3 Erweiterte Modellklassen

Der klassische Integer-Variablentyp in der IP-Modellierung ist die allgemeine Integer-Variable, die einen beliebigen ganzzahligen Wert annehmen kann. Meistens ist diese Variable durch eine Ober- und/oder Untergrenze eingeschränkt.

Ein Spezialfall der allgemeinen Integer-Variablen ist die 01-Variable. Diese Variable hat eine Untergrenze von Null und eine Obergrenze von Eins. Demzufolge kann diese Variable nur den Wert Null oder Eins annehmen.

Fast alle nachfolgend aufgelisteten Anwendungsprobleme können durch diese zwei Variablentypen modelliert werden. Somit ist die Einführung der erweiterten Modellklassen nicht zwingend. Allerdings ergibt das Einführen der neuen Modellklassen, dass sich das Modell zum einen nicht aufbläht, und zum anderen spart es Zeit bei der Lösung dieses Modells.

Die erweiterten Modellklassen werden in einzelne Variablen und Variablengruppen unterteilt.

3.1 Einzelne Variablen

Die Klasse der Integer-Variablen kann durch die Semi-Continuous (SC), Semi-Integer (SI) und Partial-Integer-Variablen (PI) erweitert werden. Die SC- und die SI-Variablen werden in weiterer Optimierungssoftware wie z.B. in Cplex von ILOG oder in Xpress-MP von DASH benutzt und u.a. in dem Manuel von FortMP [FortMP99] beschrieben. Die PI-Variable taucht in dem unten beschriebenen Ansatz in keiner bisherigen Optimierungssoftware auf.

3.1.1 Variablen mit Definitionslücke

Ein Arbeiter kann entweder frei haben oder zwischen l und u Stunden an einem Tag arbeiten. Wie soll die Arbeitszeit des Arbeiters modelliert werden?

Wenn eine Variable nur den Wert Null oder einen Wert innerhalb eines bestimmten Bereichs annehmen kann, dann gibt es zwei Formulierungen, um diese Variable zu modellieren.

Formulierung mit 01-Variablen

Mit Hilfe einer zusätzlichen 01-Variablen und zwei zusätzlichen Restriktionen kann dieses Problem gelöst werden:

$$x_j \leq u_j * y_i \text{ und } x_j \geq l_j * y_i \qquad (3\text{-}1)$$

mit $y_i \in \{0,1\}$, x_j kontinuierlich, $i \in J_I$ und $j \in J$.

Wenn die 01-Variable y_i den Wert Null annimmt, dann ist die kontinuierliche Variable x_j auch gleich Null. Hat allerdings die 01-Variable den Wert Eins, dann liegt die kontinuierliche Variable zwischen der Lower und Upper Bound.

Sollte die Upper Bound unendlich sein, muss ein BigM, das heißt eine sehr große Zahl, für die Upper Bound in die Restriktion eingefügt werden. Mit diesem Lösungsansatz kann keine Integer-Variable mit Definitionslücke modelliert werden.

Es wird nach der 01-Variablen y_i verzweigt Durch das Setzen der 01-Variablen auf Null oder Eins wird gewährleistet, dass die kontinuierliche Variable x_j entweder Null ist oder in dem Intervall $[l_j,u_j]$ liegt.

1. Branch: $y_i=0 \Rightarrow x_j=0$ **2. Branch:** $y_i=1 \Rightarrow l_j \leq x_j \leq u_j$

Formulierung mit einer Semi-Continuous-Variable (SC-Variable)

Die SC-Variable

$$x_j \in \{0\} \cup [l_j, u_j] \text{ mit } j \in J_I \qquad (3\text{-}2)$$

weist eine Definitionslücke zwischen Null und l_j auf und kann somit im Gegensatz zu (3-1) ohne eine zusätzliche Variable den Sachverhalt abbilden.

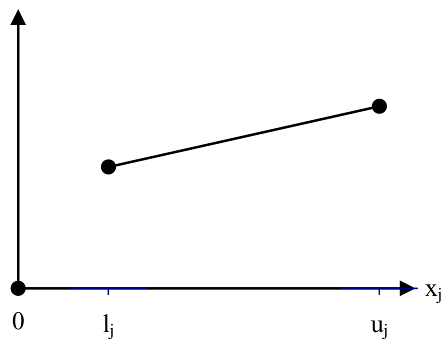

Abb. 3-1: Darstellung SC-Variable

Die Upper Bound einer SC-Variablen kann unendlich sein. Die SC-Variable zählt aufgrund ihrer Definitionslücke zu den Integer-Variablen. Die Variable x_j mit $j \in J_I$ kann fraktionell werden, wenn der Wert der Variablen x_j in der Definitionslücke liegt.

Die Fraktionalität einer SC-Variablen x_j mit $j \in J_I$ wird aufgehoben, indem entweder die Variable x_j den Wert Null oder einen Wert innerhalb der Lower und Upper Bound annimmt.

1. Branch: $x_j = 0$ **2. Branch:** $x_j \geq l_j$

Semi-Integer-Variable (SI-Variable)

Das oben aufgeführte Beispiel wird durch die Bedingung erweitert, dass ein Arbeiter immer nur zur vollen Stunde mit der Arbeit anfangen kann und zur vollen Stunde wieder aufhören muss. Demzufolge muss seine Arbeitszeit ganzzahlig sein.

Durch diese Erweiterung entsteht eine allgemeine Integer-Variable mit einer Definitionslücke. Dieser Fall wird von dem Variablentyp der Semi-Integer-Variablen (SI) abgedeckt. Eine Semi-Integer-Variable kann entweder Null sein oder einen ganzzahligen Wert innerhalb eines Intervalls annehmen. Eine SI-Variable ist fraktionell, wenn der Wert dieser Variablen zum einen in der Definitionslücke liegt oder zum anderen fraktionell innerhalb des Intervalls ist.

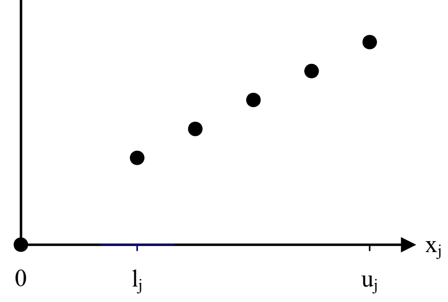

Abb. 3-2: Darstellung SI-Variable

Bei einer Fraktionalität in der Definitionslücke erfolgt das Verzweigen wie bei der SC-Variablen. In dem Intervall $[l_j,u_j]$ hat die SI-Variable x_j mit $j \in J_I$ die gleichen Eigenschaften wie eine allgemeine Integer-Variable und somit erfolgt das Verzweigen nach deren Verfahren.

$0 \le x_j \le l_j$:	**1. Branch:** $x_j=0$	**2. Branch:** $x_j \ge l_j$
$x_j \ge l_j$:	**1. Branch:** $x_j \le \lfloor x_j \rfloor$	**2. Branch:** $x_j \ge \lceil x_j \rceil$

Die Formulierung mit der 01-Variablen hat im Gegensatz zu der SC- bzw. SI-Variablen den Nachteil, dass für jede Variable mit einer Definitionslücke zwei zusätzliche Restriktionen und eine 01-Variable in das Modell eingefügt werden müssen. Bei einer Vielzahl dieser Variablen wird das Modell schnell sehr groß. Außerdem kann mit dieser Alternative keine Integer-Variable abgebildet werden, wie es mit der SI-Variablen möglich ist. Des Weiteren muss bei jeder unendlichen Upper Bound ein BigM in das Modell eingefügt werden. Bei den speziellen Variablentypen SC oder SI bewirkt allein das Branchen, dass die Eigenschaften von diesen Variablen eingehalten werden. Allerdings werden im Gegensatz zu den 01-Variablen die SC- und die SI-Variablen im Supernode Processing, wie z.B. im Probing oder in der Koeffizientenreduktion, nicht betrachtet. Demzufolge können gegebene Unzulässigkeiten nicht frühzeitig aufgedeckt oder Variablen fixiert werden.

Fixkostendarstellung

Eine nichtlineare Fixkosten-Funktion

$$h(x) = \begin{cases} f + p * x & wenn\ 0 < x \le u \\ 0 & wenn\ x = 0 \end{cases} \qquad (3\text{-}3)$$

kann durch eine 01-Variable, aber auch durch SC- bzw. SI-Variablen modelliert werden.

Der Parameter f stellt die Fixkosten der Variablen x dar. Die Abbildung 3-3 veranschaulicht den Verlauf der Funktion.

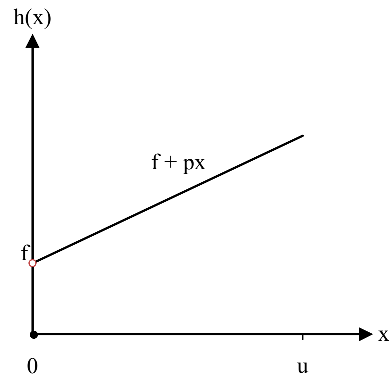

Abb. 3-3: Fixkostendarstellung

Um diese Funktion (3-3) zu linearisieren, wird eine zusätzliche 01-Variable y eingefügt.

$$h(x,y)' = f * y + p * x \qquad (3\text{-}4)$$

Die zusätzliche Restriktion

$$x \le u * y \qquad (3\text{-}5)$$

steuert die 01-Variable y. Nimmt die Variable x einen Wert größer als Null an, dann fallen die Fixkosten f an, und die Variable y muss gleich Eins sein. Ist allerdings x=0, dann muss auch y=0 sein.

Bei einer Fixkosten-Darstellung mit 01-Variablen werden folglich eine zusätzliche 01-Variable y und eine zusätzliche Restriktion benötigt.

Bei einer SC- oder SI-Variablen kann die Definitionslücke beliebig klein sein. Somit können auch Fixkosten durch diese beiden Variablentypen modelliert werden. Wenn die SC- oder SI-Variable den Wert Null annimmt, dann werden keine Fixkosten auf den Zielfunktionswert gerechnet und bei einem Wert im Intervall [l,u] fallen Fixkosten an, wobei l nur um ε größer sein muss als Null.

3.1.2 Partial-Integer-Variable

Eine Partial-Integer-Variable (PI) ist eine Integer-Variable mit einem kontinuierlichen Bereich ab einem bestimmten Schwellenwert:

$l_j \leq x_j \leq ui_j$ mit $j \in J_I$, Variable ist integer

$ui_j < x_j \leq u_j$ mit $j \in J_I$, Variable ist kontinuierlich

Die PI-Variable wird eingesetzt, wenn eine Integer-Variable sehr große Werte annehmen kann. Je größer die Werte einer Integer-Variablen sind, desto weniger verändert sich durch das Branchen der Zielfunktionswert und desto unrelevanter ist die Ganzzahligkeit.

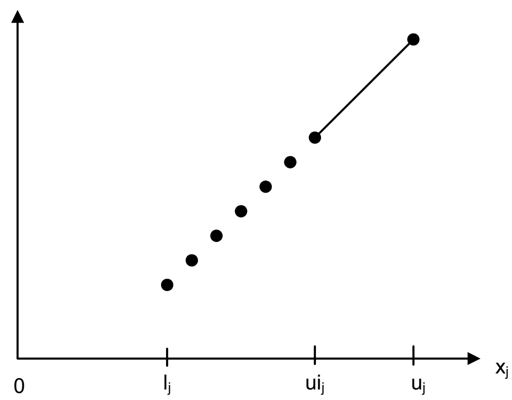

Abb. 3-4: Darstellung PI-Variablen

Nach einer PI-Variablen wird verzweigt, wenn der Wert dieser Variablen zwischen l_j und ui_j liegt. Die Variable wird dann wie eine allgemeine Integer-Variable behandelt. Liegt der Wert in dem kontinuierlichen Bereich von ui_j und u_j, dann wird die Variable bei der Variablenwahl nicht betrachtet.

3.2 Variablengruppen

Variablengruppen bestehen aus einer Anzahl von Variablen, die direkt voneinander abhängig sind. Das Verzweigen erfolgt meist nach Teilen von diesen Gruppen und nicht nur nach den einzelnen Variablen. Zu den erweiterten Modellklassen zählen die Gruppen der Special Ordered Sets vom Typ1, Typ2 und Typ3 und die Gruppen der 01-Variablen von linearisierten Funktionen (L01).

3.2.1 Special Ordered Sets

Ein Special Ordered Set (SOS) ist eine Restriktion mit 01-Variablen oder positiven kontinuierlichen Variablen mit einer Zeilensumme von maximal Eins. Die Idee der SOS geht auf Beale und Tomlin [BeTo70] zurück und wurde 1976 von Beale und Forrest erneut aufgegriffen [BeFo76], [For06]. Die Mengen der Variablen verschiedener SOS sind disjunkt.

SOS Typen

Es gibt drei verschiedene Typen von Special Ordered Sets.

SOS vom Typ 1

Ein Special Ordered Set vom Typ 1 beinhaltet 01-Variablen oder kontinuierliche Variablen mit einem Wertebereich zwischen Null und Eins von denen maximal eine Variable ungleich Null sein darf:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1 \qquad (3\text{-}5)$$

SOS vom Typ 2

Ein Special Ordered Set vom Typ 2 beinhaltet kontinuierliche Variablen mit einem Wertebereich zwischen Null und Eins von denen maximal zwei Variablen ungleich Null sein dürfen. Sind zwei Variablen ungleich Null, dann müssen diese benachbart sein:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1 \tag{3-6}$$

SOS vom Typ 3

Das Special Ordered Set vom Typ 3 besteht aus 01-Variablen. In dieser SOS muss eine Variable gleich Eins sein:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \text{ mit } j \in J_{01} \tag{3-7}$$

Die Special Ordered Sets SOS1 und SOS3 werden hauptsächlich für Entscheidungsprobleme eingesetzt. Es können z.B. mehrere Alternativen zur Auswahl stehen, von denen maximal nur eine gewählt werden darf. Das Special Ordered Set vom Typ 2 wird hauptsächlich für die Linearisierung nicht-linearer separabler Funktionen eingesetzt (siehe Kapital 3.2.2).

Die Variablen der Special Ordered Sets sind gewichtet und nach der Gewichtung sortiert. In den folgenden Ausführungen wird angenommen, dass die Variablen nach aufsteigendem Gewicht sortiert sind. Die Gewichtung kann durch den Benutzer eingegeben, aus der Reihenfolge der Variablen abgeleitet oder durch die Referenz-Zeile

$$y = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \tag{3-8}$$

bestimmt werden.

Bei der Referenz-Zeile ist a_k ein kontinuierliches Gewicht mit $a_k \leq a_{k+1}$ und $k \in [1,n]$ für die SOS-Variable x_k. y ist eine kontinuierliche Variable, die den gewichteten Wert der Variablen annimmt, die in der SOS ungleich Null sind. Die SOS-Variablen gehen mit der Zielfunktions-Zeile

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k x_k \tag{3-9}$$

in die Zielfunktion ein. Die Gewichte b_k können z.B. die Kosten der Variablen sein.

Grafische Darstellung

Im Folgenden wird die Funktion f(x) in Abhängigkeit von der Referenz-Zeile unter Berücksichtigung der Eigenschaften der einzelnen SOS-Typen dargestellt.

Eine SOS3-Variable kann nur den Wert Null oder Eins annehmen. Wenn die Variable x_k mit $k \in [1,n]$ gleich Null ist, dann nimmt sie keinen Einfluss auf die kontinuierliche Variable y. Ist sie allerdings gleich Eins, dann sind $y=a_k$ und $f(x)=b_k$, da alle anderen Variablen gleich Null sein müssen. Demzufolge ist die Funktion f(x) eine diskrete Funktion.

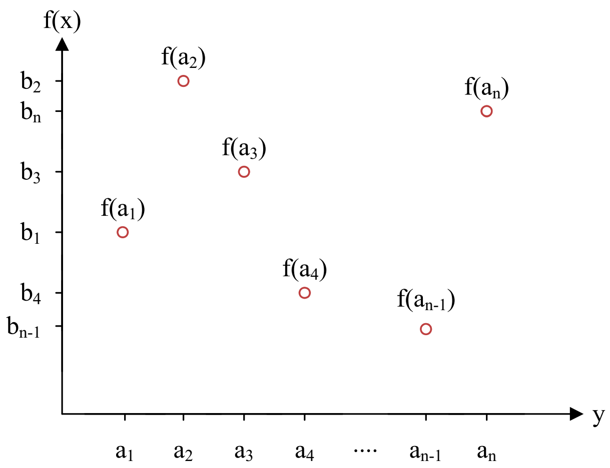

Abb. 3-5: Darstellung SOS3

Bei einer SOS1 mit kontinuierlichen Variablen können die Werte der Variablen zwischen Null und Eins liegen. Demzufolge kann bei einer SOS1-Variablen mit $0 < x_k \leq 1$ und $k \in [1,n]$ die kontinuierliche Variable y mit $a_k > 0$ in dem Bereich $0 < y \leq a_k$ liegen. Wenn $b_k > 0$ ist, dann liegt der Funktionswert von f(x) zwischen $0 < f(x) \leq b_k$. Je nachdem, welche Variable der SOS1 einen Wert größer als Null annimmt, bildet sich eine lineare Funktion $f(x) = \frac{b_k}{a_k} x_k$ mit $x_k \geq 0$.

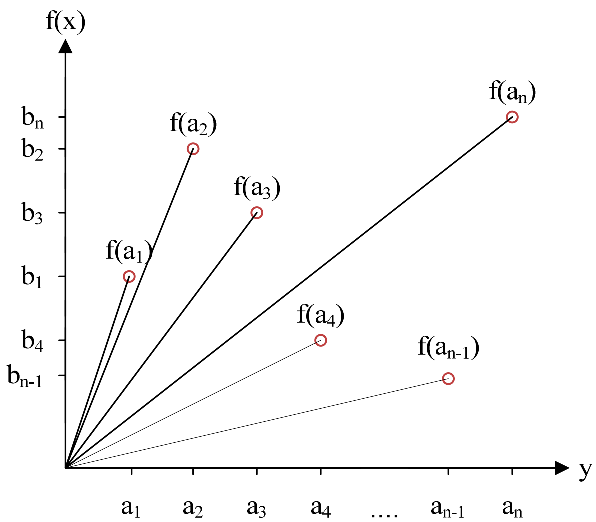

Abb. 3-6: Darstellung SOS1

Bei der SOS2 dürfen maximal zwei benachbarte kontinuierliche Variablen, die einen Wertebereich zwischen Null und Eins haben, ungleich Null sein. y berechnet sich aus einer Kombination beider gewichteter Werte. Die graphische Darstellung erfolgt für den Fall, dass die SOS2 eine Gleichung ist. Wenn $0 \leq x_k \leq 1$, $0 \leq x_{k+1} \leq 1$, $a_k > 0$ und $a_{k+1} > 0$ mit $k \in [1,n-1]$ und $x_k + x_{k+1} = 1$ ist, folgt daraus, dass $y = a_k x_k + a_{k+1} x_{k+1}$ und $a_k \leq y \leq a_{k+1}$ ist. Demzufolge liegt y in einem kontinuierlichen Bereich zwischen den zwei Gewichten. Wenn $b_k > 0$ und $b_{k+1} > 0$, liegt f(x) zwischen den Gewichten der Zielfunktions-Zeile. Falls $b_k \geq b_{k+1}$, dann ist $b_{k+1} \leq f(x) \leq b_k$ und falls $b_k < b_{k+1}$, dann ist $b_k \leq f(x) \leq b_{k+1}$. Die Funktion f(x) ist demzufolge eine nichtlineare Funktion, die sich aus n linearen Teilfunktionen $f(x) = b_k + \frac{b_{k+1} - b_k}{a_{k+1} - a_k} x_k$ mit $k \in [1, n-1]$ zusammensetzt.

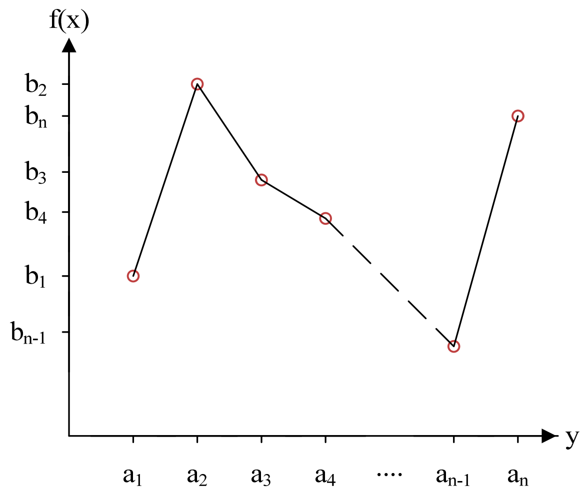

Abb. 3-7: Darstellung SOS2

Verzweigung einer SOS

Es gibt zwei Alternativen, um nach einer SOS zu branchen. Die erste Alternative brancht nach einer einzelnen fraktionellen Variable einer SOS und ist nur für den Typ 3 bzw. für den Typ 1 im Falle von 0-1-Variablen anwendbar. Die zweite Alternative brancht nach einer Teilmenge einer SOS.

1. Alternative

Wenn z.B. die Bedingung einer SOS3 nicht erfüllt ist, dann sind mindestens zwei 01-Variablen aus diesem Set fraktionell. Aus dieser Menge der fraktionellen Variablen wird die Variable x_k zum Verzweigen gewählt.

1. Branch: $x_k=0$ **2. Branch:** $x_k=1$

Der Nachteil dieser Alternative ist ein unausgeglichener Baum. Wenn die Branchingvariable im 1. Branch gleich Null gesetzt wird, dann können alle anderen Variablen dieser SOS ungleich Null werden. Demzufolge wurde die SOS kaum eingeschränkt, und es können noch einige Branchingdurchgänge mit dieser SOS erfolgen. Beim 2. Branch ist die SOS erfüllt, da eine Variable gleich Eins ist und somit die anderen Variablen alle auf Null gesetzt werden können. In diesem Teil des Baumes wird nicht mehr nach dieser SOS gebrancht.

2. Alternative

Bei der zweiten Alternative wird die SOS in zwei Teile geteilt, um einen unausgeglichenen Baum zu verhindern.

Der Branchingpunkt a' einer SOS wird anhand der Gewichte ermittelt:

$$a' = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} x_k} \quad \text{mit } a_k \leq a_{k+1} \text{ und } k \in [1,n-1] \tag{3-10}$$

Der Branchingpunkt für eine SOS1 oder SOS3 ist die Variable x_j bei der $a_j \leq a' \leq a_{j+1}$ mit $j \in [1,n-1]$ ist.

Im ersten Branch werden alle Variablen mit $k \in [1,j]$ gleich Null gesetzt und im 2. Branch alle Variablen mit $k \in [j+1,n]$.

1. Branch: $\sum_{k=1}^{j} x_k = 0$ **2. Branch:** $\sum_{k=j+1}^{n} x_k = 0$

Bei dem Special Ordered Set vom Typ 2 wird abhängig von der Variablenauswahl-Strategie ermittelt, welcher Teil der SOS mehr Gewicht hat. Wenn z.B. die Branchingvariable anhand der Kosten gewählt wird, wird die Variable x_i mit den größten Kosten c_i ermittelt, wobei $i \in [1,n]$ ist. Die Zweiteilung einer SOS2 ist davon abhängig, ob i größer oder kleiner gleich j ist.

Bei $i \leq j$: **1. Branch:** $\sum_{k=1}^{j-1} x_k = 0$ **2. Branch:** $\sum_{k=j+1}^{n} x_k = 0$

Bei $i > j$: **1. Branch:** $\sum_{k=1}^{j} x_k = 0$ **2. Branch:** $\sum_{k=j+2}^{n} x_k = 0$

3.2.2 Modellierung von nichtlinearen separablen Funktionen

Die im Kapitel 2 vorgestellten Lösungsverfahren lösen nur lineare Modelle. Damit nichtlineare Funktionen mit einem LP- oder IP-Solver gelöst werden können, müssen diese Funktionen linearisiert werden. Die nichtlinearen Funktionen können sowohl in der Zielfunktion als auch in den Restriktionen vorkommen.

Eine nichtlineare stetige separable Funktion kann in mehrere nichtlineare Funktionen unterteilt werden. Dadurch wird jeder nichtlineare Teil einer Funktion einzeln betrachtet.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)_j \tag{3-11}$$

Beispiel: $f(x_1,x_2)=3x_1^2+5x_2^3 \Rightarrow f(x_1)_1=3x_1^2,\ f(x_2)_2=5x_2^3$

Zur Vereinfachung wird in den folgenden Ausführungen davon ausgegangen, dass die zu linearisierende Zielfunktion oder Restriktion nur einen nichtlinearen Teil aufweist.

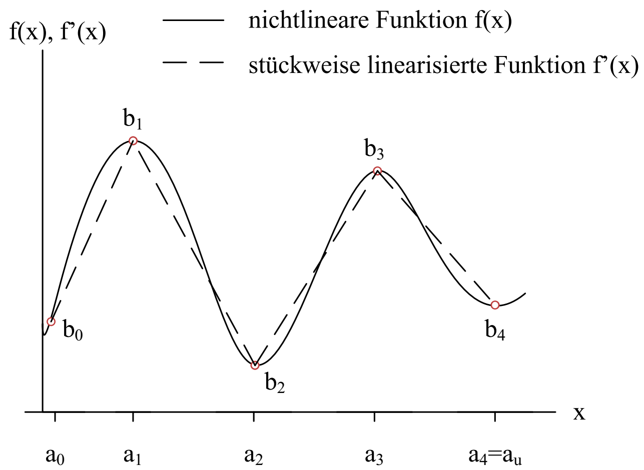

Abb. 3-8: Darstellung nichtlineare Funktion

Für die Variable x wird ein Intervall $[a_0,a_u]$ definiert. Über dieses Intervall wird die nichtlineare Funktion f(x) durch eine stückweise lineare Funktion f'(x) approximiert (siehe Abb. 3-8). Dazu wird das Intervall $[a_0,a_u]$ in n Teile zerlegt, wobei $a_0<a_1<a_2 <....<a_n=a_u$ und $b_k=f(a_k)$ mit $0\leq k\leq n$ ist. Der Abstand zwischen den einzelnen linearen Segmenten muss nicht gleich sein. Je größer die Anzahl der Segmente einer nichtlinearen Funktion ist, desto genauer wird diese Funktion durch eine stückweise lineare Funktion approximiert.

Es gibt mehrere Ansätze, nichtlineare Funktionen zu linearisieren. Darunter befinden sich der Ansatz mit SOS2-Variablen [NeWo88] und der Ansatz nach Padberg [Pad00] mit L01-Variablen.

Ansatz mit SOS2-Variablen

Jeder beliebige Wert von x liegt zwischen zwei Endpunkten eines linearen Segments k und kann mit Hilfe einer kontinuierlichen Entscheidungsvariablen y mit einem Wertebereich zwischen Null und Eins berechnet werden.

$$x = a_{k+1}y + a_k(1-y) \Rightarrow x - a_k = (a_{k+1} - a_k) * y \qquad (3\text{-}12)$$

Demzufolge lautet der Funktionswert für x des Segments k:

$$f(x)' = b_k + \frac{b_{k+1} - b_k}{a_{k+1} - a_k} * (x - a_k) \qquad (3\text{-}13)$$

Mit der Gleichung (3-12) folgt daraus:

$$f(x)' = b_{k+1}y - b_k(1-y) \qquad (3\text{-}14)$$

Für das k-te Segment von y lauten die Gleichungen (3-12) und (3-14):

$$x = a_{k+1}y_{k+1} + a_k y_k \qquad (3\text{-}15)$$

und

$$f(x)' = b_{k+1}y_{k+1} - b_k y_k \qquad (3\text{-}16)$$

mit $y_{k+1}+y_k=1$, $y_{k+1}\geq 0$ und $y_k\geq 0$.

Für alle n Segmente zusammengefasst kann jeder Punkt (x,f(x)') berechnet werden durch

$$x=\sum_{k=0}^{n} a_k y_k \tag{3-17}$$

und

$$f(x)'=\sum_{k=0}^{n} b_k y_k \tag{3-18}$$

Dabei gilt für die Entscheidungsvariablen $y_k\geq 0$ mit $k\in[0,n]$:

$$\sum_{k=0}^{n} y_k = 1 \tag{3-19}$$

Die Gleichung (3-19) hat die Eigenschaften einer SOS2. Es dürfen maximal zwei benachbarte Entscheidungsvariablen y_k mit $k\in[0,n]$ ungleich Null sein. Das Verzweigen nach den Entscheidungsvariablen erfolgt nach den Regeln der SOS2 (siehe Kapitel 3.2.1). Die SOS2-Variablen werden durch die Referenz-Zeile (3-17) gewichtet und gehen mit der Zielfunktions-Zeile (3-18) in die Zielfunktion ein.

Beispiel:

$$\begin{array}{lcccccc} \max & x_1^2 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\ & & & x_1 & \leq & 5 \\ & & & x_2 & \leq & 3 \\ & & & \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 > 0 & & \end{array}$$

Das Modell weist in der Zielfunktion den nichtlinearen Teil $f(x_1)=x_1^2$ auf. Um diese Funktion zu linearisieren, wird das Intervall [0,5] für x_1 in 5 Teile geteilt und die dazugehörigen Funktionswerte berechnet:

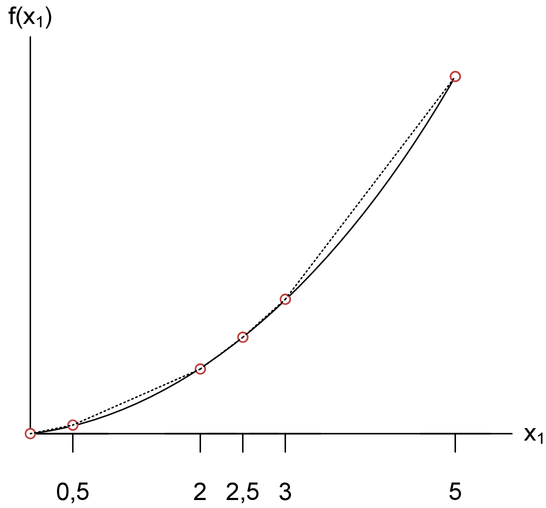

Abb. 3-9: Beispiel SOS2 und L01-Variablen

i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
a_i	*0*	*0,5*	*2*	*2,5*	*3*	*5*
b_i	*0*	*0,25*	*4*	*6,25*	*9*	*25*

Mit diesen Werten kann das Modell wie folgt linearisiert werden:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcl}
\max & 0{,}25y_1 & + & 4y_2 & + & 6{,}25y_3 & + & 9y_4 & + & 25y_5 & + & x_2 & & \\
 & -x_1 & + & 0{,}5y_1 & + & 2y_2 & + & 2{,}5y_3 & + & 3y_4 & + & 5y_5 & = & 0 \\
 & y_0 & + & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & + & y_5 & = & 1 \\
 & & & & & & & & & x_1 & + & x_2 & \le & 7 \\
 & & & & & & & & & & & x_1 & \le & 5 \\
 & & & & & & & & & & & x_2 & \le & 3 \\
 & & & & & x_1, & & x_2,\ y_0, & & y_1,\ y_2, & & y_3,\ y_4,\ y_5 & \ge & 0 \\
 & & & & & & & y_0, & & y_1,\ y_2, & & y_3,\ y_4,\ y_5 & \le & 1
\end{array}$$

Ein Anwendungsbeispiel aus der Gasversorgung befindet sich in [Tom88].

Ansatz mit L01-Variablen

Die kontinuierliche Variable x setzt sich aus den kontinuierlichen Variablen z_k mit $k\in[1,n]$ zusammen.

$$x = a_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} z_k \qquad (3\text{-}20)$$

mit $0 \le z_k \le a_k - a_{k-1}$ und $k\in[1,n]$

Wenn der Wert von x im k-ten Segment liegt, dann gilt für die kontinuierlichen Variablen z_k mit $k\in[1,n]$:

$$z_i \ge a_i - a_{i-1} \text{ für } 1\le i\le k \text{ und } z_i=0 \text{ für } k+1\le i\le n-1 \qquad (3\text{-}21)$$

Demzufolge ist die kontinuierliche Variable z_k mit $k\in[0,n]$ ungleich Null, wenn der Wert von x in dem Segment von z_k oder in einem nachfolgenden Segment liegt. Wenn x vor dem Segment k liegt, dann ist die dazugehörige Variable z_k gleich Null.

Der zu x gehörige Funktionswert f(x)' berechnet sich wie folgt:

$$f(x)' = b_0 + \frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0} * z_1 + \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} * z_2 + \ldots + \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} * z_n = b_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k - b_{k-1}}{a_k - a_{k-1}} * z_k \qquad (3\text{-}22)$$

Um die Zweiteilung der Variablen z_k mit $k\in[0,n]$ zu formulieren, wird eine zusätzliche 01-Variable gebraucht. Diese L01-Variable $y_k\in\{0,1\}$ mit $k\in[1,n-1]$ steuert den Wert von z_k.

$$z_k \ge (a_k - a_{k-1}) * y_k \text{ und } z_{k+1} \le (a_{k+1} - a_k) * y_k \text{ mit } 1\le k\le n-1 \qquad (3\text{-}23)$$

Wenn die Variable y_k den Wert Null annimmt, ist $z_{k+1}\le 0$ und somit auch $y_{k+1.}$ Wenn allerdings $y_k=1$ ist, dann muss $z_k\ge 0$ sein und somit auch $y_{k-1.}$

Daraus folgen die Abhängigkeiten der L01-Variablen untereinander:

$$1 \ge y_1 \ge y_2 \ge \ldots \ge y_{n-1} \ge 0 \qquad (3\text{-}24)$$

Beim Anfangssegment ist $z_1 \le a_1 - a_0$ und beim Endsegment ist $z_n \ge 0$. Somit wird keine zusätzliche L01-Variable benötigt.

Wenn die Variable z_k als Branchingvariable gewählt wird, dann ergeben sich folgende zwei Branches:

1. Branch: $y_i=1,\ \forall\ i\in[1,k]$ **2. Branch:** $y_i=0,\ \forall\ i\in[k,n-1]$

Die L01-Branchingvariable y_k wird im ersten Branch auf Eins gesetzt. Aus der Abhängigkeit (3-24) folgt, dass alle L01-Variablen y_i mit $1\le i\le k$ auch an der Upper Bound liegen. Aus den Bedingungen (3-23) ergibt sich, dass die dazugehörigen kontinuierlichen Variablen $(a_i-a_{i-1})\le z_i\le(a_{i+1}-a_i)$ mit $1\le i\le k$ sein müssen.

Wenn im zweiten Branch die Branchingvariable $y_k=0$ ist, dann sind alle L01-Variablen y_i mit $k\le i\le n-1$ und nach (3-23) die dazugehörigen Variablen z_i mit $k\le i\le n$ gleich Null.

Beispiel:

Das Modell wird mit dem L01-Ansatz linearisiert:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 0{,}5z_1 & + & 2{,}5z_2 & + & 4{,}5z_3 & + & 5{,}5z_4 & + & 8z_5 & + & x_2 & & \\
 & -x_1 & + & z_1 & + & z_2 & + & z_3 & + & z_4 & + & z_5 & = & 0 \\
 & & & & & & & & & z_1 & - & 0{,}5y_1 & \ge & 0 \\
 & & & & & & & & & z_2 & - & 1{,}5y_1 & \le & 0 \\
 & & & & & & & & & z_2 & - & 1{,}5y_2 & \ge & 0 \\
 & & & & & & & & & z_3 & - & 0{,}5y_2 & \le & 0 \\
 & & & & & & & & & z_3 & - & 0{,}5y_3 & \ge & 0 \\
 & & & & & & & & & z_4 & - & 0{,}5y_3 & \le & 0 \\
 & & & & & & & & & z_4 & - & 0{,}5y_4 & \ge & 0 \\
 & & & & & & & & & z_5 & - & 2y_4 & \le & 0 \\
 & & & & & & & & & & & z_5 & \ge & 0 \\
 & & & & & & & & & x_1 & + & x_2 & \le & 7 \\
 & & & & & & & & & & & x_1 & \le & 5 \\
 & & & & & & & & & & & x_2 & \le & 3 \\
 & & & & & & & & & & & z_1 & \le & 0{,}5 \\
 & & & & & & & & & & x_{1,} & x_2 & \ge & 0
\end{array}
$$

Vergleich von SOS2-Ansatz mit L01-Ansatz

Da die Entscheidungsvariablen bei dem L01-Ansatz 01-Variablen sind, kann das Preprocessing zu einer Fixierung einer Teilmenge dieser Variablen und einer Anhebung der globalen Lower Bound führen. Auch während des Branch-and-Bounds können die L01-Variablen durch die Bound Reduction oder das Reduced Cost Fixing fixiert werden. Die SOS2-Variablen sind kontinuierliche Variablen und werden bei dem Preprocessing nicht betrachtet. Somit kann der L01-Ansatz zu einer schärferen LP-Relaxation und zu einem eingeschränkteren Lösungsraum während des Branch-and-Bounds führen.