Evolution of an extended Ricci flow system

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften
des Max-Planck-Instituts für Gravitationsphysik
(Albert-Einstein-Institut)
und des Fachbereichs Mathematik und Informatik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Bernhard List
aus Albstadt

betreut von
Prof. Dr. Gerhard Huisken

Dezember 2005

Tag der mündlichen Qualifikation:	23. Februar 2006
Dekan:	Prof. Dr. J. Schiller
1. Gutachter:	Prof. Dr. G. Huisken
2. Gutachter:	Prof. Dr. K. Ecker

Zusammenfassung

Wir untersuchen in dieser Dissertation eine Erweiterung des Ricci-Flusses, einer geometrischen Evolutionsgleichung, die von Richard Hamilton in [Ham82] eingeführt wurde. Diese Gleichung beschreibt die Evolution einer Riemannschen Metrik g in Richtung ihres Ricci-Tensors. Unter Hinzunahme einer Funktion u hat das erweiterte System die Form:

$$\begin{aligned} \partial_t g(t) &= -2Rc(g(t)) + 4du(t) \otimes du(t) \\ \partial_t u(t) &= \Delta^{g(t)} u(t) \ . \end{aligned}$$

Dieses System stellt eine Verbindung des Ricci-Flusses zur Allgemeinen Relativitätstheorie wie folgt her. Zeitunabhängige Lösungen der Einsteingleichungen, sogenannte statische Metriken, lassen sich als Lösungen eines elliptischen Systems auf einer raumartigen Hyperfläche der Raumzeit beschreiben. Die Raumzeitmetrik wird dann durch Paare (g, u) charakterisiert, wobei g die Metrik auf der Hyperfläche Σ und u der Logarithmus der "Lapsefunktion" ist. Diese läßt sich als Geschwindigkeit der Hyperfläche in Zeitrichtung auffassen. Wir beweisen, dass obiges System als der L^2-Gradientenfluss der Entropie

$$E(g, u, f) = \int_\Sigma \big(R - 2|du|^2 + |df|^2\big)e^{-f} dV$$

bezüglich des fixierten Maßes $dm := e^{-f} dV$ interpretiert werden kann. Die stationären Punkte entsprechen dann Lösungen der statischen Einstein-Vakuum Gleichungen.

Nach dem Beweis der Kurzzeitexistenz auf geschlossenen und vollständigen nichtkompakten Mannigfaltigkeiten widmen wir uns der Frage, unter welchen Bedingungen die Kurzzeitlösungen fortgesetzt werden können. Als wichtiges Hilfsmittel für diese und weitere Fragen zeigen wir umfangreiche innere a priori-Abschätzungen für die Krümmung von $g(t)$, für $u(t)$ und für alle höheren Ableitungen. Es folgt, dass die Beschränktheit der Krümmung die notwendige und hinreichende Bedingung für die Fortsetzbarkeit darstellt. Weiterhin zeigen wir eine Monotonieformel für eine wichtige Modifikation der Entropie E. Als Anwendung beweisen wir, dass periodische Lösungen unseres Systems bereits Solitonen sein müssen, also Lösungen, die sich in der Zeit nur durch die Operation von Diffeomorphismen unterscheiden. Eine weitere wichtige Anwendung der Monotonieformel beweist, dass Lösungen in endlicher Zeit in einem geometrischen Sinn nicht kollabieren können. Dies ist sehr wichtig für die Untersuchung von Singularitäten. Mit Hilfe dieses Ergebnisses und eines Kompaktheitsatzes für Lösungen unseres Systems können wir zeigen, dass an jeder Singularität eine parabolische Reskalierung durchgeführt werden kann. Dabei hat der Limes dieser Reskalierungen einige nützliche Eigenschaften. Er existiert für $t \in (-\infty, 0]$, ist vollständig und nichtkollabiert. Darüber hinaus ist er eine Lösung des Ricci-Flusses, die bereits gut verstanden sind. Im letzten Kapitel zeigen wir, dass ein asymptotisches Abfallverhalten der Anfangsdaten erhalten bleibt, solange man eine Krümmungsschranke hat. Insbesondere können wir folgern, dass der Fluss für asymptotisch flache Anfangsdaten auch asymptotisch flach bleibt solange die Lösung existiert. Dabei bleibt die Masse der Anfangsdaten unter der Evolution erhalten.

Danksagungen

Es ist mir eine große Freude, allen Leuten zu danken, die mir bei der Erstellung dieser Dissertation auf die eine oder andere Art behilflich waren. An erster Stelle möchte ich meinem Betreuer Prof. Dr. Gerhard Huisken für seine Hilfe, Ermutigung und Zeit danken, die er mir zuteil werden ließ. Insbesondere bin ich sehr dankbar für die Möglichkeit, hier am Albert-Einstein-Institut studiert haben zu können. Danken möchte ich auch Prof. Dr. Klaus Ecker für seine Unterstützung und sein Interesse an meiner Arbeit. Weiterer Dank gilt Dr. Jan Metzger, der stets gerne mit mir diskutiert und diese Arbeit sehr genau gelesen hat, und Dr. Mark Aarons für seine guten Fragen und seine Motivationskunst. Dr. Marilyn Daily und Dr. Mark Heinzle möchte ich für das Korrekturlesen der Einleitung und meiner englischen Sprachkonstrukte meinen Dank aussprechen. Den Angehörigen der Abteilung "Geometrische Analysis und Gravitation" bin ich verpflichtet für die gute Atmosphäre und die freundschaftliche gegenseitige Hilfe. Die gute Zusammenarbeit mit den Angehörigen des Arbeitsbereichs Analysis der Freien Universität in Berlin soll auch nicht unerwähnt bleiben. Nicht zuletzt gilt mein Dank meinen Eltern Renate und Wolfgang List, die mich über die letzten Jahre immer unterstützt haben. Was Rebecca Trach in den letzten drei Jahren für mich getan hat, würde diesen Rahmen sprengen. Ihr möchte ich besonders meinen tiefen Dank aussprechen.

Contents