1 Einleitung

1.1 Mathematische Optimierung

Die mathematische Optimierung spielt seit Jahrzehnten bei der Lösung von komplexen Entscheidungs- und Planungsproblemen in der Wirtschaft eine große Rolle (siehe Kapitel 1.2). So werden z.B. Buseinsatzplanungen, Personalplanungen oder Standortentscheidungen als mathematische Probleme formuliert.

In einem mathematischen Problem wird versucht, ein bestimmtes Charakteristikum eines Prozesses (z.B. Kosten) mit den Gegebenheiten, die diesen Prozess beeinflussen (z.B. Arbeitskräfte), zu minimieren bzw. maximieren. Das Ergebnis dieses Problems beeinflusst die Entscheidungsfindung. So kann z.B. festgelegt werden, wie viele Ressourcen bereitgestellt werden sollen.

Ein mathematisches Problem wird anhand eines mathematischen Modells dargestellt. Dieses Modell enthält in der Regel vier Hauptkomponenten:

- Daten oder Parameter
- Entscheidungsvariablen
- Restriktionen
- Zielfunktion

Die Modelle werden in stochastische und deterministische Optimierungsprobleme unterteilt. Zu den deterministischen Modellen zählen folgende Gruppen:

- Lineare Probleme (LP)
- Gemischt-ganzzahlige lineare Probleme (IP oder MIP)
- Nichtlineare Probleme (NLP)
- Gemischt-ganzzahlige nichtlineare Probleme (MINLP)

Im Folgenden beschäftigt sich die Arbeit nur mit der Lösung von IP/MIP-Problemen. Auf die Lösung von LP-Relaxationen wird nicht eingegangen.

Lineare Probleme (LP)

Ein lineares Problem optimiert eine lineare Zielfunktion unter Berücksichtigung von linearen Restriktionen.

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ & bl \le Ax \le bu \\ & l \;\le\; x \le u \end{aligned} \tag{1-1}$$

Der Vektor x stellt die Variablen des Modells dar. Eine Variable x_j ist bei einem LP eine reelle Zahl, die zwischen den reellen Schranken l_j und u_j liegt, wobei $j \in J = \{1...n\}$ ist. Die Schranken l_j und u_j können auch minus bzw. plus unendlich sein. Die reellen Vektoren bl und bu geben die Schranken der Restriktionen an. Bei einer $\le$-Restriktion ist die Unterschranke bl minus unendlich, bei einer ≥-Restriktion die Oberschranke bu plus unendlich und bei einer Gleichung haben bl und bu den gleichen Wert. Des Weiteren gibt es Range-Restriktionen, bei denen Unter- und Oberschranke einen unterschiedlichen endlichen Wert annehmen. Eine Restriktion ist in der Indexmenge I = {1...m} enthalten. A stellt eine m x n-Datenmatrix dar.

Gemischt-ganzzahlige Probleme (IP)

Bei einem gemischt-ganzzahligen Problem muss im Modell mindestens eine Variable einen ganzzahligen Wert annehmen.

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ & bl \le Ax \le bu \\ & l \le \ \ x \le u \\ & x_j \ ganzzahlig \ für \ j \in J_I \end{aligned} \tag{1-2}$$

Dieses Modell unterscheidet sind von dem LP-Modell durch die Ganzzahligkeitsrestriktionen für mindestens eine Teilmenge der Variablen. Wenn alle Variablen des Modells in der Menge der Integer-Variablen des Modells J_I enthalten sind, d.h. $J_I = J$ ist, dann ist das Problem ein reines ganzzahliges Modell (IP). Gilt allerdings $J_I \subset J$, dann ist die Menge J_I nur eine Teilmenge von J, und es handelt sich um ein gemischt-ganzzahliges Modell (MIP). In den weiteren Ausführungen werden die Modelle mit Integer-Variablen zusammenfassend als IP benannt.

Die Integer-Variablen nehmen Werte aus der Menge der ganzen Zahlen an und müssen innerhalb der vorgegebenen Grenzen l_j und u_j liegen. Die 01-Variable ist ein Spezialfall der allgemeinen Integer-Variablen und kann nur den Wert Null oder Eins annehmen. Weitere Spezialfälle von Integer-Variablen werden im Kapitel 3 als erweiterte Modellklassen erläutert.

Die Ganzzahligkeit der Problemstellungen rührt z.B. daher, dass 01-Entscheidungen - etwa die Entscheidung, ob ein Standort in Frage kommt oder nicht - zu treffen sind oder Größen - z.B. Personaleinsatz, Produktionsgröße, Bestellvolumen - nur ganzzahlige Werte annehmen dürfen.

Obwohl sich LP und IP nur durch die Ganzzahligkeitsbedingungen unterscheiden, gehören die IP-Modelle mit einigen Ausnahmen zu der Klasse der NP-harten Probleme. Aus dem konvexen LP sind durch die zusätzlichen Ganzzahligkeitsbedingungen ein nicht-konvexes IP entstanden. Dies bedeutet, dass alle bekannten Algorithmen im schlechtesten Fall IP-Modelle nur in exponentieller Laufzeit als Funktion der Anzahl ganzzahliger Variablen lösen können.

Die Größe des Modells ist selten ein Indikator für die Lösungszeiten. So können einige Modelle mit mehr als 1000 ganzzahligen Variablen schneller gelöst werden als einige Modelle mit ein paar hundert Integer-Variablen [CoDa99].

Demzufolge stellt das Lösen von IP-Modellen eine große Herausforderung dar. Schon in den 50er und 60er Jahren wurde dies erkannt. Zu dem Zeitpunkt waren allerdings die technischen Möglichkeiten der Software und der Computer sehr eingeschränkt, und somit sind die Versuche, IP-Modelle erfolgreich zu lösen, meistens fehlgeschlagen. Aber im Laufe der Jahre hat sich die Software verbessert und die Leistung der Hardware ist gestiegen, so dass viele praktische Modelle heute etwa 100-mal schneller als vor zehn Jahren gelöst werden können.

Alle Erklärungen in dieser Arbeit beziehen sich auf das Grundmodell eines IPs (1-2). Es wird von einem Minimierungsmodell ausgegangen, wenn es nicht explizit anders angegeben ist.

1.2 Anwendungsbeispiele

Die Anwendung der gemischt-ganzzahligen Optimierung in der Wirtschaft ist sehr vielfältig. Mittlerweile wird bei u.a. Transportproblemen [AhFi80], Planung von Produktlinien [GrKr85], Mischproblemen [Gle80], Maschinenbelegungsplanung [Baetal98] und Standortproblemen [DoKr97] ein Optimierungssystem zum Lösen eingesetzt. Folgende fünf Beispiele geben einen Überblick über die verschiedenen Anwendungsgebiete:

- *Personaleinsatzplanung im Transportwesen:* Dieses Problem taucht z.B. bei der Bus-, Bahn- und Flugzeugeinsatzplanung auf. Das jeweilige Fahrpersonal startet an einem Ausgangspunkt und übernimmt eine Anzahl von Transportaufträgen. Jeder Auftrag ist durch einen Anfangspunkt mit Startzeit und einem Endpunkt mit Endzeit und einem bestimmten Maschinentyp, welchen nicht jedes Fahrpersonal fahren kann, gegeben. Die Personaleinsatzplanung und dessen mathematische Formulierung ist in der Literatur [Baetal98], [Mietal99], [HoPa93] ausführlich beschrieben.
- *Produktionsplanung:* In Produktionsunternehmen wird eine hohe Rentabilität durch effiziente Produktionsplanung, Fertigungssteuerung und eine hohe Auslastung erzielt. Durch einen optimalen Produktionsplan werden Kosten unter Berücksichtigung der Nachfrage und der gegebenen Kapazitäten minimiert, die durch einen Terminverzug, unnötige Rüstzeiten, schwankende Auslastung und zu lange Durchlaufzeiten zustande kämen. Die Literatur [Love73], [FlKl71], [FlLeRi80], [MeFo95] geht auf diese Problemstellung ausführlich ein.
- *Zuschnittsplanung:* Aus einem Stück Material, wie z.B. Textilien, Glas oder Blech, sollen möglichst viele verschiedene Formen ausgestanzt werden, so dass der Abfall möglichst gering ist. Die Literatur [GiGo61], [DeCa78] und [Dyck90] befasst sich mit dieser Problemstellung.
- *Packprobleme:* In der dreidimensionalen Anwendung soll eine gegebene Menge an Gegenständen so verpackt werden, dass die Anzahl der benötigten Container bzw. Behälter möglichst gering ist. Bei dem zweidimensionalen Einsatz, wie z.B. bei der Platzierung von Artikeln in einer Zeitung, soll so wenig Freiraum wie möglich entstehen und sowenig Blätter wie möglich verbraucht werden. Der zweidimensionale Fall ist mit der Zuschittsplanung vergleichbar. In der folgenden Literatur ist die Thematik ausführlich beschrieben [Rai99], [LoMaMo02], [DoDo92] und [Dyck90].
- *Sortimentsoptimierung*: Bei der Sortimentsoptimierung geht es um die Frage, welche Produkte an welcher Stelle und welcher Höhe in den Regalen eingeordnet werden sollen, so dass der Gewinn maximiert wird. In der Literatur [CoDo81], [KöFiVa06] und [Zuf86] wird diese Thematik ausführlich beschrieben.

1.3 Aufbau der Arbeit

Die Dissertation beschäftigt sich mit der Verbesserung von Lösungsverfahren zur Optimierung von gemischt-ganzzahligen Modellen. Zunächst werden im Kapitel 2 die Lösungsverfahren Branch-and-Bound und Branch-and-Cut erläutert, mit denen gemischt-ganzzahlige Modelle gelöst werden können. Außerdem wird auf die strenge LP-Relaxierung eingegangen. Das Kapital 3 befasst sich mit den erweiterten Modellklassen. Im Kapitel 4 werden die Techniken und Strategien zur Lösung von gemischt-ganzzahligen Modellen in Verbindung mit den erweiterten Modellklassen erläutert. Dazu gehören die Bound Reduction mit verschiedenen Einsatzmöglichkeiten und die Auswahlstrategien einer Branchingvariablen oder eines Knotens. Des Weiteren wird auf die Heuristiken eingegangen, die als Heuristiken vor oder als Local Search Heuristiken im Branch-and-Bound-Prozess eingesetzt werden können. Das Kapitel 5 befasst sich mit der Implementierung der in Kapitel 3 und 4 vorgestellten Themen. Im Kapitel 6 werden die Ergebnisse dargestellt und im Kapitel 7 beurteilt und ein Ausblick gegeben.