

On enumeration of chord diagrams and asymptotics of Vassiliev invariants

Alexander Stoimenow

Freie University, Berlin
FB Mathematik, WE 2, Arnimallee 3,
14195 Berlin, Germany



Berlin, 1998

Doctor thesis

for attaining the degree Dr. rer. nat. at the
Dept. of Mathematics and Computer Science
of the Freie University, Berlin.
The disputation took place on May 6, 98.

Author's address : Warnitzer Str. 19
06/03
13057 Berlin
Germany

e-mail:
stoimeno@informatik.hu-berlin.de

World Wide Web:
<http://www.informatik.hu-berlin.de/~stoimeno>

Advisor: Prof. Elmar Vogt

Assessors: Prof. E. Vogt, Dr. S. Chmutov

Contents

1	Vassiliev Invariants for knots	4
1.1	The classification problem of knots	4
1.2	The filtration of the knot space	4
1.3	The Algebra \mathcal{A}	6
1.4	Weight systems	7
1.5	VASSILIEV invariants for braids and string links	8
1.6	Constructing a universal VASSILIEV invariant	9
1.7	Braiding sequences	9
2	The results of this thesis	10
3	On the number of chord diagrams	11
3.1	Notations	11
3.2	Linearized chord diagrams	11
3.3	Cyclic CD's and GLCD's	12
3.4	Counting all chord diagrams	14
3.5	Symmetric chord diagrams	14
3.6	Degenerate CD's and LCD's	15
3.7	Chord diagrams with chords of length 1	18
3.8	Chord diagrams with isolated chords only	19
3.9	Some computations	20
3.10	Asymptotics	20
4	Connected and tree-connected chord diagrams	21
4.1	Connected CD's and LCD's	22
4.2	Tree-connected CD's and LCD's	24
4.3	Some computations	27
5	An upper bound for Vassiliev invariants	27
5.1	Factoring out 4T relations	27
5.2	Regular linearized chord diagrams	29
5.3	Connected regular LCD's	32
5.4	Numerical and asymptotical results	34
5.5	A further improvement	38
5.6	The segment length inequality	41
6	The dimension of a commutative graded algebra and asymptotics of VI	41
6.1	The dominating partition	43
6.2	A lower bound for the number of all Vassiliev invariants	45
6.3	The exponential barrier	46
7	The braid index and the growth of Vassiliev invariants	47
7.1	Braiding sequences	47
7.2	Arborescent knots	48
7.3	Bounds for braid representations	51
7.4	The growth of the number of knots and Vassiliev invariants	54

Abstract	59
Zusammenfassung (German abstract)	59

Abstract

The subject of the present thesis are combinatorics of chord diagrams and asymptotics of Vassiliev invariants.

In sections 3 and 4 we will derive some (purely) enumerative results on special kinds of chord diagrams. Although not directly related to Vassiliev invariants, these results provide a glimpse of the combinatorial complexity of chord diagrams – already for easily to define properties the enumeration is rather hard and requires additional ideas.

In section 5 we will use combinatorial techniques to relate enumeration of special chord diagrams to a context of Vassiliev invariants and will prove the asymptotical upper bound $D!/1.1^D$ for the number of Vassiliev invariants in the degree D .

In section 6 we will use the techniques of section 5 and the result of Chmutov and Duzhin [CD2] to deduce a lower bound for the number of all Vassiliev invariants and discuss the relation between the asymptotics of prime and all Vassiliev invariants. Parallely, we give a summary on what we know about the asymptotics of Vassiliev invariants.

Finally, in section 7 we use the rather different approach of braiding sequences to prove exponential upper bounds for the number of Vassiliev invariants on knots with bounded braid index and arborescent knots.

Parts of this work can be found in several papers of mine [St2, St6, St8, St9, St10].

Zusammenfassung

Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Kombinatorik von Sehnendiagrammen und Asymptotik von Vassiliev-Invarianten.

In den Abschnitten 3 und 4 werden wir einige (reine) Abzählresultate über Sehnendiagramme herleiten. Obwohl nicht direkt in Beziehung zu Vassiliev-Invarianten, verdeutlichen sie die kombinatorische Komplexität der Sehnendiagramme – schon für einfache Eigenschaften wird die Abzählung kompliziert und erfordert zusätzliche Ideen.

Im Abschnitt 5 werden wir kombinatorische Techniken benutzen, um Abzählung bestimmter Sehnendiagramme mit Vassiliev-Invarianten in Verbindung zu bringen, und werden eine obere Abschätzung der Anzahl der Vassiliev-Invarianten in Abhängigkeit vom Grad herleiten.

Im Abschnitt 6 werden wir mit Hilfe der Techniken aus Abschnitt 5 und dem Resultat von Chmutov und Duzhin [CD2] eine untere Abschätzung der Anzahl aller Vassiliev-Invarianten herleiten und die Beziehung zwischen der Anzahl der primitiven und aller Vassiliev-Invarianten diskutieren. Parallel dazu werden wir alles, was über Asymptotik von Vassiliev-Invarianten bekannt ist, zusammenfassen.

Im Abschnitt 7 werden wir schließlich mit Hilfe der Methode der Verzopfungsreihen exponentielle obere Schranken für die Anzahl der Vassiliev-Invarianten auf Knoten von beschränktem Zopfindex und arboreszenten Knoten herleiten.

Teile dieser Dissertation können in mehreren Arbeiten von mir [St2, St6, St8, St9, St10] gefunden werden.

CURRICULUM VITAE

Alexander Stoimenow

- | | |
|--------------|--|
| 20. 05. 1974 | Born in Sofia, Bulgaria |
| 15. 09. 1981 | Begin of attendance at school in Sofia |
| 08. 08. 1985 | Resettlement to Berlin |
| 30. 06. 1990 | Abitur (school-leaving examination) at the Carl-von-Ossietzky-EOS, Berlin |
| 03. 09. 1990 | Matriculation for studies in mathematics at Humboldt University, Berlin |
| 26. 09. 1995 | Passing final oral examination (Diplomprüfung) in mathematics at Humboldt University |
| 26. 10. 1995 | Acceptation for graduated studies (Promotion) at Freie Universität Berlin |