzusteigen. Die Schnittpunkte mit der a -Achse lassen sich als drei

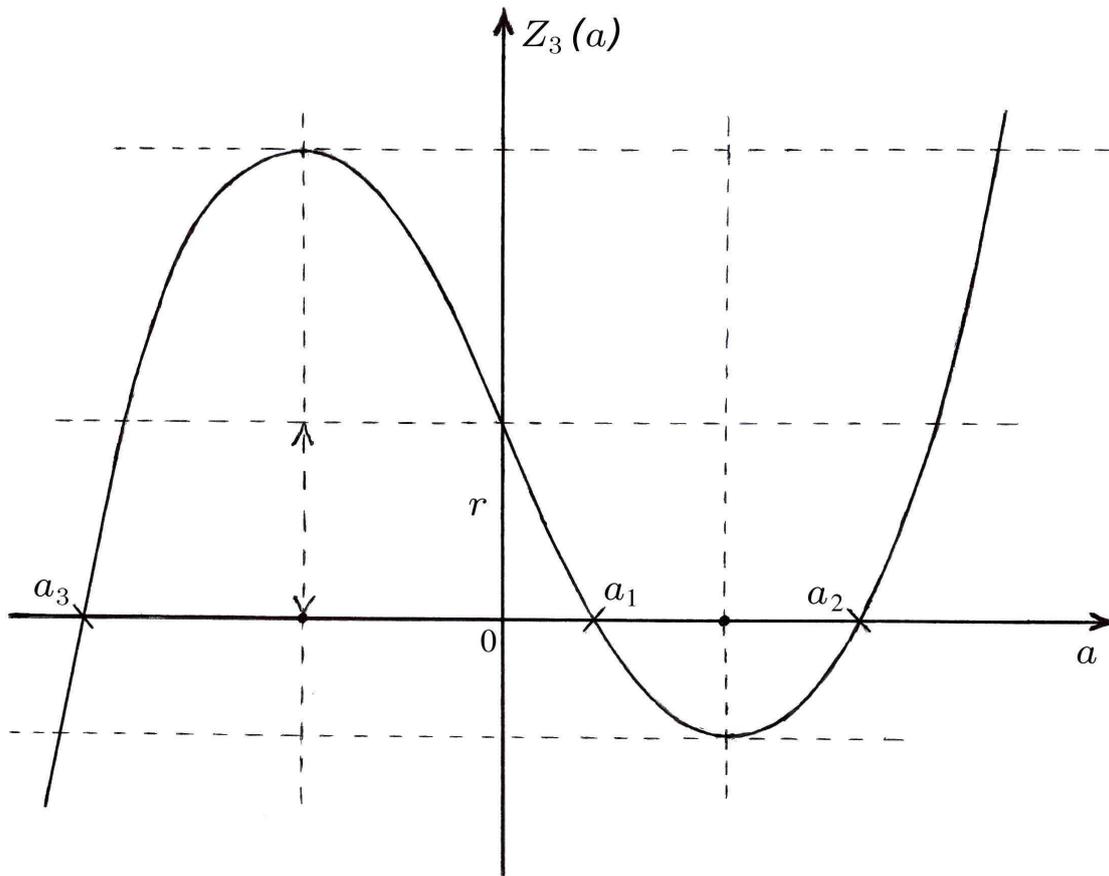


Abbildung 1: Grafischer Verlauf des Eigenwertpolynoms im Falle von Rossby- und Trägheitsschwerewellen; aber ohne Maßgenauigkeit. Von den drei reellwertigen Nullstellen liegt der Punkt a_1 im Bereich von Null; er vermittelt die Wellengeschwindigkeit c_1 , die ursächlich vom Rotationsteil der Strömung herrührt (sog. Rossby-Welle); die Werte $a_{2,3}$ betragen ungefähr $\pm\sqrt{\bar{\phi}_0 + f_0^2/k^2}$ (das sind rund 300 m/s, wenn man extrem lange Wellen nicht mitrechnet); sie vermitteln die Wellengeschwindigkeiten $c_{2,3}$, die ursächlich vom Divergenzteil der Strömung herrühren (sog. Trägheitsschwerewellen). Außerdem lassen sich für das Wellenspektrum abseits von sehr langen Wellen die zwei Extremstellen der Kurve ganz grob mit den a -Werten $a_{2,3}/\sqrt{3}$ beschreiben.

reelle Wurzeln für $Z_3(a_j) = 0$, $j = 1, 2, 3$, berechnen. Eine 1. Wurzel $a_1 = \bar{u} - c_1$, wobei $a_1^2 \ll \bar{\phi}_0$ gelten soll, ist aus der Relation (6) bequem zu finden:

$$a_1 \approx \left(\frac{f_0^2 \bar{u}}{\bar{\phi}_0 k^2} + \frac{\beta}{k^2} \right) \left(1 + \frac{f_0^2}{\bar{\phi}_0 k^2} \right)^{-1} \quad \text{bzw.} \quad c_1 \approx \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2} \right)^{-1} \quad (7)$$

Die Berechnung der zwei übrigen Wurzeln kann vorteilhaft über die quadratische Gleichung, die sich aus $Z_3/(a - a_1) = 0$ ergibt, erfolgen. Ihre beiden Lösungen sind: $a_{2,3} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\bar{\phi}_0 + f_0^2/k^2 - \frac{3}{4}a_1^2}$, wonach für die Wellengeschwindigkeiten $c_{2,3}$ mit hinreichender Genauigkeit die approximierten Ausdrücke

$$c_{2,3} \approx \bar{u} \pm \sqrt{\bar{\phi}_0 + \frac{f_0^2}{k^2}} = \bar{u} \pm c_g \sqrt{1 + \frac{1}{R_d^2 k^2}} \quad (8)$$

bestimmt werden können. Desweiteren wurde in (7) das Quadrat des sogenannten Korrekturradius $R_d^2 = \bar{\phi}_0/f_0^2$ sowie in (8) die charakteristische Phasengeschwindigkeit von nicht dispersiven Flachwasserschwerewellen $c_g = \sqrt{\bar{\phi}_0}$ eingeführt.

4 Charakteristische Lösungen und ihre Anfangsfilteradjustierung

Zu Beginn der weiteren Absichten soll der Basisgleichungssatz (2), nachdem (3) und (4) mit $a \equiv \bar{u} - c$ (Eigenwert) eingesetzt wurden, für eine Anfangswertanalyse verwendet werden. Das lineare algebraische System, das sich dann für den Amplitudenvektor ergibt, lautet wie folgt:

$$\begin{pmatrix} -k^2 a + \beta & i k f_0 & 0 \\ -i k f_0 & -k^2 a & -k^2 \\ -f_0 \bar{u} & i k \bar{\phi}_0 & i k a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{u} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

(9) ist eine bequeme Basis, um die drei Lösungen der Modellgleichungen anhand von Eigenvektoren sowie Eigenlösungsfunktionen darzustellen.

Für jeden der drei Eigenwerte a_j gibt es eine Eigenlösung, die sich bis auf einen freien konstanten Koeffizienten bestimmen läßt. Wenn man die aus (7) und (8) bekannten a_1 , a_2 bzw. a_3 für a in (9) ersetzt und beachtet, daß die Matrix den Rang 2 besitzt, so berechnet man die drei konjugierten Eigenvektoren

$$\vec{X}_j = \left(\frac{i f_0}{k}, a_j - \frac{\beta}{k^2}, \frac{f_0^2}{k^2} - a_j^2 + \frac{\beta a_j}{k^2} \right)^T \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \hat{v}_j \\ \hat{u}_j \\ \hat{\phi}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i f_0/k \\ a_j - \beta/k^2 \\ \frac{f_0^2}{k^2} - a_j^2 + \frac{\beta a_j}{k^2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$(j = 1, 2, 3)$

Unter Berufung auf die Eigenvektoren (10) findet man dann für die vollen Eigenlösungen einer Partialwelle die explizite Formel

$$\vec{X}(x, t) = \sum_{j=1}^3 \mu_j \vec{X}_j E_j(x, t) \quad (11)$$

In (11) sind die μ_j dimensionsfreie und zunächst beliebige, aber durch die Anfangswerte festlegbare

Konstanten, die \vec{X}_j sind durch (10) gegeben, und zudem gilt die Abkürzung $E_j(x, t) = \exp[ik(x - c_j t)]$ für $j = 1, 2, 3$.

Die Eigenlösungsformel zeigt, daß eine Anfangswelle, die (zur Zeit $t = 0$) anhand der Werte v_0 , u_0 und ϕ_0 definiert ist, sich aus drei Wellenteilen zusammensetzt und jeder davon sich mit einer eigenen Phasengeschwindigkeit ausbreitet. Der Beitrag der Amplituden, die sich mit diesen charakteristischen Geschwindigkeiten bewegen, hängt von der Beziehung zwischen den anfänglich definierten Amplituden ab.

Um nun eine Beziehung zwischen den Amplitudenkoeffizienten μ_j und den Anfangswerten v_0, u_0, ϕ_0 aufzustellen, sei angenommen, für $t = 0$ gelte der Lösungsvektor

$$\vec{X}(x, t = 0) = \vec{X}_0 E(x) \quad (12)$$

Weil (3) für $t = 0$ mit (12) übereinstimmen muß, darf man die folgenden Relationen für die μ_j -Koeffizienten und die Anfangswerte verlangen:

$$\vec{X}_0 = \sum_{j=1}^3 \mu_j \vec{X}_j \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} v_0 \\ u_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 \\ \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ \hat{\phi}_1 & \hat{\phi}_2 & \hat{\phi}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Dieses Gleichungssystem ist für die drei μ_j als Unbekannte zu lösen in Abhängigkeit von den vorgegebenen Anfangswerten v_0 , u_0 , ϕ_0 . Eine Welle, die die Phasengeschwindigkeit c_1 und den Amplitudenkoeffizient μ_1 besitzt, heißt Rossby-förmige Welle, die Flachwasser-Trägheitsschwerewellen mit den Phasengeschwindigkeiten c_2 und c_3 und den Amplitudenkoeffizienten μ_2 und μ_3 werden Lärmwellen genannt.

Um die Lärmfilterungsprozedur eingehend zu studieren, soll zuerst die Elimination von Lärmwellen durch eine Anpassung der Anfangsamplituden diskutiert werden. Mit der günstigen formalen Beziehung (13) zwischen den anfänglich spezifizierten Wind- und Geopotentialdaten und den Eigenvektoramplituden lassen sich leicht die Kriterien definieren, die die Anfangswerte zu erfüllen haben, um absolut lärmfreie Wellenausbreitung zu gewährleisten. Für diesen Zweck nämlich ist nicht mehr als lediglich $\mu_2 = \mu_3 = 0$ zu verlangen, wodurch (13) auf das einfache Postulat

$$\vec{X}_0 = \mu_1 \vec{X}_1 \quad \text{oder} \quad v_0 : u_0 : \phi_0 = \hat{v}_1 : \hat{u}_1 : \hat{\phi}_1 \quad (14)$$

reduziert wird. (14) bedeutet, daß der Amplitudenvektor für $t = 0$, der die Komponenten v_0 , u_0 , ϕ_0 hat, zum ersten Eigenvektor von (10) proportional sein muß. Daher kann man nun (10) in (14) einsetzen, um die expliziten lärmfreien Anfangswertrelationen zu erhalten:

$$v_0 = \frac{if_0/k}{\frac{f_0^2}{k^2} - a_1^2 + \frac{\beta a_1}{k^2}} \phi_0 \quad \text{und} \quad u_0 = \frac{a_1 - \beta/k^2}{\frac{f_0^2}{k^2} - a_1^2 + \frac{\beta a_1}{k^2}} \phi_0 \quad (15)$$

mit dem a_1 -Wert aus (7). Konsequenterweise bleiben diese Anfangswertkriterien (15) auch für alle Zeiten $t > 0$ gültig; das ergibt sich direkt aus (11) mit $\mu_2 = \mu_3 = 0$ und (12). Daher müssen die diagnostischen

Anpassungsformeln (15) dem prognostischen Gleichungssystem angehören und zwar in der Weise, daß sie zwei der drei Basisdifferentialgleichungen ersetzen. D.h. konkret: um eine lärmfreie Lösung für alle $t > 0$ aufrechtzuerhalten, ist es notwendig, daß die beiden diagnostischen Relationen (15) mit einer der folgenden (vermittels a) prognostischen Gleichungen

$$\begin{aligned} (-k^2 a + \beta)v_0 + ikf_0 u_0 &= 0 \\ ikf_0 v_0 + k^2 a u_0 + k^2 \phi_0 &= 0 \\ -f_0 \bar{u} v_0 + ik\bar{\phi} u_0 + ika\phi_0 &= 0 \end{aligned}$$

zu vereinigen sind. Diese letzten drei Gleichungen findet man genau wie (9), jedoch mit Verwendung der Anfangswertterminologie. Man ist nun frei, eine dieser drei letzten Gleichungen zur Verschmelzung mit (15) auszuwählen. In jedem Fall ergibt sich die (erwartete) Eigenwertlösung

$$a = a_1 \quad (16)$$

mit der im Sinn von (7) "kompletten" a_1 -Formel. Das ist ein fundamentales Resultat. Und um seine praktische Relevanz zu illustrieren, will ich einige wichtige Punkte herausstellen:

Eine Anpassung der Wellenlösungen zum Anfangszeitpunkt in der Weise, daß die Amplituden der Lärmwellen verschwinden (via $\mu_2 = \mu_3 = 0$) garantiert lärmfreie Lösungen per definitionem. Aus diesem Grund schicken sich die diagnostischen Anfangswertbedingungen (15) an, als notwendige Substitutionen für zwei (beliebige) prognostische Originalgleichungen zu dienen. Das führt konsistenterweise zu einem filternden (d.h. lärmfreien) prognostischen Gleichungssatz, der den "vollen" Rossby-Teil der Lösung, wie ihn der Eigenwertausdruck a_1 vermittelt, konserviert, d.h. soweit wie die Genauigkeit der a_1 -Approximation reicht. Als Ergebnis lautet der lärmfreie Lösungsvektor

$$\vec{X}(x, t) = \vec{X}_0 E_1(x, t) = \frac{\phi_0}{\frac{f_0^2}{k^2} - a_1^2 + \frac{\beta a_1}{k^2}} \begin{pmatrix} if_0/k \\ a_1 - \beta/k^2 \\ \frac{f_0^2}{k^2} - a_1^2 + \frac{\beta a_1}{k^2} \end{pmatrix} e^{ik(x-c_1 t)} \quad ; \quad (17)$$

er besteht aus Rossby-Eigenvektor und -Phasenfunktion sowie einem gegebenen Anfangswert ϕ_0 .

Im Unterschied zur vorhergehenden Anfangsadjustierung von Lösungsfunktionen soll im nächsten Abschnitt ein Näherungsverfahren, um unerwünschte Lärmefekte auszufiltern, behandelt werden. Diese Methode beruht auf rationalen Differentialoperatoren.

5 Lärmfilternde Operatoren und diagnostische Differentialrelationen

a) Zu Beginn dieses Abschnitts soll gezeigt werden, daß sich mit zwei linearen Differentialbedingungen wie beispielsweise

$$Q^n D|_{t=0} = 0 \quad \text{und} \quad Q^{n+m} D|_{t=0} = 0, \quad (18)$$

denen ein Geschwindigkeitsfeld zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ genügen muß, die Lärmamplituden entsprechend auf Null reduzieren wie n zunimmt und dabei m fest bleibt. Es läßt sich (18) direkt ausrechnen, indem man Q und D gemäß (1) sowie eine Lösungsfunktion $u(x, t)$ gemäß (11) verwendet; so findet man die folgenden diagnostischen Gleichungen:

$$\sum_{j=1}^3 \mu_j \hat{u}_j a_j^n = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^3 \mu_j \hat{u}_j a_j^{n+m} = 0 \quad (19)$$

Offenbar enthält (19) zwei algebraische Bestimmungsaufgaben für die drei Amplitudenkoeffizienten μ_j . Das ist ein ganz ähnlicher Zusammenhang wie in der vorhergehenden Analyse, woraus sich ergab, daß nur über eine von drei Basisvariablen zu Anfang ($t = 0$) beliebig zu verfügen ist (z.B. ϕ_0), während die beiden anderen (v_0, u_0) dann bestimmt sind.

Die Potenzprodukte in (19) erlauben, das Verhalten von μ_2 und μ_3 bei zunehmendem Exponent n zu ergründen. Es ist dafür zweckvoll, beide Gleichungen folgendermaßen zu schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \hat{u}_1 \left(\frac{a_1}{a_3} \right)^n + \mu_2 \hat{u}_2 \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^n + \mu_3 \hat{u}_3 &= 0 \quad (a) \\ \mu_1 \hat{u}_1 \left(\frac{a_1}{a_3} \right)^{n+m} + \mu_2 \hat{u}_2 \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^{n+m} + \mu_3 \hat{u}_3 &= 0 \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

sowie, um μ_3 zu eliminieren, (20b) von (20a) zu subtrahieren und eine einfache Umstellung vorzunehmen, sodaß schließlich die folgende Gleichung zustande kommt:

$$\mu_1 \hat{u}_1 \frac{1 - \left(\frac{a_1}{a_3} \right)^m}{1 - \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^m} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^n + \mu_2 \hat{u}_2 = 0 \quad (21)$$

Für eine diesbezügliche Größenschätzung soll in Übereinstimmung mit (7) und (8), und nur für Fälle $\bar{u} > 0$, angenommen werden, daß $|a_3| > a_2 > a_1$ gelten möge. Die zwei Relationen (20) zeigen (getrennt), daß mit $n \rightarrow \infty$ der Koeffizient μ_3 gegen Null konvergiert. Zu beachten ist, daß in (21) der erste Summand relativ klein ist, falls die Zahl m ungerade ist, jedoch relativ groß sein kann, falls m geradzahlig ist. Aus dem Grunde einer raschen Konvergenz sollte daher für m eine ungerade Zahl gewählt werden, beispielsweise $m = \pm 1$. In diesem Fall verschwinden die Lärmamplituden simultan mit $n \rightarrow \infty$.

b) Entsprechend zu dieser letzten, auf (19) beruhenden Folgerung werden im nächsten Schritt zwei Differentialbedingungen angewandt, durch die Lärmwellen zu jeder Zeit t aus den Modell-Differentialgleichungen gefiltert werden. Der Grund dafür ist, daß für Anwendungen in einem dynamischen, d.h. zeitfortschreitenden Modell erweiterte Filterbedingungen wie $Q^n D = 0$ und $Q^{n\pm 1} D = 0$ als gültige Kriterien für alle Zeiten vorausgesetzt werden müssen. Zur expliziten dynamischen Anwendung allerdings müssen solche lärmspezifischen Zwangsbedingungen in äquivalente, ausdrücklich diagnostische Verträglichkeitsgleichungen überführt werden, die dadurch ausgezeichnet sind, daß sie zwei der drei ursprünglichen zeitabhängigen Differentialgleichungen ersetzen. Auf diesem Näherungsweg werden ganz klar alle autonomen Lärmbei-

träge in der charakteristischen Wellengeschwindigkeit (=Eigenwert)-Gleichung ausgeschlossen, so daß nur noch ein Rossby-förmiger Teil übrig bleibt. Wie die besagten diagnostischen Verträglichkeitsforderungen in Bezug auf eine beliebige Filterordnung n explizit zu bestimmen sind, läßt sich direkt herleiten. Als Basis dieser Analyse dienen die Originalgleichungen, z.B. in der Gestalt von (2a). Zweckdienlicher als diese aber ist es, die x -Ableitung von (2a) und damit die bequemerer Variablen ζ , D , ϕ zu verwenden; das führt zu der kompakten Formulierung

$$Q \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \zeta \\ D \\ \partial\phi/\partial x \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \zeta \\ D \\ \partial\phi/\partial x \end{pmatrix}$$

Sodann ist die Verallgemeinerung dieser Alternativversion der Basisgleichungen, die nun mit einer unspezifizierten Ableitungspotenz $n \geq 0$ ausgestattet ist, ganz elementar in Verbindung mit einer $(n-1)$ -fachen $Q \frac{\partial}{\partial x}$ -Operation zu erreichen. Mit dieser Maßnahme resultiert zunächst die abstrakte Terminologie

$$Q^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \begin{pmatrix} \zeta \\ D \\ \partial\phi/\partial x \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} \zeta \\ D \\ \partial\phi/\partial x \end{pmatrix}$$

sowie zudem, daß nun daraus für die zweite Vektorkomponente als Bestimmungsform des in Frage stehenden Terms $Q^n D$ die folgende Gleichung extrahiert werden kann:

$$Q^n D = \frac{1}{(ik)^n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T B^n \begin{pmatrix} \zeta \\ D \\ \partial\phi/\partial x \end{pmatrix} \quad (22)$$

Die Differentialrelationen, die sich aus (22) für die ersten drei Exponenten $n = 0, 1, 2$ ergeben, lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} Q^0 D &\equiv D \quad (\text{trivial}) \\ Q^1 D &= \frac{1}{ik} \left(f_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right) = f_0 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ Q^2 D &= -\frac{1}{k^2} \left(\bar{\phi}_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - f_0^2 \right) \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{f_0}{k^2} \left(\beta + \bar{u} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &= -\left(\bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2 \right) D - f_0 \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (23)$$

Von $n = 3$ an ist es ebensogut möglich, aber bequemer als (22), eine praktische Regressionsgleichung anzuwenden, die dadurch zustande kommt, daß man den Operator (5) (der den vollen Basisgleichungssatz repräsentiert) auf das Argument $Q^{n-3} D$ anwendet. Das so resultierende Gesetz lautet:

$$Q^n D = -\frac{\beta}{ik} Q^{n-1} D + \left(\bar{\phi}_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - f_0^2 \right) Q^{n-2} D + \left(\bar{\phi}_0 \beta + f_0^2 \bar{u} \right) \frac{\partial}{\partial x} Q^{n-3} D \quad (24)$$

(gültig für $n = 3, 4, 5 \dots$ fortschreitend)

Es ist einsichtig, daß eine explizite Bestimmung von (24) für nach und nach höhere Ableitungen, also Q^3D , Q^4D , Q^5D u.s.w., die Abhängigkeit auf der rechten Seite von den niedrigeren D -Ableitungen (beginnend mit den Potenzausdrücken aus den Gleichungen (22)) in ausschließlich diagnostische Differentialterme überführt. So folgt aus (24), nimmt man speziell $n = 3$ an, die explizite Gleichung:

$$Q^3D = f_0^2 \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) \frac{\partial D}{\partial x} + \left\{ f_0 \beta \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) - f_0 \left(\bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2 \right) \right\} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2 \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (25)$$

Es gelingt also offenbar mit Hilfe dieser regressiven Behandlung von vorausgehenden D -Potenzableitungen, einvernehmlich mit einer bestimmten Filteroption $Q^n D = 0$, eine dazu assoziierte diagnostische Differentialgleichung als Verträglichkeitskriterium zwischen den Grundvariablen zu erstellen. Desweiteren kann mit je zwei solchen aufeinander folgenden diagnostischen Differentialbeziehungen ein entsprechendes prognostisches Lärmfiltersystem definiert werden. Dieser Typus von reduzierten dynamischen Modellen wird in den zwei nächsten Abschnitten im Detail diskutiert.

6 Prognostische lärmfilternde Modelle

In Übereinstimmung mit der Diskussion in Abschnitt 5 führt die Wahl $m = 1$ zu zwei expliziten Filterbedingungen $Q^n D = 0$ und $Q^{n+1} D = 0$, womit für eine Zahl $n \in N_0$ dementsprechende diagnostische Verträglichkeitsbedingungen definierbar sind, die aus (23) sowie (25) als explizite Differentialgleichungen hervorgehen. Ihre Anwendung in dynamischen lärmfilternden Gleichungssystemen erfolgt so, daß sie zwei der drei diagnostischen Basisdifferentialgleichungen aus (2) bzw. (2a) ersetzen. In diesen Untersuchungen soll, ohne Angabe von Gründen, die prognostischen D - und ϕ -Gleichungen durch diagnostische ersetzt werden, während die vollständige prognostische Vorticitygleichung erhalten bleibt und mit den beiden stationären Differentialgleichungen, die $Q^n D = 0$ und $Q^{n+1} D = 0$ entsprechen, zu einem lärmfilternden Satz von Gleichungen verbunden wird. Hier sollen die Gleichungsmodelle, die für die Filterstufen $n = 0, 1, 2$ und 3 resultieren, diskutiert werden.

Auf der tiefsten Filterstufe $n = 0$ werden die Annahmen $D = 0$ und $QD = 0$ relevant. Sie lassen sich verwenden, um als einfachste lärmfilternde Approximation des vollständigen Basismodells (2) das Gleichungssystem $A_0 \cdot \vec{X} = 0$ zu definieren, mit der folgenden Operator-Koeffizientenmatrix:

$$A_0 = \begin{pmatrix} Q \frac{\partial}{\partial x} + \beta & f_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -f_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Die Entwicklung von $\det A_0 = 0$ ergibt nun direkt die charakteristische Operatorgleichung:

$$Q \frac{\partial}{\partial x} + \beta = 0 \quad (27)$$

und (27) mit (4) die Eigenwertformel

$$c = \bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \equiv c_{R(ossby)} \quad (28)$$

Ein Vergleich von (27) mit (5) sowie (28) mit (7) und (8) zeigt, wie gravierend die Filterung auf der Stufe $n = 0$ den dynamischen Charakter einschränkt. Wie man sieht, erfolgt die erwünschte Unterdrückung von Schwere-Trägheitseffekten im Wellenspektrum dadurch, daß in (27) der Zeitoperator Q nur linear vorkommt und daher Lärmeigenwerte gemäß (8) komplett entfallen. Aber mit dem Preis, daß die absolut divergenzfreie Lärmfilterung auch einen extrem restriktiven Sekundäreinfluß auf die meteorologisch signifikanten Wellen ausübt. Sie werden qualitativ so drastisch beschnitten, daß sie sich nurmehr mit der einfachen Rossby'schen Wellengeschwindigkeit im Unterschied zu c_1 gemäß (7) ausbreiten können. Im Besonderen wird mit $c = c_R$ die bedeutende Korrektur durch den Deformationsradius $R_d = \sqrt{\bar{\phi}_0/f_0^2}$ unterdrückt.

Die nächste Filterstufe $n = 1$ ist mit den Bedingungen $QD = 0$ und $Q^2D = 0$ (aber $D \neq 0$) sowie den zwei entsprechenden diagnostischen Differentialgleichungen gemäß (22) verknüpft. Sie werden als Verträglichkeitsrelationen benötigt, um ein lärmfilterndes prognostisches Gleichungssystem $A_1 \cdot \vec{X} = 0$ zu formen, mit der expliziten Operator(-Koeffizienten)matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} Q \frac{\partial}{\partial x} + \beta & f_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -f_0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ f_0 \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} & \bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Das für Lösungen $\vec{X} \neq 0$ notwendige Kriterium $\det A_1 = 0$ liefert die charakteristische Operatorgleichung

$$\begin{aligned} \left(Q \frac{\partial}{\partial x} + \beta \right) (\bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2) &= f_0^2 \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} && \text{oder} \\ \left(Q \frac{\partial}{\partial x} + \beta \right) \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2} \right) &= \frac{1}{R_d^2 k^2} \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} && \text{mit } R_d^2 = \frac{\bar{\phi}_0}{f_0^2}, \end{aligned} \quad (30)$$

die, wenn noch (4) Beachtung findet, zu der Eigenwertformel

$$c = \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2} \right)^{-1} \quad (31)$$

führt. Mit (31) zeigt sich, daß auf der Filterstufe $n = 1$ die Unterdrückung beider Lärmwellengeschwindigkeiten $c_{2,3}$ (vgl. (8)) nun von einer synoptischen Wellengeschwindigkeit begleitet ist, die dem Näherungswert c_1 aus (7) entspricht. Sie besitzt gegenüber der Rossby'schen Grundformel (28) eine charakteristische Erweiterung in Form eines stark dispersiven Faktors, der dem Einfluß des Deformationsradius R_d Rechnung trägt. Der meteorologisch so bedeutsame R_d -Effekt wie er in (31) zu Tage tritt (und auf der Stufe $n = 0$ noch ignoriert wird), folgt bereits aus der einfachsten Abhängigkeit von der Geschwindigkeitsdivergenz D .

Aus diesem elementaren Grund gibt es zur Dynamik $A_1 \cdot \vec{X} = 0$ noch eine äquivalente Alternative. Was die Filtertechnik auf der Stufe $n = 1$ nämlich erreicht, ist ein Approximationsmodell, das physikalisch absolut identisch mit der traditionellen quasi-geostrophischen Variante des Basissystems (2) ist. Zum Beweis: aus (2) folgt das quasi-geostrophische System, wenn die prognostische D -Gleichung durch die

Annahme $QD = 0$ auf eine stationäre Verträglichkeitsrelation ($\hat{=}$ geostrophische Bedingungsgleichung) reduziert wird, alle sonstigen Terme in (2) aber unverändert bleiben. Entsprechend wird aus Matrix A die quasi-geostrophische Version

$$A_{gg} = \begin{pmatrix} Q \frac{\partial}{\partial x} + \beta & f_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -f_0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ -f_0 \bar{u} & \bar{\phi}_0 \frac{\partial}{\partial x} & Q \end{pmatrix},$$

und es ist leicht verifizierbar, daß $\det A_{gg} = 0$ wiederum zu (30) führt und sodann auch (31) gilt.

Bis heute gilt die quasi-geostrophische Modellversion als ein echter Fortschritt in der synoptisch-skaligen Dynamik. Das hat wesentlich damit zu tun, daß durch die R_d -Erweiterung eine zweifelsfrei zutreffende und hochwertige Verbesserung gegenüber der viel zu retrograden Rossby-Wellengeschwindigkeit erreicht werden konnte. Ob weitere Verbesserungen möglich sind, kann auf der quasi-geostrophischen Betrachtungsebene kaum geklärt werden, wohl aus methodischen Gründen. Jedenfalls sind Untersuchungen in dieser Richtung nicht bekannt geworden.

Wie zuvor gezeigt werden konnte, ist der Fall eines quasi-geostrophisch approximierten Modells in der Methode der progressiven prognostischen Filtergleichungssysteme auf der Stufe $n = 1$ äquivalent enthalten. Daher ist mit gutem Grund zu vermuten, daß mit einem prognostischen Filtersystem auf der Stufe $n = 2$ und höher weitere Verbesserungen zu erreichen sind, die einer quasi-geostrophischen Modelldynamik verschlossen bleiben. Eine explizite Analyse der Filtersysteme für den Fall $n = 2$ führt allerdings zu einem ganz erstaunlichen Ergebnis: man bekommt in Abhängigkeit von den beiden stationären Verträglichkeitsbedingungen, die mit $Q^2 D = 0$ und $Q^3 D = 0$ aus der letzten Gleichung von (23) sowie aus (25) resultieren, das prognostische System $A_2 \cdot \vec{X} = 0$, das die Operatormatrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} Q \frac{\partial}{\partial x} + \beta & f_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ f_0 \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} & \bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2 & 0 \\ f_0 \beta \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) - f_0 (\bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2) & f_0^2 \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} & (\bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2) \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (32)$$

besitzt. Sodann findet man mit $\det A_2 = 0$ die charakteristische Operatorgleichung in voller Übereinstimmung mit (30) und ebenso die charakteristische Wellengeschwindigkeit (31). Was sich dementsprechend herausstellt, hat meteorologische Bedeutung. Ein prognostisches Filtersystem besitzt auf der Stufe $n = 2$ dieselbe dynamische Qualität wie auf der Stufe $n = 1$, wodurch es zudem mit der quasi-geostrophisch approximierten Modelldynamik äquivalent ist. Somit gilt in symbolischer Bedeutung:

$$A_2 \cdot \vec{X} \hat{=} A_1 \cdot \vec{X} \hat{=} A_{gg} \cdot \vec{X} = 0 \quad (33)$$

Es konnte mit dieser Stagnierung auf der höheren Stufe $n = 2$ nicht prinzipiell von vornherein gerechnet werden, erst die spezielle Textur der Matrix A_1 weist auf (33) hin. Bei Matrix A_2 ist das anders: die

Projektion ihrer Form für die prognostische Filterung der Ordnung $n = 3$ läßt eine dynamische Änderung erwarten. Zum entsprechenden prognostischen System $A_3 \cdot \vec{X} = 0$ gehören die zwei diagnostischen Verträglichkeitsbedingungen, die man aus (25) und (24) mit der Annahme $Q^3 D = 0$ bzw. $Q^4 D = 0$ (sowie $Q^3 D = 0$) ableitet. Man erhält dadurch die explizite A_3 -Matrix:

$$A_3 = \begin{pmatrix} Q \frac{\partial}{\partial x} + \beta & f_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ f_0 \beta \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) - f_0 (\bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2) & f_0^2 \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} & (\bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2) \frac{\partial}{\partial x} \\ -f_0 \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) \left[\beta^2 + (\bar{\phi}_0 k^2 + 2f_0^2) k^2 \right] & \left[(\bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2)^2 - \beta f_0^2 \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x} & f_0^2 \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) k^2 \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (34)$$

und sodann aus dem Lösungskriterium $\det A_3 = 0$ die charakteristische Operatorgleichung:

$$\left(Q \frac{\partial}{\partial x} + \beta \right) \left\{ 1 - \frac{\left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) (\bar{u} f_0^2 + \beta \bar{\phi}_0) f_0^2 k^2}{(\bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2)^3} \right\} = \frac{f_0^2 \{ (\bar{u} f_0^2 + \beta \bar{\phi}_0) \beta + (\bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2)^2 \} \left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right)}{(\bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2)^3} \quad (35)$$

sowie die dementsprechende neue Eigenwertformel:

$$c = \frac{\left(\bar{u} - \frac{\beta}{k^2} \right) (1 - \kappa)}{1 - \kappa + \frac{\bar{u} + \kappa \beta R_d^2}{\bar{u} R_d^2 k^2}} = \frac{c_R}{1 + \frac{1 + \kappa \beta R_d^2 / \bar{u}}{(1 - \kappa) R_d^2 k^2}} \quad (36)$$

Bei der Erweiterung von (36) gegenüber (31) handelt es sich um die kleine Größe $\kappa = \frac{\bar{u}(\bar{u} + \beta R_d^2)}{\bar{\phi}_0 (R_d^2 k^2 + 1)^2}$, die auch mit ihren größten Werten (bei großen \bar{u} und λ) immer $\ll 1$ bleibt. Daher sind (36) und (31) doch praktisch gleichwertig.

Fazit: im Vergleich mit den beiden identisch gleichen Filterstufen $n = 1$ und $n = 2$ und der überraschenderweise damit absolut übereinstimmenden quasi-geostrophischen Modellvariante, wird auf der schon recht hohen Filterstufe $n = 3$ noch eine vernachlässigbar geringe Korrektur erreicht.

7 Die Relevanz des Terms βu in prognostischen Filtermodellen

Wenn man in (1) den Klammerterm βu explizit berücksichtigt, so ist statt von (2) wie bisher, von der vollen Operator- Koeffizientenmatrix auszugehen, d.h. von

$$A = \begin{pmatrix} Q \frac{\partial}{\partial x} + \beta & f_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -f_0 \frac{\partial}{\partial x} & Q \frac{\partial}{\partial x} + \beta & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -f_0 \bar{u} & \bar{\phi}_0 \frac{\partial}{\partial x} & Q \end{pmatrix} \quad (37)$$

Damit Eigenlösungen zur A -Matrix bestimmt werden können, ist $\det A = 0$ auszurechnen. Das führt zu einer charakteristischen Operatorgleichung, die im nächsten Schritt mit Hilfe von (4) zur entsprechenden Eigenwertgleichung entwickelbar ist.

Zunächst resultiert für die Differentialoperatoren die Relation:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} Q^3 + 2\beta \frac{\partial}{\partial x} Q^2 + \left\{ \beta^2 + \left(f_0^2 - \bar{\phi}_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} Q - (\beta \bar{\phi}_0 + f_0^2 \bar{u}) \frac{\partial^3}{\partial x^3} = 0 \quad , \quad (38)$$

die mit (5) zu vergleichen ist, sowie dann das algebraische charakteristische Eigenwertpolynom:

$$a^3 - \frac{2\beta}{k^2} a^2 + \left[\left(\frac{\beta}{k^2} \right)^2 - \left(\bar{\phi}_0 + \frac{f_0^2}{k^2} \right) \right] a + \frac{\beta \bar{\phi}_0 + f_0^2 \bar{u}}{k^2} = 0 \quad (39)$$

bzw. in der Formulierung

$$a \left\{ \left(a - \frac{\beta}{k^2} \right)^2 - \left(\bar{\phi}_0 + \frac{f_0^2}{k^2} \right) \right\} + \frac{\beta \bar{\phi}_0 + f_0^2 \bar{u}}{k^2} = 0 \quad , \quad (39a)$$

was mit (6) bzw. (6a) zu vergleichen ist. Es kommt bei dieser Gegenüberstellung heraus, daß mit der βu -Berücksichtigung erstens der a^2 -Term sich auf den doppelten Wert erhöht, sowie zweitens der a -Term mit dem Trägheit-Schwereffekt nun eine β -abhängige dispersive Korrektur erfährt. Welche genaueren Schlüsse daraus zu ziehen sind, muß die folgende Betrachtung zeigen.

Durch die Unterschiede im quadratischen und linearen Term in (39) sind drei erweiterte Wellengeschwindigkeiten gegenüber der einfacheren Dynamik (ohne βu) zu erwarten. Macht man eine ähnliche Schätzung wie in Abschnitt 3, so zeigt sich zunächst einmal, daß als approximierte Lösungen die c -Ausdrücke (7) und (8) auch hier weiterhin zutreffend sind. Allerdings gilt das nur solange wie keine ultralangen bis zu planetaren Wellen in Betracht gezogen werden, also $(\beta/k^2)^2 \ll \bar{\phi}_0$ bleibt. Daher muß man damit rechnen, daß im prognostischen Lärmwellenfiltersystem die βu -"Korrektur" erst bei den sehr großen Wellenskalen ($\lambda \gtrsim 6 - 7 \cdot 10^6 m$) wesentlich zur Geltung kommen wird.

Man kann die sukzessiven Filterungsschritte aus Abschnitt 6 ganz analog für das vollständige Modell übernehmen, ohne daß irgend ein anderes analytisches Vorgehen nötig wäre. Zudem heißt das, daß auch der Weg in Abschnitt 5 zu den Gleichungen (23), (24) und (25), die eine regressive Ableitung von filternden diagnostischen Verträglichkeitsrelationen auf beliebigen Stufen $n \geq 0$ erlauben, für den verallgemeinerten Modellfall gleichermaßen beschrritten werden kann. Hier ist dieser Formalismus aber entbehrlich, und deshalb will ich auf solche abstrakten Wiederholungen zugunsten neuer konkreter Fakten verzichten.

Zuallererst darf festgestellt werden, daß die Berechnungen auf den Filterstufen $n = 0$ und $n = 1$ zu identischen charakteristischen Gleichungen wie (27) und (28) sowie (30) und (31) führen. Nicht überraschend zeigt sich bei diesen niederen Approximationen der βu -Term noch wirkungslos. Er läßt allerdings keine quasi-geostrophische Gleichungsalternative wie in Abschnitt 6 zu, was die physikalische Konstellation in der QD -Gleichung unschwer erklärt.

Wenden wir uns nun der nächsten Filterstufe $n = 2$ zu, wo alles deutlich anders wird. Die Ableitung des

dafür gültigen prognostischen Filtersystems $A_2 \cdot \vec{X} = 0$ ergibt die explizite Operatormatrix:

$$A_2 = \begin{pmatrix} Q \frac{\partial}{\partial x} + \beta & f_0 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ f_0(2\beta - \bar{u}k^2) \frac{\partial}{\partial x} & (f_0^2 + \bar{\phi}_0 k^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2 & -\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ f_0(f_0^2 + \bar{\phi}_0 k^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - f_0\beta(\beta - \bar{u}k^2) & -[\beta(f_0^2 + \bar{\phi}_0 k^2) + f_0^2(\beta - \bar{u}k^2)] \frac{\partial}{\partial x} & -(f_0^2 + \bar{\phi}_0 k^2) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \quad (40)$$

Zur leichteren Einsicht von (40) sei noch hinzugefügt, daß in A_2 die Komponenten der zweiten und dritten Zeile die beiden diagnostischen Verträglichkeitsrelationen vertreten, die den Filterannahmen $Q^2 D = 0$ und $Q^3 D = 0$ entsprechen (analog zu A_2 in (32)).

Im nächsten Schritt nun, d.h. Ausrechnung der Lösungsbedingung $\det A_2 = 0$, erhält man die folgende charakteristische Operatorgleichung:

$$\left(Q \frac{\partial}{\partial x} + \beta \right) \left[(\bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + f_0^2 \beta (\beta - \bar{u}k^2) \right] - f_0^2 (\beta - \bar{u}k^2) \left[(\bar{\phi}_0 k^2 + f_0^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^2 \right] = 0 \quad (41)$$

und aus dieser, wiederum mit Hilfe von (4), schließlich die neue Wellengeschwindigkeit

$$c = c_R \left[1 + \frac{\beta \left(\bar{u} - \frac{2\beta}{k^2} \right)}{\bar{\phi}_0 R_d^2 k^4 \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2} \right)} \right] \left[1 + \frac{1}{R_d^2 k^2} + \frac{\beta c_R}{\bar{\phi}_0 R_d^2 k^4 \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2} \right)} \right]^{-1} \quad (42)$$

mit $R_d^2 = \bar{\phi}_0 / f_0^2$ und $c_R = \bar{u} - \beta / k^2$. Hierzu lässt sich grundsätzlich sagen, daß aus Rossbys elementaren Annahmen für seine Formel $c_R = \bar{u} - \beta / k^2$ keine Erweiterung wie sie (42) abseits der üblichen f_0 - bzw. R_d -Korrektur enthält, vorstellbar ist. Diese neue c -Formel verspricht eine bessere Gültigkeit im Besonderen auf sehr großen bis zu den größten (planetaren) Wellenskalen.

Die ausgeprägte Skalenrelevanz von (42) läßt sich im Grunde bereits ahnen, ohne auf den Rossby'schen Kernterm irgendwie Bezug zu nehmen, weil die Diskriminantenstruktur des Zählerfaktors durch eine starke λ -Abhängigkeit gekennzeichnet ist. Bei diesen generell β -abhängigen Erweiterungen – in f -Ebenekonfiguration sind alle hinfällig – handelt es sich nicht allein um Größenkorrekturen. Zudem sind verschiedene qualitative Änderungen in der Wellenausbreitung in Betracht zu ziehen, wenn bestimmte Skalenkriterien erfüllt sind. Das läßt sich in einfacher Weise, ohne umständliche numerische Auswertungen vorzunehmen, an einigen besonderen Fällen genauer diskutieren.

Es ist dafür zweckmäßig, aus (42) den dimensionsfreien Zählerausdruck

$$N(k) = 1 + \frac{\beta \left(\bar{u} - \frac{2\beta}{k^2} \right)}{R_d^2 \bar{\phi}_0 k^4 \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2} \right)}, \quad (43)$$

der die variierbaren Parametergrößen $\bar{\phi}_0$, R_d , β und \bar{u} einschließt, in seiner Auswirkung als wellenlängen(λ)-abhängige Diskriminante zu inspizieren (mit $\lambda = 2\pi/k$). Zur rechnerischen Schätzung nehmen

wir die Parameterwerte $\bar{\phi}_0 = 10^5 m^2 s^{-2}$, $R_d^2 = 10^{13} m^2$ und $\beta = 10^{-11} m^{-1} s^{-1}$ sowie zunächst $\bar{u} > 0$, einen ostwärts gerichteten Grundstrom. In diesem Fall gilt $N(k) > 0$ für alle Wellenzahlen $k \geq \sqrt{2\beta/\bar{u}}$ ($\approx 4,5 \cdot 10^{-6}/\sqrt{\bar{u}}$) bzw. Wellenlängen $\lambda \leq 1,4 \cdot 10^6 \sqrt{\bar{u}}$. Als Folge dieser \bar{u} -Barriere kann der gesamte Erweiterungsfaktor in (42) in diesem Bereich des Wellenspektrums nur als Betragskorrektur der klassischen Rossby-Geschwindigkeit c_R Einfluß nehmen.

Umgekehrt besteht im gesamten längerwelligen Spektrum, also wenn $\lambda > 1,4 \cdot 10^6 \sqrt{\bar{u}}$ bzw. $k < 4,5 \cdot 10^{-6}/\sqrt{\bar{u}}$ ist, keine \bar{u} -Barriere mehr, und deshalb kann $N(k) \leq 0$ und ein qualitativ neuer Fall eintreten. Wenn im Besonderen $N(k_{s_2}) = 0$, so bedeutet das eine stationäre Welle 2. Art (mit k_{s_2} und $\lambda_{s_2} = 2\pi/k_{s_2}$); sie gilt unabhängig von der bekannten stationären Welle mit der Bedingung $c_R(k_{s_1}) = 0$ und der Wellenzahl $k_{s_1} = \sqrt{\beta/\bar{u}}$ (Stationarität 1. Art).

Betrachten wir nun die Situation bei entgegengesetzter, westwärts gerichteter Grundströmung, also $\bar{u} < 0$. Offenbar gibt es dann für die Diskriminante $N(k) \leq 0$ keine einschränkende \bar{u} -Barriere. In diesem Fall ist vor allem interessant, daß allein die Bedingung $N(k_s) = 0$ stationäre Wellen möglich macht (d.h. Stationarität 2. Art), hingegen läßt der originäre Rossby'sche Term, weil er generell negativ ist ($-|\bar{u}| - \beta/k^2$), keine Stationarität 1. Art zu. Mit dem überraschenden Zustandekommen einer stationären Welle 2. Art hängt zudem eine bemerkenswerte Eigenschaft der instationären Wellenausbreitung zusammen. Sie betrifft im Wellenspektrum den Teil, für den $N(k) < 0$ ist. Infolgedessen nämlich ergibt sich mit (42), daß alle diese Wellen, entgegen Rossbys streng negativer Geschwindigkeit c_R , mit positiver Geschwindigkeit c , also ostwärts verlaufen.

Ich möchte zudem versuchen, diese zum Teil erstaunlichen Neuheiten in der Rossby-förmigen Wellenausbreitung aus der erweiterten Sicht von Filterstufe $n = 2$, wobei zunächst keine nähere Größenspezifizierung nötig war, jetzt durch einige numerische Näherungslösungen von (43) noch etwas näher zu quantifizieren. Der Blick richtet sich zunächst auf die Skala sehr langer Wellen mit $\lambda > 2 \cdot 10^7 m$, damit in (43) die Trägheitskorrektur $R_d^{-2} k^{-2}$ vergleichsweise überwiegt und die Vereinfachung

$$N(k) = 1 + \frac{\beta(\pm|\bar{u}| - 2\beta/k^2)}{\bar{\phi}_0 k^2} \quad (44)$$

zu machen ist; mit $\pm|\bar{u}|$ sei vermerkt, daß eine West-Ost bzw. eine Ost-West-Grundströmung gegeben sein kann.

Uns interessiert nun vorwiegend, was man mit (42) für den stationären Fall $N(k_s) = 0$ ableiten kann. Die Wellenzahlformel, die sich direkt ergibt, lautet:

$$k_s^2 = \frac{\beta|\bar{u}|}{2\bar{\phi}_0} \left(\pm 1 + \sqrt{1 + 8\bar{\phi}_0/\bar{u}^2} \right) \quad (45)$$

Da aber für alle meteorologisch vertretbaren \bar{u} -Werte die Annahme $1 \ll 8\bar{\phi}_0/\bar{u}^2$ bzw. $\ll \sqrt{8\bar{\phi}_0/\bar{u}^2}$ zulässig ist, erhält man für (45) die ausreichende und vor allem \bar{u} -unabhängige Näherung

$$k_s^2 \approx \sqrt{2\beta^2/\bar{\phi}_0} \quad ; \quad (46)$$

(46) definiert eine extrem große Wellenskala, $\lambda_s = 2\pi \left(\bar{\phi}_0/2\beta^2 \right)^{1/4} = 2,97 \cdot 10^7 m$, also rund 30000 km.

In der Folge bekommt k_s von (46) die Rolle einer 1. Wurzel erteilt, um aus der vollen Diskriminante $N(k_s) = 0$, die den N -Ausdruck (43) enthält, noch andere mögliche Wellenzahlen für stationäre Bedingungen 2. Art abzuleiten. Diese Berechnungen zeigen: in Gegenwart eines Grundstroms $\bar{u} \geq 0$ (ostwärts gerichtet bzw. verschwindend) sind weitere rein reellwertige stationäre Wellen ausgeschlossen; hingegen ist bei einem westwärts gerichteten Grundstrom ($\bar{u} < 0$) eine weitere reellwertige stationäre Welle möglich, und zwar mit dem Wellenzahlausdruck:

$$k_s^2 = -0,723 \cdot 10^{-13} + 10^{-12} \sqrt{|\bar{u}|} \quad , \quad \text{einschließlich} \quad |\bar{u}| > 0,52 \cdot 10^{-2} \text{ m/s} \quad (47)$$

Nimmt man z.B. $\bar{u} = -5 \text{ m s}^{-1}$, so folgt mit (47) für Wellenzahl und Wellenlänge: $k_s = 1,471 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$ bzw. $\lambda_s = 4271 \text{ km}$. Einem stärkeren Grundstrom entspricht eine kleinere Wellenlänge; für $\bar{u} = -10 \text{ m s}^{-1}$ etwa beträgt λ_s nur noch 3574 km .

Filterstufe n \ Modell-status	mit $f = f_0$	mit $f = f_0 + \beta y$, jedoch ohne βu -Term	mit $f = f_0 + \beta y$ und βu -Term
$n = 0$	$c = \bar{u}$	$c = c_R \equiv \bar{u} - \beta/k^2$	$c = c_R$
$n = 1$	$c = \bar{u} \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2}\right)^{-1}$	$c = c_R \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2}\right)^{-1}$	$c = c_R \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2}\right)^{-1}$
$n = 2$	$c = \bar{u} \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2}\right)^{-1}$	$c = c_R \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2}\right)^{-1}$	$c = \frac{c_R \left[1 + \frac{\beta \left(\bar{u} - \frac{2\beta}{k^2} \right)}{\bar{\phi}_0 R_d^2 k^4 \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2} \right)} \right]}{1 + \frac{1}{R_d^2 k^2} + \frac{\beta c_R}{\bar{\phi}_0 R_d^2 k^4 \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2} \right)}}$
$n = 3$	$c = \bar{u} \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2}\right)^{-1}$	$c = \frac{c_R}{1 + \frac{1 + \kappa \beta R_d^2 / \bar{u}}{(1 - \kappa) R_d^2 k^2}}$ $\approx c_R \left(1 + \frac{1}{R_d^2 k^2}\right)^{-1}$ mit $\kappa \ll 1$	hier nicht diskutiert

Abschließend seien die in den Abschnitten 6 und 7 diskutierten c -Approximationen in der folgenden Übersicht noch einmal zusammengefasst.

8 Schlußbetrachtung

Mit diesen Ausführungen meine ich, gezeigt zu haben, daß die These der Lärmfreiheit eine erfolgreiche gesetzmäßige Behandlung und Deutung der im meteorologischen Erscheinungsbild dominanten Rossby-artigen Wellenphysik ermöglicht. Es können daraus unerwartete Erweiterungen des Rossby'schen Wellenmodus abgeleitet werden, die sich im Modus einer Variablen mit üblichen synoptisch-skaligen Approximationen nicht erschließen lassen. Vor dem flexiblen Hintergrund der Lärmfilterung kann man keines dieser fixen Modellkonzepte als zufriedenstellend einstufen. Mir scheinen die streng divergenzfrei eingespannte Rossby'sche Modellform und ebenso ihre Korrekturradius-Erweiterung, die infolge einer quasi-geostrophischen "Lockerung" möglich wird, daran zu krankem, daß sie wie absolute meteorologische Wahrheiten vermittelt werden. Das ist eine überzogene Wahrnehmung, insbesondere gegenüber der Einsicht, daß man mit einem uniformen und (viel) allgemeineren Prinzip den Rossby-förmigen Wellenmodus entwickeln kann.

Es gibt aber im Rahmen der Regeln der Lärmfiltertheorie weiteren Behandlungsbedarf, durch den ein noch besseres Bild gewonnen werden kann. Damit fertig zu werden, bereitet mehr rechnerischen Aufwand als hier erwünscht war. Es handelt sich hauptsächlich um die Erweiterung, daß alle Wellenfunktionen außer (t, x) -abhängig zudem auch y (=meridional)-abhängig sein können, worauf in dieser Abhandlung zugunsten der prinzipiellen Theoriebildung verzichtet worden ist. Bei einer Aufhebung dieses Verzichts ist dann ein Variablentausch (u, v) in (χ, φ) , d.h. Geschwindigkeitspotential und -stromfunktion, von den Basisgleichungen (1) an als zweckmäßige Option zu erwägen. In einer 2D-Version des Modells läßt sich mit dieser Substitution in rotationsfreie und divergenzfreie Anteile der Strömung gemäß der Helmholtz'schen Separation eventuell eine bessere analytische Bearbeitung durchführen.

Zur barotropen Wirbelphysik sind noch andere erweiterte Betrachtungen über die Modellversion (1) hinaus denkbar und interessant. Es handelt sich z.B. um gewisse alternative Filterungsaspekte, wozu ich hier aber nicht näher Stellung nehmen möchte. Ich will nur sagen, daß auch diese tiefwurzelnden Erweiterungen zu keinem endgültigen Modellverständnis führen werden.

Was mit wie diesen einfachen, überschaubaren barotropen Modelldynamiken nicht gelingt, wird mit weit komplexeren numerischen Computermodellen erst recht nicht möglich sein. Leider beanspruchen jene oft einen unbedingten Glauben, fast wie in Religionen oder Philosophien. In der Meteorologie sehen wir in jüngerer Zeit dasselbe Streben von ideologisch verkündeten langzeitigen Klimaerwärmungsszenarien, für die ein anthropogen erzeugter Kohlendioxid-Treibhauseffekt als ausgemachter Verursacher angeblich feststeht. Tatsächlich ist das aber ein willkürlicher Verdacht, ohne einen wissenschaftlichen Beweis. Dennoch reden seine doktrinären und unduldsamen Idealisten von einer absehbaren, von uns (Menschen) gemachten "Klimakatastrophe", und sie werden nicht müde, den Glauben an ihre absolute Wahrheit mit allen medialen plus politischen (!) Mitteln einzufordern.

In der überaus anschaulichen Meteorologie mit ihrer komplexen und facettenreichen Dynamik zeigt meine vorausgehende Bearbeitung eines kleinen Bereichs, daß selbst bei einer sehr einfachen Teildynamik kein endgültiges Verständnis zu erreichen ist (o.g. Erweiterungen mitgerechnet). Diese elementaren Modellstudien mögen einen Platz im grundlegenden Lehrstoff finden, um dadurch schon frühzeitig auch der irrigen Ansicht vom unbeschränkten Vermögen meteorologischer-klimatologischer Modellierungen, Entwicklungen in ferner Zukunft vorauszusehen, entgegenzuwirken.

Danksagung. Die erhellende Diskussion mit Klaus Beheng (Karlsruher Institut für Technologie) zur Physik in der lärmfreien diagnostischen Adjustierung war überaus wertvoll für die textliche Gestaltung. Dafür wie für seine spätere redaktionelle Hilfe bin ich ihm sehr dankbar. Zudem möchte ich Frau Anja Danielczok danken, dass sie sich für die LaTeX-Anfertigung des Manuskripts gewinnen ließ, und diese trotz Examenslast so vorzüglich ausgeführt hat.

Schließlich und besonders freue ich mich über das Entgegenkommen des DWD, diesen Artikel in seine Berichte-Reihe aufzunehmen.

Literaturverweise

Haltiner, G. J. und R. T. Williams, 1980: *Numerical prediction and dynamic meteorology*. John Wiley and Sons, 2nd ed., New York, 477 S.

Herbert, F., 1971: Statische und quasistatische Bewegungen in der Atmosphäre. *Contrib. Atmos. Phys.*, **44**, 17–52.

Hinkelmann, K., 1951: Der Mechanismus des meteorologischen Lärms. *Tellus*, **3**, 285–296.

Hinkelmann, K., 1962: Noncharacteristic filtering of meteorological noise waves. *Contrib. Atmos. Phys.*, **35**, 252–276.

Hinkelmann, K., 1966: Das Filterproblem in der numerischen Wettervorhersage. *Arch. Meteor. Geoph. Biokl. Suppl.*, **1**, 74–87.

Holton, J. R., 2004: *An introduction to dynamic meteorology*. Elsevier Acad. Press, 4th ed., Amsterdam, 535 S.

Phillips, N. A., 1960: On the problem of initial data for the primitive equations. *Tellus*, **12**, 121–126.

Thompson, P., 1987: Methods of suppressing gravity wave solutions: the relation between initialization and filtering. *Ann. Meteor. NF*, **24**, 37–59.

Wiin-Nielsen, A., 1978: On initial conditions for non-hydrostatic models. *ECMWF Tech. Rep.*, **14**, 44 S.

WMO Bulletin, 1985: *The Bulletin Interviews: Prof. K. Hinkelmann*. **34**, 275–284, WMO Geneva.

Anhang: Linearisierung der barotropen Basisgleichungen

Das grundlegende dynamische System seien die Bewegungsgesetze für ein rotierendes dichtehomogenes Flachwassermodell in Gestalt der lokalen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + f \vec{k} \times \vec{v} &= -\nabla \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \phi + \phi D &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

$$\text{mit } \phi = gH, \quad \vec{v} = (u, v) \quad \text{und} \quad D = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Es ist einsichtig, (A1) mit Hilfe folgender Vektordefinitionen, wobei τ für $\{x, y, t\}$ steht:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(\tau) &= (u, v, \phi)^T \quad \text{und} \\ \vec{G}(\vec{\Omega}(\tau), \tau) &= \left(-\vec{v} \cdot \nabla u + f v - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad -\vec{v} \cdot \nabla v - f u - \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad -\vec{v} \cdot \nabla \phi - \phi D \right)^T \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

in der kompakten Schreibweise

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \vec{G}(\vec{\Omega}, \tau) \quad (\text{A3})$$

auszudrücken. In einem bestimmten physikalischen Grundzustand soll die Dynamik (A3) durch den entsprechenden Vektor $\vec{\bar{\Omega}} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{\phi})^T$ erfüllt sein, d.h. auch

$$\frac{\partial \vec{\bar{\Omega}}}{\partial t} = \vec{G}(\vec{\bar{\Omega}}, \tau) \quad (\text{A4})$$

soll gelten. Es sei generell $\vec{\Omega} = \vec{\bar{\Omega}} + \vec{\Omega}'$, womit die Abweichung vom Grundzustand oder die Störung $\vec{\Omega}'$ eingeführt wird. Bei $\vec{\bar{\Omega}}$ kann es sich im Besonderen auch um einen stationären Zustand oder ein Gleichgewicht, wobei (A4) dann $\vec{G}(\vec{\bar{\Omega}}) = 0$ bzw. eine Vereinfachung davon liefert, handeln.

Nun sagt (A3) zunächst noch nichts darüber aus, wie sich eine Grundkonfiguration $\vec{\bar{\Omega}}$ gegenüber kleinen Störungen $\vec{\Omega}' = \vec{\Omega} - \vec{\bar{\Omega}}$ verhält, etwa wenn sie Wellencharakter besitzen. Darüber erfährt man mehr, wenn man die Dynamik in der Nähe des Grundzustands $\vec{\bar{\Omega}}$ linearisiert. Sei $\vec{\bar{\Omega}}$ eine bestimmte Lösung, so ergibt sich aus (A3), wobei (A4) (und ggf. mit $\vec{G}(\vec{\bar{\Omega}}) = 0$) berücksichtigt wird:

$\partial \vec{\Omega}' / \partial t = \vec{G}(\vec{\Omega}' + \vec{\bar{\Omega}}, \tau) - \vec{G}(\vec{\bar{\Omega}}, \tau)$. Entwickelt man davon nun die rechte Seite nach Taylor um $\vec{\bar{\Omega}}$ herum, so entsteht die lineare und homogene Störfeld-Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial t} = \left. \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{\Omega}} \right|_{\vec{\bar{\Omega}}} \cdot \vec{\Omega}' + O(\vec{\Omega}'^2) \quad , \quad (\text{A5})$$

oder in der Komponentenschreibweise

$$\frac{\partial \Omega'_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \left. \frac{\partial G_i}{\partial \Omega_k} \right|_{\vec{\bar{\Omega}}} \Omega'_k + O(\vec{\Omega}'^2)_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad ; \quad (\text{A6})$$

dabei ist mit $O(\)$ bzw. $O(\)_i$ gemeint, daß die Reihennäherung jeweils bis auf die Terme der Ordnung $\vec{\Omega}'^2$ und höher gilt.

Zur Berechnung der Matrix der partiellen \vec{G} -Ableitungen bezüglich $\vec{\Omega}$ soll ein konkreter Grundzustand angenommen werden, und zwar, im Sinne einfacher synoptischer Praxis, ein unveränderliches geostrophisches Gleichgewicht mit

$$-\frac{1}{f_0} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} = u_g \equiv \bar{u} = \text{konst.} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = 0, \quad \text{folgl.} \quad v_g \equiv \bar{v} = 0. \quad (\text{A7})$$

Dem entspricht $\vec{G}(\vec{\Omega}) = (0, -f_0 \bar{u} - \partial \bar{\phi} / \partial y, 0)^T = 0$. So erhält man aus (A6) mit (A2) und (A7) folgende Differentialgleichungen für die Störvariablen

$$\Omega'_1 = u' : \quad \frac{\partial u'}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + f v' - \frac{\partial \phi'}{\partial x} \quad \text{bzw.} \quad Q u' - f v' = -\frac{\partial \phi'}{\partial x} \quad (\text{A8})$$

$$\Omega'_2 = v' : \quad \frac{\partial v'}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} - f u' - \frac{\partial \phi'}{\partial y} \quad \text{bzw.} \quad Q v' + f u' = -\frac{\partial \phi'}{\partial y} \quad (\text{A9})$$

$$\Omega'_3 = \phi' : \quad \frac{\partial \phi'}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial \phi'}{\partial x} + f_0 \bar{u} v' - \bar{\phi}_0 D' \quad \text{bzw.} \quad Q \phi' - f_0 \bar{u} v' + \bar{\phi}_0 D' = 0 \quad (\text{A10})$$

Zur direkten Verwendung eignen sich die erhaltenen Störgleichungen (A8) bis (A10) in zwei Versionen:

- entweder mit festem $f = f_0 = \text{konst.}$ (für mittlere Breiten bei Verzicht auf β -Effekte), was unbegrenzte sinusförmige Lösungen im Rossby-Trägheitsschweremodus erlaubt
- oder in der Version mit $f = \beta y$ (tropische Breiten, $f_0 \approx 0$), womit sich Lösungen unter Randbedingungen für äquatorial-gefangene Rossby-Schwerewellen ergeben (Matsuno-Problem).

Schließlich lassen sich, indem man die u' -Gleichung von (A8) bzw. die v' -Gleichung von (A9) Ableitungen $\partial/\partial x$ bzw. $\partial/\partial y$ sowie $\partial/\partial y$ bzw. $\partial/\partial x$ unterzieht, die Differentialgleichungen für $D' = \partial u' / \partial x + \partial v' / \partial y$ (sog. Divergenz) und $\zeta' = \partial v' / \partial x - \partial u' / \partial y$ (sog. relative Vorticity) aufstellen. Bei dieser Berechnung wird als planetare Vorticity entweder $f = f_0 + \beta y$, um meridionale Gradienteneffekte zu berücksichtigen, oder sonst ein fester Zahlfaktor $f = f_0$ angenommen. Sodann resultieren folgende Gleichungen für ζ' und D' im sog. β -Ebeneformat:

$$Q \zeta' + f_0 D' + \beta v' = 0 \quad \text{sowie} \quad Q D' - f_0 \zeta' + \beta u' = -\nabla^2 \phi \quad (\text{A11})$$

Mit (A10) und (A11) liegen die Startgleichungen aus (1) vor.

Berichte des Deutschen Wetterdienstes

- Nr. 238 G. Augter:
Vergleich der Referenzmessungen des Deutschen Wetterdienstes mit automatisch gewonnenen Messwerten
- Nr. 237 B. Frühauf, M. Koßmann, M. Roos:
Frankfurt am Main im Klimawandel – Eine Untersuchung zur städtischen Wärmebelastung
- Nr. 236 G. Augter, M. Roos:
Berechnung von Sturmintensitäten für Deutschland
- Nr. 235 U. Maier, G. Müller-Westermeier:
Verifikation klimatologischer Rasterfelder
- Nr. 234 W. Riecke, G. Rosenhagen:
Das Klima in Hamburg : Entwicklung in Hamburg und der Metropolregion
- Nr. 233 P. Winkler:
Wissenschaftshistorische Untersuchungen zur Geschichte und insbesondere zur Datenqualität der langen meteorologischen Reihen des Observatoriums Hohenpeißenberg
- Nr. 232 H.-J. Heinemann:
Eine Winterchronik : die Kälte der Winter von 1960/61 bis 2007/08
- Nr. 231 A. Kolodziej:
Klimawandel in Sachsen-Anhalt: Auswirkungen auf die phänologischen Phasen wildwachsender Pflanzen
- Nr. 230 F. Beyrich, W. K. Adam:
Site and Data Report for the Lindenberg Reference Site in CEOP-Phase I
- Nr. 229 U. Maier u.a.:
Klimatologische Auswertungen von Zeitreihen der Monatsmittel von Temperaturminima und Temperaturmaxima im 20. Jahrhundert
- Nr. 228 B. Tinz, P. Hupfer:
Die thermischen Verhältnisse im Bereich der deutschen Ostseeküste unter besonderer Berücksichtigung des Bioklimas und der Eisverhältnisse
- Nr. 227 U. Sievers:
Das Kaltluftabflussmodell KLAM_21 : theoretische Grundlagen, Anwendung und Handhabung des PC-Modells
- Nr. 226 C. Koppe:
Gesundheitsrelevante Bewertung von thermischer Belastung unter Berücksichtigung der kurzfristigen Anpassung der Bevölkerung an die lokalen Witterungsverhältnisse
- Nr. 225 S. Trepte, P. Winkler:
Rekonstruktion der UV-Strahlung am Hohen Peißenberg und in Würzburg ab 1968 unter Berücksichtigung der langfristigen Veränderungen von Gesamt ozon, Bewölkung und atmosphärischer Trübung
- Nr. 224 C. Leifeld:
Weiterentwicklung des Nowcastingsystems ADWICE zur Erkennung vereisungsgefährdeter Lufträume
- Nr. 223 U. Maier u.a.:
Klimatologische Auswertungen von Zeitreihen des Monatsmittels der Lufttemperatur und der monatlichen Niederschlagshöhe im 20. Jahrhundert
- Nr. 222 P. Lange u.a.:
KONRAD – Ein operationelles Verfahren zur Analyse von Gewitterzellen und deren Zugbahnen, basierend auf Wetterradarprodukten
- Nr. 221 Gaßmann, A.:
Numerische Verfahren in der nichthydrostatischen Modellierung und ihr Einfluß auf die Güte der Niederschlagsvorhersage
- Nr. 220 Kurz, M.:
Die Dezemberstürme 1999
- Nr. 219 K. Blümel u.a.:
Hydrometeorologische Untersuchungen zum Problem der Klimaveränderungen
- Nr. 218 A. Walter:
Zur Anwendung neuronaler Netze in der Klimatologie
- Nr. 217 J. Ballach:
Entwicklung und Absicherung leistungsfähiger Analyseverfahren zur Bestimmung von Benzol und Ruß in der Luftthygiene
- Nr. 216 W. Janssen, R. Sedlatschek:
Ablauf der Datenprüfung und –vervollständigung im Geschäftsfeld Landwirtschaft
- Nr. 215 U. Kaminski u.a.:
Qualitätssicherung von Meßreihen, Untersuchungen zu Sammelverlusten eines Berner Niederdruck-Impaktors
- Nr. 214 P. Winkler u.a.:
Beobachtungen am Meteorologischen Observatorium Hohenpeißenberg während der Sonnenfinsternis vom 11.8.1999
- Nr. 213 G. Kluge, G. Müller-Westermeier:
Das Klima ausgewählter Orte der Bundesrepublik Deutschland: Jena
- Nr. 212 J. Rapp:
Konzeption, Problematik und Ergebnisse klimatologischer Trendanalysen für Europa und Deutschland
- Nr. 211 F. Fricke u.a.:
Filterung luftchemischer Meßreihen im Alpenraum zur Charakterisierung ihrer Repräsentanz. GAW-DACH-Projekt
- Nr. 210 W. Steinbrecht, P. Winkler:
Untersuchung der Zusammenhänge zwischen Ozon und Temperatur in der Stratosphäre
- Nr. 209 U. Görsdorf:
Genauigkeit und Verfügbarkeit von Windprofiler/RASS-Messungen
- Nr. 208 W. Höhne:
Komponenten automatischer meteorologischer Meßsysteme
- Nr. 207 S. Tilmes:
Verfahren zur Analyse von Messungen atmosphärischer Spurengase mit dem Ziel der Assimilation in Chemie-Transportmodellen
- Nr. 206 D. Spänkuch:
Climatology of Total Ozone Measurements 1964 – 1997 at Potsdam, Based on Re-evaluated Dobson Series
- Nr. 205 H. Berresheim:
Beiträge zur Rolle des natürlichen Schwefelkreislaufs in der Atmosphäre
- Nr. 204 U. Kohler u.a.:
Spectral and Integral Observations of UV-B-Radiation and Ozone Measurements