Dissertation

eingereicht im Monat Mai 2016 zur Erlangung eines Doktorgrades der Philosophie vorgelegt am Fachbereich Philosophie und Geisteswissenschaften
der Freien Universität Berlin
von Claude Fabre
Tag der Disputation: 22.02.2018

Modellismus - Ein Beitrag zur Philosophie der modernen Mathematik

---

Erstgutachter: PD Dr. phil. Peter Eisenhardt
Zweitgutachter: Prof. Dr. Wilhelm Schmidt-Biggemann

Modellismus - ein Beitrag zur Philosophie der modernen Mathematik

Abriß

Unser Beitrag zur Philosophie der Mathematik, den wir Modellismus nennen, ist weitgehend ein Kommentar zum philosophischen Werk von Henri Poincaré. Die Perspektive der zeitgenössischen Mathematik wird mit klassischen Theorien konfrontiert. Wir konstruieren den Modellismus als eine platonistische Fortsetzung des Konventionalismus.
Den Sockel bildet die Apriorität der Anschauungsformen Raum und Zeit, die wir aus der Sicht der modernen Mathematik überarbeiten. Wir üben Kritik an dem Dilemma Benacerrafs, dem wir die Illumination entgegensetzen, die gute Semantik und gute Epistemik vereinbart. Wir setzen uns mit dem Spektrum der Philosophen zwischen den extremen Polen Realismus und Nominalismus auseinander. Wir lehnen den Logizismus ab und favorisieren den Fiktionalismus Balaguers.
In Anlehnung an den Konventionalismus Poincarés und den Formalismus Hilberts besteht die Mathematik aus Modellen, die trotz vielfältiger Lösungswege die Wahrheit der Theoreme in der Sprache der Logik begründen.
Für Poincaré ist die in der Intuition verspürte Harmonie das Werkzeug des Erfindens. Wir finden darin, eine Legitimation des Platonismus: der Mensch verläßt die platonistische Höhle nicht, jedoch versetzt ihn das Harmonieempfinden in die Lage, sich von der Ordnung der transzendenten Idee beim Modellieren anleiten zu lassen.
Der Kantische Schematismus ist u.E. die geeignete Methode, um die moderne Mathematik zu durchleuchten. Daß wir von Kant die formale Deduktion der Anschauungsformen, die Exklusivität der euklidischen Geometrie und den Primat der sinnlichen Anschauung nur bedingt übernehmen, stellt nur kleinere Korrekturen dar, die das Fundament der Transzendentalphilosophie nur am Rande ankratzen.

Modelism - A Contribution to Philosophy of Contemporary Mathematics

Abstract

Our contribution to the philosophy of mathematics, which we call Modelism, is to a large extent a commentary on the philosophical work of Henri Poincaré. We confront the viewpoint of contemporary mathematics with the classical theories. We construct Modelism as a platonistic extension of conventionalism.
The human understanding forms of space and time, which we rework from the standpoint of modern mathematics, constitute our pedestal. We refute the dilemma of Benacerraf, as the phenomenon of illumination combines good epistemology with good semantics. We go into the spectrum of philosophy between the poles of realism an nominalism. We reject logicism and favour Balaguers fictionalism.
In compliance with Poincaré's conventionalism and Hilbert's formalism mathematics is made of models, which in spite of the variety of procedures establish the truth of theorems in the language of logics.
According to Poincaré the intuitive perception of harmony is the very tool of invention. We discover therein a legitimation of platonism: man does not map an unaccessible platonistic Idea of mathematics but his sense of harmony enables him to extract the regulating order from the transcendent Idea when elaborating human models.
Kants schematism is to our mind the proper method when analysing modern mathematics. Although we advance objections against the Kantian formal deduction of the understanding forms, the exclusivity of euclidean geometry and the preference for sensual perception, there is only a need for minor adaptations, which do not affect the fundamentals of transcendental philosophy.

Inhaltsverzeichnis

0. Introduktion

0.1. Erkenntnisse aus der modernen Mathematik

Wir nehmen uns vor, in die Mathematik von zwei Seiten einzudringen: aus der Perspektive des Philosophen einerseits und des Mathematikers andererseits. Es gilt, den Tunnel so zu bohren, daß beide Teilstrecken am Ende in einer These (unserem Modellismus) zusammentreffen.

Es ist nicht unsere Absicht, die Grundlagendiskussion (Platonismus, Nominalismus, Logizismus, usw.) mit ausdiskutierten Argumenten historisch aufzurollen. Wir finden aber in der modernen Mathematik bisher nicht thematisierte Prüfsteine, an denen ältere Philosophien definitiv scheitern. Wir glauben nicht, daß ein Logizismus in einem etwaigen neuen Gewand noch eine Erfolgschance hätte. Ebenso bestätigt die gegenwärtige Mathematik, daß ein Primat der euklidischen Geometrie oder die Notwendigkeit der sinnlichen Anschauung endgültig ad acta zu legen sind.

Da die Mathematik Menschenwerk ist, erscheint es sinnvoll, das Erfinden in den Vordergrund zu stellen. Wie ein Forscher seine Ergebnisse niederschreibt bzw. vorträgt, sagt nichts über welche Wege er sie erreichte. Reichenbach unterscheidet zwischen der formalen Begründung (context of justification), die in die Kompetenz der Epistemologie fällt, und dem Erfinden (context of discovery), das er der Psychologie zuordnet:

> Epistemology does not regard the processes of thinking in their actual occurrence; this task is entirely left to psychology [...] Epistemology thus considers a logical substitute rather than real processes. For this logical substitute the term *rational reconstruction* has been introduced [...] it will, therefore, never be a permissible objection to an epistemological construction that actual thinking does not conform to it [...] the well-known difference between the thinker's way of finding this theorem and his way of presenting it before a public may illustrate the difference in question. I shall introduce the terms context of discovery and context of justification to mark this distinction[1].

Wenn wir dem Mathematiker über die Schulter schauen, dann interessieren wir uns im Erfindungskontext für seine Anstrengungen bei dem Prozeß, der mit einer blitzartigen

[1] Vgl. [Reichenbach, 1938], S. 5-7.

Illumination abschließt. Auf die Epistemologie werden wir nur im Zusammenhang mit Brouwer eingehen, da sie vom Fortschritt der Mathematik nicht tangiert wird.

Welchen Forschungsmethoden der Mathematiker folgt, erklärt nicht den Erfolg weniger großer Forscher. Die gute Planung und Strukturierung der Forschungsarbeit beherrschen alle Mathematiker. Wir begnügen uns damit, auf die methodischen Schriften von Descartes und Leibniz kurz hinzuweisen, die nichts an Aktualität verloren haben.

Descartes hat dem Forscher 21 sinnvolle Empfehlungen in [Descartes, 1628] (das Werk ist unvollendet geblieben) in die Hand gegeben, die er dann im *Discours de la méthode* in vier prägnanten Regeln zusammenraffte:
i) Skepsis: Nur für wahr halten, was nicht in Zweifel gezogen werden kann.
ii) Analyse: Stets in kleinen Teilschritten vorgehen.
iii) Konstruktion: Vom Einfachen zum Schwierigen fortschreiten.
iv) Kontrolle: auf Vollständigkeit überprüfen[2].

Leibniz entwickelte aus dem Kartesischen Projekt der *mathesis universalis* die Idee einer Wissenschaftssprache, *characteristica universalis*, und eines formalen logischen Kalküls, *calculus ratiocinator*. Die Universalsprache hat Leibniz zeitlebens beschäftigt, aber selbst die moderne Logik ist der Herausforderung nicht gewachsen. Sybille Krämer resümiert in klaren Worten die Leibnizsche These:

> Durch drei Merkmale ist dieses Erkenntnisverfahren - die *cogitatio caeca vel symbolica* - charakterisierbar: (1) Die Symbole, die beim Denken zum Einsatz kommen, dienen nicht kommunikativen, sondern instrumentellen Zwecken: *Sprachen werden als eine Technik gebraucht*. (2) Mit den Symbolen wird im Kalkül interpretationsfrei operiert: *In Kalkülen werden die Zeichen autark gegenüber den Gegenständen ihrer Referenz*. (3) Die Symbole bilden die in ihnen repräsentierten Gegenstände nicht einfach ab, sondern bringen sie hervor: *die Gegenstände des Erkennens sind symbolisch konstituiert*. Wo immer jedoch ein Erkenntnisverfahren, bei dem Symbole zum Einsatz gelangen, so zu organisieren ist, daß die Merkmale (1)-(3) erfüllt sind, kann *Wahrheit* auf *Richtigkeit* zurückgeführt werden. Die Transformation von Wahrheit in Richtigkeit ist Kunstgriff und Kerngedanke der „cogitatio caeca vel symbolica“.[3]

Der Leibnizsche Umgang mit Zeichen und Symbolen präfiguriert u.E. den Hilbertschen Formalismus, der die moderne Mathematik prägt und die Grundlage unseres Modellismus bildet. Nicht weniger bedeutsam für unsere Arbeit ist die These, die Leibniz am Beispiel seiner Version des Siebs des Erastotenes behauptet: Der Mathematiker läßt sich beim Erfinden vom Harmoniegefühl (pulchritudo) anleiten:

> Hier wird durch ein bekanntes Beispiel offenbar, daß die Kunst, kostbare Theoreme über begreifliche Dinge zu erfinden, in folgendem besteht: da diese Dinge selbst nicht gemalt

[2] Vgl. [Descartes, 1637], Zweiter Teil, Vier Regeln. Zusammenfassung CF.
[3] Vgl. [Krämer, 1992], S 244-225.

> oder gehört werden können, malen oder hören wir deren Darstellungen, trotz der Abbildungsverluste. In diesen Bildern erblicken wir den geradezu sinnlichen Liebreiz, der uns die Theoreme oder die Eigenschaften der begreiflichen Dinge verstehen lassen[4].

Im Gegensatz zu Descartes' geschlossener Konzeption wurde Leibniz' Auseinandersetzung mit der Methode (heute: Heuristik) nur fragmentarisch überliefert. Er unterschied zwischen der *ars iudicandi*, welche die Wahrheit von Aussagen beurteilt, und der *ars inveniendi*, der reinen Entdeckungskunst. In *How To Solve It*, [Polya, 1945], zeigt George Pólya, wie man sich mit unvollständigen Informationen an Problemlösungsstrategien heuristisch (aus gr. heuriskein = auffinden) heranarbeitet. Da wir auf die professionellen Mathematiker fokussieren, gehen wir in unserer Untersuchung von einer umfassenden Erfahrung in Methode und Heuristik aus.

0.2. Gliederung der Untersuchung

Im ersten Schritt leuchten wir die traditionellen Positionen der Philosophen im Licht der heutigen Mathematik aus. Dann gehen wir an die Hauptthemen aus der Sicht der großen Mathematiker Poincaré und Hadamard heran. Da Mathematik vom Menschen erfunden wird, ist unser Ansatz transzendentalphilosophisch und vom Kantischen Schematismus geprägt. Der inzwischen in die Mathematik eingetretene Paradigmenwechsel ist so groß, daß ein Jahrhundert später Gottlob Frege, trotz seiner mathematischen Kompetenz, im Streit mit Hilbert an einem nostalgischen Verständnis der Mathematik immer noch festhält. Nicht selten werden wir an manchen nicht mehr haltbaren mathematischen Ansichten Kants Kritik üben. Ein großes Werk zeigt sich darin, daß Randkorrekturen die Grundfesten der Philosophie nicht erschüttern sondern festigen.

Unser Kapitel 1 klärt vorab, daß die EDV die Praxis des Erfindens nur erleichtert, wie auch ein Bagger die Leistungen des Maurers bei gleichbleibender Expertise potenziert. Mit dem computerunterstützten Beweisen kündigt sich jedoch eine neue Ära an, wo der Computer vom Sklavenstatus zum Assistenten aufsteigt, indem er an der kreativen Tätigkeit des Mathematikers mehr und mehr beteiligt wird.

Der Aufbau der Mathematik beginnt in den Kapiteln 2 und 3 mit einer Reflexion über Raum und Zeit. Wir orientieren uns weitgehend an der kantischen transzendentalen Auffassung. Während aber Kant davon ausgeht, daß die arithmetischen und geometrischen

[4] Vgl. [Leibniz, 1676] Originaltext: „Patet hic illustri exemplo artem circa intelligibilia inveniendi præclara theoremata in eo consistere, ut quoniam ipsa pingi aut audiri non possunt pingamus aut audiamus earum repræsentationes, etiamsi non similes, et in iis sensibiles quasdam pulchritudines observemus, quæ in nobis facient intelligi theorema seu proprietatem ipsius rei intelligibilis.“

Sätze Urteile a priori sind, wählen wir einen anderen Argumentationsweg. Gleichgültig ob der Mensch eine Platonische Idee der Mathematik abbildet, oder die Mathematik aus freien Stücken erfindet: die Mathematik ist Menschenwerk. Daher liegen dem mathematischen Gebäude die Anschauungsformen Raum (Ausdehnung) und Zeit (Kinematik) zugrunde. Diese Formen liegen nur im Erkenntnissubjekt; sie gehen der Erfahrung voran und bestimmen sie durch den menschlichen Verstand. Die Welt draußen ist nur im Geist räumlich bzw. zeitlich, nicht woanders. Das Messen erfolgt empirisch: a priori sind daher der prägeometrische (topologische) Raum[5] und die maßfreie Zeit (Chronologie); beide Formen sind in der Bewegung vereinigt, dem Forschungsgegenstand der Mathematik. Wie die Chronologie auf die Dynamik der Welt projiziert wird, zeigt das Trichter-Modell von Bergson, das im Kapitel 9 auf das Erfinden der Mathematik angewandt wird.

Unseren Prolegomena folgt ein Rundgang durch die Thesen der Philosophie der Mathematik. Im Kapitel 4 besprechen wir das Dilemma von Paul Benacerraf, das für die antiplatonistische Philosophie paradigmatisch ist. Einerseits soll sich die Semantik der Beweise in die Semantik der Wortsprache einfügen, andererseits soll die Wahrheit der Theoreme der usuellen kausalen Epistemologie entsprechen. Beide Forderungen seien nicht kompatibel: eine gute Semantik verhindert eine gute Epistemologie und umgekehrt. Dem werden wir später im Zusammenhang mit der Illumination entgegentreten.

Kapitel 5 setzt sich mit dem Logizismus auseinander. Mathematische Sätze werden in der Sprache der Logik formuliert. Sollte es außerdem gelingen, die mathematischen Gegenstände als logische Entitäten zu konstituieren, könnte Mathematik zu einem Zweig der Logik erklärt werden. Der Verdacht besteht, daß Mathematik möglicherweise ein Elfenbeinturm sei, wo anhand selbstgemachter Regeln an übersinnlichen Gegenständen ein spezieller Wahrheitsbegriff angewandt wird. Der Verdacht wird dadurch gestärkt, daß die alternative Mathematik Brouwers konsistent ist.

Im Kapitel 6 lassen wir die bedeutendsten Theorien der Philosophie der Mathematik Revue passieren. Entsprechend unserer Leitlinie, nach der Mathematik Menschenwerk ist, gehen wir detaillierter auf den harten Fiktionalismus von Field und die platonistisch angehauchte Version von Balaguer ein.

Es beginnt dann der zweite Teil, in dem wir die Konstruktion der Mathematik aus der komplementären Sicht des Mathematikers betrachten. Den Paradigmenwechsel, der im 19 Jh. allmählich einsetzen wird, konnte Kant nicht voraussehen, und doch steckt in

[5] Mit topologischem Raum meinen wir in dieser Arbeit den maßfreien Raum der Topologie, ohne direkten Bezug auf die fachgemäße Definition topologischer Räume über offene Mengen.

seinem Schematismus der Schlüssel zum modernen Erfinden. Kant irrte sich zwar mit seiner Dominanz der euklidischen Geometrie; er hatte aber erkannt, daß es zwischen den Anschauungsformen und dem menschlichen Verstand ein Zwischenglied geben muß, um die Anschauungsformen mit Inhalten zu füllen.

Kapitel 7 behandelt zwei Schemata, die dem Erfinder der Mathematik zur Verfügung stehen: die Gruppenaktion zur Erzeugung der Kinematik, und die Induktion, auf der u.a. die Konstruktion der Zahlen beruht. Die Arbeiten Freges erhellen den Übergang zur modernen Mathematik, obwohl sein Ziel, die Mathematik auf die Logik zu reduzieren, nicht erreicht wurde.

Im Kapitel 8 stellen wir den Konventionalismus vor, eine aus der Praxis entstandene Form des Fiktionalismus. Die Axiome der Geometrie sind weder apriorische Urteile noch experimentelle Erkenntnisse. Sie sind „bequeme" Konventionen, mit denen effiziente Theorien gebaut werden; mehr als Widerspruchsfreiheit wird nicht gefordert; auf die Darstellung einer etwaigen Realität wird kein Anspruch erhoben.

Im Kapitel 9 wird als Kernstück unserer These der Erfindungsprozeß gemäß den Analysen der beiden großen Mathematiker Poincaré und Hadamard einer eingehenden Untersuchung unterzogen. Das Gefühl der Harmonie treibt die Intuition des Erfinders an.

Während sich Poincaré und Hilbert jeder metaphysischen Stellungnahme enthielten, schlagen wir im Kapitel 10 unsere selbstgebackene philosophische Fortsetzung vor. Ausgehend einerseits von der Widerspruchsfreiheit der Mathematik andererseits von dem menschlichen Vermögen, Harmonie zu empfinden, setzt unser Modellismus den Konventionalismus und den Hilbertschen Formalismus platonistisch fort.

Zur Orientierung des Lesers geben wir am Beginn jedes Kapitels einen kurzen Abriß. Im Zweifelsfall haben wir weiterführende Gedanken in Anhängen behandelt, um den Duktus unserer Arbeit nicht zu überfrachten. Die Anhänge vertiefen unsere Arbeit und können zunächst überblättert werden.

Anmerkung: Alle französischen Zitate haben wir den Originaltexten entnommen und mitunter neuübersetzt.

Teil I.

Vorüberlegungen

1. Computerunterstützte Mathematik

Der Computer hat das Tor zur experimentellen Mathematik geöffnet. Wir geben einen Überblick der Bereiche, wo die kolossale Rechenkraft und Schnelligkeit des Werkzeuges Wunder wirkt. Wir sind Zeitzeugen der Anfänge des computerunterstützen Beweisens, wo der Computer am kreativen Erfinden mitwirkt. Schließlich wagen wir einen philosophischen Ausblick der Folgen einer zunehmenden Verselbständigung des Werkzeuges.

Der Computer ist ein blinder Koloß, der den Mathematiker auf seinem Rücken trägt. Es wäre reizvoll, gute Mathematiker zu fragen, ob sie sich eher ihr PC als ihr schwarzes Brett wegnehmen ließen. Dieses dämonische Dilemma hieße, entweder auf das mächtige Werkzeug der EDV zu verzichten, oder auf die Mathematik überhaupt. Bis dato hat die Informatik keinen Einfluß auf die Philosophie der Mathematik.

Das unverzichtbare Verdienst der Informatik liegt in dem bislang den Naturwissenschaften vorbehaltenen *Experimentieren.* Jede Praxis, auch die mathematische, läßt sich die Vorteile moderner Technik zugutekommen. Der noble Teil der Arbeit bleibt bisher dem Geist vorbehalten, der das Werkzeug führt. Nach unserer Ansicht hat die EDV trotz ihrer Unverzichtbarkeit noch keine profunde Wende in der Methode des Erfindens nach sich gezogen. Daher beschränken wir uns darauf, in dieser Präambel die Grundzüge der computerunterstützten Mathematik aus der Vogelperspektive zu betrachten.

Bailey und Borwein, die anerkannten Pioniere der experimentellen Mathematik, definieren die Aufgaben ihres Fachs folgendermaßen[1]:

(a) gaining insight and intuition;
(b) visualizing math principles;
(c) discovering new relationships;
(d) testing and especially falsifying conjectures;
(e) exploring a possible result to see if it merits formal proof;
(f) suggesting approaches for formal proof;
(g) computing replacing lengthy hand derivations;
(h) confirming analytically derived results.

[1] Vgl. [Bailey & Borwein, 2011], S. 1411.

Die Punkten (a) bis (e) beziehen sich auf die instrumentelle Unterstützung; der Computer *entlastet* den Anwender beim Rechnen, wie etwa auch seine Textverarbeitung beim Schreiben: lästige und zeitraubende ansonsten anspruchslose Routinearbeiten werden blitzschnell, überblicklich und fehlerfrei erledigt; wir werden dazu paradigmatische Beispiele anführen. Computerunterstütztes bzw. -angeleitetes Beweisen (f) beteiligt den Computer am kreativen Prozeß; der epistemische Wert erweist sich allerdings als problematisch. Auf (g) und (h) gehen nicht gesondert ein[2].

1.1. Nichtschöpferische Aufgaben

1.1.1. (a) Einblicke gewinnen

Förderung des Gespürs durch Simulation

Die Simulation macht es möglich, für ein schwieriges Problem ein Gefühl zu entwickeln. Betrachten wir z.B. die Bold-Play-Strategie beim Roulette-Spiel. Falls die Erfolgswahrscheinlichkeit beim Setzen auf Rot oder Schwarz $\leq \frac{1}{2}$ beträgt, wird der Gewinn nach n Runden dann optimiert, wenn der Spieler entweder sein aktuelles Kapital, oder, falls diese kleiner ist, die Differenz zwischen dem Zielkapital und dem aktuellen Kapital einsetzt[3]. Dubins and Savage haben 1965 bewiesen, daß es keine bessere Strategie gibt. Da der Beweis nicht trivial ist, kann man sich vorerst anhand von Zufallszahlen die Vorzüge der Strategie langsam instillieren.

Analoges kommt in der Geometrie vor, wenn Invariante getestet werden. Mit dem Computer können z.B. konstant gekrümmte Flächen konstruiert werden; nicht selten werden Flächen vor Augen geführt, die man nicht für möglich gehalten hätte.

Didaktische Funktion

Der Computer ist die Zofe der Mathematik. Während der herkömmliche Taschenrechner lediglich Zahlen manipuliert, operieren Algorithmen blitzschnell und fehlerfrei mit symbolischen Ausdrücken (Variablen, Funktionen, Matrizen, usw.). Um die Kreiszahl π zu

[2] Es geht darum, die Unfehlbarkeit des Computers für die Redaktion wissenschaftlicher Arbeiten zu nützen. Es werden z.B. beide Seiten einer Identität $A = B$ zur Überprüfung durch copy & paste separat berechnet.

[3] Beträgt das Zielkapital 1000 €, so setzt der Spieler 200 € ein, falls er nicht mehr besitzt. Hat er hingegen 600 €, so riskiert er nur die Differenz von 600 € auf 1000 € ein, d.h. 400 €.

berechnen approximierte Archimedes über den Satz des Pythagoras einen Kreis von innen und außen durch ein 96-Eck; die anschließende Berechnung im griechischen alphabetischen Zahlensystem gebietet Respekt. Trotz des enormen Aufwandes erreichte Archimedes nur ein kümmerliches Ergebnis[4], das heute durch Mausklick sofort am Bildschirm erscheint. Klassische PC-Programme wie *Mathematica*®, *Mathlab*®, oder *Maple*® verarbeiten mathematische Symbole; ein flink geschriebenes Programm huscht durch die Schleifen und wirft in wenigen Sekunden mehr Dezimalstellen aus, als Archimedes in seinem ganzen Leben hätte berechnen können.

Die Exzellenz im Rechnen hat einen großen didaktischen Gewinn zur Folge. Es ist viel einprägsamer, einen Gedankenstrang nachzuvollziehen, wenn man nicht zwischendurch durch lange Berechnungen aufgehalten wird. Wenn der Computer die gefühlte Rechenzeit auf Null setzt, entwickelt sich ein Gefühl für prima facie furchterregende mathematische Gegenstände. Die Differentialgeometrie ist z.B. bemüht, ihre gekrümmten Entitäten (Linien, Flächen, usw.) in kleinen Umgebungen zu linearisieren; in mehrdimensionalen Räumen wird die lineare Funktion bequem als Matrix dargestellt. Matrixoperationen sind nicht schwieriger als die Addition oder Multiplikation der Schularithmetik, sie sind aber so mühsam, daß das Durchrechnen von Beispielen keine Freude bereitet. Der didaktische Vorteil ist kaum schätzbar, auf dem PC mit Matrizen so leger wie mit Zahlen umzugehen. Auch verschwindet schnell die anfängliche Scheu vor den komplexen Zahlen bzw. den Quaternionen; es ist des Geometers täglich Brot sie als Punkte aufzufassen, die er nach Belieben bewegt. Die Informatik befreit den Mathematiker von den fastidiösen algorithmischen Aufgaben; die Vorgänge erscheinen transparent, ohne daß der Denkfaden immer wieder durch Rechnen unterbrochen wird.

1.1.2. (b) Visualisierung

Wie wir noch besprechen werden, ist die Ausbildung des Mathematikers erst dann erfolgreich, wenn er sich eine maßgeschneiderte Mathematik selbst erarbeitet. Daher würde die didaktische Funktion allein den Gebrauch des Computers schon rechtfertigen. Ferner begrüßen viele Mathematiker visuelle Skizzen. Noch heute werden ein paar Striche mit der Kreide gekritzelt, um ein mentales Bild zu fixieren und anderen zugänglich zu machen. Die Visualisierung ersetzt grobe Diagramme durch präzise Bilder.

[4] Archimedes errechnete: $3\frac{10}{71} = 3,14085\ldots < \pi < 3\frac{10}{70} = 3,14286\ldots$

Abbildung 1.1.: Steiner Römerfläche

Abb. 1.1 zeigt mit welcher Akribie Gipsmodelle[5] früher angefertigt wurden. Der PC liefert heute auf Mausklick eine 3D-Darstellung, die mit der Maus hin und her bewegt werden kann. Es gibt aber Flächen mit einem komplizierten Inneren; die massige Silhouette aus Gips hilft dann nichts. Henry C. Wente entdeckte (wohlgemerkt ohne Computerunterstützung, vgl. [Wente, 1986]) die befremdende Fläche der Abb. 1.2.

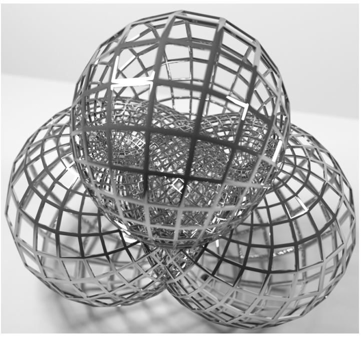

Abbildung 1.2.: Wente-Torus

Das Stangengeflecht zeigt einen Wente-Torus mit konstanter mittlerer Krümmung[6]. Nach einer Vermutung von Heinz Hopf sollte es außer der Sphäre keine andere kompakte Minimalfläche geben. Wente wartete mit einem Gegenbeispiel auf, seinen sich durchdringenden Wente-Tori (mit beliebig vielen Löchern). Die schwer zu verstehende innere Struktur wird so visualiert, daß der Betrachter durch Mausklick auf die Fläche aufspringt und sie wie ein Gebäude besichtigen kann[7].

Sinnliches Empfinden der Harmonie

Wie im Beispiel der Minimalflächen strahlt die Visualisierung etwas aus, was selbst der mathematikscheue Laie Harmonie nennen wird. Unsere Hauptthese sieht im Empfinden der Harmonie den Grundpfeiler des Erfindens. Mandelbrots Apfelmännchen entsteht ganz banal, wenn in $\mathbb{C}$ die einfache Gleichung $f(z) = z^2 + c$ iteriert wird. Es entfaltet sich aus jeder beliebigen komplexen Zahl eine vielfältige fraktale Welt, so mysteriös und wohlgeordnet, als wenn durch Zellteilung ein komplexes Lebewesen entsteht. Die Faszination entsteht dadurch, daß uns ein einfacher Determinismus nach genügend vielen Iterationen in eine Ideenwelt versetzt, die uns der Computer vor Augen führt, während

[5] Das Modell der Steinerschen Fläche wurde 1883 von Ernst Eduard Kummer (1810-1893) gestaltet.

[6] Diese Eigenschaft wird auch von Seifenblasen genützt, da sie die Oberfächenspannung minimiert.

[7] Die Steinersche Fläche bzw. die Wente-Tori sind Flächen, die keine Gegenstände der Welt idealisieren. Seifenblasen können sich nicht selbst durchdringen! Doch lassen sich Modelle dieser Flächen mit einem 3D-Drucker leicht anfertigen.

unsere Imagination total überfordert ist[8].

1.1.3. (c) Muster und Relationen erkennen

Visualisierung ist kein statischer Schnappschuß. Klein faßte die Geometrie als Dynamik auf: es werden die Eigenschaften eines Raums untersucht, die unter der Aktion einer Transformationsgruppe invariant bleiben. Das schöne Buch [Mumford, 2002] mit den namhaften Unterschriften von David Mumford, Caroline Series und David Wright trägt den evokativen Untertitel „The Vision of Felix Klein"; es erscheinen auf dem Bildschirm filigrane Grenzgebiete im Unendlichen, von denen sich kein Mathematiker, auch nicht Klein damals, ein mentales Bild machen kann.

Der Forscher arbeitet Hand in Hand mit dem Computer. Die lange Kette von Iterationen liefert ein Bild, das dem Geometer Erklärungsmuster suggeriert. Die Theorie wird Schritt für Schritt aufgebaut und durch Experimentieren fortgesetzt. Konkret wird in dem Buch ein Block von sich berührenden Kreisen sehr oft[9] hintereinander abgebildet:

> It is the story of our computer aided explorations of a family of unusually symmetrical shapes, which arise when two spiral motions of a very special kind are allowed to interact. These shapes display intricate „fractal" complexity on every scale from very large to very small. Their visualisation forms part of a century-old dream conceived by the great German geometer Felix Klein[10].

1.1.4. (d) Verifikation und Falsifikation

Aufspüren von Gegenbeispielen

Euler formulierte 1769 eine Verallgemeinerung der Fermatschen Vermutung: falls $n > 3$ existieren keine ganzzahligen Lösungen zu der Gleichung: $a_1^n + a_2^n + \ldots + a_{n-1}^n = a_n^n$.

Für $n = 4$ fand R. Norrie 1911 ohne elektronische Hilfe das Gegenbeispiel $30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4$, aber $95.800^4 + 217.519^4 + 414.560^4 = 422.481^4$ hätte Roger Frye ohne Computer nie ermitteln können[11].

[8]Nicht nur die Fraktale dokumentieren unser Unvermögen, weit in einen Determinismus hineinzuschauen. Es entsteht beispielsweise auch beim Iterieren der logistischen Gleichung $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, vgl. S. 151.

[9]Eigentlich unendlich oft, was der Computer nicht kann. Daher kommen Überraschungen wie auf S. 264 mitunter vor, wo sich Felix Kleins Vision irrte.

[10]Vgl. [Mumford, 2002], Preface.

[11]Entsprechendes gilt für:

Erzeugen mathematischer Formeln

Dank der hohen Rechengeschwindigkeit können Ähnlichkeiten zwischen Formeln aufgespürt werden, die dann als Kandidaten für Kongruenz geprüft werden. Wir entnehmen [Bailey & Borwein, 2005] die BBP-Formel (für Bailey-Borwein-Plouffe) , die heutzutage für die Berechnung der Kreiszahl π verwendet wird:
$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$.

Das Ungewohnte an dieser Formel liegt in der Berechnung jeder beliebigen (binären oder hexadezimalen) Dezimalstelle ohne Kenntnis der vorstehenden Ziffern. Daher erspart man sich den Speicherplatz und die Zugriffszeiten für bereits gewonnene Stellen sowie die umständlichen Datentypen der Langzahlarithmetik. Die beiden Autoren haben über den PSLQ-Algorithmus[12] zusammen mit Plouffe die Formel empirisch ermittelt und erst danach ordentlich bewiesen[13].

1.1.5. (e) Lohnt sich ein exakter Beweis?

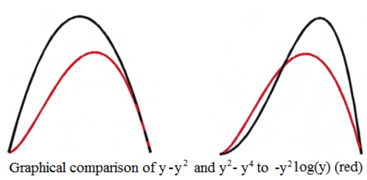

Abbildung 1.3.: Anschauungsbeweis

In [Bailey & Borwein, 2006], S. 16, steht das durch Abb. 1.3 visualisierte Beispiel. Die Funktionen $y - y^2$, $y^2 - y^4$ und $-y^2 log(y)$ sind im Intervall $[0, 1]$ zu vergleichen. Da die Graphen beider letzteren Funktionen einander durchkreuzen, majoriert keine der beiden Funktionen die andere. Das Diagramm ersetzt zwar keinen ordentlichen Beweis; der Hinweis genügt jedoch, um sich die zeitraubende analytische Untersuchung zu ersparen.

---

n=5, $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$ (Lander, Parkin, 1966)

n=7, $127^7 + 258^7 + 266^7 + 413^7 + 430^7 + 439^7 + 525^7 = 568^7$ (M. Dodrill, 1999)

n=8, $90^8 + 223^8 + 478^8 + 524^8 + 748^8 + 1088^8 + 1190^8 + 1324^8 = 1409^8$ (Scott Chase, 2000)

[12]Dieser von Ferguson erfundene Algorithmus ist eine Verallgemeinerung des Euklidischen Algorithmus auf mehr als zwei Zahlen, an der die größten Mathematiker gescheitert waren.

[13]Letztere Etappe ist unverzichtbar; viele übereinstimmende Nachkommastellen bereiten manchmal Überraschungen. Die vielverheißende Formel: $\int_0^{\infty} \cos(2x) \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{n}\right) dx \approx \frac{\pi}{8}$ fällt z.B. erst in der 42. Dezimalstelle durch!

1.2. Computerunterstütztes Beweisen

Die bisherigen Beispiele skizzieren die Sklavenarbeit der Informatik; analog ließen sich heute mit modernen Baumaschinen die Pyramiden viel schneller errichten. Aber der Computer ist auch in die konzeptuelle Arbeit eingedrungen. Einige logische Vorgänge lassen sich, allerdings unter der Fuchtel des Mathematikers, automatisieren und gelangten bereits in zwei Fällen in die breite Öffentlichkeit.

Der erste Satz, der computerunterstützt bewiesen wurde, war der Vier-Farben-Satz: vier Farben reichen aus, um jede Karte so einzufärben, daß zwei benachbarte Gebiete nicht die gleiche Farbe tragen. Dies wurde 1976 von Kenneth Appel und Wolfgang Haken gezeigt. Noch näher an uns liegt der Beweis der 1611 von Kepler formulierten Vermutung: Es gibt eine dichteste Art, Kugeln zu stapeln, nämlich die von den Obsthändlern für ihre Orangen seit jeher gewählte pyramidale Anordnung. Dieser zweite Fall macht die Vorteile und Schwierigkeiten des computerunterstützten Beweisens sehr deutlich.

1998 gab Thomas Hales bekannt, daß er einen Beweis für die Keplersche Vermutung gefunden habe, nachdem es ihm durch theoretische Betrachtungen gelungen war, das Packproblem auf 50 Kugeln zu reduzieren. Der Beweis bestand aus 250 Seiten Aufzeichnungen und drei Gigabyte Computerprogrammen und Daten.

Der Nervus Probandi liegt darin, die unendliche Schar der Möglichkeiten so zu deckeln, daß nur noch eine endliche Anzahl N (hier $N = 50$) von pathologischen Spezialfällen mit der Brute-Force-Methode zu untersuchen ist[14].

Der Beweis der Keplerschen Vermutung ist paradigmatisch für die Aufgaben, bei denen der Mathematiker den Computer einbindet. Die Gutachter gaben 2003 nach vier Jahren Arbeit bekannt, daß sie sich zu 99 Prozent der Korrektheit des Beweises sicher seien. Im August 2014 verkündete Hales, daß eine Übertragung des Beweises in computerisierte Form die Richtigkeit bestätigt habe.

[14] Umgekehrt kann man sich dafür interessieren, bis zu welcher Grenze keine Spezialfälle eintreten. Dazu eine noch ungelöste Vermutung. Zahlen, die genauso groß sind wie die Summe ihrer Teiler werden vollkommene Zahlen genannt: z.B. $6 = 1 + 2 + 3$. Vollkommene Zahlen sind äußerst selten und es wurde bisher keine ungerade vollkommene Zahl ermittelt. Pascal Ochem und Michael Rao haben mit Computerhilfe bewiesen: Wenn es eine ungerade vollkommene Zahl geben sollte, dann wäre sie größer als 10^{1500}. Damit ist nicht ausgeschlossen, daß es ungerade vollkommene Zahlen geben könnte.

1.2.1. Der Beweisassistent

Nachdem der Mathematiker die endlich vielen problematischen Fälle ermittelt hat, kann er einen Beweisassistenten einsetzen: das *Project FlysPecK* bei der Keplerschen Vermutung, die *COQ-Software* beim Vier-Farben Satz. Alle Etappen der logischen Deduktion werden unter dem Aspekt der Logik systematisch abgearbeitet, wobei der Computer auch numerische bzw. symbolische Berechnungen vornimmt. Eine solche Software arbeitet interaktiv: Der Mathematiker gibt Definitionen ein, formalisiert Theoreme, konstruiert den Beweisprozeß.

1.2.2. Der Theorembeweiser

Ein weitgehend selbstständiges Werkzeug sind die Theorembeweiser z.B. die freie Software *Isabelle*. Grundsätzlich wird der Software eine mathematische Proposition eingegeben, die automatisch bewiesen wird. Doch lassen sich nicht alle Propositionen in polynomaler Zeit beweisen. Die Formalisierung erfordert viel Arbeit, auch bei scheinbar trivialen Dingen. Wenn die Software einen Beweis liefert, dann ist dieser immer wahr; sie findet aber nicht immer einen Beweis, auch nicht wenn es einen gibt; oft meldet die Software: ich weiß nicht! Man darf sich von dieser Art Software nicht zuviel versprechen, wenn auch die Theorembeweiser mitunter große Erfolge[15] verzeichnen.

1.2.3. Der Softwareprüfer

Wenn eine vollautomatisierte U-Bahn-Strecke mit fahrerlosen Zügen oder eine firmeneigene Buchhaltung eingerichtet wird, muß sichergestellt werden, daß die Programme keine Bugs enthalten. Es ist eine gigantische Arbeit, die Softwares der Beweisassistenten und der Theorembeweiser zu überprüfen. Dem Softwareprüfer werden als Inputs ein Programm und eine zu prüfende Eigenschaft eingegeben, die in endlicher Zeit als Output erreicht werden soll.

[15]Ein gutes Beispiel ist die Andrews-Robbins-Vermutung. Eine Robbins-Algebra ist eine assoziative und kommutative Algebra, bei der außerdem gilt: $\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(\neg a \vee \neg b) = a$. Große Namen wie Huntington, Robbins, Tarski, scheiterten an der Frage, ob alle Robbins-Algebren auch Boolsche Algebren seien. Es gelang William McCune 1996 mit dem Theorembeweiser *EQP* die Vermutung zu bejahen.

1.2.4. Informatik vs. Mathematik

Das Mißtrauen gegenüber Computerbeweisen ist heute weitgehend verflogen, nicht aber der Zweifel, ob diese langwierigen wahrlich uneleganten Berechnungen noch Mathematik genannt werden dürfen. Es werden keine Einblicke gewonnen, keine nützlichen neuen Konzepte geschaffen; der epistemische Wert ist gleich Null. Mathematik wird auf eine formale Manipulation mit Symbolen reduziert. Die gewonnenen Theoreme sind jedoch wertvoll, insoweit als es sinnlos wäre, nach Gegenbeweisen weiterzusuchen.

Die hochwertige mathematische Arbeit besteht darin, die Anzahl der Sonderfälle zu deckeln. Das oft verwendete Prädikat *brute-force* für die anschließenden Schritte ist insoweit irreführend, als die Algorithmen von zahlreichen echt mathematischen Einfällen durchzogen sind, um die zeitraubenden Überprüfungen abzukürzen. Georges Gonthier, der durch seinen Beweis des Vier-Farben-Satzes und seine Mitarbeit an der COQ-Software großen Ruhm erlangte, schreibt:

> We believe that our success was largely due to the fact that we approached the Four Colour Theorem mainly as a programming problem, rather than a formalization problem. We were not trying to replicate a precise, near-formal, mathematical text [...] most of our proof scripts consisted in verifying some particular combination of outcomes by a controlled stepping of the execution of these predicates. In many respects, these proof scripts are closer to debugger or testing scripts than to mathematical texts[16].

Es ist nichts dagegen einzuwenden, daß der Mensch durch neue Werkzeuge seine Macht potenziert. Die reine Mathematik und die Philosophie beginnen beide mit dem Staunen und dem Streben nach Erkenntnis, nicht nach einem etwaigen Nutzen[17]. Die Bestätigung, daß vier Farben zum Einfärben ausreichen bzw. die Obsthändler ihre Orangen optimal stapeln, bringt uns kaum weiter. Wüßten wir um den tiefen Grund, entstünden neue Konzepte, damit weiterführende Theorien. Trotz ihrer Erfolge ist die experimentelle Mathematik nur ein Nährboden für mathematische Fortschritte. Wie sich die experimentellen Methoden auch weiterentwicklen mögen, können sie nur Etappensiege feiern, bis ein Mathematiker nachvollziehbar erklärt, *warum* die wahren Propositionen wahr sind. Erst dann hört das Staunen auf und weicht der Illumination des Erfinders. Bereits Leibniz vertrat den Standpunkt, daß allein (für den Fachmann) transparente Konstruktionen echte Erkenntnis ermöglichen.

[16] Vgl. [Gonthier, 2008], S. 54.

[17] Vgl. Aristoteles, Metaphysik, Buch A Kap. 2, 983 a 13ff: „Wenn sie daher philosophierten, um der Unwissenheit zu entgehen, so suchten sie das Erkennen offenbar des Wissens wegen, nicht um irgendeines Nutzens willen."

1.3. Wenn der Computer die Oberhand gewinnt

Wie die Jungfrau zum Kind kam der Mathematiker zum Computer. Das Werkzeug konstruiert in der Platonischen Höhle Zusammenhänge, die möglicherweise keine Schatten der Ideenwelt sind. Dazu ein Beispiel. Psychologen fordern gern auf, zu einer Zahlenfolge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ die nächste a_{n+1} zu erraten. Ein frecher Mathematiker könnte antworten: es sind unendliche viele, zuerst müssen Sie mir a_{n+2} nennen[18].

Im *Discours de métaphysique* ist sich Leibniz darüber im klaren, daß die Mathematik verwickelte Regelmäßigkeiten errechnen kann, ohne die echte dahinter steckende Ordnung zu enträseln:

> Man muß sich darüber klar sein, daß Gott nichts tut, was der Ordnung entbehrte [...] Denn nehmen wir einmal an, daß jemand aufs Geratewohl eine ganze Reihe von Punkten aufs Papier wirft, [...] so behaupte ich, daß es möglich ist, eine geometrische Linie von konstanter, einheitlicher Definition zu finden, die durch alle diese Punkte, und zwar in der selben Ordnung, wie die Hand sie gezeichnet hat, hindurch geht. [...] Ist aber eine Regel sehr verwickelt, dann gilt gemeinhin das ihr Gemäße für unregelmäßig. Man kann daher behaupten, daß, auf welche Weise auch Gott die Welt geschaffen hätte, sie doch stets regelmäßig und einer bestimmten Ordnung entsprechend gewesen wäre. Gott hat jedoch diejenige erwählt, die die vollkommenste ist, d.h. diejenige, bei der aus der kleinstmöglichen Anzahl von Voraussetzungen die reichste Fülle von Erscheinungen folgt[19].

Bailey und Borwein schließen sich in [Bailey & Borwein, 2005] einer nachdenkenswerten Überlegung von Gregory Chaitin über die Leibnizsche Auffassung an:

> [S]ome mathematical facts have no redundancy and cannot be compressed into any mathematical theory because these facts are too complicated, in fact, infinitely complex [...] I have recently discovered that these ideas can be traced back to G.W. Leibniz in the late 17th century. [...] Leibniz's idea is very simple and very profound. [...] It's the observation that the concept of law becomes vacuous if arbitrarily high mathematical complexity is permitted, for then there is always a law. Conversely, if the law has to be extremely complicated, then the data is irregular, lawless, random, unstructured, patternless, and also incompressible and irreducible[20].

Sollte der Computer einmal derart selbständig werden, daß wir an von ihm ermittelte mathematischen Wahrheiten nur noch glauben, ohne sie nachvollziehen zu können, stünden wir vor einem großen epistemischen Problem.

Wir schließen hiermit unsere Vorüberlegungen. Der Computer eröffnet eine neue Ära, die möglicherweise das Erfinden Mathematik verändern wird. Heute ist er nur ein (fabelhaftes) Werkzeug.

[18] Wird a_{n+2} in ein Polynom vom Grad $(n+2)$ eingegeben, so berechnet der Computer die Koeffizienten so, daß $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2}\}$ die eindeutigen Nullstellen sind.

[19] Vgl. [Leibniz, 1686], § 6. S. 140-141.

[20] Vgl. [Chaitin, 2004], S. 2.

2. Apriorische Anschauung des Raumes

Nach einem gemeinsamen Vorspann zu Raum und Zeit hinterfragen wir zuerst die Apriorität der Raumanschauung. Wir bestreiten, daß geometrische Begriffe ohne sinnliche Anschauung leer seien. Das Uniformisierungstheorem zeigt, daß der geometrische Raum nicht a priori ist, vielmehr schreibt uns der Raum seine Geometrie vor. Sieht man von den metrischen Geometrien ab, liegt der Topologie eine apriorische Raumform zugrunde.

Seine These der apriorischen Anschauungsformen begründet Kant damit, daß die Aussagen der Mathematik apriorisch und synthetisch seien. Dem stehen immer mehr neuere Erkenntnisse entgegen.

Kant versteht unter Anschauungsformen die Maschen des anthropischen Netzes, mit dem wir die Realität einfangen. Die Anschauung des Raumes durch die fünf rezeptiven Sinne bzw. der Zeit durch den inneren Sinn konstruiert im Zusammenspiel mit dem Verstand die Einheit des angeschauten Gegenstands[1]. Den Formen stehen Begriffe gegenüber: „Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind[2]“. Die reine Vernunft ist „das Vermögen, überhaupt a priori etwas zu erkennen“, d.h. „das Vermögen, unabhängig von Erfahrung, mithin von Sinnenvorstellungen, Dinge zu erkennen“. Es ist naheliegend, daß Kant seinen Fokus auf die empirisch unverfälschte Mathematik legt. „Er glaubt, daß es eine offenkundige Tatsache sei, daß die euklidische Geometrie synthetische Urteile a priori umfaßt[3]“, meint Holm Tetens, der ohne Umschweife festhält, „daß Kants These über den Status mathematischer Aussagen alles andere als selbstverständlich ist[4].“ Die Apriorität der Formen leitet Kant von der Mathematik ab, deren Sätze er für synthetisch - d.h. die Erkenntnis erweiternd - und apriorisch hält. Sind die

[1] Die Anschauungsformen beziehen sich allein auf Erscheinungen. Daß Empfindungen letztlich vom Ding an sich ausgelöst werden, ist ein Kausalschluß durch Anwendung der Kategorie der Kausalität. Kant läßt aber die Kausalität ausschließlich für Erscheinungen gelten. Könnte nämlich etwas Extramentales auf das Bewußtsein kausal einwirken, dann wäre es mit dem Postulat der Freiheit des Menschen, „als mit innerer Freiheit begabtes Wesen“ (homo noumenon), schlecht bestellt. Wir setzen diesen von Jacobi herausgestellten Widerspruch in bezug auf die Mathematik hintan.

[2] Vgl. [Kant, 1787], AA III, 75, S. 114.

[3] Vgl. [Tetens, 2006], S. 63.

[4] Vgl. ebd. S. 64.

mathematischen Sätze a priori, dann impliziert nach der Kantischen These die Geometrie die Apriorität des Raumes und die Arithmetik die Apriorität der Zeit.

In einem gemeinsamen Vorspann über Raum und Zeit hinterfragen wir, was Kant unter *a priori* versteht. Dann begründen wir, warum der *geometrische* Raum keine apriorische Anschauungsform ist. Im nächsten Kapitel werden wir uns mit der Apriorität der Zeit beschäftigen.

2.1. Apriorische Erkenntnisse

Bereits in der Einleitung (Abs. II) zur *Kritik der reinen Vernunft* stellt Kant klar: „Wir sind im Besitze gewisser Erkenntnisse a priori, und selbst der gemeine Verstand ist niemals ohne solche.“; danach (Abs. VI) wird angekündigt: „Die eigentliche Aufgabe der reinen Vernunft ist nun in der Frage enthalten: *Wie sind synthetische Urteile a priori möglich?*“; die Antworten erfolgen im Abschnitt „Transzendentale Ästhetik“.

Da die Sätze der Mathematik die Konklusion von Syllogismenketten bilden, erweitern sie unser Wissen, d.h. sie offenbaren zuvor unerkannte Eigenschaften, oder noch im Vokabular Kants: sie sind synthetisch. Wann ist aber ein Urteil a priori?

> Findet sich also ein Satz, der zugleich mit seiner *Notwendigkeit* gedacht wird, so ist er ein Urteil a priori [...] Wird also ein Urteil in strenger Allgemeinheit gedacht, d.i. so, daß gar keine Ausnahme als möglich verstattet wird, so ist es nicht von der Erfahrung abgeleitet, sondern schlechterdings a priori gültig[5]. [...]
> Notwendigkeit und strenge Allgemeinheit sind also sichere Kennzeichen einer Erkenntnis a priori, [...] so ist es ratsam, sich gedachter beider Kriterien, deren jedes für sich unfehlbar ist, abgesondert zu bedienen[6].

Apriorität fordert zugleich strenge Allgemeinheit und Notwendigkeit. Ein Urteil ist nur dann notwendig, wenn es von allen verstandesbegabten Wesen zu allen Zeiten dafür gehalten wird: daher die strenge Allgemeinheit. Die Modelle der Naturwissenschaften lösen einander ab; ihre Aussagen sind nicht a priori. Kausalität oder Irreversibilität der Zeit sind hingegen Urteile, die in strenger Allgemeinheit gelten, weil sie keinen Zeitindex haben; sie sind notwendig und atemporal, also a priori. Sie werden nicht von der Erfahrung abgeleitet, wenn auch in der Erfahrung erkannt - intelligente Wesen in strenger Isolation würden solche Urteile nicht ableiten können. Wie läßt sich das Knäuel entwirren? Die Kantische Unterscheidung a priori vs. a posteriori zusammen mit analytisch vs. synthetisch bedarf um so mehr einer Diskussion, als sie Ziel der Kritik wurde.

[5] Vgl. [Kant, 1787], B 3/4, S. 40.
[6] Vgl. [Kant, 1787], Einleitung II, B6, S. 41.

In Opposition zu Kant meinte der Wiener Kreis, daß nur analytische Wahrheiten a priori gewußt werden können. Dann argumentierte Quine gegen die Unterscheidung a priori vs. a posteriori. Aus der profusen Literatur ist für die Apriorität der Anschauungsformen die Einteilung von Kripke nachdenkenswert, der Notwendigkeit der Metaphysik und Apriorität der Epistemologie zuordnet:

> Now, everyone remembers Kant (a bit) as making a distinction between *a priori* and *analytic*. So maybe this distinction is still made. In contemporary discussion very few people, if any, distinguish between the concepts of statements being a priori and their being necessary [...] [T]he notion of aprioricity is a concept of epistemology. I guess the traditional characterization from Kant goes something like: a priori truths are those which can be known independently of any experience. It's certainly a philosophical thesis [...], either that everything a priori is necessary or that everything necessary is a priori. Both concepts may be vague [...] But at any rate they are dealing with two different domains, two different areas, the epistemological and the metaphysical[7].

Wenn Apriorität ein Begriff der (wandelbaren) Epistemologie ist, dann hat er den Zeitindex, den Kant gerade ausschließen wollte. Unsere Vorfahren hatten viele empirische und metaphysische Gründe[8] zwingend zu urteilen, daß Sonne und Himmel um die Erde rotieren. Später meinte die Physik, daß sich die Erde notwendig um die Sonne dreht. Beide Urteile wurden zur jeweiligen Zeit für stringent gehalten. Und doch erweisen sich beide je nach Standort des Betrachters als falsch oder wahr, seit wir an den Newtonschen absoluten physikalischen Raum nicht mehr glauben.

Kant meinte mit Apriorität, wie Kripke betont, eine von jeder Erfahrung bereinigte Evidenz. Dann entsteht aber ein Problem, wenn er die apodiktischen Sätze der Mathematik apriorisch nennt. Wir besprechen im Anhang A das Gegenbeispiel der Wahrscheinlichkeitstheorie. In dieser wichtigen Sparte der reinen Mathematik wird aus den empirisch ermittelten Häufigkeiten ein Begriff der Wahrscheinlichkeit konstruiert, mit dem gerechnet wird. Der Erfolg der Theorie macht ihre Aussagen apodiktisch, wenn sie auch nicht selten kontraintuitiv sind; das Fundament bleibt jedenfalls empirisch, so daß die wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussagen nicht a priori sind.

Kants Anwendung seiner Definition der Apriorität an dem mit dem Zeitbegriff eng verquickten Naturgesetz der Kausalität überzeugt, da sich die kausale Verknüpfung zwischen Ursache und Wirkung jedem notwendig aufdrängt, d.h. weder wahrgenommen

[7] Vgl. [Kripke, 1970], S. 197-198.

[8] Sie hatten sogar wissenschaftliche Gründe, denn mit der Epizykeltheorie der ptolomäischen Astronomie konnten die Bahnen der Himmelskörper hinreichend gut berechnet werden. Die Schwachstelle des geozentrischen Modells, war der „conventional trick“ kristallener Sphären als Träger der Bahnen der Himmelskörper. Man könnte provokativ anmerken, daß Einsteins geodätische Bahnen im gekrümmten Raum metaphysisch betrachtet nicht ohne Ähnlichkeit anmuten, wenn auch die Relativitätstheorie unstrittig bei weitem das besssere Modell ist.

wird (Kant: die „Schwärmerei“ Lockes) noch durch Gewöhnung entsteht (Hume). Die Kausalität selbst darf nicht a priori genannt werden. Unsere Urteilskraft projiziert die Form der Kausalität auf die Abfolge von extramentalen Phänomenen. A priori ist das Vermögen - der *Grundsatz* - des reinen Verstandes, das Kausalitätsgesetz zu erlassen:

> Der Grundsatz des Kausalitätsverhältnisses in der Folge der Erscheinungen gilt daher auch vor allen Gegenständen der Erfahrung, [...] weil er selbst der Grund der Möglichkeit einer solchen Erfahrung ist[9].

Was „Grundsatz“ im Kantischen Schematismus bedeutet, ist bei Eisler nachzulesen:

> In den Grundsätzen des reinen Verstandes kommen die Kategorien zur Anwendung. Die Grundsätze sind die apriorischen Voraussetzungen wissenschaftlicher Erfahrung, sie sind *synthetische Urteile a priori*, haben strenge Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit, ihnen muß alles Erfahrbare entsprechen, unter ihrer Leitung nur werden einheitliche Zusammenhänge der Erscheinungen und besondere Naturgesetze erkannt. Sie sind die obersten Gesetze der *Natur*, machen eine solche erst möglich[10].

Wir werden uns später für die zentrale Funktion des induktiven Denkens interessieren. Nach unserem Verständnis würde Kant die Induktion einen Grundsatz des Verstandes nennen. Die Grundsätze befähigen uns, eine Vielfalt von empirischen Erscheinungen auf eine apriorische Einheit zurückzuführen. Kant verortet sie nicht nur bei der Kausalität sondern überhaupt bei allen Naturgesetzen:

> Naturgesetze, wenn sie als Grundsätze des empirischen Verstandesgebrauchs betrachtet werden, führen zugleich einen Ausdruck der Notwendigkeit, mithin wenigstens die Vermutung einer Bestimmung aus Gründen, die a priori und vor aller Erfahrung gültig sein, bei sich. Aber ohne Unterschied stehen alle Gesetze der Natur unter höheren Grundsätzen des Verstandes, indem sie diese nur auf besondere Fälle der Erscheinung anwenden. Diese allein geben also den Begriff, der die Bedingung und gleichsam den Exponenten einer Regel überhaupt enthält, Erfahrung aber gibt den Fall, der unter der Regel steht[11].

Die Unterscheidung Kripkes ist in bezug auf die Anschauungsformen problematisch: Notwendigkeit lebt in der Metaphysik, Apriorität in der Epistemologie; wo verläuft die Grenze zwischen beiden Welten[12]? Epistemologisch betrachtet wird an dem Naturgesetz der Großen Zahlen nicht gezweifelt; das Gesetz gilt also notwendig, obwohl es empirisch erkannt wird, vgl. Anhang A. Unsere Urteile über den Zufall folgen zugleich aus einer metaphysischen Einstellung, denn deren Notwendigkeit wird erst nach einem langwierigen Lernprozeß eingesehen; sonst hätten die Glücksspiele keinen so großen Zulauf. Kant meint aber nicht, daß die Apriorität spontan vor jeder anschaulichen Erfahrung erkannt

[9] Vgl. [Kant, 1787] S. 299.
[10] Vgl. [Eisler, 1930].
[11] Vgl. [Kant, 1787] S. 244-245.
[12] Uns fällt ein Anmerkung von Wittgenstein [Wittgenstein, 1953], § 99 ein: „Eine unscharfe Begrenzung, das ist eigentlich gar keine Begrenzung.“

wird: „Daher scheint es unmöglich, a priori ursprünglich anzuschauen, weil die Anschauung alsdann ohne einen weder vorher noch jetzt gegenwärtigen Gegenstand, worauf sie sich bezöge, stattfinden müßte und also nicht Anschauung sein könnte[13]". Die von jeder Metaphysik befreite Kantische Definition der Apriorirät halten wir im Bereich der Mathematik für zweckmäßig.

Um die Empirie aus den Raumformen zu verbannen, sucht Kant sehr zu Recht Zuflucht in der reinen Mathematik. Er wird zwar die Erfahrung herausschälen, aber die sinnliche Anschauung bleibt ein unverzichtbares Komplement der Begriffsbildung. Hier setzt unsere Kritik an der Kantischen Raumform an.

2.2. Der geometrische Raum ist keine apriorische Anschauungsform

2.2.1. Kants Raum als Behälter

Es gibt zwei Auffassungen von Raum (und Zeit), die Holm Tetens in seinem Kommentar zur *Kritik der reinen Vernunft* klar unterscheidet:

> Der Anhänger der Substanzauffassung [auch: Behälterauffassung] behauptet, daß auch ohne materielle Einzeldinge und Ereignisse immer noch der „leere" Raum und die „leere" Zeit vorhanden wären. Vertreter der relationalen Auffassung negieren genau diese Behauptung: Ohne materielle Einzeldinge und Ereignisse gibt es für die Relationisten keinen Raum und keine Zeit[14].

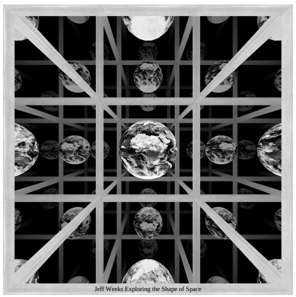

Abbildung 2.1.: 3D-Torus

Es ist nach unserer Ansicht eine Illusion, daß wir uns leere euklidische Räume als unendliche Fortsetzung leerer begrenzter Räume vorstellen könnten[15]. Wir besitzen zwar für die Raumkonstruktion ein Kantisches Schema, aber kein visuelles Bild. Die nach ∞ zu schickenden Begrenzungen verbleiben im daher nicht leeren mentalen Bild, sonst wäre kein Raum zu erkennen. Eine Dimension höher müssen Gegenstände in das mentale Bild eingelegt werden, wie z.B. beim Raum $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ des 3D-Torus der Abb. 2.1, wo die Flächen eines Würfels identifiziert werden. Der sphärische

[13] Vgl. [Kant, 1783] § 8 (III).
[14] Vgl. [Tetens, 2006], S. 50.
[15] Die Gerade $\mathbb{R}^1$ entsteht aus einem aufgeblasenen Geradenabschnitt, die Ebene $\mathbb{R}^2$ aus einem Quadrat, $\mathbb{R}^3$ aus einem Würfel.

Raum $\mathbb{S}^3$ entsteht durch die Identifizierung der Oberflächen zweier Vollkugeln, für die wir zwar ein Kantisches Schema aber nur lokale mentale Bildauszüge aufrufen[16].

Sobald konkrete oder abstrakte Gegenstände in solche Räume gelegt werden, stellt sich die Frage, ob wir die Beziehungen zwischen den Gegenständen nach Belieben, d.h. entsprechend einer anthropischen apriorischen Form, euklidisch, hyperbolisch oder sphärisch strukturieren können, oder ob im Gegenteil der Raum nur bestimmte Strukturen annimmt. Wir werden noch sehen, daß letzteres der Fall ist.

Unter der Überschrift „Metaphysische Erörterung“ erklärt Kant in vier Absätzen, was der Raum ist und was er nicht ist. Nach seiner tiefgründigen Analyse der Argumente schließt Holm Tetens mit den Worten: „Analoge Argumente für die Zeit trägt Kant in der ‚metaphysischen Erörterung‘ des Zeitbegriffs vor. Sie sind nicht minder fragwürdig als die Argumente zum Raum[17].“ Da es uns nur um die Apriorität geht, verweisen wir auf Holm Tetens' Kommentar zu den „fragwürdigen“ Inhalten, und zitieren lediglich Kants Definition des Raums, die eindeutig einer Substanzauffassung entspringt[18]:

> Der Raum ist eine notwendige Vorstellung, a priori, die allen äußeren Anschauungen zum Grunde liegt. Man kann sich niemals eine Vorstellung davon machen, daß kein Raum sei, ob man sich gleich ganz wohl denken kann, daß keine Gegenstände darin angetroffen werden. Er wird also als die Bedingung der Möglichkeit der Erscheinungen, und nicht als eine von ihnen abhängende Bestimmung angesehen, und ist eine Vorstellung a priori, die notwendiger Weise äußeren Erscheinungen zum Grunde liegt[19].

Bis auf die noch beweisbedürftige Behauptung der Apriorität ist die Definition einleuchtend. Sehen, Hören und Riechen stimmen außerdem in der Raumwahrnehmung überein, die mehr als die bloße Einbildung eines einzelnen Sinnes ist[20]. Die Konvergenz der sinnlichen Informationen verleiht dem Raum einen realen Charakter, den Kant, wie wir sehen werden (siehe S. 29), auch vertritt.

Im Zitat bekennt sich Kant zur Substanzauffassung, denn die Relationisten meinen sehr wohl, „daß kein Raum sei“, solange kein Mensch über die Interaktionen zwischen Raumobjekten nachdenkt. Kant behauptet resolut:

[16] Dezisiv ist, daß dieselben Räume verschieden beschrieben werden können. Die Sphäre $\mathbb{S}^3$ wird auch als inverse stereographische Projektion des $\mathbb{R}^3$ interpretiert, oder als die Menge der Einheitsquaternionen im $\mathbb{R}^4$. Nachdenkenswert ist, daß die verschiedenen Konstruktionswege in einem und demselben Raum $\mathbb{S}^3$ konvergieren, der schon dadurch doch einen realen Status erhält.

[17] Vgl. [Tetens, 2006], S. 59.

[18] Es ist nicht immer der Fall, vgl. [Tetens, 2006], S. 137: „Kant hält die relationale und die Substanzauffassung von Raum und Zeit nicht immer klar auseinander, vor allem in der ‚metaphysischen Erörterung‘ von Raum und Zeit stützt er sich mal auf die eine, mal auf die andere Theorie.“

[19] Vgl. [Kant, 1787] Abschn. I, Von dem Raume § 2 Metaphysische Erörterung dieses Begriffs.

[20] Condillac analysiert im *Traité des sensations*, [Condillac, 1754], wie die sinnlichen Empfindungen nicht nur zusammenwirken, sondern auch einzeln ein gesamtes räumliches mentales Bild zu erzeugen vermögen.

> Wäre also nicht der Raum (und so auch die Zeit) eine bloße Form eurer Anschauung, welche Bedingungen a priori enthält, unter denen allein Dinge für euch äußere Gegenstände sein können, die ohne diese subjektive Bedingungen an sich nichts sind: so könntet ihr a priori ganz und gar nichts über äußere Objekte synthetisch ausmachen. Es ist also ungezweifelt gewiß, und nicht bloß möglich oder auch wahrscheinlich, daß Raum und Zeit, als die notwendigen Bedingungen aller (äußern und innern) Erfahrung, bloß subjektive Bedingungen aller unsrer Anschauung sind, im Verhältnis auf welche daher alle Gegenstände bloße Erscheinungen und nicht für sich in dieser Art gegebene Dinge sind, von denen sich auch um deswillen, was die Form derselben betrifft, *vieles a priori sagen läßt, niemals aber das mindeste von dem Dinge an sich selbst, das diesen Erscheinungen zum Grunde liegen mag*[21].

Dem hervorgehobenen Satz stimmen wir zu. Zum Ding an sich finden wir nicht einmal bei sinnlich wahrnehmbaren Objekten Zugang. Sichtbare elektromagnetische Wellen erscheinen uns z.B. in der Form von Regenbogenfarben. Der Physiker ordnet die Farben einem Frequenzkontinuum von Wellen zu. Ein Blinder kann verstehen, was eine Welle ist, wenn er eine vibrierende Stimmgabel anfaßt, aber nie, was eine Farbempfindung ist. Letztlich wird niemand in eine elektromagnetische Welle *an sich* schauen können. Es wird, wie Kant meint, zu der materiellen Erscheinung notwendig etwas „hinzugedacht", in der Form einer apriorischen Anschauung:

> Denn in dem Begriffe der Materie denke ich mir nicht die Beharrlichkeit, sondern bloß ihre Gegenwart im Raume durch die Erfüllung desselben. Also gehe ich wirklich über den Begriff von der Materie hinaus, um etwas a priori zu ihm hinzuzudenken, was ich in ihm nicht dachte[22].

Was hinzugedacht wird, gilt als a priori, wenn es von allen sinnlichen Komponenten *bereinigt* ist: „Ich nenne alle Vorstellungen rein (im transzendentalen Verstande), in denen nichts, was zur Empfindung gehört, angetroffen wird[23]." Unter der Überschrift „Die transzendentale Ästhetik" möchte Kant zeigen, wie die *reine* Anschauung von Raum und Zeit synthetische Urteile a priori ermöglicht:

> Ich verstehe unter einer transzendentalen Erörterung die Erklärung eines Begriffs, als eines Prinzips, woraus die Möglichkeit anderer synthetischer Erkenntnisse a priori eingesehen werden kann[24].

Es folgt also aus der Apriorität der Anschauung die Möglichkeit von apriorischen Sätzen. Auch wenn die Implikation gelten sollte, interessiert uns eigentlich eher deren Umkehrbarkeit: ermöglichen apriorische (d.h. notwendige und atemporale) Sätze eine Raumanschauung? Kant sucht in der Verifizierung der geometrischen Sätze die Bestätigung der räumlichen Anschauungsform, die auf Objekte appliziert wird: „Also macht

[21]Vgl. [Kant, 1787], B 66. Hervorhebung CF.
[22]Vgl. [Kant, 1787], B 17/18.
[23]Vgl. [Kant, 1787], Die transzendentale Ästhetik §1.
[24]Vgl. [Kant, 1787], § 3 Transzendentale Erörterung des Begriffs vom Raume.

allein unsere Erklärung die Möglichkeit der Geometrie als einer synthetischen Erkenntnis a priori begreiflich[25].“ Auch wenn vom deklamatorischen Alleinigkeitsanspruch der Erklärung abgesehen wird, behauptet Kant, ganz im Sinne des damaligen Verständnisses der Geometrie, nicht weniger als: allein die Apriorität von Raum- und Zeitform macht möglich, daß die Sätze der Geometrie synthetische Aussagen a priori sind.

Aus der Perspektive der heutigen Mathematik, die von den Axiomensystemen nur Nützlichkeit bei Widerspruchsfreiheit verlangt, fällt es uns schwer, nach dem Principle of Charity für das große Gewicht zu plädieren, das Kant der - auch noch sinnlichen - Anschauung beimißt. Neben den Kategorien, die anschauungsfreie reine Begriffe sind, benötige das Denken zur Erkenntnis, so Kant, die Anschauung, die der Verstand nicht besorgen kann. Wie seine Zeitgenossen faßt Kant die geometrischen Objekte als eine Sublimierung der materiellen Dinge auf. Die Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks wäre, so verstehen wir Kant, ein sinnloser Begriff, da drei „krummlinichte“ Winkel anders als drei „geradelinichte“ Winkel eine verbogene Figur aber kein Dreieck bilden. Kant hält die geometrischen Sätze für offenkundig synthetische Aussagen a priori:

> Denn die geometrischen Sätze sind insgesamt apodiktisch, d.i. mit dem Bewußtsein ihrer Notwendigkeit verbunden, z.B. der Raum hat nur drei Abmessungen; dergleichen Sätze aber können nicht empirische oder Erfahrungsurteile sein, noch aus ihnen geschlossen werden[26].

Daß der Raum nur drei Abmessungen habe, war, mit Verlaub, nie ein geometrischer Satz[27], sondern eine empirische Aussage der Physik, die wir heute in bezug auf Relativitätstheorie und Stringtheorien nicht einmal a posteriori nennen würden, geschweige denn notwendig oder apodiktisch. Mit dem Kartesischen Koordinatensystem stand auch zu Kants Zeiten das Tor zu höheren Dimensionen offen, es fehlte nur an der Veranlassung, das Dimensionenspektrum durch ein Kantisches Schema zu erweitern.

Beim derzeitigen Wissensstand gibt es etliche Einwände gegen die Apriorität der mathematischen Sätze. Logizismus und Formalismus konnten Gödels Unvollständigkeitssätze nicht überwinden. Das euklidische Parallelenpostulat ist nicht notwendig; es gibt Mengenlehren mit und ohne Kontinuumshypothese, mit und ohne Fundierungsaxiom.

A priori im Kantischen Sinne von notwendig und atemporal ist heute kein passendes Prädikat für die Gesamtheit der Sätze der Mathematik, sondern nur innerhalb eines

[25] Vgl. ebd.
[26] Vgl. ebd.
[27] Die euklidischen fünf Definitionen, fünf Axiome und fünf Postulate definieren keine Dimensionen sondern Punkte und Linien und deren Inzidenzen.

konsistenten Axiomensystems. Darauf werden wir eingehen, wenn wir den Konventionalismus von Poincaré behandeln.

Ziehen wir eine kurze Bilanz. Daß die mathematischen Sätze synthetisch und a priori sind, wird in der *Kritik der reinen Vernunft* nicht schlüssig bewiesen. Wie folgenschwer dieser Mangel ist, betont Holm Tetens: „Der Raum [hat] nach Kant und Newton eine euklidische Struktur[28]“, und weiter: „Die Argumentation Kants bricht zusammen, sollte sich herausstellen, daß arithmetische und geometrische Sätze gar keine Urteile a priori sind[29].“ Holm Tetens bringt Kants These auf den Punkt:

> Halten wir zunächst das Ergebnis unserer Analyse fest. Sie hat ergeben, daß die Thesen von Raum und Zeit als apriorischen Anschauungsformen nichts anderes besagen kann als die Behauptung: *Bestimmte synthetische Sätze a priori werden durch Anschauungen räumlicher oder zeitlicher Eigenschaften und Beziehungen verifiziert*[30].

Kants Idee, die Apriorität der Anschauungsform an die Apriorirät der mathematischen Sätze zu koppeln, ist kaum praktikabel. Das Junktim sollte aufgelöst werden, um die Apriorität des Raums als Anschauungsform auf direktem Wege zu hinterfragen. Bisher konnten wir anhand der *Kritik der reinen Vernunft* die These der Apriorität weder bestätigen noch widerlegen. Mit der Frage, ob wir den geometrischen Objekten unsere Strukturen vorschreiben, hatte sich Kant, bereits in frühen Schriften zur Chiralität ausführlich auseinandergesetzt (vgl. Anhang B).

2.2.2. Die Rolle der Anschauung

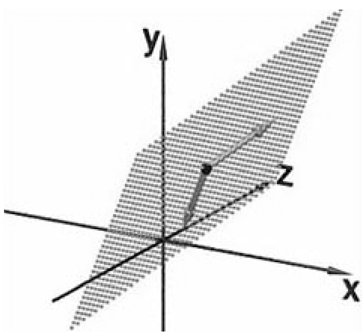

Abbildung 2.2.: Gauß-Ebene

Daß bei „rechts/links, vorn/hinten, oben/unten“ je zwei Orientierungen die dritte bedingen, läßt sich am besten durch Anschauen feststellen. Analog können wir jemandem nicht leicht erklären, warum sich ein Gummireifen nicht zu einem Ball verformen läßt, sondern nur zur Selbstverifizierung einladen. Derartige Eigenschaften zeigen sich zwar in der Anschauung, sie hängen aber nicht davon ab, *daß* wir anschauen - wie z.B. in der Quantenmechanik -, sondern *wie* wir anschauen.

[28] Vgl. [Tetens, 2006], S. 76.
[29] Vgl. [Tetens, 2006] S.65.
[30] Vgl. [Tetens, 2006], S. 61. Hervorhebung im Original.

Um Cardanos Lösungsalgorithmus kubischer Gleichungen ein Fundament zu verschaffen, ersann Gauß die nach ihm benannte Ebene der komplexen Zahlen. Er nimmt wie in Abb. 2.2 skizziert eine Ebene im (euklidischen) Raum, wählt eine Vorderseite und eine orientierte imaginäre Achse. Aus beiden Wahlen ergibt sich die Orientierung der reellen Achse zwangsläufig. Dazu merkt Gauß an:

> Dieser Unterschied zwischen rechts und links ist, sobald man vorwärts und rückwärts in der Ebne, und oben und unten in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebne einmahl (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes andern nur durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mittheilen können[31].

Seine Aussage versieht Gauß mit einer Fußnote:

> Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung, daß der Raum nur Form unserer äußern Anschauung sey, zu finden glauben konnte, da die zweyte so klar das Gegentheil, und daß der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine *reelle Bedeutung* haben muß, beweiset[32].

Diese Meinungsverschiedenheit entscheidet Paul Mansion in seinem Essay *Gauß contre Kant*, [Mansion, 1908], der mathematischen Kompetenz wegen zugunsten des genialen Mathematikers. Wir meinen im Gegenteil, daß Gauß' Fußnote dem „scharfsinnigen Philosophen" Unrecht tut. Warum?

Die erste Bemerkung bezieht sich auf die zum Teil freie Wahl zweier Orientierungen, z.B. vorn/hinten und oben/unten[33]. Somit ist die Orientierung links/rechts „eine Form unserer äußeren Anschauung", die der Beobachter nach Wunsch durch eine adäquate Wahl von vorn/hinten und oben/unten umdrehen kann. Die zweite Bemerkung schließt auf die Realität des Raums, weil die Orientierungen der Triade „links/rechts, vorn/hinten, oben/unten" voneinander abhängen, so daß der Raum schließlich die dritte Orientierung allein bestimmt, nachdem zuvor zwei Orientierungen frei festgelegt wurden[34]. Der Raum behält das letzte Wort und erhält somit „reelle Bedeutung", was für Gauß trotz der partiellen Freiheit in der Wahl von vorn/hinten bzw. oben/unten den Ausschlag gibt.

Nach unserem Verständnis spricht Kant in der transzendentalen Anschauungsform dem Raum die „reelle Bedeutung" nicht ab, wie Gauß meint. Für Kant existiert zwar der Raum; sein Wesen ist uns jedoch nicht zugänglich. Unsere Wahrnehmung des Raumes ist kein Phantasma; sie wird durch eine reale Erscheinung angeregt; auf welchen dinghaften

[31] Vgl. [Gauß, 1831].
[32] Vgl. ebd. Hervorhebung CF.
[33] Alternativ kann sich der Betrachter seinen Standort in Relation zur Ebene aussuchen.
[34] Auch der Hund an der Leine genießt eine illusionäre Lauffreiheit, aber er bestimmt nicht, wo der Spaziergang hinführt.

Raum wir sinnlich reagieren, können wir nicht wissen. Daher konstruieren wir uns einen Raum, wie der Physiker die Herde der Teilchen im Standardmodell in eine anthropische Form packt. Soweit besteht kein Widerspruch.

Gauß dürfte sich auf den Essay aus 1768, [Kant, 1768], beziehen, in dem Kant die Realität des physikalischen Raumes aus der Rolle von Links vs. Rechts im Raum der Geometrie (Meßkunst[35] im nachfolgendem Zitat) folgern möchte:

> [...] mein Zweck in dieser Abhandlung [ist] zu versuchen, ob nicht in den anschauenden Urtheilen der Ausdehnung, dergleichen die Meßkunst enthält, ein evidenter Beweis zu finden sei: daß der absolute Raum unabhängig von dem Dasein aller Materie und selbst als der erste Grund der Möglichkeit ihrer Zusammensetzung eine eigene Realität habe[36].

Exemplarisch für die sinnliche Raumanschauung benützt Kant die Chiralität, d.h. die räumliche Orientierung. Vielleicht wollte Kant mittels der sinnlichen Anschauung eine Brücke bauen, damit dem realen, sogar euklidischen, Behälterraum kein phantasierter mathematischer Raum isoliert gegenübersteht. Wir besprechen im Anhang B den Essay aus 1768 und zeigen, daß zum Nachweis der Realität des Raumes die mathematischen Aussagen wahrhaftig a priori gelten müßten[37], woran wir aber nicht glauben.

Zu Zeiten Kants dachte man, daß Mathematik und Welt übereinzustimmen haben. Inzwischen darf der Mathematiker vorbehaltlich der Widerspruchsfreiheit hochdimensionale bzw. gekrümmte Räume konstruieren. Kant meint, daß Begriffe ohne Anschauung leer seien; sie würden zu suspekten metaphysischen Spekulationen ausarten. Doch ist sinnliche Anschauung u.E. in der reinen Mathematik zwar unbestritten hilfreich aber schlußendlich verzichtbar; das logische Werkzeug des Beweisens sieht von Sinneseindrücken ab. Es gibt sowohl visuelle Täuschungen, z.B. S. 92 beim Stetigkeitsbegriff, als auch mathematische Wahrheiten, die der Anschauung nicht zugänglich sind, wozu wir exemplarisch den Fixpunktsatz von Brouwer anführen möchten.

Wird in einer Tasse der Kaffee umgerührt, läßt die Intuition nicht zu, daß sich nach fleißigem Rühren hartnäckig ein Molekül des Getränks wieder an der Stelle befindet, wo es vorher war. Darin täuscht man sich, denn nach dem Fixpunktsatz muß mindestens ein Molekül (genauer: ein Punkt eines Moleküls) seinen ursprünglichen Standort erneut

[35] Die Einschränkung der Geometrie auf das Messen war damals bedenkenlos. Was bei dynamischen Transformationen erhalten wird, definiert eine weite Palette von Geometrien. Das Maß ist heute nur noch die Invariante der drei metrischen Geometrien.

[36] Vgl. [Kant, 1768], S. 378, AA II.

[37] Darüber ist sich Kant im klaren, der in einer verwandten Konstellation als Erster dem ontologischen Gottesbeweis entgegenhielt, daß Existenz kein reales Prädikat ist. Die Analogie zu vertiefen würde unseren Rahmen sprengen.

einnehmen. Die Anschauung hilft hier überhaupt nicht weiter, denn es läßt sich weder rechnerisch noch experimentell feststellen, welcher Punkt jeweils fix bleibt.

Rühren wir nicht im Kaffee herum in der Überzeugung, daß jeder Punkt verschoben wird? Wenn wir den (im eindimensionalen Fall) trivialen Beweis im Kopf abspielen, entsteht ein individuell geprägtes schwer zu beschreibendes Netz von mentalen Bildern, wodurch die Wahrheit kontraintuitiv verstanden wird. Diese Bilder entsprechen bei Kant keiner Anschauung, denn Anschauung ist sinnlich (bis auf die Ausnahme der Zeit als Anschauung des inneren Sinnes). Unmißverständlich meint Kant in [Kant, 1783] § 13 Anmerk. II: „Alle unsere Anschauung geschieht aber nur vermittelst der Sinne; der Verstand schaut nichts an, sondern reflektiert nur." Nur durch sinnliche Proben könne der Geometer „wider alle Schikanen einer seichten Metaphysik, wegen der ungezweifelten objektiven Realität seiner Sätze gesichert werden." Kant läßt partout nicht gelten, daß mentale Bilder die sinnliche Anschauung weit übertreffen. Doch meinen wir, daß der Fixpunktsatz keine seichte Metaphysik ist: aller Anschauung zum Trotze gelangt mindestens ein Punkt in der Tasse wieder dort, wo er vorher war.

Es liegt eine tiefe Kluft zwischen der Rolle der sinnlichen Anschauung sowie des apriorischen Kantischen Status mathematischer Aussagen und dem heutigen Selbstverständnis der Mathematik. Der Auslöser für den Gesinnungswechsel war die Entdeckung konsistenter nichteuklidischer Geometrien[38], auf die jetzt eingehen.

2.3. Räume der Geometrie

2.3.1. Kants Ablehnung der nicht-euklidischen Geometrien

Kant lehnt die Möglichkeit nichteuklidischer Geometrien ab. Wir zeigen zuerst, daß seine Begründung anhand des Begriffes des Zweiecks zirkulär ist.

Nichteuklidische Überlegungen zieht Kant prinzipiell in Erwägung. Für ihn waren aber alle erdenklichen synthetischen Gedanken, die über die euklidische Geometrie hinausgehen, zwar logisch zulässige aber keine anschaulich konstruierbaren Gedankendinge. Es heißt in der *Kritik der reinen Vernunft*:

[38] Wir werden später fairerweise über die Argumentation Freges diskutieren (vgl. S. 139), der selbst nach dem Erfinden solcher Geometrien an der früheren Rolle der Anschauung festhielt.

> So ist in dem Begriffe einer Figur, die in zwei geraden Linien eingeschlossen ist, kein Widerspruch, denn die Begriffe von zwei geraden Linien und deren Zusammenstoßung enthalten keine Verneinung einer Figur; sondern die Unmöglichkeit beruht nicht auf dem Begriffe an sich selbst, sondern der Konstruktion desselben im Raume, d.i. den Bedingungen des Raumes und der Bestimmung desselben, diese haben aber wiederum ihre objektive Realität, d.i. sie gehen auf mögliche Dinge, weil sie die Form der Erfahrung überhaupt a priori in sich enthalten[39].

Danach wäre der anführte Zweiecksbegriff zwar widerspruchsfrei; ihm entspräche aber keine Konstruktion. Auf der Erdfläche bildet doch eine durch zwei Meridiane berandete Linse ein Kugelzweieck. Zwar sind Meridiane Großkreise. Sie erfüllen aber die Definition der Geraden. Ein Flugzeug wählt die kürzeste Strecke, wenn es einem Meridian entlang fliegt; der Pilot ändert seinen Steuerkurs nie; wenn ein Großkreis auf sich selbst gleitet, entsteht die Identität. Somit erfüllen die Gerade der euklidischen und der Großkreis der sphärischen Geometrie alle definitorischen Forderungen an einer Geraden.

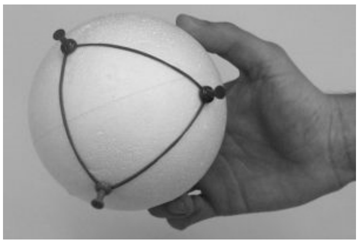

Abbildung 2.3.: Kugeldreieck

Was ist dann die kürzeste Strecke zwischen zwei Punkten einer Sphäre? Dreidimensional ist es zwar der die Kugel durchbohrende Strahl von einem Punkt zum anderen[40]; in der (zweidimensionalen) intrinsischen Geometrie der Sphäre, ist es aber ein Bogen eines Großkreises. Auch Hannibal mit seinen Elephanten bohrte keinen Tunnel durch die Alpen. Sein terrestrischer Weg wird Geodätische genannt, um eine Verwechselung mit der euklidischen Geraden zu vermeiden. Großkreise sind die Geodätischen oder Geraden der Sphäre. Zwei Großkreise treffen sich immer in zwei antipodalen Punkten, wie z.B. die Meridiane im Nord- und Südpol; daher gilt das euklidische Parallelenaxiom in der sphärischen Geometrie nicht. Im Kugeldreieck ist, anders als in der flachen Geometrie, die Winkelsumme $> \pi$, wie im folgenden Spezialfall leicht erkannt wird.

Angenommen ein Flugzeug fliegt (vgl. Abb. 2.3) dem Äquator entlang, wendet irgendwann senkrecht ab, folgt dem Meridian bis zum Nordpol, macht dort irgendeine Wende um den Winkel α, und fliegt längs eines anderen Meridians zu seinem Startort zurück. Zu dem Wendewinkel α im Nordpol kamen die beiden rechten Winkel der Meridiane mit dem Äquator, d.h. die Winkelsumme des geflogenen Dreicks war um den Winkel α im Nordpol größer als π. Um festzustellen, daß ein sphärisches Dreieck wegen der Winkelsumme größer als π nicht euklidisch ist, hätte Kant schon damals eine Route an einem

[39] Vgl. [Kant, 1787], S. 320, A 220 f. B 268.
[40] Die (leere) Sphäre ist die Oberfläche der (vollen) Kugel.

Globus mit einem Finger nachvollziehen können[41].

Wir haben fleißig gelernt, mit dem Lineal die kürzeste Strecke zu bestimmen. Doch der Schifahrer, der auf dem schnellsten Weg die Hütte erreichen möchte, weiß spontan, das Relief der Piste einzubeziehen. Beim Anblick einer vom Hintergrund herausgelösten sinuösen Raumkurve können wir sie nicht „a priori" ausdeuten: als euklidische Flugbahn eines Vogels oder als nichteuklidische Schifahrerspur auf einem buckligen 2D-Hanges.

Daß Kant die sphärische Geometrie nicht durchschaute, dürfte ihm nicht zum Tadel gereichen. Dennoch nimmt er diese Geometrie zur Besprechung der Chiralität in Anspruch. Es war schon damals leicht einzusehen, daß die Winkelsumme des Sphärendreiecks, das Kant am Äquator spiegelt (vgl. S. 237), größer als π ist; somit war sein Dreieck nicht euklidisch und doch kein bloßes „Gedankending".

Die Winkelsumme $> \pi$ liefert einen Beweis für die Unmöglichkeit eines sphärischen Rechtecks[42]. Der Begriff des Rechtecks enthält keinen Widerspruch: „die Unmöglichkeit beruht nicht auf dem Begriffe an sich selbst, sondern der Konstruktion desselben im Raume". Würden wir behaupten, daß ein Rechteck überhaupt unmöglich ist, würden wir einen Beweis der sphärischen Geometrie zirkulär mißbrauchen. Genau diese Petitio Principii läßt sich Kant zuschulden kommen, wenn er die Unmöglichkeit des Zweiecks beweist, denn er legt implizit die euklidische Definition der Geraden zugrunde.

2.3.2. Hyperbolische Geometrie

Der andere Weg, Euklids Parallelenaxiom zu verneinen, liefert die hyperbolische Geometrie, bei der es mehr als nur eine Parallele gibt. Anders als die Sphäre kann die hyperbolische Ebene im Standardraum $\mathbb{R}^3$ nicht existieren[43]. Wir verdanken Poincaré das Modell der Kreisscheibe, das erfreulicherweise auch die Visualisierung (nicht die sinnliche Anschauung!) der hyperbolischen Ebene möglich macht. Die Geraden sind zum

[41] Dann hätte Kant bei Thomas, Contra Gentiles, lib. 2 cap. 25 n. 14 Praeterea, nachlesen können, was selbst Gott z.B. nicht kann: „Deus facere non possit: sicut [...] quod triangulus rectilineus non habeat tres angulos aequales duobus rectis."

[42] Angenommen es gäbe ein solches, dann würde es eine Diagonale in zwei Dreiecken aufteilen; jedes Dreieck hat eine Winkelsumme $> \pi$. Die Winkelsumme im Rechteck ist gleich der Summe der Winkelsummen der beiden Dreiecke, daher größer als 2π; aber die Winkelsumme im Rechteck ist genau 2π ↯.

[43] Umgekehrt existieren sehr wohl flache Ebenen (Horosphären) im hyperbolischen Raum $\mathbb{H}^3$. Die hyperbolische Geometrie ist, entgegen dem angewohnten euklidischen Vorurteil, viel inhaltsreicher und interessanter als die euklidische.

Scheibenrand orthogonale Kreisbögen[44]; sie werden daher ganz „normal“ mit Zirkel und Lineal (siehe Abb. 2.4) gezeichnet.

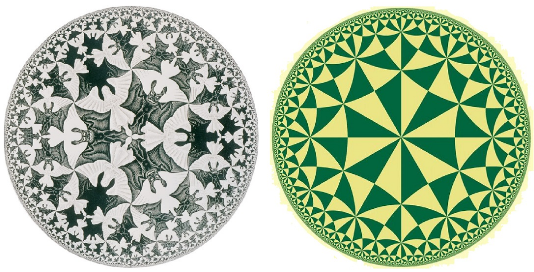

Abbildung 2.4.: Parkette

Der große Geometer H.S.M. Coxeter veröffentlichte eine Parkettierung der hyperbolischen Ebene. Das hyperbolische Auge sieht (Abb. 2.4, rechts) ein und dasselbe Dreieck, das unendlich oft die Ebene bedeckt, wie etwa die Fliesen in einem Badezimmer. M.C. Escher, der keine höheren geometrischen Kenntnisse besaß, interpretierte die Pflasterung als eine Darstellung des Unendlichen. Er ließ sich von Coxeter handwerklich beraten und zeichnete unter der Überschrift *Circle Limit* eine Reihe von Bildern; Abb. 2.4 zeigt *Circle Limit IV*, Heaven and Hell, 1960, wo sehr geschickt anstelle von Dreiecken Engel und Dämonen eingesetzt werden.

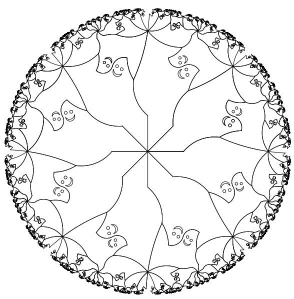

Abbildung 2.5.: Geistertanz

Wo Escher sich unglaubliche Mühe gab, genügt es, einem PC ein einziges Paar Engel/Dämon einzugeben, um auf Knopfdruck durch hyperbolische Berechnung die ganze Parkettierung zu erhalten. In Abb. 2.5 können die Kontouren mit der Maus animiert werden, so daß die Gespenster einen Tanz live ausführen[45].

Es ist nachdenkenswert, daß der Meister der Manipulation des euklidischen Raums, dem Coxeters Vorlage vor Augen lag, sich technischen Rat bei dem Geometer holen mußte. Selbst Escher dürfte jede vermeintlich apriorische Anschauungsform des hyperbolischen Raumes zunächst gefehlt haben. Durch sein akribisches Einfühlungsvermögen gelang ihm schließlich der Durchbruch so gut, daß ihm Coxeter bewundernd bescheinigte: „He got it absolutely right to the millimetre, absolutely to the millimetre... Unfortunately, he didn't live long enough to see my mathematical vindication[46].“

Wie ist Abb. 2.4 in bezug auf apriorische Anschauung des Raumes zu interpretieren? Der unvorbelastete Betrachter sieht ein Mosaik aus derart geschickt angeordneten stets kleiner werdenden Kreisbögen, daß die Illusion des im Kreis eingefangenen Unendlichen

[44] Mit Ausnahme der ungebogenen Geraden, die durch den Scheibenmittelpunkt gehen.
[45] Aus unserer Dissertation [Fabre, 2009].
[46] Coxeter, 1995, Rezension zu *Circle Limit III*.

aufkommt. Wer sich hingegen eine Praxis der hyperbolischen Geometrie angewöhnt hat, sieht zwingend eine Parkettierung aus nur einem Dreieck. Kein Mensch hätte das Puzzle der kreisförmigen stetig kleiner werdenden Dreiecke aus euklidischer Perspektive zeichnen können: nicht einmal Escher, der Coxeter um Hilfe bitten mußte.

Immerhin kann der Escherschen Figur sowohl eine euklidische als eine hyperbolische (aber keine sphärische[47]) Form der Anschauung appliziert werden. Somit hätte Kant nicht ganz Unrecht mit der Apriorität der euklidischen Geometrie! Wir werden aber im folgenden sehen, daß nur die Ebene diese Wahlmöglichkeit erlaubt.

2.3.3. Dreidimensionale Geometrie

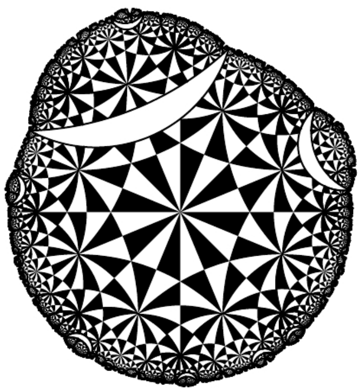

Abbildung 2.6.: Brezel

Das Beispiel der Parkettierung der hyperbolischen Ebene ist zweidimensional. Die dreidimensionale Raumanschauungsform bereitet weitaus größere Probleme. Kant wählte zur Chiralität das zweidimensionale Beispiel des am Äquator gespiegelten Dreiecks, weil er eine Dimension höher nicht zu steigen wußte.

Auch für den hyperbolischen 3D-Raum gibt es intelligible Visualisierungsformen. Abb. 2.6 wurde mit Zirkel und Lineal (elektronisch) gezeichnet[48] und macht für das euklidische Auge bestenfalls einen dekorativen Eindruck. Das trainierte hyperbolische Auge erkennt aber eine an einem Henkel entlang einer Geodätischen geknickte Brezel.

Nicht die Wahrnehmung sondern ein erlerntes Wissen macht es möglich, die euklidische Anschauung auszuschalten. Die Seiten der großen Dreiecke im Mittelbereich sehen fast gerade aus, wie sich auch auf einem Stadtplan, die Erdkrümmung nicht bemerkbar macht. Da die Gegenstände, die wir wahrnehmen, nie „astronomisch" weit auseinander liegen, nimmt es nicht Wunder, daß unsere Sinne euklidisch programmiert sind. Wir nehmen eine geringe Krümmung nicht wahr, wie uns etwa Millisekunden auch entgehen. Wir statten den uns umgebenden Raum spontan mit einer dreidimensionalen euklidi-

[47] Allerdings hätte Escher durch stereographische Projektion seine Figur auf eine Sphäre abbilden könne. Dann läge die Poincarésche Kreisscheibe auf der Riemannschen Sphäre $\mathbb{CP}^2$; sie bliebe aber hyperbolisch; darauf gehen wir nicht näher ein.

[48] Aus unserer Dissertation *Moebius structures on surfaces*, [Fabre, 2009].

schen Geometrie aus. Allein das am Meereshorizont verschwindende Schiff weist uns auf die Rundung der Erde hin.

2.3.4. Gauß kontra Kant

Lange bevor das Poincarésche Modell die hyperbolische Geometrie veranschaulichte, hatte Gauß diese Geometrie bereits ausgearbeitet; er veröffentlichte jedoch nichts, da er (vielleicht eingedenk der Probleme Galileos) „das Geschrei der Böotier scheue[49].“ In diesem Zusammenhang lieferte Gauß einen weiteren Beweis gegen die Kantische Apriorität der euklidischen Raumform.

Als Farkas W. Bolyai seinem guten Freund Gauß die These seines Sohnes János über die hyperbolische Geometrie zur Evaluation vorlegt, dokumentiert Gauß in einer sehr ausführlichen Antwort, daß er selbst schon sehr viel früher auf diese Geometrie gekommen war[50], und er schließt folgende Anmerkung über Kants Apriorität des Raums an:

> Gerade in der Unmöglichkeit zwischen Σ [euklidischer Geometrie] und S [hyperbolischer Geometrie] a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, daß Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung. Einen andern ebenso starken Grund habe ich in einem kleinen Aufsatze angedeutet, der in den Göttingischen gelehrten Anzeigen 1831 steht[51].

Die zitierte Stelle über die Chiralität in der Orientierung der Gauß-Ebene aus dem „kleinen Aufsatz“ haben wir bereits besprochen. Die Frage, ob unser Raum euklidisch sei, hatte Gauß im Verlauf der zwischen 1818 und 1826 (damit vor dem Brief an Bolyai von 1832) per Triangulation durchgeführten Landesvermessung des Königreichs Hannover an einem „großen Dreieck“ Hoher Hagen / Brocken / Großer Inselsberg überprüft und festgestellt, daß die Winkelsumme von 180° nur im Fehlerbereich der Messung abweicht. Folglich zeigt der physikalische Raum selbst bei solch großen Entfernungen keine meßbare Krümmung. Wäre der Raum eine apriorische Anschauungsform, dann wäre uns seine Geometrie a priori erschließbar, nicht erst durch Nachmessen eines Dreiecks[52].

[49] Vgl. [Gauß, 1829], Brief von Gauß an Bessel vom 27. Januar 1829.

[50] Vgl. [Gauß, 1832] S. 108ff., Gauß an Bolyai, Brief vom 6. März 1832: „Die These loben, hieße mich selbst loben, denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theile schon seit 30-35 Jahren angestellten Meditationen überein.“

[51] Vgl. [Gauß, 1832], Gauß an Bolyai, März 1832.

[52] Dank der Satelliten Planck und WMAP konnte im Zusammenhang mit der Hintergrundstrahlung die Frage der Krümmung anders als über die Winkelsumme im Dreieck angegangen werden. Auch diese Methode stärkte die These des flachen Universums.

Ob wir es möchten oder nicht, wirkt der Verstand bei jedem Anschauen aktiv mit[53]. Dasselbe Objekt wird je nach Struktur der Umgebung anders interpretiert. Beim Lesen der Sätze *Quelle der Philosophie* vs. *Quelle philosophie!* streift uns der Gedanke nicht, daß im deutschen und französischen Kontext das gleichgeschriebene Wort *Quelle* auftaucht. Bei alphabetischen Zahlensystemen, etwa der alten Griechen oder Römer, läßt der Kontext spontan erkennen, ob eine Buchstabenzusammenstellung für ein Wort oder eine Zahl steht. Bei geometrischen Figuren hingegen gibt es in unserer Alltagswelt keine Alternative zur euklidischen Geometrie. Die hyperbolische Ebene existiert im $\mathbb{R}^3$ nicht und die Geometrie der Sphäre bereitet uns Schwierigkeiten, z.B. dadurch, daß die kürzeste Strecke von Berlin nach New York ein Kreisbogen ist. Auch die mit Lineal und Zirkel gezeichnete geknickte Brezel oder M.C. Eschers Kreislimit-Reihe lassen nicht erkennen, welche hyperbolischen Objekte sich dahinter verbergen. Deswegen war zu Kants Zeiten die Annahme, daß durch einen Punkt mehr als eine Parallele gezogen werden kann, nicht überlegenswert, wenngleich leicht an einem Globus hätte erkannt werden können, daß die kürzesten Strecken, nämlich die Großkreise, stets immer zwei Schnittpunkte haben und somit nie parallel sein können.

Erst viel später wurde erkannt, daß die euklidische, sphärische und hyperbolische Geometrien widerspruchsfrei nebeneinander leben. Verblüffend ist, daß die drei zweidimensionalen Geometrien genau die Geometrien des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes sind! In diesem Raum leben nämlich: positiv gekrümmte Sphären, negativ gekrümmte Ebenen und flache Horosphären. Eine gute Beweisskizze liefert dazu Tristan Needham, der mit den Worten schließt:

> Somit haben wir einen geeigneten Höhepunkt erreicht [...]: zweidimensionale hyperbolische, euklidische und sphärische Geometrien sind alle in der dreidimensionalen hyperbolischen Geometrie zusammengefaßt[54].

Die „Unmöglichkeit zwischen euklidischer Geometrie und hyperbolischer Geometrie a priori zu entscheiden", genügte Gauß, um Kant zu widersprechen. Daß wir zwischen den Geometrien nicht a priori unterscheiden können, hat Gauß zu keinem ausführlichen Gegenargument ausgebaut. Es war nur eine beiläufige Bemerkung in einem langen Artikel über die Gauß-Ebene. Hätte Gauß nicht nur en passant Kant widersprechen wollen, hätte er z.B. auf sein Theorema Egregium (1827) hinweisen können, das wir jetzt kurz anführen, bevor uns das Uniformisierungstheorem endlich einen allgemeinen eklatanten Beweis der Nichtapriorität liefert.

[53] Mit dieser These haben wir uns in unserer Meisterarbeit „Das Bild als Grenze der Welt" [Fabre, 2014] auseinandergesetzt.

[54] Vgl. [Needham, 1996], S. 379.

2.3.5. Uniformisierungstheorem vs. apriorische Form

Die Überschrift *Theorema egregium*[55] wählte Gauß selbst. Knapp formuliert besagt der Satz: Die Gaußsche Krümmung einer Fläche im euklidischen Raum ist eine Größe der inneren Geometrie der Fläche, egal wie diese Fläche im Raum liegt.

Abbildung 2.7.: Salamander

Soll eine Folie mit einem geometrischen Muster auf eine Rolle oder einen Lampenschirm[56] geklebt werden, so wird die Folie erst flach bedruckt und dann aufgelegt. Da beim Aufkleben keinerlei Falten entstehen, verformt sich das Druckbild nicht: die flache Geometrie des Musters bleibt erhalten. Sollte aber ein Globus oder ein Torus, oder jede irgendwie gekrümmte Fläche beklebt werden, können nur ganz schmale Bänder das Muster approximativ wiedergeben. Ebenso läßt sich ein Fußball nicht flachdrücken, weswegen kleine Lederstücke zu einem Polyeder zusammengenäht werden. An diesen Beispielen zeigt sich bereits, daß nicht wir dem Raum apriorische Sätze der Geometrie vorschreiben, sondern umgekehrt. Es geht aber weiter.

In Abb. 2.7 parkettiert M.C. Escher die halbe Ebene mit Salamandern. Dieses andere Modell der hyperbolischen Ebene verdanken wir auch Poincaré[57]. Werden zwei Halbebenen Stoß an Stoß gelegt, erhält die gesamte Ebene eine hyperbolische Metrik. Also nimmt die Ebene $\mathbb{R}^2$ sowohl die euklidische als auch die hyperbolische Geometrie an.

Das Stückwerk der Geometrien wurde im Uniformisierungstheorem[58] von Poincaré und Koebe synthetisiert, das Flächen entsprechend ihrer Krümmung eine euklidische, sphärische oder hyperbolische Geometrie[59] zuweist.

Das Uniformisierungstheorem hat eine immense Tragweite. Es gilt für offene und geschlossene Flächen, auch z.B. für Flächen mit unendlich vielen Löchern oder noch mit

[55] Eminenter Satz, *egregius* aus *ex grege* = aus der Herde ausgelesen. Der Satz widerspricht der Intuition, denn die Definition der gaußschen Krümmung bezieht die Lage der Fläche im Raum ein.

[56] Allgemeiner: alle Regelflächen, bei denen durch jeden Punkt eine Gerade mit dem Lineal gezogen werden kann.

[57] Durch Inversion am Kreis mit Mittelpunkt $-i$ und Radius $\sqrt{2}$ entsteht aus der Halbebene das Kreisscheibenmodell.

[58] Jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist biholomorph äquivalent zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$, zu $\mathbb{C}$ oder zu $\overline{\mathbb{C}}$.

[59] Eine Dimension höher sind es acht (anstatt nur drei) Geometrien, die William P. Thurston auf der Basis der inzwischen von Grigori Perelman bewiesenen Poincaréschen Vermutung als Geometrisierungssatz nachwiesen hat.

Durchdringungen. Zu allen Schipisten der Welt oder sämtlichen Hüten der englischen Königin gibt es einen Maßstab konstanter Krümmung[60] zur Kategorisierung der Fläche. Dazu William P. Thurston:

> [A]ny orientable surface has a complete Riemannian metric of constant curvature[...] [T]he three possibilities are *mutually exclusive* within each homeomorphism class, except that surfaces homeomorphic to $\mathbb{R}^2$, $S^1 \times \mathbb{R}$ or the Möbius strip can be given both Euclidian and hyperbolic structures[61].

Wenn man sich durch die sibyllinische Formulierung nicht irritieren läßt, ist die Aussage eindeutig[62]: bis auf die Ebene $\mathbb{R}^2$, für die man eine euklidische oder hyperbolische (aber keine sphärische) Geometrie wählen kann, läßt sich keiner orientierbaren Fläche die Geometrie zuteilen, sondern die Fläche bestimmt die Geometrie. Das konnte nicht einmal Gauß damals wissen, geschweige denn Kant.

Wäre die Anschauungsform des Raums a priori, würde der Geometer dem Raum die Geometrie vorschreiben können. Der Möglichkeit, die Ebene $\mathbb{R}^2$ euklidisch oder hyperbolisch „anzuschauen“ ist zu verdanken, daß wir uns an M.C. Escher's Kunst erfreuen. Daraus die wichtige

Erkenntnis: Bis auf eine kleine Ausnahme, bestimmt allein die Fläche, d.h. der Raum, die Geometrie. Der geometrische Raum ist kraft des Uniformisierungstheorems keine transzendentale apriorische Anschauungsform.

2.3.6. Qualitative Geometrie

Wenn auch der Raum der drei metrischen Geometrien nicht a priori gegeben ist, gibt es auch nicht meßbare Räume. Poincaré bemerkt, daß eine Welt von Flüssigkeiten - man denke an die Lava-Lampe, wo bunte Blasen durch die Wärme einer Glühlampe emporsteigen - keine Geometrie hätte, weil kein starrer Körper eine Längenmessung ermöglichen würde.

[60] Es überrascht unsere Anschauung, daß jede Schipiste mit einer Metrik konstanter Krümmung ausgestattet werden kann. Das Wunder bewirkt eine Partition der Eins. Diese Metrik zu bestimmen, ist allerdings eine Herausforderung.

[61] Vgl. [Thurston, 1997], S. 117-118. Hervorhebung CF.

[62] Thurston nennt zusätzlich zum eigentlichen $\mathbb{R}^2$ zwei aus diesem gewonnene Flächen, d.h. nichts wirklich verschiedenes. An jeder Geraden durch den $\mathbb{R}^2$ können zwei Poincarésche Halbebenen mit der hyberbolischen Metrik Stoß an Stoß angelegt werden. Wird nun ein Band ausgeschnitten und werden die Ränder so zusammengeklebt, daß die Metrik glatt übergeht, erhält man den Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}$. Wird das Band außerdem einmal getwistet, entsteht das Möbius-Band. Nach dem Theorema Egregium bleibt die Metrik jeweils erhalten. Das Möbius-Band ist zwar nicht orientierbar, was ihn nicht daran hindert beide Metriken anzunehmen.

Wie wäre der Raum einer Welt beschaffen, wo nur weiche Körper leben? Diese Welt hat es wirklich gegeben. Die Ediacara-Fauna war die ursprünglichste Form mehrzelliger Lebewesen. Sie trugen keine mineralischen Schalen, waren aber hochentwickelt. Sie herrschten allein über die Ozeane, bis sie vor 542 MioJ zu 98% vermutlich von den Prädatoren der kambrischen Fauna ausgerottet wurden (vgl. [Grazhdankin, 2014]).

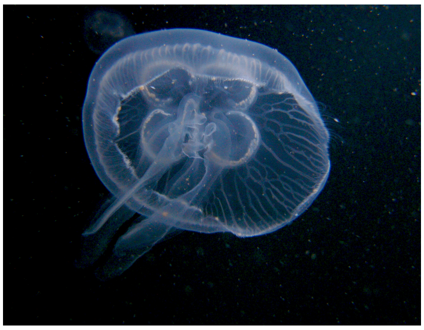

Abbildung 2.8.: Waterworld

Im Gedankenexperiment können wir uns eine mögliche Welt vorstellen, die von quallenänhnlichen vernunftbegabten Wesen bewohnt wäre; diese könnten mit Wahrnehmungsorganen ausgestattet sein, damit sie wissen, ob kein Feind in der Umgebung lauert. Die labberigen Wesen hätten einen Begriff der Inzidenz: wenn ihnen auch das Verhältnis $\frac{CA}{CB}$ unverständlich wäre, würden sie erkennen, daß C zwischen A und B liegt[63]. Die qualitative Geometrie, die sie hätten konstruieren können, hieß früher Analysis situs, heute Topologie oder scherzhaft Gummigeometrie.

Die Objekte der Topologie werden über ihre Form erkannt: es darf nach Belieben gestreckt bzw. geschrumpft aber nicht gerissen werden. Ein Rugby-Fall, ein Würfel, ein Teller, usw. repräsentieren denselben Gegenstand, die topologische Sphäre. Sie sind *homöomorph*, d.h. sie haben die gleiche Form[64].

Die Topologie gießt Wasser auf die Mühle der Empiristen, die den Primat der euklidischen Geometrie nicht experimentell verifizieren können - vgl. S. 139, wo Frege Zuflucht in der Rhetorik suchen muß. Die Wahrheiten der euklidischen Geometrie sind exakte Wahrheiten; sie lassen sich durch kein Experiment bestätigen, denn jedes Experiment ist mit Ungenauigkeiten behaftet. In der Topologie sind die Wahrheiten nicht weniger exakt, aber dank der Verformbarkeit der Gegenstände genügen approximative Experimente. Kein Experiment wird etwas, das annähernd wie ein Gummireifen aussieht, das Loch wegnehmen können. Kants apriorische Anschauungsform des Raums wird gerettet, wenn anstelle des (euklidischen) geometrischen Raumes der topologische Raum der Quallen gesetzt wird.

[63] Inzidenz genügt aber nicht für die Konstruktion der *Projektiven Geometrie*, die einen zum Teil quantitativen Begriff der Geraden voraussetzt. Folglich hätten sie auch keine *Affine Geometrie*.

[64] Sie lassen sich ineinander deformieren, aber nicht in einen Coffee Mug, da der Henkel nur mit einem Riß herausgeknetet werden könnte. Eine Sphäre mit einem Loch, ist keine Sphäre mehr, denn sie läßt sich zu einer Ebene ausstrecken - ebenso eine Sphäre mit zwei Löchern zu einem Zylinder

Anders als der geometrische Raum entspringt der visuelle, auditive, oder sonst wie durch Sinne wahrgenommene Raum einem über ein Kantisches Schema gewonnenen Vermögen, die Welt topologisch zu strukturieren; andernfalls hätte die Evolution die Unfähigkeit längst sanktioniert.

Der Ansatz Kants war richtig. Er hat sich aber zu weit vorgewagt: die Unmöglichkeit nichteuklidischer Geometrien ist aus der Sicht der heutigen Mathematik nicht vertretbar. Wir würden uns nicht so ausführlich mit Kant befassen, wenn wir nicht überzeugt wären, daß sich mit wenigen eher marginalen Korrekturen die Grundfesten der Transzendentalphilosophie festigen lassen, wie sich im Verlauf unserer Arbeit noch zeigen wird. Wir ziehen vorläufig folgende Zwischenbilanz.

Fazit

i) Wie von Leibniz erkannt, ist der geometrische Raum kein Behälter, sondern das amorphe Medium, das die Relationen zwischen den Dingen trägt; Die Geometrien sind mentale Konstruktionen des dynamischen relationalen Netzes;
ii) Die euklidische Geometrie, in der wir uns wohl fühlen, ist nicht die einzig mögliche, sonst könnten wir uns keine konsistenten anderen Geometrien vorstellen;
iii) Das Uniformisierungstheorem beweist die nicht Apriorität der euklidischen Raumform. Der Raum ist ganz im Sinne des Platonismus ein Korsett; wir können dem Raum keine beliebigen Gesetze vorschreiben;
iv) Der Verstand vermag, über Schemata den Raum <u>topologisch</u> zu strukturieren, d.h. ihn mit einer apriorischen prägeometrischen Anschauungsform auszustatten;
v) Wir sind heute frei, aus rational akzeptablen Axiomen Geometrien zu erfinden, solange sie in sich widerspruchsfrei sind und mit keinen bewahrheiteten Theorien kollidieren;
vi) Die Konstruktion seiner apriorischen Raumform nötigte Kant, die Anschauung auf das durch die fünf Sinne Wahrnehmbare einzuengen. Die mentalen Bilder hochabstrakter Entitäten komplementieren die Begriffe; sie stellen eine nichtsinnliche Anschauung dar.

3. Zeit und Bewegung

Die Zeit ist etwas an der Bewegung. Nicht die landläufige Zeit der Uhren ist a priori sondern die Chronologie. Kant unterscheidet sinnvoll zwischen Ordnung und Ablauf der Zeit. Wir spannen einen Bogen vom Davor und Danach des Aristoteles über Augustinus' Triade Vergangenheit-Gegenwart-Zukunft bis zum Bewegungsmodell von Bergson, das Hadamard auf das Erfinden in der Mathematik anwenden wird.

Während die Geometrie offenbar auf der räumlichen Anschauungsform aufbaut, ist die Zeit keine mathematische Entität[1]. Doch ist die Zeitvariable stets latent mitbeteiligt. Eine mathematische Formel liefert die Verläufe abhängiger Variablen, auf die unabhängige Variablen kausal einwirken. Letztere sind aber implizit zeitbestimmt, sonst hießen sie nicht „Variablen". Brouwer geht weiter, wenn er seiner Mathematik die Ur-Intuition der Zeit zugrundelegt, vgl. S. 87. Auch für Kant sind die Schemata „nichts als Zeitbestimmungen", vgl. S. 137.

Das Wort Zeit unterscheidet leider nicht zwischen der qualitativen Zeitform, die der Mensch auf die Bewegungen der Welt projiziert und die wir im weiteren *Chronologie* nennen, und der quantifizierten Zeit, die von einer Uhr abgelesen wird. Dieser gleichmäßigen Zeit liegt zwar die Chronologie auch zugrunde, aber sie benützt außerdem ein empirisch konstruiertes Maß. Dieselbe Problematik tritt auf wie bei der Raumform: durch empirisches Messen wird die Anschauungsform a posteriori. A priori ist allein die Chronologie, die anders als der physikalische Zeitbegriff, oder die von Gott geschaffene Newtonsche absolute Zeit, von jeder Quantifizierung absieht.

Die Zeit ist etwas an der Bewegung. Mit Bewegung meinen wir, wenn nicht anders spezifiziert, die griechische *κίνησις*, nämlich nicht nur eine Ortsverlagerung, sondern überhaupt eine Veränderung bei bleibendem Objekt. Ein Wechsel der Farbe ist z.B. auch eine Kínēsis. Anders als die räumlichen Bewegungen, die der Mensch sinnlich wahrnimmt, wird die Zeit als interpretative Anschauungsform vom Verstand induziert.

[1]Sie schleicht sich aber durch die Hintertür ein, wenn die Zeitachse mit $\mathbb{R}$ identifiziert wird.

3.1. Der Zeitpfeil

Während die altgriechische Geometrie ihre Kongruenzen weitgehend[2] statisch ermittelte, sind seit der Einführung der Differentialrechnung Raum und Chronologie zusammenzudenken. Mit Felix Kleins Erlanger Programm und seinen Bewegungsgruppen dient die Geometrie mehr denn je dem Durchschauen einer Kinematik.

Kant übernimmt die chronologische Zeitdefinition des Aristoteles, d.h. ein Davor und Danach, dem sowohl die quantitative Zeit der Physik wie auch die „elastische" subjektive Zeit gehorchen. Die Zeit ist die Anschauungsform des „inneren Sinnes", daher ist Kants Vorgehensweise legitim, wie Aristoteles die Chronologie durch den performativen Akt des Zählens zu objektivieren[3].

Grundsätzlich zieht Kant die Denknotwendigkeit der mathematischen Axiome heran, um die Apriorität der Zeitform zu behaupten. Daß mathematische Aussagen a priori seien, ist heute höchst strittig. Wir gehen daher einen anderen Weg und überprüfen, daß die Apriorität der Chronologie auf keine Widersprüche stößt.

Die Zeit ähnelt intuitiv einem aus der Vergangenheit in die Zukunft gerichteten Pfeil; wir können uns nicht vorstellen, daß dieses Zeitempfinden je anders war oder werden könnte. Damit sind die beiden Bedingungen (Notwendigkeit und Atemporalität) einer apriorischen Anschauungsform bereits erfüllt. Dieser intramentale Zeitpfeil wird durch zahlreiche Zeitpfeile der Welt draußen bestätigt:

i) Der kausale Zeitpfeil gebietet die notwendige Anteriorität der Ursachen.
ii) Der thermodynamische Zeitpfeil läßt die Unordnung steigen.
iii) Der elektromagnetische Zeitpfeil des Lichtes führt die Geschichte des Kosmos vor.
iv) Der biologische Zeitpfeil läßt Menschen und Pflanzen altern und sterben.
v) Der historische Zeitpfeil ordnet die Residuen vergangener Ereignisse.
vi) Der kosmologische Zeitpfeil entsteht aus der Expansion des Weltalls.

Der Zeitpfeil stellt bei der subjektiven Zeit eine Evidenz dar. Es ist aber eine grundsätzliche ungelöste Frage der Physik, wie aus der zeitindifferenten mikroskopischen Dynamik ein makroskopischer irreversibler Zeitpfeil entsteht. Die amtliche Definition der

[2] Den Satz des Pythagoras beweist Euklid zweimal statisch und mühsam (Euklid: Elemente, Buch I, § 47 und Buch VI, § 31). Der dynamische Beweis auf S. 62 bewegt hingegen vier Kopien des rechtwinkligen Dreiecks, womit der Satz sofort einleuchtet.

[3] Vgl. [Tetens, 2006], S. 63: „Kant ist nämlich der Auffassung, daß Aussagen wie $7 + 5 = 12$ letztlich durch Zählen bzw. Abzählen zu verifizieren sind [...] [I]n der *transzendentalen Erörterung* des Zeitbegriffes [übernehmen] die arithmetischen Sätze eine analoge Rolle zu jener der geometrischen Sätze in der *transzendentalen Erörterung* des Raumbegriffes."

meßbaren Zeit baut auf einem *empirischen* Postulat auf: der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (siehe Anhang C). Die mathematische Dynamik bedarf keiner meßbaren Zeit. Zum Nachweis holen wir zuerst Kants erhellende Unterscheidung zwischen Ordnung und Ablauf der Zeit herbei, die wir dann für die Einbindung der Chronologie in die Geometrie verwenden.

3.2. Ordnung und Ablauf der Zeit

Kausalitätsprinzip und Anschauungsform der Zeit sollen sauber auseinandergehalten werden. Eine zeitliche Folge von Wahrnehmungen induziert nicht notwendig eine Kausalität. Kant macht dies an einem Beispiel klar[4]. Wer sich ein mentales Bild eines Hauses machen möchte, wendet Zeit auf, um in beliebiger Reihenfolge das Dach, die Geschosse, die Fenster, usw. anzuschauen. Wenn er stattdessen ein stromabwärts fahrendes Schiff anschaut, schreibt ihm die kausale Verkettung der Wahrnehmungen eine Bildersequenz vor. Auch können Ursache und Wirkung zeitgleich erfolgen: eine Bleikugel verursacht instantan eine Mulde in einem Kissen. Wird die Kugel entfernt, führt Kant weiter aus, verrät die Mulde im Kissen späteren Betrachtern nicht mehr, daß sie von einer Bleikugel hinterlassen wurde[5]. Daher unterscheidet Kant sinnreich zwischen der „Ordnung der Zeit“ und dem „Ablauf der Zeit“. Der Verstand schließt auf die kausale Verlinkung, auch wenn keine Zeit verstreicht, während die innere Uhr den Zeitfluß wahrnimmt:

> Hier muß man wohl bemerken, daß es auf die *Ordnung der Zeit*, und nicht auf den *Ablauf derselben* angesehen sei; das Verhältnis bleibt, wenn gleich keine Zeit verlaufen ist. Die Zeit zwischen der Kausalität der Ursache, und deren unmittelbaren Wirkung, kann verschwindend (sie also zugleich) sein, aber das Verhältnis der einen zur andern bleibt doch immer, der Zeit nach, bestimmbar[6].

Kant leitet „die subjektive Folge der Apprehension von der objektiven Folge“ ab; das Subjekt erhält keine ordnende Information vom statischen Haus, während die Kinematik des Schiffes die Reihenfolge der mentalen Bilder bestimmt. Ob das Subjekt das Haus oder das Schiff anschaut, läuft in beiden Fällen Zeit ab. Das mentale Bild des Hauses ähnelt einem Puzzle, dessen Teile nach einer räumlichen aber nicht zeitlichen Regel

[4] Vgl. [Kant, 1787], S. 188 ff.

[5] Wenn keine Zeit abläuft, hängt in der Relativitätstheorie die Simultaneität erst dann vom Betrachter ab, wenn zwischen den Ereignissen keine kausale Beziehung besteht. Die Mulde entsteht für keinen Beobachter vor dem Einschlag der Bleikugel. Die Chronologie, wie wir meinen, ordnet kausalverkettete Ereignisse. Ob die Bleikugel das Kissen genau dann eindrückte, als das Licht im Zimmer aufging, wirft das Problem des Erkennens der Simultaneität auf. Siehe Poincarés Kommentar im Anhang C.

[6] Vgl. [Kant, 1787], S. 300. Hervorhebung CF.

aneinander gelegt werden. Es entsteht auf dieselbe Weise ein statisches mentales Bild des Schiffes, wenn der Blick auf den Bug, das Heck, die Schiffsladung, usw. fokussiert. Die Dynamik des Schiffes erzeugt zusätzlich eine Sukzession im mentalen Bild der Fahrt, da sich der Bildauszug des Schiffes dem Hintergrund entlang chronologisch bewegt. Wie Kant zu Recht betont, kommt es primär darauf an, daß die Chronologie anhand des Kausalprinzips die Erscheinungen ordnet[7]. Wir möchten zeigen, daß die Mathematik zur Erklärung der Bewegung nur die „Ordnung der Zeit“ (= Chronologie) benützt; der „Ablauf der Zeit“ (= Dauer) ist Sache der Physik.

3.3. Die Chronologie der Geometrie

Eine beliebige chronologische Folge von Photoaufnahmen macht bereits die Bewegung des Schiffes deutlich. Möchte jemand den Zeitplan der Fahrt ermitteln, so braucht er eine Uhr, um Informationen über den Geschwindigkeitsverlauf zu berechnen. Der Mathematiker möchte nur die Bewegung beschreiben; daher genügt ihm die Chronologie.

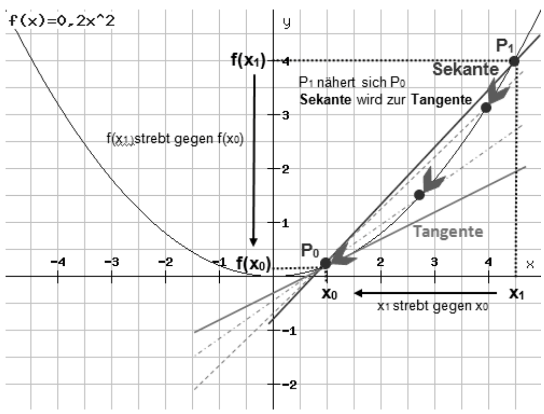

Abbildung 3.1.: Tangente (Leibniz)

Betrachten wir zur Illustration das Differenzieren, das zur Konstruktion der Tangente führt. Eine Sekante wird um P_0 gedreht, bis sie zur Tangente wird. Eine beliebiger Punkt P_1 wird gewählt und die Sekante P_0P_1 gezogen. Zwischen x_0 und x_1 wird ein x_2 gewählt, dann x_3 zwischen x_0 und x_2, usw. Die Rotation entsteht dadurch, daß die Distanz $d(x_0, x_i)$ immer kleiner wird. Es kommt weder auf die Wahl der x_i an, noch auf die Rotationsgeschwindigkeit der Sekante, sondern nur auf das Schrumpfen des Intervalls $[x_0, x_i]$.

Unser Diagramm orientiert sich an der Leibnizschen zeitindifferenten Infinitesimalrechnung. Newtons Konstruktion der Tangente betrachtet hingegen die Bewegung eines

[7]Eine Kamera würde auf einen Schlag die gesamte unsortierte Information der Aufnahmen einsammeln, d.h. lediglich die geordnete „objektive Folge“. Der Verstand läßt das menschliche Auge auf die einzelnen Bildteile zur Konstituierung der mentalen Bilder akkomodieren. Es bedarf noch des Kausalprinzips als Grundsatzes des Verstandes, um von der Verknüpfung von Ursache und Wirkung die Anschauungsform der Zeit abzuleiten. „Alle Veränderungen geschehen nach dem Gesetze der Verknüpfung der Ursache und Wirkung. “ [Kant, 1787], S. 283, AA III, 166 .

Punktes in der meßbaren Zeit (Fluxion), wenn das *Zeitintervall* kürzer wird. In den *Principia* begründet er seine absolute Zeit (und seinen absoluten Raum) mit dem Willen des Weltenschöpfers: „[...] er [Gott] währt stets fort und ist überall gegenwärtig, er existiert stets und überall, *er macht den Raum und die Dauer aus*[8].“ Die Leibnizsche Konstruktion, der das räumlich geordnete Nacheinander ohne Zeitmessung genügt, steht im natürlichen Einklang mit dem Kausalitätsgesetz. Nach Ockhams Prinzip der Parsimonie bedarf es zur Konstruktion der Tangente keiner quantitativen Newtonschen Zeit. Weitere Gründe für diese Präferenz liegen darin, daß die Differentialgeometrie auf dem Leibnizschen Differential aufbaut und daß sich die moderne Nichtstandardanalysis (Abraham Robinson, um 1960) ebenfalls grundsätzlich an Leibniz' Ideen orientiert.

Die phänomenale Präzision der Zeitmessung täuscht leicht über die Empirie der Postulate hinweg. Um unseren Rahmen nicht zu sprengen, behandeln wir im Anhang C bedeutende Fragen: Ist Zeit reversibel? Ist Zeit real? Ist Simultanität feststellbar? Gibt es eine absolute Zeit? Der Sinn von Anhang C liegt darin, gegen die irrige Vorstellung anzukämpfen, daß die Wissenschaft die Zeit derart im Griff habe, daß die Zeittheorien der alten Philosophen nur noch einen historischen Wert hätten. Dem ist nicht so.

3.3.1. Zeit und Bewegung in der Geometrie

Wie der Mediziner eine starre Leiche seziert, um über das bewegte Leben etwas zu erfahren, sucht der Mathematiker nach dynamischen Relationen. Zur Darstellung der Kinematik in der Geometrie wird kein Zeitablauf sondern nur die Chronologie benötigt.

Die Geschwindigkeit als Quotient der Raumgröße durch die Zeit mag prima facie den Eindruck erwecken, eine primäre Eigenschaft der Bewegung zu sein. Folgendes Beispiel zeigt, daß es nicht der Fall ist. Eine Überwachungskamera nimmt die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit auf. Wer sich für die gefilmten Vorfälle interessiert, läßt das Videoband nach Gutdünken schneller oder langsamer ablaufen. Das darf er, weil er am Zeitfluß manipuliert aber die Chronologie nicht antastet. Es sind unendlich viele auf dieselbe Bewegung bezogene Geschwindigkeitsverläufe möglich, die in der Kameraaufnahme bei konstanter Geschwindigkeit vereinigt sind.

Zum Ausbügeln der sekundären Eigenschaft Geschwindigkeit beschreibt die Differentialgeometrie bei der einheitlichen Umparametrisierung nach Bogenlänge eine Bewegung

[8] Vg. [Newton, 1686], S. 509. Hervorhebung CF.

über eine implizite ungleichmäßige Zeit. Zur Illustration genügt es, die Bewegung eines beliebigen Punktes zu betrachten.

Jeder bewegte Punkt durchläuft einen Abschnitt einer Raumkurve. Zur Ermittlung der Punktposition auf dem Kurvenbogen kann man entweder die Zeit seit Beginn der Bewegung und den Geschwindigkeitenverlauf zugrundelegen, oder die Bogenlänge, die der Punkt zurückgelegt hat, ohne sich um Zeit und Geschwindigkeit zu kümmern. Wir zeigen in der Fußnote[9], daß beide Möglichkeiten mathematisch äquivalent sind. Alle Kurven lassen sich so parametrisieren, daß sie mit Einheitsgeschwindigkeit durchlaufen werden; diese verwendet eine elastische Zeit, die in den Berechnungen nicht explizit aufscheint und das visuelle Bild der Kurve nicht verändert. Kurven mit ungleichen Geschwindigkeitsverläufen beschreiben ein und dieselbe Bewegung. Um den semantischen Mißbrauch zu vermeiden, von „derselben“ Bewegung zu sprechen, kann man die Bewegungen einer Äquivalenzklasse zuordnen, wobei die Bewegung mit Einheitsgeschwindigkeit als kanonischer Repräsentant gewählt wird.

Fazit

Die eindeutige Parametrisierung nach Bogenlänge bei Einheitsgeschwindigkeit aller Bewegungen eines Raumpunktes beweist zugleich die Apriorität der Chronologie, die „in strenger Allgemeinheit“ notwendig gedacht wird. Wird sie mit einem Maß ausgestattet, entsteht ein empirischer Zeitbegriff: die nicht intersubjektive Zeit des inneren Sinnes oder die physikalische Zeit.

Nicht nur die Geometrie arbeitet mit der Chronologie, sondern auch die Philosophie und die Psychologie. Da uns im Kapitel 9 das Aufschlüsseln mathematischer dynamischer Strukturen beschäftigen wird, wenden wir ein Blatt und zeigen schon jetzt, wie das Bergsonsche Modell[10] in der Nachfolge von Aristoteles und Augustinus entstand.

[9] Wir orientieren uns am Beweis von [Kühnel, 1999], S. 6. Eine (reguläre) Kurve c, entlang der sich ein Punkt mit einer variablen nie verschwindenden Geschwindigkeit bewegt, ist eine Abbildung von einem Intervall $[a,b]$ der Zeitachse in einen n-dimensionalen Raum (insbesondere $\mathbb{R}^3$): $c : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Die Geschwindigkeit ist im Punkt $t \in [a,b]$ die (variable) Länge $||\dot{c}||$ des Tangentenvektors $\dot{c} = \frac{dc}{dt}$. Dann ist die zurückgelegte Kurvenlänge: $l = \int_a^b ||\frac{dc}{dt}||\,\mathrm{d}t$. Sei: $L : [a,b] \to [0,l]$ eine Umparametrisierung von dem Zeitintervall auf die Bogenlänge. Man führe einen Bogenlängenparameter $s(t) := L(t) = \int_a^t ||\frac{dc}{dt}(\tau)||\,\mathrm{d}\tau$ ein. Dann gilt: $\frac{ds}{dt} = \frac{dL}{dt} = ||\frac{dc}{dt}|| = ||\dot{c}||$ (*). Wegen $||\dot{c}|| \neq 0$ existiert eine Umkehrfunktion $\varphi := L^{-1}$, so daß $c \circ \varphi = c \circ L^{-1}$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Sei $c' = \frac{dc}{ds}$ der Tangentenvektor der nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve, dann folgt aus (*) mit der Kettenregel: $\dot{c} = \frac{dc}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{dc}{ds} = \frac{ds}{dt}c' = ||\dot{c}||c'$. Aber $\frac{\dot{c}}{||\dot{c}||}$ hat Länge 1, daher auch der Geschwindigkeitsvektor c' der Bogenlängenparametrisierung. Es läßt sich also, wie behauptet, jede reguläre Kurve nach Bogenlänge mit konstanter Einheitsgeschwindigkeit umparametrisieren.

[10] Etwa zeitgleich zeichnet Husserl ein mit dem Bergsonschen übereinstimmendes Zeitmodell, an dem sich etwas später Heidegger weitgehend orientieren wird. Wir wählen das Modell Bergsons, dessen einprägsame Skizzierung auf Hadamards Anwendung auf das mathematische Erfinden gut paßt.

3.4. Wie der Mensch die Zeit konstruiert

Newtons Glaube an eine absolute Zeit war aus heutiger Sicht eine Fehleinschätzung; Kant behält aber Recht, wenn er schreibt: „Die Zeit ist also lediglich eine subjektive Bedingung unserer (menschlichen) Anschauung [. . .], und an sich, außer dem Subjekte, nichts[11].“ Bei der transzendentalen Auffassung der Raumanschauung handelte sich Kant einen Widerspruch mit seinem anderweitigem Bekenntnis zum euklidischen metrischen Raum ein. Anders bei der Zeitanschauung, die als anthropische Form allein begründen kann, warum ein Gegenstand trotz der Bewegung derselbe Gegenstand bleibt. Die Zeitanschauung ist eine chronologische Anschauung, deren apriorischer Charakter auch bei Kant von jeglicher empirischer Meßung absieht:

> [. . .] Hier füge ich noch hinzu, daß der Begriff der Veränderung und, mit ihm, der Begriff der Bewegung (als Veränderung des Orts) nur durch und in der Zeitvorstellung möglich ist: daß, wenn diese Vorstellung nicht Anschauung (innere) a priori wäre, kein Begriff, welcher es auch sei, die Möglichkeit einer Veränderung, d. i. einer Verbindung kontradiktorisch entgegengesetzter Prädikate (z.B. das Sein an einem Orte und das Nichtsein eben desselben Dinges an demselben Orte) in einem und demselben Objekte begreiflich machen könnte. Nur in der Zeit können beide kontradiktorisch-entgegengesetzte Bestimmungen in einem Dinge, nämlich nacheinander, anzutreffen sein. Also erklärt unser Zeitbegriff die Möglichkeit so vieler synthetischer Erkenntnis a priori, als die allgemeine Bewegungslehre, die nicht wenig fruchtbar ist, darlegt[12].

Wegen der drei vor- und rückwärts begehbaren Dimensionen mutet der Raum komplexer an als der minimal strukturierte Zeitpfeil. Dennoch nehmen wir den Standardraum sinnlich wahr, während Zeit eine reflektierte *Empfindung* ist. Wir spannen einen Bogen von Aristoteles, über Augustinus bis zum Bergsonschen Bewegungsmodell.

3.4.1. Aristoteles

Aristoteles war im Sinne einer chronologischen Zeit klar: „Allein auch die Zeit erkennen wir, wenn wir bestimmen die Bewegung dadurch, daß wir das Vor und Nach bestimmen[13].“ Doch bezeichnet er die Zeit als „Maß der Bewegung“:

> Da nun die Zeit Maß der Bewegung ist und des Bewegens, diese aber dergestalt die Bewegung mißt, daß sie bestimmt eine Bewegung, welche dienen soll, die ganze auszumessen; gleichwie auch die Länge die Elle mißt, indem sie bestimmt ist als eine Größe, wonach ausgemessen werden soll die ganze: so ist auch für die Bewegung das Sein in der Zeit, das gemessen wird durch die Zeit sie selbst und ihr Sein[14].

[11] Vgl. [Kant, 1787], S. 91. Für eine reale Zeit, die auch ohne den zeitzählenden Menschen existierte, argumentiert jedoch Lee Smolin aus wissenschaftlicher Sicht; siehe Anhang C.
[12] Vgl. [Kant, 1787], § 5 Transzendentale Erörterung des Begriffs der Zeit, S. 87-88.
[13] Vgl. [Aristoteles, Physik], *Physik*, Buch 4, Kapitel 11.
[14] Vgl. ebd. Kapitel 12, 221 a.

Prima facie wäre also für Aristoteles die Zeit nicht nur qualitativ sondern auch quantitativ etwas an der Bewegung. Diese Interpretation steht u.E. nicht im Einklang mit seinem Verständnis des „Zählens“. Wie später Kant zieht Aristoteles eine (berechtigte) Parallele zwischen Zählen und Zeit: i) Zeit und Bewegung bilden einen unentwirrbaren Nexus. ii) Da unser Verstand zählen kann, werden durch Zählen die Etappen einer Bewegung markiert. iii) Wo kein Zeit zählendes Wesen ist, gibt es auch keine Zeit.

Dazu ein Exzerpt aus Physik, Buch IV:

> Denn wenn es kein Zählendes geben kann (weil es keine Seele gibt), kann es auch kein Gezähltes geben und folglich offenkundig auch keine Zahl; denn unter Zahl ist hier das Gezählte oder Zählbare zu verstehen. Wenn aber die Seele bzw. der Verstand das einzige ist, was die Fähigkeit zu zählen besitzt, kann es ohne Seele unmöglich Zeit geben, außer im Sinne einer Zeit an sich, wie wenn wir annehmen, daß es Bewegung ohne Seele gibt; in der Bewegung nämlich gibt es das Nacheinander (d. h. frühere und spätere Punkte oder Bewegungsstrecken), Zeit aber ist dies nur, insofern es zählbar ist[15].

Der Terminus „zählbar“ ist verwirrend. Zählen kann man langsam oder schnell. Erst muß man zählen gelernt haben, während Zeit jedem etwas bedeutet. Gezählt wird eine diskrete Menge; aus welchen Elementen besteht die Zeitmenge? „Zählen“ steht auch nicht etwa für „messen“, denn für das Zeitempfinden kann kein intersubjektives Maß vereinbart werden, der die Rolle des starren Körpers (Elle im Zitat) bei der Raummessung übernehmen könnte. Der Schlüssel dürfte darin liegen, daß Aristoteles die Zeit als „Zahl der Bewegung hinsichtlich des ‚davor‘ und ‚danach‘[16]“ definiert.

Nach unserem Verständnis konstruiert Aristoteles eine Analogie zwischen einer Sukzession von Jetzt-Zeitpunkten und einer Sukzession von Zahlen, wovon jede einen Vorgänger und einen Nachfolger hat. Beim Auffädeln der Jetzt-Momente wird kein Wissen um Zahlwörter vorausgesetzt. Es geht Aristoteles nicht um das arithmetische Zählen, sondern um dessen Vorstufe: jeder Mensch besitzt das Vermögen, das Früher und Später zu erkennen, wie auch jeder, der nicht zählen kann, das Viel und Wenig auch einschätzt[17].

Wo kein Zählender existiert, gibt es eo ipso keine Zeit. Erst die Projektion auf die Außenwelt der Einteilung in Anteriorität und Posteriorität erzeugt die Zeit, womit die

[15] Vgl. [Aristoteles, Physik], *Physik*, Buch IV, 223a 22-29.

[16] Vgl. ebd. 219b2.

[17] Selbst ein Tier ermißt, ob die Prädatoren in der „Überzahl“ sind; dieses approximative Zählen beherrscht auch jeder unkultivierte Mensch. Bei einem Experiment (vgl. [Butterworth, 2008]) hatten des Zählens unkundige Probanden nach Anhören von Stockschlägen Zählmarken auszulegen. Es waren 45 Kinder im Alter von vier bis sieben Jahren aus zwei Aborigines-Gemeinschaften, deren beide Sprachen jeweils nur über die Wörter für *eins*, *zwei*, *wenige* und *viele* verfügten; denen gegenüber stand eine vergleichbare englischsprachige Gruppe von Ureinwohnern. Die Ungebildeten schnitten genauso gut ab wie die Kontrollgruppe.

Parallele zwischen Zeit und Zählen naheliegend wird. Diese Zeit ist relational, denn verstandesbegabte Wesen arbeiten sie auch nachträglich ein, wenn eine Bewegung Spuren hinterlassen hat. Die Kosmologie, die Paläontologie, die Geologie, usw. liefern offenkundige Beweise, daß es vor dem Menschen eine dinghafte bewegte Welt gab, für die wir retrospektiv anhand der Kausalität eine Chronologie konstruieren.

Bei Aristoteles wird alles Seiende durch etwas anderes bewegt, und die Zeit ist eine Bestimmung an der Bewegung. Da unsere Arbeit auf die Zeit fokussiert, gehen wir auf die metaphysischen Implikationen nicht ein. Es ist jeder metaphysische Background wegzulassen, wenn über die anthropische Form des Zeitempfindens nachgedacht wird, sonst stößt man auf die erste Kantische Antinomie: „Aller Anfang ist in der Zeit, und alle Grenze des Ausgedehnten im Raume. *Raum und Zeit aber sind nur in der Sinnenwelt*[18]."

3.4.2. Augustinus

Auf die Frage, die manchem heute noch auf den Lippen brennt: „Was tat Gott, bevor er Himmel und Erde schuf?" erwägt Augustinus zuerst eine ironische Antwort: „Er bereitete denen, die sich vermessen, jene hohen Geheimnisse zu ergründen, Höllenschlünde[19]." Dann meint er ernsthaft: „Wenn es also vor Himmel und Erde keine Zeit gab, wie kann man dann fragen, was Du damals machtest? Denn es war kein Damals, wo noch keine Zeit war[20]." Soweit stimmt Augustinus mit Aristoteles überein: ohne Seele keine Zeit.

Während sich Aristoteles angeregt durch die zyklische Bewegung des Fixsternhimmels die Zeit auch als geschlossene Kreislinie vorstellen konnte, verlangt die christliche Tradition des Jüngsten Gerichts eine eschatologische geradelinige Zeit. Die abendländische Philosophie konnte sich mit dem asiatischen Uroboros selten anfreunden, obwohl die Chronologie eine zyklische Zeit zuließe[21]. Wenn Heraklit meint: „Man kann nicht zweimal in denselben Fluß steigen[22]", beschreibt der Fluß keinen geschlossenen Pfad. Aus der

[18]Vgl. [Kant, 1787], S. 615. Hervorhebung CF.

[19]Vgl. Bekenntnisse, [Augustinus, ca. 400], Buch XI, 12.

[20]Vgl. ebd.

[21]Eine bedeutende Ausnahme stellt allerdings Hegel dar. Vgl. [Hegel, 1837], Kapitel 1, Abs. III: „Die Veränderungen in der Natur, so unendlich mannigfach sie sind, zeigen nur einen Kreislauf, der sich immer wiederholt; in der Natur geschieht nichts Neues unter der Sonne, und insofern führt das vielförmige Spiel ihrer Gestaltungen eine Langeweile mit sich."

[22]Vgl. [Heraklit], Fragment 91 DK.

Sicht der Physik gibt es keine Anhaltspunkte für eine zyklische Zeit: seit dem Urknall hat nur eine einzige globale Bewegung des Weltalls stattgefunden[23].

Augustinus leitet eine gewichtige Wende ein, als er die Zeit mit einer mentalen Folge chronologischer Bilder identifiziert. Unsere Imagination intendiert nicht nur in die Zukunft. Sie entnimmt Vergangenes aus dem Gedächtnis und modelliert es unentwegt neu: Erinnerungen haben somit einen Zeitindex. Die Verschmelzung der drei Zeiten konstituiert eine chronologische Zeitanschauung, die wie bei Aristoteles - allerdings in einem anderen Zusammenhang - auf das Jetzt fokussiert:

> Das ist nun wohl klar und einleuchtend, daß weder das Zukünftige noch das Vergangene ist [...], genau würde man vielleicht sagen müssen: Es gibt drei Zeiten, eine Gegenwart in Hinsicht auf die Gegenwart, eine Gegenwart in Hinsicht auf die Vergangenheit und eine Gegenwart in Hinsicht auf die Zukunft. In unserem Geiste sind sie wohl in dieser Dreizahl vorhanden, anderswo aber nehme ich sie nicht wahr[24].

Dem Zitat nach macht Augustinus Schnitte durch die Zeit. Wie reihen sich die subjektiven Zeitatome aneinander? Eine von den Phänomenologen (Hegel, Heidegger, Ricœur, Bergson) oft gewählte Ordnungskraft ist die zielorientierte Handlung. Wir werden als Paradigma die Zeittheorie von Bergson darstellen, die wir für eine Vertiefung des augustinischen Gedanken halten. Zur Begründung der Filiation möchten wir im Vorlauf das zweidimensionale Diagramm[25] von Abb. 3.2 zeichnen, das wir als Visualisierung des augustinischen Modells ausgedacht haben.

Das Zeitempfinden ist ein dynamischer, kausal geprägter Prozeß. Im Bewußtsein lösen sich Bilder ab, die wie auf einem Bildschirm laufend aufdatiert werden. Entweder tauchen Abbilder der Welt unwillentlich auf, wenn etwa das vorausfahrende Auto plötzlich scharf bremst, oder wir imaginieren Bilder. Die alten Griechen unterschieden adäquat zwischen dem *εικών* und dem *φάντασμα*; beide gehören der mentalen Welt an. Das Eikon hat sein Urbild in der Außenwelt, die eine externe Kausalität vorschreibt, während der Geist das Phantasma auf die Welt projiziert. Das blitzschnelle Umschalten zwischen Eikon und Phantasma ist in der gefahrvollen Welt eine Überlebensbedingung. Die Zeit ist eine immer wieder neu aktualisierte Empfindung, die im Bewußtsein durch ein mentales Bild abgelöst wird: erinnerte vergangene Schmerzen sind z.B. keine Empfindung sondern ein bereits verarbeitetes Abbild, sonst hätte ich noch Schmerzen.

[23] Vgl. Anhang C. Selbst Poincarés Wiederkehrsatz kündigt keine exakte Wiederkehr an, sondern über Äonen verteilte Beinahewiederholungen jeder Konfiguration.

[24] Vgl. [Augustinus, ca. 400], Buch XI, 20.

[25] Die Inspiration fanden wir im Vektorbündel der Geometrie.

Um eine Dynamik des Zeitschnittes durch das Bewußtsein zu erzeugen, stellen wir in Abb. 3.2 das augustinische Modell zweidimensional dar. Jede vertikale Faser zeigt den Schnitt, in dem das Bewußtsein S_t Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft vergegenwärtigt. Im nächsten Augenblick löst $S_{t+\Delta t}$ den Bewußtseinszustand S_t ab, welches zu einem memorierten Bild wird. Die horizontale Linie ist der Weltlinie der Relativitätstheorie nachempfunden, d.h. prosaischer formuliert: sie stellt die reale chronologische Bewegung des Subjekts dar.

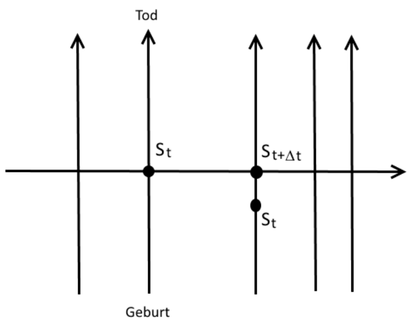

Abbildung 3.2.: Zeit als Faserung

Das Modell kombiniert zwei Dynamiken: in der realen Welt bewegt sich das Subjekt der Weltlinie entlang; in jedem Punkt ist die vertikale augustinische Zeitachse der mentalen Welt in der wandernden Gegenwart zentriert. Das Wandern über die vertikalen Linien, die in jedem Augenblick Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft darstellen, bringt die Zeitdynamik zum Ausdruck. Anstelle solcher Linien setzt Bergson in [Bergson, 1896] wandernde in der Gegenwart zentrierte Kegel, um den Selektionsprozeß der mentalen Bilder zu untersuchen.

3.5. Bergsons Bewegungsmodell

Um den Dualismus Körper vs. Geist aufzuheben, muß sich der ausgedehnte Raum mit dem punktuellen Augenblick verschmelzen. Die Elastizität des subjektiven Zeitempfindens erlaubt eine Streckung des Augenblicks, so daß eine gemeinsame Kontaktfläche entsteht. Die Gegenwart wird verdickt, und die Zeit zwischen Ereignisanfang und -ende bleibt kurzweilig stehen:

> Je mehr man darüber nachdenkt, desto weniger wird man verstehen, daß die Erinnerung je entstehen könne, würde sie nicht im Verlauf der Wahrnehmung Zug um Zug konstruiert. Entweder hinterläßt die Gegenwart keine Spur im Gedächtnis, oder aber sie spaltet sich beim Aufsprudeln in zwei symmetrischen Strahlen auf, wobei der eine in die Vergangenheit zurückfällt, während der andere in die Zukunft schnellt[26].

Auch wenn der aufgespaltene Gegenwartsstrahl Vergangenheit und Zukunft berieselt, ist die Verdickung der Gegenwart noch minimal. Das ändert sich durch die Auffassung

[26] Vgl. [Bergson, 1919], S. 73. Übersetzung CF. Wie wir auf S. 102 sehen werden, wird Brouwer mit seiner Intuition der Zwei-Einigkeit diese These eins zu eins auf die Mathematik übertragen.

Bergsons, nach der die Bewegung *unteilbar* sei: „Jede Bewegung als Überführung von einem Ruhezustand zu einem anderen Ruhezustand, ist ganz und gar unteilbar[27].“ Für Bergson ist das „mehr als nur eine Hypothese“ und es folgt die Begründung:

> Mein Sehsinn nimmt die Bewegung von A nach B als unteilbares Ganzes wahr, und wenn [mein Sehsinn] etwas teilt, dann die vermeintlich zurückgelegte Linie und nicht die Bewegung, die der Linie entlang fließt. Ohne Zweifel muß meine Hand von A nach B Zwischenstationen durchfahren; diese Punkte dazwischen sehen aus wie Etappen, beliebig viele, die den Weg beranden. Es gibt aber zwischen den markierten Einteilungsstrichen und echten Etappen einen gravierenden Unterschied: in einer Etappe bleibt man stehen, während hier das Bewegte vorbeischnellt[28].

Die Unteilbarkeit der Bewegung zeichnet die mentale Welt aus. Entsprechend der Metapher des Freudschen Wunderblocks (vgl. Anhang C) schreiben wir mentale Bilder auf Protokollzettel. Die Zettel zeigen - auch im Falle der Perzeption - auf eine subjektiv nachgebaute Welt. Der Philosoph Alain gibt folgendes Beispiel:

> Manche Leute haben, so behaupten sie, in ihrem Gedächtnis das Bild des Panthéon und können es, wie sie meinen, ohne Mühe aufrufen. Also bitte ich sie, die den Giebel tragenden Säulen zu zählen; nicht nur vermögen sie nicht zu zählen; sie können dies nicht einmal versuchen[29].

Aus den mentalen Bildern kann zwar nichts mehr als die beim Schreiben kodierte Information herausgeholt werden, dennoch sind sie keine degradierten Abbilder. Sie sind im Gegenteil ein Konzentrat der Bewegung. Das macht Bergson an den galoppierenden Pferden des Parthenon deutlich:

> Am Galopp eines Pferdes nimmt unser Auge in erster Linie eine charakteristische Pose wahr: eine wesentliche oder eher eine schematische Pose, eine Form, die die Dauer überstrahlt und die Zeit des Galopps ausfüllt: diese Pose hat der Bildhauer auf den Friesen des Parthenon festgehalten[30].

Bergson spricht von Bewegungsbildern - sie bilden in unserer Perzeption die Welt ab - und Gedächtnisbildern, die unser Verstand aus den ersteren mental durch Hinzunahme der memorierten Bilder aggregiert. Abb. 3.3 aus [Bergson, 1896] hat Bergson selbst gezeichnet. Ein flüchtiger Blick mag an den Lichtkegel im Minkowski-Raum erinnern. Es ist aber etwas völlig anderes gemeint. Wir fassen Bergsons Erläuterungen zusammen.

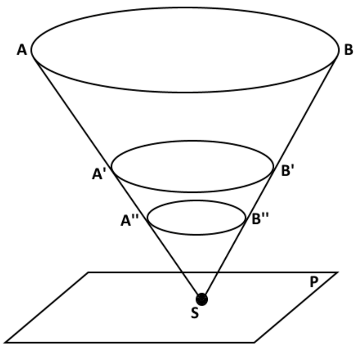

Abbildung 3.3.: Bergsons Trichter

[27] Vgl. [Bergson, 1896], S. 111. Übersetzung CF.
[28] Vgl. ebd. S. 112.
[29] Vgl. [Alain, 1920], S. 200-201. Übersetzung CF.
[30] Vgl. [Bergson, 1908], S. 359. Übersetzung CF.

P ist die Ebene der Bewegungsbilder. Im Punkt S von P befindet sich das Bild unseres Körpers, das mit allen Bewegungsbildern der Außenwelt P wechselwirkt. Stets motiviert uns das Handeln; daher nennt Bergson den Körper ein Handlungszentrum: „mein Körper, ein Gegenstand zum Bewegen von Gegenständen, ist also ein Handlungszentrum[31]". S stellt die Gegenwart dar. Verankert in S ist der Kegel, in dem alle mentalen Bilder gespeichert sind. Unser Verstand erkennt in diesen Bildern Zusammenhänge, aus denen er einen Leitfaden (idée générale) ableitet. Im Schnitt AB des Kegels SAB liegt der gesamte Vorrat an Bildern der Vergangenheit; der Schnitt AB bewegt sich nicht autonom, sondern er wird von der auf P wandernden Kegelspitze S mitgezogen. In den Schnitten $A'B'$, $A''B''$, etc. liegen keine jüngeren Erinnerungsbilder sondern durch die Imagination verarbeitete Bilder. Durch vertikale Filtrierung und Aggregation von Erinnerungs- und Imaginationsbildern, entspringt in der Gegenwart S ein Handlungswille; dieser unser Wille ist frei, daher nennt Bergson S auch Indeterminationszentrum. Der Geist pendelt zwischen der Ebene P der Handlung und dem Speicher AB der rohen Erinnerung; die nach S zielende Imagination reichert die Zwischenschnitte des Bewußtseins (plans de conscience) $A'B'$ oder $A''B''$ an, so daß schließlich in S gehandelt werden kann.

Für die Assoziationisten, gegen die sich Bergson richtet, unterschieden sich die Erinnerungsbilder von den Perzeptionsbildern einzig und allein durch eine geringere Intensität. Das Gedächtnis war der Speicher der Vergangenheit, aus dem nach Bedarf der Verstand Erinnerungen herausholt. Im Modell von Bergson verarbeitet das Subjekt seine Protokollzettel handlungsorientiert in der Gegenwart. Ganz im Sinne von Augustinus existiert nur die Vergegenwärtigung von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft: „Strolchen die Erinnerungen apathisch in einem inerten und amorphen Bewußtsein umher, so gibt es keinen Grund, daß die Perzeption lieber die eine als eine andere heranzieht[32]."

Fazit

Raum und Zeit bilden einen Nexus, der sich als Bewegung offenbart. Die Zeit läßt sich von der Bewegung nicht herunterschälen; sie ist etwas an der Bewegung. Die Anwendungswissenschaften müssen sich eine meßbare Zeit konstruieren, um mit der unabhängigen Variablen Zeit rechnen zu können. Die betörende Präzision der Zeitmessung hängt heute vom Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ab und verrät nichts über den ontologischen Status der Zeit. Die Zeit, über die wir Aussagen machen

[31] Vgl. [Bergson, 1896], S. 12. Übersetzung CF.
[32] Vgl. [Bergson, 1908], S. 98. Übersetzung CF.

können, ist „lediglich eine subjektive Bedingung unserer (menschlichen) Anschauung“. Die Kausalität im Weltgeschehen schlägt sich in einer selbstgeschaffenen Chronologie unserer mentalen Bilder nieder, einer apriorischen Anschauungsform.

Die Vorüberlegungen über Raum und Zeit und die daraus resultierende Beschreibung der Dynamik bilden die Bedingungen der Möglichkeit einer mathematischen Erkenntnis. Nunmehr gehen wir auf die Mathematik aus der Sicht der Philosophen über.

Teil II.

Mathematik aus philosophischer Sicht

4. Das Benacerrafsche Dilemma

Sind Semantik und Epistemik kompatibel? So lautet die zentrale Frage der Philosophie der Mathematik. Lebt der Mathematiker in einem Elfenbeinturm, wo ein manipulierter Wahrheitsbegriff herrscht? Ist der Computereinsatz im Sinne des Dilemmas epistemisch relevant? Wie pertinent ist Benacerrafs Kritik am Platonismus?

Daß Raum und Zeit apriorische Anschauungsformen sind, leitete Kant davon ab, daß die mathematischen Sätze a priori und synthetisch seien. Da diese These heute suspekt rezipiert wird[1], erreichten wir auf einem anderen Weg den Schluß auf Apriorität von Raum- und Zeitanschauung. Mathematische Sätze wenden die Logik an, um neues Wissen zu erwerben; daher ist das Prädikat synthetisch angebracht. Dabei tritt eine Problematik auf, die als Benacerrafsches Dilemma vielfach diskutiert wird.

Unsere Arbeit steht unter einem Leitspruch Poincarés: „Die Logik ist das Werkzeug des Beweisens, die Intuition dasjenige des Erfindens.“ Mit seinem Dilemma hinterfragt Benacerraf aus philosophischer Sicht die Dichotomie Logik vs. epistemische Intuition, wobei er eine Kritik am Platonismus übt. Er zweifelt, ob Semantik (logisches Beweisen) und Epistemik (intuitives Verstehen) kompatibel seien. In einem vielbeachteten Vortrag vertritt unter der Überschrift *Mathematical Truth*, [Benacerraf, 1973], Paul Benacerraf die These, daß sich in der Mathematik die Bedingungen für Wahrheit und Wissen gegenseitig ausschließen: 1) the concern for having a homogeneous semantical theory in which semantics for the propositions of mathematics parallel the semantics for the rest of the language and 2) the concern that the account of mathematical truth mesh with a reasonable epistemology[2].

4.1. Zwei inkompatible Forderungen

Beide Forderungen sind, so Benacerraf, inkompatibel. Einerseits (semantical constraint) soll sich die Semantik der mathematischen Sätze in die Semantik der Alltagssprache ein-

[1] Vgl. [Tetens, 2006], S.65: „Die Mehrheit der heutigen Mathematiker und auch der Philosophen der Mathematik lehnen dieses These strikt ab.“

[2] Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 661.

gliedern. Andererseits (epistemilogical constraint) muß eine Theorie der mathematischen Wahrheit mit der landläufigen Epistemik verträglich sein. Das Benacerrafsche Dilemma lautet: Eine gute Semantik verhindert eine gute Epistemik und umgekehrt. Sein erste Forderung exemplifiziert Benacerraf an zwei Aussagen[3]:

(1) There are at least three large cities older than New York.

(2) There are at least three perfect numbers greater than 17.

Auf den ersten Blick scheinen beide Urteile derselben Semantik zu entspringen: Es gibt x Gegenstände in der Relation R zum Gegenstand A. Für den Platonisten, der Zahlen als Gegenstände auffaßt, ist die Semantik tatsächlich einheitlich. Benacerraf nennt diese Sicht „standard view", und hält entgegen, daß New-York eine Name ist, die Zahl 17 aber nicht[4]. Die Alternativen zur „standard view" faßt Benacerraf unter „combinatorial view" zusammen. Für den Kombinatoristen ist Wahrheit syntaktische Wahrheit, eine Angelegenheit der Metamathematik. Benacerraf fordert:

> Since our knowledge is of truths, or can be so construed, an account of mathematical truth, to be acceptable, must be consistent with the possibility of having mathematical knowledge: the conditions of the truth of mathematical propositions cannot make it impossible for us to know that they are satisfied[5].

4.1.1. Hermiones Glaube um die Trüffel

Wir interpretieren die Forderung so: die Wahrheit von p soll in die Begründung unseres Wissens um p einfließen, oder knapper: es bedarf einer Rückkopplung zwischen Wahrheit und Wissen. Zur Verdeutlichung erzählt Benacerraf, wie Hermione eine Trüffel erkennt:

> That the black object [Hermione] is holding is a truffle must figure in a suitable way in a causal explanation of her *belief* that the black object she is holding is a truffle. But what is a „suitable way"? I will not try to say [...] there seems to be a core intuition [...] which I think is correct although very difficult to pin down[6].

Obwohl Benacerraf mit seiner ersten Forderung die Mathematik den allgemein geltenden Wahrheitskriterien verpflichten möchte, betont er zu Recht die Schwierigkeit der Wahrheitsermittlung im Alltag. Die Legitimität unseres *Wissens-daß-p* ist mit den

[3] Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 663.

[4] Anmerkung: Der Vergleich zwischen beiden Aussagen sollte darauf hinauslaufen, daß die Wahrheitsbedingungen eine Wahrheit mit dem Wissen um die Wahrheit verknüpfen sollen. Hier gibt es keine Wahrheitsbedingungen, sondern schlichte Sachverhalte. Es genügt, die Zahlen 28, 496 und 8128, drei vollkommene Zahlen größer als 17, zu nennen. Zweckvoller wäre u.E., wenn behauptet würde, daß unendlich viele vollkommene Zahlen die Behauptung erfüllen; dafür bewies bereits Euklid in Buch IX, Prop. 36, daß die Zahl $2^{n-1}(2^n - 1)$ vollkommen ist, falls $2^n - 1$ prim.

[5] Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 667.

[6] Vgl. ebd. S. 671, Hervorhebung CF.

Wahrheitsbedingungen von p angemessen zu verbinden. Wir möchten versuchen, den „suitable way“ in Einzelbeispielen zu eruieren. Das Zitat ist dem Abschnitt *IV Knowledge* entnommen und doch spricht Benacerraf von der kausalen Begründung des „belief“. Die Wahrheitsbedingungen für „belief“ sind aber viel schwächer als für „knowledge“, und gerade die letzteren stehen auf dem Prüfstand. Wir hinterfragen vorerst die Unterschiede zwischen *belief* und *knowledge*.

4.1.2. Aussagenschärfe

In welchem Kontext identifiziert Hermione das schwarze Objekt in ihrer Hand mit einer Trüffel? Ist Hermione die Tochter des Königs Menelaos von Sparta, bzw. was brauchen wir überhaupt von ihr zu wissen, um den Satz richtig zu deuten? Der Einfachheit halber lassen wir Hermione ein beliebiger wohlklingender Eigenname sein.

Das Prädikat *black* deutet darauf hin, daß Hermione keine Amaretto Trüffel in der Hand hält, sondern ein Exemplar der lecker duftenden Pilzart. Würde dann Hermiones Expertise ausreichen, um ein hochwertiges *Tuber melanosporum* aus dem französischen Périgord von dem billigen chinesischen Imitat *Tuber indicum* zu unterscheiden? Je nachdem, ob das Sprachspiel (im Sinne Wittgensteins) im Schokoladenfachgeschäft, auf dem Bauernmarkt oder in einem noblen Feinkostladen stattfindet, gelten offenbar andere Wahrheitsbedingungen. Unser spitzfindiges Nachbohren rührt daher, daß eine alltägliche Aussage über kontextuale Sachverhalte schweigt, die allen Teilnehmern am Sprachspiel bekannt sind. Gehen wir also davon aus, daß die impliziten Wahrheitsbedingungen erfüllt sind und versuchen wir die zweite Forderung anzusetzen.

Gemäß Benacerrafs zweiter Forderung, ist das *Wissen-daß-p* mit der Wahrheit von p zu verknüpfen. Hermione weiß deshalb, daß das schwarze Ding eine Trüffel ist, weil das schwarze Ding tatsächlich eine Trüffel ist. Ist die Forderung aber nicht speziell auf die Alltagssprache zugeschnitten, wo die Aussage kontextuale Wahrheitsbedingungen übergeht? Ist Benacerrafs Forderung angemessen, die Wahrheitskriterien der Alltagssprache auf die Sprache der Mathematik übertragen zu wollen? In der Mathematik werden sämtliche Wahrheitsbedingungen in einem pedantischen Jargon aufgelistet, um jeden Interpretationsspielraum zu eliminieren. Dazu z.B. die Poincarésche Vermutung.

In der Alltagssprache heißt die Vermutung etwa: was im 4D-Raum die Basiseigenschaften der Sphäre besitzt, ist tatsächlich eine Sphäre. In die Sprache der Topologie übersetzt lautete die vermutete Wahrheitsbedingung: <3-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit mit der Homologie der 3-Sphäre>. Nachdem sich Poincaré das Gegenbeispiel seines Dodekaeder-Raums selbst gebastelt hatte, hieß die ergänzte Wahrheitsbedingung nunmehr <Homologie der 3-Sphäre $\wedge$ triviale Fundamentalgruppe>; der Beweis von Grigori Perelman machte schließlich daraus ein Theorem. Die Begriffe Mannigfaltigkeit, 3-Sphäre, Homologie, Fundamentalgruppe, usw. sowie die dahinterstecke Mathematik versteht zwar allein ein Topologe, aber sie sorgen dafür, daß sein Wissen um das Theorem mit den Wahrheitsbedingungen sub specie aeternitatis verknüpft ist.

In der Alltagssprache kann Hermione in der Tat nur *glauben*, daß das schwarze Ding in ihrer Hand eine Trüffel sei. Dieser, wenn auch begründete, Glaube wird einem Pseudowissen gleichgestellt. Daher macht die Gegenüberstellung von Wahrheit und Wissen gemäß der zweiten Benacerrafschen Forderung im Alltagsleben durchaus Sinn. Der Mathematiker mag seinerseits oft mit einer intuitiven unscharfen Aussage starten, die er nach und nach präzisiert. Nach Vollendung des Beweises erhält die Behauptung einen solchen definitiven Wortlaut, daß die Rückkopplung mit dem Ergebnis der Demonstration gewährleistet ist.

Hermione wird ihrerseits nie „wissen", ob das Baby in der Wiege wahrhaftig ihr Kind ist; selbst ein positiver DNS-Test wäre nicht unfehlbar. Was Wissen bedeute, wäre ein weites Thema, das wir nur am Rand streifen wollen. Benacerraf beruft sich auf Tarski (vgl. S. 67), aber eine oberflächlichere Betrachtung wird bereits genügend Licht in das Benaceraffsche Dilemma bringen.

4.1.3. Pures Wissen und Zeugniswissen

Wissen im Alltag ist nicht gleich *Wissen* in der Wissenschaft. Hermione mag wissen, daß eine Trüffel genüßlich mundet, anders als die zum Verwechseln ähnliche Hirschtrüffel. Dieses Wissen ist aber tradiertes Wissen. Kaum jemand kocht sich eine Hirschtrüffel, um zu verifizieren, daß sie wie in der Fachliteratur behauptet tatsächlich widerlich schmeckt. Unser Wissen besteht hauptsächlich aus Zeugniswissen.

Die Wissenschaftler sind indessen bemüht, tradiertem Wissen mißtrauisch gegenüberzustehen. Jeder angehende Mathematiker bekommt irgendwann Gelegenheit, sich einen Beweis der von ihm verwendeten Theoreme anzuhören oder anzulesen. Andernfalls, oder wenn er den Beweis nicht ganz verstanden hat, geht er davon aus, daß pingelige Koryphäen einen eventuellen Fehler längst aufgestöbert hätten.

Wir halten also fest, daß Wissen im Alltag in hohem Maße auf nicht persönlich verifizierten Zeugnissen beruht, während mathematisches Wissen in Marmor gemeißelt ist.

4.1.4. Multiple Beweiswege

Daß Hermione eine Trüffel in ihrer Hand hält, resultiert aus der Konvergenz mehrerer voneinander unabhängiger Empfindungen; das Ding ist schwarz, fühlt sich elastisch an, riecht wie eine Trüffel, wird als Trüffel feilgeboten, usw. Mit der Ansammlung von Indizien wächst die Wissensqualität. Die Wissensakquisition arbeitet *kumulativ*.

In der Mathematik gibt es hingegen *parellele* Beweisschemata; alle sind und bleiben wahr. Das Prädikat *wahr* darf im Geiste des Satzes vom Widerspruch nicht gesteigert werden. Das schöne Werk [Aigner, Ziegler, 2002] beginnt mit sechs Beweisen der Unendlichkeit der Primzahlen aus verschiedenen Branchen der Mathematik und es gibt dergleichen viel mehr. Die Mathematik wimmelt nur von Alternativbeweisen.

Wozu eigentlich? Jeder einzelne Beweis bürgt bereits für Wahrheit und wird daher durch andere Beweise nicht gestärkt. Es ist ein Motor des Platonismus, daß der in der Höhle angekettete Mathematiker die Bewegung der Schatten auf völlig verschiedenen Wegen „erfindet“; so entwickelt sich die Vorstellung einer Ideenwelt, in der die Beweise mysteriös ineinanderlaufen[7].

Alltag und Mathematik unterscheiden sich grundsätzlich im Prozeß der Wahrheitsermittlung. Im Alltag steigt die Wissensqualität mit der Akkumulation von Indizien an. Die Wahrheiten der Mathematik unterliegen keiner Gradation.

4.1.5. Lange Beweiswege

Die Inkompatibilität seiner beiden Forderungen bezeichnet Benacerraf als größte Schwäche des (platonistischen) „standard account“. Er weckt unsere Neugierde, leider ohne sie zu befriedigen, denn er vertröstet uns auf später:

> Quite obviously, to make out a persuasive case to this effect it would be necessary to sketch the epistemology I take to be at least roughly correct and on the basis of which mathematical truths, standardly construed, do not seem to constitute knowledge. This would require a lengthy detour through the general problems of epistemology. I will leave that to another time[...][8].

[7] Analog läßt sich der *Denker* von Rodin von vorn, hinten, oben, von der linken oder der rechten Seite beschauen; diese diskreten Schnappschüsse gehen in eine dynamische mentale Synthese über, die das Mosaikwerk dynamisch zur Einheit des *Penseur* konziliert.

[8] Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 670.

Im Alltag entsteht Wissen durch einen kumulativen Prozeß, der nicht selten asymptotisch verläuft, so daß eher von einem Wissensstand als von einem Wissen gesprochen werden sollte. Für einen Schuldspruch des belgischen Kinderschänders Dutroux war die „innere Überzeugung" der Mehrheit der Geschworenen ausreichend. In der Mathematik hingegen mögen auch so viele kompetente Mathematiker von der Wahrheit einer „Vermutung" überzeugt sein, gereicht eine Überzeugung nie an einen Beweis. Sie ist nicht wertlos, sondern ein Appell zu weiterer Forschung.

Mathematische Beweise sind meistens um so lange Folgerungsketten, als - sinnvollerweise - viele Beweisstrecken durch den Verweis auf Theoreme abgekürzt werden. Der Keim des Benacerrafschen Dilemmas liegt in dem langen Weg, der zwischen Theorem und Axiomen aufspannt wird. Der Beweisführende schließt den Kreis zwischen Wahrheitsbedingungen und Epistemik, er kann aber die Kettenglieder vor und nach der Zusammenführung nicht gleichzeitig im Kopf präsent haben. Einstein schreibt an Hadamard, der ihn über seinen Habitus beim Erfinden befragt hatte:

> It seems to me that what you [Hadamard] call full consciousness is a limit case which can never be fully accomplished. This seems to me connected with the fact called the narrowness of consciousness (Enge des Bewußtseins)[9].

Der Terminus „Enge des Bewußtseins" legt den Finger auf die Problematik der zweiten Benacerrafschen Forderung. Betrachten wir einen Beweis des Pythagoräischen Satzes, der gerade noch ganz ins Bewußtsein paßt.

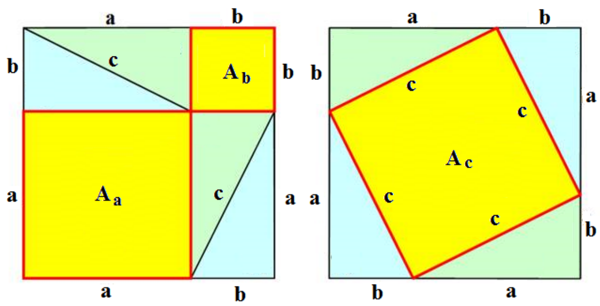

Abbildung 4.1.: Pythagoras

Zwei kontrastive Bilder werden einander gegenübergestellt. Nennen wir A_k das Quadrat der Kantenlänge k. Abb. 4.1 zeigt zwei Anordnungen von vier Kopien eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks mit den Kanten a, b, c innerhalb des Quadrats A_{a+b}.

Das Komplement zu den vier Dreiecken hat links die Fläche $A_a + A_b$ und rechts A_c, womit die Behauptung $A_a + A_b = A_c$ durch Anschauen schon bewiesen ist. Auch ist die Wahrheitsbedingung evident: das Dreieck muß rechtwinklig sein. Semantik und Epistemik sind entgegen der Benaceraffschen Behauptung beide einsichtig[10].

[9] Vgl. [Hadamard, 1945], S. 143. Der deutsche Ausdruck *Enge des Bewußtseins* steht im Original.

[10] Ganz im Sinne Kants entsteht hier die Synthetizität des Pythagoräischen Satzes durch sinnliche Anschauung. Es wird nicht „gerechnet", sondern nur die Identität der Flächen deduziert. Wir brauchen die Flächenformel $F(A_k) = k^2$ nicht zu kennen, aus der $a^2 + b^2 = c^2$ folgt.

Die Problematik, die zum Dilemma führt, besteht in Alltagssituationen nicht, wo wir die relevanten Wahrheitsbedingungen nicht aus den Augen verlieren. Im Trüffel-Beispiel steht die Wahrheit <A ist eine Trüffel> dicht bei der Folgerung <Hermione weiß, daß A eine Trüffel ist>. Mit unserem Gegenbeispiel wollten wir nur zeigen, daß die zweite Benacerrafsche Forderung den Status einer Allaussage nicht haben darf. Offenbar sind kurze mathematische Beweise Ausnahmen vom Benacerrafschen Dilemma. Deshalb fragen wir: Wann ist ein Beweis kurz?

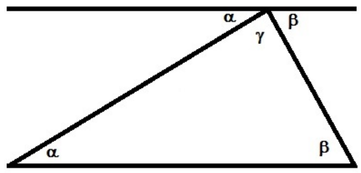

Abbildung 4.2.: Winkelsumme

Betrachten wir Abb. 4.2. Wegen der Winkelgleichheiten beim Schneiden von Parallelen durch eine Sekante, „wissen" wir mit einem Blick, daß die Winkelsumme in einem (euklidischen) Dreieck gleich π ist. Die Wahrheitsbedingung entspringt dem Nachweis der Winkelgleichheiten, für den wir einen Vorschritt hätten einschieben können[11]. Fassen wir also beide Schritte zusammen: wir wissen, daß die Winkelsumme im Dreieck gleich π ist, weil wir schon vorher um die Winkelgleichheiten wußten. Wegen der Enge des Bewußtseins sind zwei Schritte notwendig. Allgemeiner gefaßt ist mathematisches Erfinden ein konsekutives Auffädeln von Wahrheiten; daher versieht Marcel Berger sein [Berger, 2010] mit dem Untertitel *Eine Jakobsleiter zur modernen höheren Geometrie.* Wenn man sich von Sprosse zu Sprosse hocharbeitet, hat man wegen der Enge des Bewußtseins die vielen Wahrheitsbedingungen nicht auf einmal präsent im Kopf. Das ist aber lediglich eine Umformulierung der zweiten Benacerrafschen Forderung.

Diese Sorge setzt sich bei schwierigen Beweisen der Mathematik fort, auch bei nur scheinbar kurzen. Der Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (nicht konstante Polynome haben mindestens eine Nullstelle) geht in [Jänich, 1999] über kurze fünf Zeilen. Jänich verwendet aber den Satz von Liouville, den er allerdings auch in fünf Zeilen erledigt. Trotz der scheinbaren Kürze steckt im Hintergrund die umfangreiche Elementarlehre der komplexen Analysis. Leidet die Epistemologie darunter, wie es Benacerraf suggeriert, daß die Wahrheitsbedingungen in das Bewußtsein des Mathematikers nicht komprimiert eingespeichert werden können? Oder ist es eher so, daß wir authentisch um einen Satz „wissen", weil wir die Leitersprossen eine nach der anderen erklommen haben?

Es stört wenig, daß wir durch Gegenbeweise die Universalität der zweiten Forderung

[11] Beweis durch Anschauen: durch eine Drehung um π um den Mittelpunkt der Sekante entsteht die Identität, somit die Winkelgleichheiten.

angekratzt haben. Die Forderung wäre auch dann zu hinterfragen, wenn sie gelegentlich zuträfe. Beunruhigender ist, daß unsere Gegenbeweise keine pathologischen Fälle aufgreifen, sondern elementares Wissen wie die Winkelsumme im Dreieck und den Pythagoräischen Satz. Mit seiner zweiten Forderung rüttelt Benacerraf an der Jakobsleiter des mathematischen Erfindens. Das veranlaßt uns, auf das Drei-Städte-Beispiel einzugehen, auf dem er seine Argumentation aufbaut.

An dieser Stelle halten wir kurz an, um unsere Ergebnisse einzusammeln:
i) Im alltäglichen Sprachspiel genügen unscharfe Aussagen, da nicht wenige Wahrheitsbedingungen implizit aus dem Kontext hervorgehen, während mathematische Aussagen sämtliche Wahrheitsbedingungen penibel aufführen.
ii) Wissen im Alltag resultiert kumulativ durch Anhäufung zahlreicher voneinander unabhängiger Indizien, ohne den für das mathematische Wissen unentbehrlichen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
iii) Alltagswissen besteht überwiegend aus Zeugniswissen.
iv) Die Alternativbeweise der Mathematik stärken einander *nicht*, anders als konvergierende Überzeugungen im Alltag.
v) Kurze mathematische Beweise können beide Forderungen Benacerrafs erfüllen.
vi) Ein mathematischer Beweis besteht aus aufgefädelten konsekutiven Schritten.
vii) Die Rückkopplung zwischen Semantik und Epistemik sichert die Beweiskette, wobei aber die „Enge des Bewußtseins“ nur bedingt (vgl. nachfolgende Anmerkung) gestattet, die ganze Kette in einem Stück aufzurufen.

Anmerkung: Das von Benacerraf monierte Ausbleiben der Rückkopplung entsteht u.E. durch die Enge des Bewußtseins, soweit der Beweis schrittweise aber nicht global verstanden wurde. Wie wir noch sehen werden, erarbeitet sich der professionelle Mathematiker seine eigenen Beweise; dabei erlebt er jedes Mal eine Illumination, bei der ihm der komprimierte Beweis blitzartig in voller Länge im Bewußtsein erscheint. Analog entziffern wir die Anleitung eines Möbels zum Selberbauen, während uns erst spät die Montage plötzlich klar wird. Auch der Mathematiker memoriert den Zusammenhang, so daß er seine selbsterarbeiteten Beweise ohne Mühe jederzeit auf Wunsch abrufen kann.

Wir werden jetzt das Drei-Städte-Beispiel prima facie betrachten, das Benacerraf als Paradigma anbietet. Paradoxerweise ordnet Benacerraf das Beispiel dem Alltag zu, während der Inhalt auf den impliziten mathematischen Begriffen der Kollinearität und der Inzidenz aufbaut.

4.2. Der Wahrheitsbegriff der Mathematik

Um Licht in die Verlinkung seiner beiden Forderungen zu werfen, wählt Benacerraf folgendes Beispiel:

> An acceptable semantics for mathematics must fit an acceptable epistemology. For example, if I know that Cleveland is between New York and Chicago, it is because there exists a certain relation between the truth conditions for that statement and my present „subjective" state of belief (whatever may be our accounts of truth and knowledge, they must connect with each other in this way). Similarly, in mathematics, it must be possible to link up what it is for p to be true with my belief that p. Though this is extremely vague[12] ...

Wenn wir im Alltag von Wahrheit sprechen, beziehen wir uns auf den Common Sense, nicht auf schwierige Wahrheitstheorien. Es ist einsichtig, daß auch in der Mathematik der volkstümliche Wahrheitsbegriff gelten soll; sonst wäre fraglich, in welchem Sinne die Aussagen der Mathematik überhaupt wahr sind.

Nicht wirklich einleuchtend ist die geforderte Relation zwischen den Wahrheitsbedingungen und dem „subjective state of belief". Wir verstehen Benacerraf dahingehend, daß die Wahrheitsbedingungen mit dem impliziten Hintergrundglauben des jeweiligen Sprachspiels übereinstimmen sollen. Die Besprechung des Hermione-Beispiels hat gezeigt, daß hinter der Aussage <das schwarze Ding ist eine Trüffel> viel Geglaubtes unausgesprochen bleibt.

Wenn die Wahrheit in der Mathematik keine andere Wahrheit als im Alltag sein darf - soweit gehen wir mit Benacerraf konform - müssen nicht deswegen die auf den Alltag zugeschnittenen Benacerrafschen Forderungen nur „der Analogie wegen" (*similarly* im Zitat) auf die Mathematik übertragen werden. Wie bereits diskutiert, gibt es in einem mathematischen Beweis bis auf die implizite Rolle der Axiome (auf die wir noch eingehen werden) keine unausgesprochenen Wahrheitsbedingungen und die Rückkopplung dieser Wahrheitsbedingungen mit dem Wissen um die Behauptung (zweite Benacerrafsche Forderung) ist gerade das Ziel des Beweises, wenn auch das Memorieren einer langen Beweiskette durch die Enge des Bewußtseins gehandicapt wird.

Einem Nicht-Amerikaner wird ein Blick auf Abb. 4.3 hilfreich sein. Cleveland liegt aus der Luftperspektive auf der kürzesten Verbindung zwischen Chicago und New-York. Der Vogel, der auf geradem Weg von Chicago bis New-York will, muß über Cleveland fliegen. Es kann auf der Karte nachgemessen werden, daß die Summe der Entfernungen von Chicago bis Cleveland (496 km) und von Cleveland bis New-York (650 km) haargenau

[12][Benacerraf, 1973], S. 667.

der Entfernung von Chicago bis New-York (1146 km) entspricht. Das Dreieck ist, wie von Benacerraf implizit behauptet, flach.

Abbildung 4.3.: Chicago-New-York

Wenn wir jetzt den Terminus *Stadt* durch *Punkt* ersetzen, lautet die Übersetzung aus der Alltagssprache in den mathematischen Jargon:
Seien die Punkte A, B, C *so gegeben, daß* $AC + CB = AB$, *dann liegt* C *auf der Strecke* AB.

Die Übersetzung von der einen Sprache in die andere ändert weder den Wahrheitswert noch die Bedeutung. Wir können daher nicht nachvollziehen, warum Benacerraf der mathematischen Formulierung die Vereinbarkeit einer guten Semantik mit einer guten Epistemologie vorenthält, während er bei der schlappigen gleichinhaltlichen Alltagsaussage keine Bedenken meldet.

In der Tat ist die Aussage <I know that Cleveland is between New York and Chicago> nur für einen US-Amerikaner evident. Sehen wir uns die Aussage näher an, um einige Defizite zu erkennen. In der Folge nennen wir kurz p die Aussage: <Die Stadt Cleveland liegt zwischen den Städten Chicago und New-York>. Angeregt durch Wittgenstein, interessiert uns die Frage: in welchem Sprachspiel ist die Aussage p wahr?

Von Chicago bis New-York führt am Eriesee entlang die Eisenbahnlinie Lake Shore Limited (Vgl. Abb. 4.3). Die Fahrgäste werden mit gutem Recht meinen, daß jede andere Haltestelle, z.B. Buffalo, ebenfalls zwischen Chicago und New-York liege. Buffalo bildet aber mit Chicago und New-York ein Dreieck; es liegt daher geometrisch nicht dazwischen - sonst läge sogar der Nordpol zwischen Chicago und New-York. Wie annähernd flach müßte ein Dreieck sein, damit die Spitze „fast“ zwischen den anderen Ecken liegt? Die Antwort wäre willkürlich, somit ohne Wahrheitswert. Die Aussage <Buffalo liegt zwischen Chicago und New-York> ist nur in bezug auf das Sprachspiel der Eisenbahngäste wahr oder falsch, während Cleveland wahrhaftig auf der Luftlinie liegt.

Betrachten wir nun Städte auf dem Äquator. Auf einer Schiffsreise liegt Singapur zwischen Quito (Ecuador) und Mogadischu (Somalia). Auf der kürzeren Route mit dem Flugzeug, liegt aber Mogadischu zwischen Quito und Singapur. Wenn also drei Städte an einem Großkreis angeordnet sind, so liegt jede von ihnen zwischen den beiden anderen.

Sicherlich gibt es noch mehr Sprachspiele zur Aussage p; z.B. liegt Cleveland in einem Wörterbuch alphabetisch zwischen Chicago und New-York. Doch genügen die bereits angeführten Beispiele, um festzuhalten, daß die Alltagssprache viele Wahrheitsbedingungen unausgesprochen läßt. Welcher Wahrheitsbegriff ist dann anwendbar?

Benacerraf beruft sich auf den Wahrheitsbegriff der semantischen Wahrheitstheorie von Alfred Tarski. Danach bezieht sich der Begriff der Wahrheit immer auf eine bestimmte formalisierte Sprache. Semantische Prädikate wie *wahr* oder *falsch* sind bei Tarski einer über den Objektsprachen hierarchisch höher stehenden Metasprache vorbehalten. Somit ist in der Sprache S das Prädikat *wahr in* S nicht zugelassen[13], sondern es gehört in die Metasprache. In der Sprache S wird nur erklärt, „worin die Wahrheit dieser einen individuellen Aussage besteht [...] ‚Es schneit' ist eine wahre Aussage dann und nur dann, falls es schneit[14]". Die Alltagssprache leidet dank ihres Universalismus weniger unter dieser Limitation:

> Die für formalisierte Sprachen gewonnenen Ergebnisse haben auch in Bezug auf die Umgangssprache eine gewisse Geltung, und zwar dank des Universalismus der letzteren: indem wir eine beliebige Definition einer wahren Aussage [...] in die Umgangssprache übersetzen, erhalten wir eine fragmentarische Definition der Wahrheit, welche eine weitere oder engere Kategorie von Aussagen umfaßt.[15]

Ich weiß, daß p, „because there exists a certain relation between the truth conditions for that statement and my present ‚subjective' state of belief." Benacerrafs Aussage trifft u.E. zu, wenn jemandem bewußt ist, welches Sprachspiel gemeint ist. Folglich sollte, so Benacerraf, die notwendige Relation auch im mathematischen Sprachspiel gegeben sein: „Similarly, in mathematics, it must be possible to link up what it is for p to be true with my belief that p". Dieser Auffassung können wir uns anschließen, aber nicht Benacerrafs pauschaler These, nach der „fast sämtliche" mathematische Urteile beide Forderung *nicht gleichzeitig* erfüllen können:

> It will be my general thesis that almost all accounts of the concept of mathematical truth can be identified with serving one or another of these masters at the expense of the other[16].

Mit „almost all accounts" relativiert Benacerraf bedachtsam die Universalität seiner Behauptung. Er gibt leider keine Hinweise auf Ausnahmen; wir haben nur zwei davon exemplarisch angeführt, um unseren Leser nicht übermäßig zu langweilen.

Bei mathematischen Aussagen werden die Wahrheitsbedingungen stets penibel angegeben, um etwaige (manchmal pathologische) Sonderfälle auszuschließen. Warum krankt dementgegen die gemeinsprachliche Aussage p an einer semantischen Schwäche? Weil

[13] Sonst könnten zirkuläre Sätze wie in der Lügneraporie entstehen. Sei z.B. der Satz $p = $ <Was ich jetzt behaupte ist falsch>. Ist p wahr in S, dann ist es wahr, daß p falsch ist. Ist p aber falsch, dann ist p nicht falsch, d.h. wahr.

[14] Vgl. [Tarski, 1935], S. 269.

[15] Vgl. ebd. S. 279, Fußnote 10.

[16] Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 661.

die Wahrheitsbedingungen in der Alltagssprache pedantisch auszuformulieren, läppisch wäre, etwa durch die aufgeblasene Redewendung <Die Stadt Cleveland liegt in bezug auf die Stadtzentren fast genau auf der Luftlinie zwischen den Städten Chicago und New-York>. Niemand wird fragen, was *fast genau* bedeute, oder von welchem Punkt in Chicago zu welchem Punkt in New-York die Luftlinie gezogen wird. Noch weniger wird gefragt, ob nicht etwa das New-York in Nord-Ost England bzw. das australische Cleveland gemeint seien. In einem Sprachspiel, wo geklärt werden soll, ob ein Flugzeug auf dem geraden Weg zwischen den Flughäfen von Chicago und New-York den Luftraum von Cleveland betritt, wäre aber die Formulierung p zu vage.

Zeugniswissen ist in der Alltagssprache nicht die Ausnahme sondern die Regel. Benacerraf dürfte sein Schulwissen in Erinnerung gerufen haben, bestenfalls noch zur Absicherung auf eine Karte geschaut haben; er vertraut auf das Zeugnis der Topographen, die in eigener Regie die Standorte der drei Städte wissenschaftlich lokalisierten. Die Wahrheitsbedingungen sind im Alltag ein Faß ohne Boden, daher ist die Benacerrafsche zweite Forderung dort vonnöten. Die Mathematik stellt indessen den Anspruch, alle Wahrheitsbedingungen zu erfassen, wenn auch bedenklich ist, wie wir noch sehen werden, daß viele Axiome unauffällig in jeden Beweis einfließen.

Seit der Kantischen kopernikanischen Wende ist uns klar, daß wir die Realität durch eine getönte anthropische Brille erfassen, d.h. daß die Bedingungen der Erkenntnis der Gegenstände zugleich die Bedingungen der Möglichkeit der Existenz der Gegenstände sind. Daher mündet die zweite Benacerrafsche Forderung in eine Auseinandersetzung über die Objekthaftigkeit der mathematischen Entitäten, d.h. über den Platonismus. Dabei spielt Benaceraffs Bekenntnis zu einer kausalen Theorie des Wissens nur eine untergeordnete Rolle[17].

Bevor wir in die Debatte über den Platonismus einsteigen, ziehen wir eine kurze Bilanz. In seinem Streben nach Universalität bietet Benacerraf unseligerweise kaum handfeste Anhaltspunkte an. Wie bereits auf S. 65 zitiert behauptet seine These, daß „fast alle“ Sachverhalte der mathematischen Wahrheit die eine Forderung zu Lasten der anderen erfüllen. Dann sollte Benaceraff ein paar mathematische Beispiele, die beide Forderungen erfüllen, nennen und uns erklären, warum solche seltenen Ausnahmen sein Inkompatibilitätscredo nicht erschüttern. Einige Denkanstöße des Vortrages lassen sich schwer in

[17] Wer z.B. den heutzutage populären *Reliabilism* für eine bessere Epistemologie hält, wird ähnlich schwer begründen können, wie er verläßliche Überzeugungen über mathematische Entitäten gewinnt. Wahrheit wird folgendermaßen definiert. Agent A weiß, daß p genau dann, wenn gilt: i) A glaubt, daß p; ii) p ist wahr; iii) As Überzeugung, daß p wird durch einen zuverlässigen Prozeß gebildet.

seinem Sinne fortsetzen. Wir kommen eher zu dem konträren Schluß, daß die beiden Forderungen auf die Alltagssprache gemünzt sind, wo implizite Wahrheitsforderungen die Rückkopplung zwischen Wahrheit und Wissen verschleiern, wogegen die pedantische mathematische Sprache die Rückkopplung prozessual sicherstellt.

4.3. Benacerrafsche Zweifel am Platonismus

Im Hintergrund der Debatte um die Wahrheit in der Mathematik lauert die Platonische Frage. Benacerrafs „general thesis“ in *Mathematical Truth* wirft neues Licht in den Konflikt zwischen der „standard view“ der Platonisten und der „combinatorial view“.

Benacerraf weiß gebührend zu loben. daß die platonistische *standard view* seiner ersten Forderung eines universellen Wahrheitsbegriffs bestens genügt:

> One of its primary advantages is that the truth definitions for individual mathematical theories thus construed will have the same recursion clauses as those employed for their less lofty empirical cousins [...] Mathematical and empirical disciplines will not be distinguished in point of logical grammar. I have already underscored the importance of this advantage: it means that the logicogrammatical theory we employ in less recondite and more tractable domains will serve us well here. We can do with one, uniform, account and need not invent another for mathematics [...] The formalization of theories in first-order logic requires [...] that all the logical consequences of the postulates will be forthcoming as theorems. The standard account delivers these guarantees[18].

Trotz der im Zitat gelobten „Garantien“ in bezug auf die erste Forderung wird als Hauptschwäche die zweite Forderung nicht erfüllt, denn die Wahhrheitsbegründung kann nicht in die Begründung des Wissens integriert werden[19].

4.3.1. Standard vs. combinatorial view

Die Anhänger der „combinatorial view“ beziehen sich, wie auch Benacerraf, auf den Wahrheitsbegriff von Tarski:

> The „truth“ predicate is syntactically defined [...] The mathematical universe [consists] of mathematically unorthodox objects[20]: Mathematics for them is limited to metamathematics, and that to syntax[21].“

Die Kombinatoristen konzentrieren sich auf den Wissenserwerb, d.h. sie fragen: Durch welche Syntax wird ein Satz bewiesen? Was macht ein Theorem wahr?

[18] Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 669-670.

[19] Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 670: „[T]he principal defect of the standard account is that it appears to violate the requirement that our account of mathematical truth be susceptible to integration into our over-all account of knowledge.“

[20] Was heißt *unorthodox*? Sind etwa die Objekte der Quantenmechanik *orthodox*?

[21] Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 665.

> This is not to *deny* that being a theorem of some system can be a truth condition for a given proposition or class of propositions. It is rather to require that any theory that proffers theoremhood as a condition of truth also *explain the connection between truth and theoremhood*[22].

Gemäß diesem Zitat gelingt es zwar dem Kombinatoristen, die zweite Forderung der guten Epistemologie zu erfüllen. Die Limitation auf syntaktische Wahrheit genügt aber der ersten Forderung eines universellen Wahrheitsbegriffs nicht. Mit dieser Thematik haben wir uns bereits ausführlich auseinandergesetzt. Ein Theorem ist eine bewiesene Behauptung. „Theoremhaftigkeit" ist nicht *eine* sondern überhaupt *die* Wahrheitsbedingung, nämlich das letzte Glied, in dem Beweiskette und Behauptung nahtlos zusammentreffen, die „connection between truth and theoremhood". In einfachen Fällen, wie die Winkelsumme des euklidischen Dreiecks, stellen wir uns die ganze Kette vor, meistens aber vernebelt die Enge des Bewußtseins die Sicht auf den Konnex. Die erste Benacerrafsche Forderung, die im Sprachspiel der Hermione Sinn macht, kommt uns in mathematischen Sprachspielen nahezu zirkulär vor.

Die Platonisten der „standard view" scheitern andersherum nicht an der ersten Forderung, dafür an der zweiten! - daher das Dilemma.

> [C]ombining this view of knowledge [justified true belief] with the „standard" view of mathematical truth makes it difficult to see how mathematical knowledge is possible. If, for example, numbers are the kinds of entities they are normally taken to be, then the connection between the truth conditions for the statements of number theory and any relevant events connected with the people who are supposed to have mathematical knowledge cannot be made out[23].

Benaceraff vertritt in seinem Vortrag ausdrücklich eine kausale Theorie des Wissens. Leben in der Tat die mathematischen Entitäten in einer jenseitigen diffusen Ideenwelt, warum sollten sie dort in denselben kausalen Relationen zueinander stehen, wie die Verknüpfungen zwischen den vom Menschen gewirkten mathematischen Objekten bzw. Begriffen? Der Platonist, der zwar an eine transzendente Idee der Mathematik glaubt, wirft durch seine Intuition ein anthropisches Netz über die Ideenwelt. Anders als der Platoniker glaubt er weder, sich an eine Idee zu erinnern (Anamnesis) noch an ihr teilzuhaben (Methexis). Das Wissen des Mathematikers ist dadurch legitimiert, daß die Wahrheit der Theoreme durch die Anwendung logischer Schlüsse auf apriorische Axiome optimal gewährleistet ist. Benacerraf pariert vorsorglich diesen Gegenschlag:

> One obvious answer - that some of these propositions are true if and only if they are derivable from certain axioms via certain rules - will not help here. [...] In short, although it may be a truth condition of certain number-theoretic propositions that they be derivable from certain axioms according to certain rules, that this is a truth condition must also

[22]Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 666. Hervorhebung im Original.
[23]Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 673.

> follow from the account of truth if the condition referred to is to help connect truth and knowledge, if it is by their proofs that we know mathematical truths[24].

Der Einwand ist stichhaltig. Die Offensichtlichkeit des axiomatischen Fundaments ist noch keine Wahrheit, dafür aber die Apriorität der Axiome[25]. Zur Begriffsklärung schlagen wir folgende Einteilung vor:

i) *Nicht a priori* sind die als Axiome getarnten Definitionen, z.B. <Zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q bestimmen stets eine Gerade g>[26].

ii) *Nicht a priori* sind optionale Axiome, die lieber Postulate genannt werden sollten. Die ZFC-Mengenlehre z.B. teilt sich auf, je nachdem, ob die Kontinuumshypothese gelten soll oder nicht. Auch das Fundierungsaxiom (jede nicht leere Menge A enthält ein von A disjunktes Element) gilt nicht a priori sondern sorgt dafür, nicht in den Abgrund der Russellschen Antinomie zu stürzen. Am Parallelenaxiom scheiden sich euklidische und nicht euklidische Geometrien.

iii) *A priori* sind die aus Menschensicht evidenten Urteile, z.B. <Liegen zwei Punkte P und Q einer Geraden g in einer Ebene α, so liegt jeder Punkt von g in α>[27].

Fragwürdig sind logische Axiome wie der Satz vom Widerspruch, tertium non datur, usw. Es wird sogar angezweifelt, daß sich jeder Beweis formal logisch niederschreiben läßt. Der Mensch allein bestimmt die Spielregeln des mathematischen Erfindens. Werden welche nicht anerkannt, muß auf viele für wahr gehaltene große Teile der Mathematik verzichtet werden. Wittgenstein bringt es auf den Punkt: „Daß die Logik a priori ist, besteht darin, daß nicht unlogisch gedacht werden kann[28]." Im psychologischen Prozeß des mathematischen Erfindens befreit sich doch nicht selten die Intuition durch einen kreativen Salto mortale kurzweilig vom logischen Zwang, aber nur zum Überwechseln auf eine größeren Erfolg versprechende logische Trasse.

A priori sind die Axiome, die weder definitorisch noch optional sind, sondern notwendig und allgemein. Sie sind synthetische Sätze - keine Tautologien. Sie sind die Bedingung der Möglichkeit mathematischer Erkenntnis. Jede kausale Kette muß irgendwo anfangen; Descartes hatte sein „Cogito ergo sum", Kants kopernikanische Wende setzte beim Subjekt an. Selbst Kronecker, der nur für wahr hielt, was in einer endlichen Anzahl von Schritten aus natürlichen Zahlen abgeleitet werden kann, bekannte: „Die ganzen Zahlen

[24] Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 673.

[25] Auch wenn Kant sich zu weit hinauslehnt, wenn er alle mathematischen Sätze für a priori hält, gibt es tatsächlich apriorische Axiome.

[26] Axiom I,1 des hilbertschen Axiomensystems. Gleitet eine Linie so durch zwei Punkte, daß die Identität entsteht, dann ist sie per definitionem eine Gerade.

[27] Axiom I,6 des Hilbertschen Axiomensystems.

[28] Vgl. [Wittgenstein, 1922], 5.4731.

hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk[29].“ Um den lieben Gott nicht bemühen zu müssen, benötigt die Mathematik ein aprioristisches Fundament.

Benacerraf situiert zu Recht die Achillesferse des Platonismus im fraglichen Wissen um die Wahrheit der Axiome[30]. Um das Problem näher zu bringen, zitiert er den Platonisten Kurt Gödel im Zusammenhang mit der Cantorschen Kontinuumshypothese.

4.3.2. Gödel

Gödel schreibt:

> [...] the objects of transfinite set theory [...] clearly do not belong to the physical world and even their indirect connection with physical experience is very loose [...]
> But, despite their remoteness from sense experience, we do have a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that *the axioms force themselves upon us as being true*. I don't see why we should have less confidence in this kind of perception, i.e., in mathematical intuition, than in sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them and, moreover, to believe that a question not decidable now has meaning and may be decided in the future[31].

Der Platonist Gödel reduziert die Mathematik nicht auf mentale Entitäten. Der große Mathematiker, der auch in Physik bestens bewandert war, hielt mathematische und physikalische Objekte, die der Theoriebildung zugrundegelegt werden, für real. Die Intuition des Mathematikers übernimmt die Funktion der Wahrnehmung in der Physik und wird somit zu einer Quasi-Perzeption. Als einziger Unterschied zur Physik sind die Objekte der Mathematik nicht in Raum und Zeit instanziert. Die Assimilation von Mathematik und Physik autorisiert sogar aus Gödels Sicht induktive Methoden in der Mathematik:

> If mathematics describes an objective world just like physics, there is no reason why inductive methods should not be applied in mathematics just the same as in physics[32].

Benacerraf hält die Analogie zwischen Physik und Mathematik für oberflächlich[33] und fragt, wie sich uns die Wahrheit der mathematischen Axiome aufdrängt:

> What troubles me is that without an account of how the axioms „force themselves upon us as being true,“ the analogy with sense perception and physical science is without much content. For what is missing is precisely what my second principle demands: an account of the link between our cognitive faculties and the objects known. In physical science we have at least a start on such an account, and it is causal. We accept as knowledge only those beliefs which we can appropriately relate to our cognitive faculties[34].

[29] Vgl. Vortrag bei der Berliner Naturforscher-Versammlung, 1886.
[30] Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 674: „[O]ur explanation of how we know the basic postulates must be suitably connected with how we interpret the referential apparatus of the theory.“
[31] Vgl. [Gödel, 1947] zitiert in [Benacerraf, 1973], S. 674. Hervorhebung CF.
[32] Vgl. [Gödel, 1951], unpublished work.
[33] Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 675: „So the analogy is at best superficial.“
[34] Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 674.

Es spielt für Benacerraf offensichtlich eine große Rolle, daß die Physik über konkrete Objekte verfügt. Hier würde ein Kantianer betonen, daß wir diese Objekte nicht an sich sondern durch die getönte menschliche Brille wahrnehmen. Unsere Theorien über physikalische Objekt sind nicht weniger „human" als die mathematischen. Es ist richtig, daß die Physik den *Ansatz* (*a start*, mehr nicht) einer kausalen Rückkopplung zwischen unseren kognitiven Fähigkeiten und den Objekten unseres Wissens anbietet. Erfüllt deswegen die Physik die zweite Benacerrafsche Forderung eher als die Mathematik? Das Wissen in der Physik baut doch auf einer Mathematisierung auf, womit eine physikalische Theorie Axiome der verwendeten Mathematik implizit mitumfaßt. Ferner kommt zu der von Benacerraf hinterfragten Wahrheit der mathematischen Axiomatik die noch diskutablere Wahrheit der empirischen Naturgesetze der Physik.

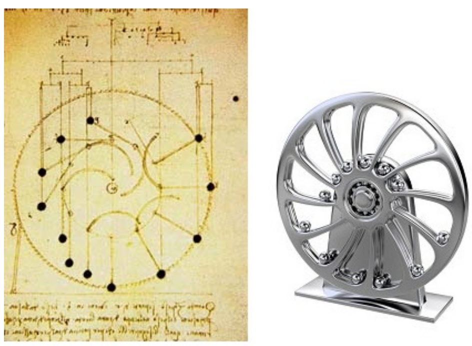

Abbildung 4.4.: Leonardo da Vinci

Nehmen wir als Beispiel das Perpetuum mobile der Abb. 4.4. Es wird entweder der Energieerhaltungssatz oder der zweite Hauptsatz der Thermodynamik verletzt. Der Physiklaie „weiß" nur aus Zeugniswissen, daß die Fallenergie der Kugel das Rad nicht allein antreiben kann. Selbst Leonardo da Vinci brauchte sehr lange, um einzusehen, daß sich seine Entwürfe nicht realisieren lassen.

Noch schwieriger ist das Gedankenexperiment des Maxwellschen Dämons, das erst in der zweiten Hälfte des 20. Jh. durch Landauer und Penrose entschärft werden konnte[35].

Benacerraf setzt Gödel entgegen, daß die Verifikation der Axiome des Transfiniten bis zu jeder ganzen Zahl nicht ausreiche, sondern „the story, to be helpful anywhere, must tell us how we know statements of computational arithmetic". Wir meinen hingegen, daß der „kausale Ansatz" der Physik verpufft und die Physik am Ende noch weniger als die Mathematik von der zweiten Benacerrafschen Forderung freigesprochen werden sollte.

Primär ist nicht die Frage, ob den Entitäten der Mathematik - ihrer Abstraktheit wegen - weniger als denen der Physik der Status eines Objekts zugesprochen werden darf. Gödel hat erkannt, wie Benacerraf lobend hervorhebt, daß die Bresche zwischen

[35]Ein durch eine Trennwand geteilter Behälter enthält eine verschließbare Öffnung. Beide Hälften enthalten Luft von zunächst gleicher Temperatur. Ein „Dämon" öffnet und schließt die Verbindungsöffnung so, daß sich die schnellen Moleküle in der einen und die langsamen Moleküle in der anderen Hälfte des Behälters sammeln.

den mathematischen Entitäten und den realen Dingen überbrückt werden muß. Deshalb führt Gödel die Intuition ein, was Benacerraf nicht gelten läßt:

> Instead of tinkering with the logical form of mathematical propositions or with the nature of the objects known, he [Gödel] postulates a special faculty through which we „interact" with these objects[...] Thus, when we come to mathematics, the absence of a coherent account of how our mathematical intuition is connected with the truth of mathematical propositions renders the over-all account unsatisfactory[36].

Wir stimmen Benacerraf zu, daß die Erhebung der Intuition zu einer Quasi-Perzeption nicht unproblematisch ist. Daher sollte die Intuition sorgfältig hinterfragt werden. Das tun weder Gödel, für den die Intuition selbstverständlich die Kluft der zweiten Forderung überbrückt, noch Benacerraf, der die Intuition ohne argumentative Begründung ablehnt.

Intuition darf man u.E. als eine *Empfindung* auffassen. Dazu fällt das Käfergleichnis von Wittgenstein[37] ein. Dürfen wir uns erdreisten, die Intuition, d.h. den Käfer, des herausragenden Mathematikers Gödel am Maßstab unseres eigenen Käfers zu beurteilen? Bei der zweiten Forderung kann von der Person des Wissers nicht abgesehen werden. Wer das Schachspiel durchleuchten möchte, wird sich an dem Spielverständnis der Großmeister orientieren, nicht der Gelegenheitsspieler. Die zweite Forderung wird gewiß nicht vom mathematischen Laien erfüllt und ist daher nicht an diesen gerichtet. Der eigentlich interessante Wisser ist der Mathematiker, selbst dann, wenn ihm der Laie sein Wissen nicht nachempfinden kann. Andere große Mathematiker, insbesondere der geniale Poincaré haben ihre Intuition in den Mittelpunkt des mathematischen Wissens gestellt. Wenn wir das Verhältnis Wahrheit vs. Wissen hinterfragen, sollte die Meßlatte der zweiten Forderung an die Aussagen der Koryphäen angelegt werden.

Über das Benacerrafsche Dilemma wird in der Philosophie eifrig diskutiert. Unser Anhang D listet markante Rezeptionen auf, aus denen die Zersplitterung der weiterführenden Literatur hervorgeht. An dieser Stelle halten wir nur fest, daß das Benacerrafsche Dilemma die Kompatibilität zwischen logischem Beweisen und intuitivem Erfinden zur zentralen Frage der Philosophie der Mathematik erhebt. Wir werden in Kapitel 9 begründen, warum das Dilemma aus der Sicht des Mathematikers nicht besteht.

[36] Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 675.

[37] Vgl. [Wittgenstein, 1953], § 293: „Angenommen, es hätte Jeder eine Schachtel, darin wäre etwas, was wir ‚Käfer' nennen. Niemand kann je in die Schachtel des Andern schauen; und Jeder sagt, er wisse nur vom Anblick seines Käfers, was ein Käfer ist. Da könnte es ja sein, dass Jeder ein anderes Ding in seiner Schachtel hätte."

4.3.3. Platoniker und Platonisten

Der Unbeweisbarkeit der apriorischen Axiome wegen ist das Benacerrafsche Dilemma ein Einwand gegen eine u.E. seltene Form des Platonismus. Wir meinen die Platoniker unter den Platonisten, die einen Identitätsanspruch zwischen den menschlich erarbeiteten mathematischen Strukturen und den intrinsischen Strukturen der Ideenwelt stellen. Diese Rigoristen dürfte Benaceraff meinen:

> To introduce a speculative historical note, with some foundation in the texts, it might not be unreasonable to suppose that Plato had recourse to the concept of anamnesis at least in part to explain how, given the nature of the forms as he depicted them, one could ever have knowledge of them[38].

Benaceraff führt zur Untermauerung den *Menôn* an, wo Plato Wiedererinnerung (anámnesis) als Weg zur wahren Erkenntnis zeichnet[39]. Wir mutmaßen, daß die meisten Anhänger des mathematischen Platonismus sich lediglich zum Dualismus der Ideen- und der Bilderwelt im Höhlengleichnis bekennen. Mit *anámnesis* und *méthexis* (Teilhabe an den Ideen) mobilisiert Plato ein aporematisches Instrumentarium, um eine Brücke zwischen zwei Welten zu schlagen. Der Mathematiker sucht keinen Ausstieg aus der Höhle. Ihn interessiert nur der Tanz der Schatten an der Höhlenwand. Analog mag der Physiker aus der Riemannschen Geometrie die Inspiration zu einem 4D-Modell schöpfen, er schließt nicht auf die Existenz einer realen transzendenten vierten Dimension.

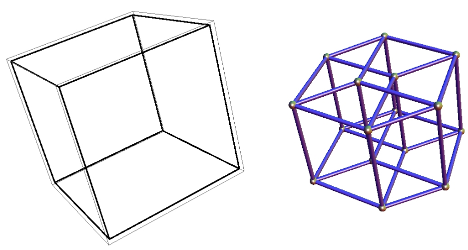

Abbildung 4.5.: 3D & 4D-Würfel

Der Höhleninsasse ist, so Plato, derart angekettet, daß er nicht einmal den Kopf drehen kann. Seine visuelle Wahrnehmung der durch das Feuer geworfenen Schatten ist daher zweidimensional. Dennoch mögen ihm die Geräusche der von der Höhlendecke fallenden Wassertropfen ein auditives Gefühl für eine dritte Dimension suggerieren.

So mag er die zwei durch ihre Ecken verbundenen Vierecke der Abb 4.5 nicht prima facie interpretieren, sondern das Geflecht in der dritten Dimension zu einem „Würfel" auseinanderziehen. An der zweidimensionalen Projektion an der Höhlenwand kann der Geometer die Ecken, Kanten, Flächen zählen; er kann die Rotation des Würfels berechnen; er erarbeitet sich an der flachen Höhlenwand ein Wissen um den Würfel, ohne spatiale Wahrnehmung, mithin ohne sinnliche

[38]Vgl. [Benacerraf, 1973], S. 673.

[39]Vgl. Menôn 81: „Da nun die Seele unsterblich und öfters geboren worden ist und die Dinge hienieden und im Hades und überhaupt alle geschaut hat, so gibt es auch nichts, wovon sie nicht eine Kenntnis erlangt hätte."

Anschauung. Wir sehen nur die Projektion des Würfels; es bedarf noch eines Kantischen Schemas, damit sie der Verstand in ein dreidimensionales mentales Bild umsetzt.

Es geht viel weiter; wenn wir *Hyperwürfel* (oder *Tesserakt*) in eine Suchmaschine eingeben, erhalten wir dank des Computers sogar eine Animation der zweidimensionalen Projektion des rotierenden 4D-Hyperwürfels. Der Platonist zählt die Ecken, Kanten, Flächen und Hyperflächen; er berechnet die In- und Umkugel; er macht Schnitte durch den Hyperwürfel[40]; er macht noch vieles mehr wie in [Lo Jacomo, 2002] sehr schön visualisiert. Bei seiner Arbeit denkt der Platonist an eine Platonische Idee der Mathematik, in der ihm der rotierende Hyperwürfel so banal erschiene wie unser 3D-Würfel; eine magische Welt, wo selbst die Riemannsche Vermutung ein trivialer Satz wäre.

Eine duale Ideenwelt gäbe es zwangsläufig auch ohne intelligente Lebewesen. Da wir auf die Naturgesetze keinen Einfluß haben, muß uns ein jenseitiger Großer Geometer seine Gesetze vorschreiben. Im Dualismus existieren zwei Welten, wovon jede eigene Objekte und eigene verknüpfende Strukturen besitzt.

Anthropische logische Strukturen schreiben der Realität nichts vor, sondern sie reflektieren unser selbstgemachtes Bild der Realität. Wir sind aber frei, logische Strukturen zu konstruieren, die mit der Realität nicht interferieren. Eine Schachfigur ist ein abstraktes Objekt - wir meinen nicht die stoffliche Figur sondern deren symbolischen Gehalt -, aber nicht in dem selben Sinne wie etwa eine natürliche Zahl oder ein Dreieck. Die logische Struktur des Schachspiels ist ein unauflöslich mit dem Menschen verwobenes Artefakt, während sich die logische Struktur der Mathematik a priori aufdrängt. Auch wenn das Schachspiel einer Schlacht nachempfunden ist, ist es kein Modell einer Schacht, sondern eine Fiktion mit freigewählten Strukturen, den Schachregeln. Die Objekte der Mathematik sind auch Artefakten. Es ist jedem gegönnt, beliebige Objekte zu definieren, z.B. eine neue Verknüpfung zwischen Vektoren. Entspränge die Verknüpfung keiner neuen Theorie, wäre sie nur ein Ballast, während das skalare bzw. Vektorprodukt einen Nutzen haben. Die mathematischen Theorien modellieren die Strukturen der transzendentalen (d.h. menschengewirkten) Realität, ohne den Anspruch, die jenseitigen Strukturen der uns unzugänglichen Ideenwelt nachzubilden. Daß reale Struktur und Modellstruktur grundsätzlich differieren, ist der Kernpunkt unserer Auffassung.

Es besteht ein großer Unterschied zwischen den Modellen der reinen Mathematik und denen der mathematisierten Wissenschaften. In der Physik ersetzt die Forschung immer

[40] Er untersucht ebenso präzise die fünf anderen Platonischen Körper, wovon es im $\mathbb{R}^4$ sechs gibt.

wieder Modellstrukturen durch völlig andere, die das Erkenntnisspektrum erweitern, ohne deswegen im geringsten realer zu werden. Einsteins Relativitätstheorie stellt einen höheren Wissensanspruch als das Newtonsche Modell; die Strukturen Newtons wurden nicht verbessert sondern ausgetauscht. Alle mathematischen Modelle hingegen, da liegt der grundsätzliche Unterschied, bleiben ewig wahr. Spätere Alternativbeweise sind Beschreibungen aus einem anderen Blickwinkel; manche sind eleganter aber nicht etwa „wahrer"; die älteren Beweise werden weder entthront noch gestärkt. Es ändert sich der Standort des Betrachters, der in dem Objekt neue Facetten entdeckt. Die Vielheit der Beschreibungen erhöht das Harmoniegefühl, das sich in dem Traum einer jenseitigen Einheit äußert. Laufen wir um Rodins *Denker* herum, addieren sich partielle Wahrnehmungen zu einer holistischen spatialen Verinnerlichung.

Der so verstandene Platonismus ist gegen den Benacerrafschen Einwand immun. Der Mathematiker bildet sich nämlich nicht ein, die intrinsischen Strukturen der Ideenwelt zu durchleuchten. Die Idee der Mathematik strahlt Harmonie aus. Menschliche Beweise sind nicht einmal schön; einige wenige sind bestenfalls elegant. Wir werden im Kapitel 9 sehen, daß Poincaré das Harmoniegefühl zu dem Mentor erklärt, der die Intuition des Mathematikers durch den Wirrwarr der möglichen Lösungswege sicher anleitet.

Zum Schlußfolgern verfügt der Mathematiker auf ein mächtiges Werkzeug, den Computer. An den Regeln des Beweisens ändert der Computer nichts - weil sich die Logik nicht ändert. Offenbar unterstützt der Computer die Intuition des Mathematikers durch rasend schnelles Rechnen, womit er am Beweisprozeß kaum partizipiert. Wir sind aber heutzutage bereits in eine neue Ära eingetreten, wo der Computer mehr und mehr in Semantik und Epistemologie eindringt, so daß sich die Teilhabe des Computers am Benacerrafschen Dilemma auswirkt. Das möchten wir jetzt an Beispielen illustrieren.

4.4. Epistemik der Computerbeweise

Als Paradigma wählen wir den 4-Farbensatz[41].

[41] Bekanntlich werden zum Einfärben einer Landkarte maximal vier Farben benötigt. Daß sich die Gebiete durch Farbe oder irgendeine andere Eigenschaft unterscheiden, ist irrelevant; der Satz wird z.B. bei der Vergabe von Rundfunkfrequenzen verwendet, um Interferenzen zwischen Sendern mit gleicher Trägerfrequenz zu minimieren. Der verallgemeinerte Satz läßt sich z.B. folgendermaßen formulieren: Es werde ein kompaktes Gebiet G des $\mathbb{R}^2$ in Untergebiete $U_1 \dots U_n$ so aufgeteilt, daß $G = \bigcup U_i$. Weiter wird jedem U_i eine der 4 Eigenschaften A_1, A_2, A_3, A_4 zugewiesen. Dann existiert mindestens eine injektive Zuordnung, so daß keine zwei aneinander angrenzenden U_i dieselbe Eigenschaft A_j erhalten.

Zum ersten Mal wird die Arbeit des Computers in einen Beweis integriert. Die Graphentheorie liefert einen leichten Beweis, daß höchstens sechs Farben benötigt werden. Mit mehr Aufwand kann die Anzahl der Farben auf fünf reduziert werden, aber bei vier Farben stieß man zuerst auf unendlich viele potentielle Ausnahmen. 1976 reduzierten K. Appel und W. Haken die Anzahl der Problemfälle von unendlich auf endlich viele, die durch massiven Computer-Einsatz sodann überprüft wurden. Die Geburtsstunde der *experimentellen Mathematik* hatte geschlagen.

Noch bestanden Bedenken, ob einem Computer-Beweis vertraut werden kann. Erst 2005 räumte der formale Beweis von G. Gonthier und B. Werner mit ihrer *Coq*-Software mit den letzten Zweifeln auf. Gonthier, der es wissen mußte, gesteht unerwarteterweise dem computerunterstüzten formalen Beweisen eine epistemische Mitwirkung zu:

> [The formal proof] is not merely a method to make absolutely sure we have not made a mistake in a proof, but also a tool that shows us and compels us to understand why a proof works.[42].

Ausgerechnet das unverständige Werkzeug entläßt den Mathematiker aus dem Benaceraffschen Dilemma! Gonthier freut sich, das seine *Coq*-Software nicht nur die Wahrheit etabliert, sondern ihn auch „zu verstehen zwingt, warum der Beweis funktioniert". Es geht um den Übergang vom *Glauben* zum *Wissen*. Es verwirrt uns analog, wenn der Schachcomputer einen Zug wählt, den wir nicht nachvollziehen. Gonthier proklamiert die Erfüllung der zweiten Benaceraffschen Forderung, d.h. die Rückkopplung zwischen Wahrheit und Beweis.

Wir fragen wieder, was *Wissen* im Alltag bedeutet. Unser Wissen ist überwiegend ein Wissen durch Zeugnisse. Von unserem Wissen um die Welt draußen haben wir nur einen ganz winzigen Teil persönlich überprüft. Wissen wir verläßlich, ob die Amerikaner tatsächlich auf dem Mond gelandet sind? Weiß ich, ob das Ehepaar, das ich meine Eltern nenne, wirklich meine Genitoren war? Doch meint Wittgenstein richtig: „Braucht man zum Zweifel nicht Gründe?[43]", denn „Wer an allem zweifeln wollte, der würde auch nicht bis zum Zweifel kommen[44]." Es müssen Gründe vorliegen, die das Zweifeln berechtigen. Wie entscheidet der Mathematiker, wo Zweifel angebracht sind, wenn er nicht in die Zirkularität des Zweifelns geraten will? Dazu Wittgenstein:

> Sage ich in der Mathematik ‚Ich weiß', so ist die Rechtfertigung dafür ein Beweis. Und die Rechtfertigung hat ein Ende[45].

[42] Vgl. [Gonthier, 2008], S. 1382.
[43] Vgl. [Wittgenstein, 1951], 122.
[44] Vgl. ebd. 114, 115.
[45] Vgl. ebd., 563.

Wo endet die Rechtfertigung des Zweifelns im Alltag? Vielleicht dann, wenn wir nicht mehr mißtrauisch sind. Auch wenn wir keine Gewißheit erreichen, signalisiert uns die Intuition, wo Wissen beginnt. An dieser Stelle möchten wir noch keine Debatte über *Intuition* eröffnen; wir meinen hier Intuition einfach im Sinne von Poincaré:

> Also haben die Logik sowohl als die Intuition jede ihre unentbehrliche Aufgabe. Beide sind notwendig. Die Logik, die allein Gewißheit geben kann, ist das Werkzeug des Beweisens; die Intuition ist das Werkzeug des Erfindens[46].

Wir verorten in der so verstandenen Intuition - d.h. in der Anschauung durch den inneren Sinn - die Erfüllung der zweiten Benacerrafschen Forderung. Im Falle des 4-Farben-Satzes verläßt sich Gonthier auf den logischen Beweis durch den Computer, aber darüberhinaus zwingt die *Coq*-Software ihn, und alle die den Beweis lesen, „to understand why [the] proof works". Für Gonthier und die wenigen auf dem Gebiet tätigen Mathematiker ist die zweite Forderung erfüllt. Der Außenstehende, dem die adäquate Intuition fehlt, überblickt den Beweishorizont nicht. Zur Illustration nehmen wir das Beispiel des flachen Torus.

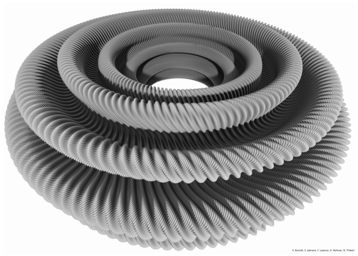

Abbildung 4.6.: Flacher Torus

Bis 2011 war man sich sicher, daß alle Tori im euklidischen Raum gekrümmt sind. Ein euklidisches Diagramm auf einem Blatt Papier bleibt euklidisch, d.h. flach, wenn das Blatt zu einem Zylinder eingerollt wird. Sobald die Zylinderkanten zu einem Torus zusammengeklebt werden, entstehen Falten, d.h die konstante Nullkrümmung geht verloren. Durch konvexe Integration gelang es schließlich den *flachen Torus* der Abb. 4.6 aus [Borelli & al., 2012] mit dem Computer zu visualisieren. Die wellige Struktur läßt die Flachheit des Torus kaum erkennen, da die Oberfläche eine fraktale Struktur besitzt.

In diesem Beispiel verwendet Borelli einen klassischen *informalen Beweis*[47], d.h. die Folgerung entwickelt sich an einem frei gewählten Leitfaden. Es entstehen bei informalen Beweisen stets viele Sprünge, wenn die Lücken zu umständlich in extenso aufzufüllen wären und daher lieber der Kompetenz des Mathematikers aus dem Fachgebiet überlassen werden. Üblicherweise fällt z.B. in dem Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes auf Seite 62 nicht auf, daß A_c zunächst nur eine Raute ist, denn die Rechtwinkligkeit ist trivial. Derartige Lücken treten bei informalen Beweisen zuhauf auf. Im Verfahren der

[46] Vgl. [Poincaré, 1905b], S.21. Übersetzung CF.

[47] Informal steht hier für das, was nicht auf vorgegebenen Regeln beruht, nicht in dem speziellen Sinne, wonach ein Beweis ein formales mathematisches *Objekt* sei.

Peer-Review (Begutachtung durch Ebenbürtige) rekonstruieren Experten den Beweis und überprüfen die Lücken auf Auffüllbarkeit. Ein Theorem ist dann wahr, wenn es die *Peer-Review* bestanden hat. Bis 2011 hielt man für wahr, daß sich der flache Torus im euklidischen Raum nicht einbetten läßt; die *Peer-Review* hätte keine Einwände erhoben.

Informalität kennzeichnete schon immer die mathematischen Beweise. Sogar die Beweise der Literatur für Anfänger strotzen von Lücken, auf die bestenfalls mit dem narrenden Vermerk *trivial* bzw. *Übungsaufgabe* hingewiesen wird. Die Lücken entstehen, wenn die Intuition des Autors bzw. der *Referees* der Peer-Review überhandnimmt. Die Geschichte der Mathematik wimmelt von Fermat bis A. Wiles von Beweisen, die erst nachträglich „repariert“ wurden. Die Schwäche der informalen Beweise kann man mit Benacerraf schlechte Semantik nennen. Enthält der Beweis keine Fehler und leuchtet ein, so gleicht die gute Epistemik im Sinne von Wittgenstein die wortarme Semantik aus, denn „die Rechtfertigung hat ein Ende.“ Das systematische Schreiben *formaler* Beweise würde einen kaum vorstellbaren Zeitaufwand verursachen. Die „Beweisidee“ zum 4-Farben-Satz in [Fritsch, 1994] umfaßt bereits 255 Seiten vor dem Computereinsatz. Auch würden die vielen trivialen Schritte den unverzichtbaren Leitfaden überschütten. Die exzessiv detaillierte Semantik wäre kein Gewinn, da mathematische Beweise nur für Mathematiker geschrieben werden.

Mit dem Computer sind formale Beweise ein erfreuliches Nebenprodukt: Wer in einer Maschinensprache programmiert, schreibt damit zwangsläufig einen lückenlosen formalen Beweis, der wegen der „Enge des Bewußtseins“ sonst unmöglich wäre. Der Computer bürgt für eine bessere Semantik und höhere Wahrheitsqualität. Psychologisch erfreut sich jedoch das formale Beweisen, trotz aller Vorteile, keiner Beliebtheit; es wird mit brachialer Gewalt gerechnet, während die Mathematiker, ob Platonisten oder Nominalisten, nach Eleganz streben. Darüber mehr in unserem Kapitel 9.

4.5. Fazit

Geht man davon aus, daß Wissen am besten durch kausale Erkenntnistheorien begründet wird, so muß die Kausalität die Grenze zwischen den dualen Welten überspringen können (das übernehmen bei Plato Anamnesis und Methexis). Die abstrakten Objekte leben in der Ideenwelt; in diese Wunde des Platonismus legt Benacerraf zu Recht den Finger. Die Fragestellung, die Benacerraf mit seinem Dilemma einleitet, konnte er, wie er mehrfach betont, in der Kürze eines Vortrages nur anreißen. Das Dilemma hat in den letzten fünfzig Jahren eine Lawine von philosophischen Arbeiten ausgelöst, die wir im Anhang D nur auflisten, da eine Diskussion den Rahmen unserer Arbeit deutlich sprengen würde. Abschließend halten wir fest, was uns das Dilemma erkennen ließ:

i) Benacerraf begründet nirgendwo mit mathematischen Beispielen, weshalb gute Semantik und gute Epistemik unverträglich seien.
ii) Seine Beispiele entnimmt er dem Alltagswissen, wo ein Wissen durch die Wahrheitsbedingungen zu legitimieren ist: Peter weiß daß p, wenn er begründen kann, daß die Wahrheitsbedingungen von p erfüllt sind.
iii) Eine mathematische Behauptung wird erst dann zu einem Theorem, wenn eine Kette logischer Schritte die Wahrheitsbedingungen mit der Behauptung verknüpft. Ein Beweis bürgt für Übereinstimmung von Semantik und Epistemik.
iv) Wegen der von Einstein beklagten „Enge des Bewußtseins“ kann die Beweiskette dem Mathematiker nicht in einem Stück präsent sein. Sie wird sequentiell durch das Bewußtsein untersucht, so daß kein Glied fehlt.
v) Der Mathematiker, der einen Beweis für ebenbürtige Kollegen schreibt, besitzt eine intime Intuition der Rückkopplung zwischen Wahrheit und Wissen, so daß die vielen trivialen Lücken eines informalen Beweises das Wissen um das Theorem nicht behindern.
vi) Der Computer, wenn er nicht ausschließlich zum schnellen und fehlerfreien Rechnen eingesetzt wird, zwingt den Mathematiker, formale Beweise im Dialog mit dem Rechner zu schreiben, womit die trivialen Lücken gefüllt werden.
vii) Das Dilemma stellt keinen massiven Angriff gegen den Platonismus dar; es richtet sich zu Recht gegen die Platoniker unter den Platonisten, die mit anthropischen Modellen den Schleier über den Strukturen der Ideenwelt zu lüften hoffen.

Poincaré wird durch die Rolle der Illumination das Dilemma aus der Sicht des Mathematikers auflösen. Inzwischen werden wir im nächsten Kapitel den durchaus ernstzunehmenden Logizismus näher betrachten. Da Einigkeit darüber herrscht, daß die Logik das Werkzeug des Beweisens ist, so könnte die Mathematik zu einem Zweig der Logik erklärt werden, ohne die Rolle der Intuition deswegen unterschätzen zu müssen. Es geht uns darum zu zeigen, daß die Mathematik von der Logik nicht abgeleitet werden kann.

5. Vom Logizismus zum Konstruktionismus

Die Grundlagenkrise der Mathematik bereitet dem Logizismus ein Ende. Vorstellung und Erkenntnis sind zweierlei. Visualisierung ist entbehrlich. Warum kollidieren mathematische Fiktionen nicht? Mathematik ist ein in der Realität festverankerter Elfenbeinturm. Die Logik ist kein Werkzeug der Erfindung. Das Schema zum Erkennen von Analogien. Brouwers unorthodoxe Theorie rüttelt am Fundament der Mathematik.

Um die Zeit zur apriorischen Anschauungsform zu erklären, orientiert sich Kant an der reinen Mathematik, „deren Begriff es schon mit sich bringt, daß sie nicht empirische, sondern bloß reine Erkenntnis a priori enthalte[1].“ Die Logizisten meinen hingegen: wenn es gelingt die natürlichen Zahlen logisch abzuleiten, dann läßt sich auch die gesamte Mathematik in der Sprache der Logik schreiben, d.h. die mathematischen Sätze wären, nicht wie von Kant behauptet synthetisch sondern analytisch. Kronecker meinte: Gott hat uns die natürlichen Zahlen geschenkt, alles weitere sei Menschenwerk. Der Logizismus geht weiter: egal wer uns die Logik in die Wiege legte, sind selbst die natürlichen Zahlen eine logische Konstruktion. Wir sehen uns zuerst die Kantische These näher an.

5.1. Kants Arithmetik

Kant analysiert das arithmetische Beispiel $7 + 5 = 12$. In den Begriffen der 7 und der 5 ist der Begriff der 12 nicht enthalten, also ist der Satz nicht analytisch. Welche Rolle spielt die Anschauung beim Addieren?

> Man muß über diese Begriffe [der 5 bzw. 7] hinausgehen, indem man die Anschauung zu Hülfe nimmt, die einem von beiden korrespondiert, etwa seine fünf Finger [...], und so nach und nach die Einheiten der in der Anschauung gegebenen Fünf zu dem Begriffe der Sieben hinzutut [...] Der arithmetische Satz ist also jederzeit synthetisch; welches man desto deutlicher inne wird, wenn man etwas größere Zahlen nimmt, da es denn klar einleuchtet, daß, wir möchten unsere Begriffe drehen und wenden, wie wir wollen, wir, ohne die Anschauung zu Hülfe zu nehmen,

[1]Siehe längeres Zitat auf S. 239.

> vermittelst der bloßen Zergliederung unserer Begriffe die Summe niemals finden könnten[2].

Addieren wird in der Schule mühsam gelernt und geübt, bis man seine Finger nicht mehr bemüht und bei geschlossenem Mund rechnet. In der Pizzeria rechnet der Kellner in seiner Muttersprache. Der arithmetische Satz ist zweifelsfrei synthetisch aber nur bedingt a priori. Die Aussage $7 + 5 = 12$ ist u.E. kein Urteil sondern die gesprochene Ansage des Ergebnisses eines Algorithmus, bei dem der Operator $+$ die Synthetizität bewirkt. Wir zitierten auf S. 20: „Findet sich also ein Satz, der zugleich mit seiner Notwendigkeit gedacht wird, so ist er ein Urteil a priori.“ Bei kleinen Summanden mögen begabte Kopfrechner die Summe mit einem Schlag erfassen[3]. Ab welche Zahlengröße und für welche Probanden leuchtet eine Addition nicht mehr ein? d.h. wie groß dürfen A, B, C sein, so daß ohne Rechnen die Gleichheit $A + B = C$ eingesehen wird. Die Frage fällt heute in den Bereich der experimentellen Psychologie. Es gibt eine subjektabhängige Rechengrenze, oberhalb derer die spontane Erkenntnis dem algorithmischen Rechnen weichen muß, ohne daß deswegen die Addition ihr Wesen verändern hätte.

Wenn die Sätze der Arithmetik synthetische Urteile sind, heißt es, daß sie ein Subjekt mit einem Prädikat verbinden, das im Begriff des Subjekts nicht bereits enthalten ist. Der Operator $+$ ist in den Zahlen 7 und 5 tatsächlich nicht enthalten. Wenn es aber gelänge, den Algorithmus der Addition als logische Operation umzuformen, dann wäre $7 + 5 = 12$ nicht mehr synthetisch sondern ein logischer Satz d.h. analytisch und a priori[4], gleichgültig was die Addition unterhalb und oberhalb der subjektabhängigen Rechengrenze sei. Läßt sich die Arithmetik tatsächlich von der Logik ableiten?

5.2. Der Weg zum Logizismus

Die ersten Ansätze fand bereits Leibniz, der an einer formalen logischen Universalsprache (*characteristica universalis* bzw. *spécieuse générale*) arbeitete, in der sich alle mathematischen und metaphysichen Syllogismen formulieren ließen[5].

[2] Vgl. [Kant, 1787], Einleitung, Abschn. V.

[3] Im Beispiel $7 + 5 = 12$ übersteigen u.E. die 7 und noch mehr die 12 bereits unser spontanes Evaluierungsvermögen. Erst durch Zerlegen in kleinere Häppchen, z.B. $4 + 3$, erkennen wir, daß 7 Personen um den Tisch sitzen; ab etwa 5 fehlt das exakte Zahlgefühl.

[4] Vgl. Wittgensteins Tractatus [Wittgenstein, 1922]: „[6.1] Die Sätze der Logik sind Tautologien, [6.11] Die Sätze der Logik sagen also Nichts (Sie sind analytische Sätze).“

[5] Vgl. [Leibniz, 1714], Brief an Nicolas Rémond, 10. November 1714: „J'espérerais donner une manière de Spécieuse Générale, où toutes les vérités de raison seraient réduites à une façon de calcul. Ce pourrait être en même temps une manière de langue ou d'écriture universelle, mais infiniment différente de

In der Überzeugung, daß letztlich jede Wissenschaft auf allgemeinen Prinzipien der Logik beruht, führt der Logizismus auch die Mathematik auf die Logik zurück. Die gesamte Mathematik wird, ohne weitere Grundbegriffe oder Annahmen, aus der Logik gewonnen[6]. Das logizistische Programm faßt Carnap prägnant zusammen:

> Als *Logizismus* wird die Auffassung bezeichnet, daß die Mathematik auf Logik zurückführbar, also nichts anderes als ein Teil der Logik sei [...] Wir wollen die These des Logizismus in zwei Teilthesen aufspalten, die nacheinander erörtert werden sollen: 1. die mathematischen Begriffe sind aus den logischen Begriffen ableitbar, und zwar durch explizite Definitionen; 2. die mathematischen Sätze sind aus den logischen Grundsätzen ableitbar, und zwar durch rein logische Deduktionen[7].

Frege lehnt Kants These der Notwendigkeit der Anschauung beim Addieren respektvoll aber dezidiert ab[8]. Die sinnliche Anschauung ist für den Platonisten Frege[9] entbehrlich:

> Ich muß auch der Allgemeinheit der Behauptung Kants widersprechen: ohne Sinnlichkeit würde uns kein Gegenstand gegeben werden. Die Null, die Eins sind Gegenstände, die uns nicht sinnlich gegeben werden können. Auch Diejenigen, welche die kleineren Zahlen für anschaulich halten, werden doch einräumen müssen, daß ihnen keine der Zahlen, die größer als $1000^{1000^{1000}}$ sind, anschaulich[10] gegeben werden können, und daß wir dennoch Mancherlei von ihnen wissen[11].

Freges bahnbrechende kurze Schrift *Die Grundlagen der Arithmetik* definiert folgendermaßen die Zahlen als *logische* Objekte:

> Einem Begriffe kommt die Zahl 0 zu, wenn allgemein, was auch a sei, der Satz gilt, daß a nicht unter diesen Begriff falle[...]
> Einem Begriffe F kommt die Zahl 1 zu, wenn nicht allgemein, was auch a sei, der Satz gilt, daß a nicht unter F falle, und wenn aus den Sätzen „a fällt unter F“ und „b fällt unter F“ allgemein folgt, daß a und b dasselbe sind[...]
> Dem Begriffe F kommt die Zahl $(n+1)$ zu, wenn es einen Gegenstand a giebt, der

toutes celles que l'on a projetées jusqu'ici, car les caractères et les paroles mêmes y dirigeraient la raison, et les erreurs (exceptées celles de fait) n'y seraient que des erreurs de calcul.“

[6]Vgl. [Frege, 1884] § 87: „Ich hoffe in dieser Schrift wahrscheinlich gemacht zu haben, daß die arithmetischen Gesetze analytische Urtheile und folglich a priori sind. Demnach würde die Arithmetik nur eine weiter ausgebildete Logik, jeder arithmetische Satz ein logisches Gesetz, jedoch ein abgeleitetes sein.“

[7]Vgl. [Carnap, 1931], S. 91-92.

[8]Vgl. [Frege, 1884], § 89: „Um nicht den Vorwurf einer kleinlichen Tadelsucht gegenüber einem Geiste auf mich zu laden, zu dem wir nur mit dankbarer Bewunderung aufblicken können, glaube ich auch die Übereinstimmung hervorheben zu müssen, welche weit überwiegt.“

[9]Frege war ein Platonist, kein Platoniker. Für ihn sind Existenz und Beschaffenheit abstrakter Objekte zwar von dem Denkakt, aber nicht von der menschlichen Vernunft unabhängig, vgl. [Frege, 1884], § 26: „So verstehe ich unter Objectivität eine Unabhängigkeit von unserm Empfinden, Anschauen und Vorstellen, von dem Entwerfen innerer Bilder aus den Erinnerungen früherer Empfindungen, aber nicht eine Unabhängigkeit von der Vernunft; denn die Frage beantworten, was die Dinge unabhängig von der Vernunft sind, hieße, urtheilen, ohne zu urtheilen, den Pelz waschen, ohne ihn naß zu machen.“

[10]Kant würde hier widersprechen. Im Zitat auf S. 90 begründet Kant, daß die nicht sinnlich wahrnehmbaren Ecken des 96-Ecks anschaulich sind, da sie mit dem Schema der Analogie konstruiert werden können. Auch riesige Potenzen sind eine Konstruktion aus wiederholten Multiplikationen.

[11]Vgl. [Frege, 1884] § 89.

> unter F fällt und so beschaffen ist, daß dem Begriffe „unter F fallend, aber nicht a“ die Zahl n zukommt[12].

Später werden wir ab S. 158 aus der Sicht des Mathematikers auf die Petitio Principii dieser Zahlenkonstruktion eingehen. Eine Theorie der Arithmetik arbeitete Frege in [Frege, 1893, 1903], *Grundgesetze der Arithmetik*, im Detail aus. Erwähnenswert ist, daß Frege der *Bedeutung* (heute: Extension) eines Satzes einen Wahrheitswert zuordnet: „Ich unterscheide nämlich zwei Wahrheitswerthe: das Wahre und das Falsche[13].“ Bertrand Russell wird ihm vorwerfen, daß er einen kategoriellen Fehler macht, wenn er die beiden Wahrheitswerte als Gegenstände auffaßt. Wir gehen auf diese Debatte und die Theorie Freges kurz ein, der ein unerwartet jähes Ende beschieden wurde.

Kurz vor Druckfreigabe der *Grundgesetze* erhebt Russell in einem Brief an Frege[14] den Einwand seiner bekannten Antinomie der Klasse aller Klassen, die sich nicht selbst als Element enthalten[15]. Wenn auch Frege den Begriff einer Menge nicht unmittelbar verwendet, läßt sich die Antinomie auf Freges Theorie übertragen[16]. Frege gibt sich geschlagen und bekennt ehrlich in einem Nachwort zu den *Grundgesetzen*, daß die logizistische Identifizierung von Arithmetik und Logik ein steiniger Weg ist:

> Solatium miseris, socios habuisse malorum[17]. Dieser Trost, wenn es einer ist, steht auch mir zur Seite; denn Alle, die von Begriffsumfängen, Klassen, Mengen in ihren Beweisen Gebrauch gemacht haben, sind in derselben Lage. Es handelt sich hierbei nicht um meine Begründungsweise im Besonderen, sondern um die Möglichkeit einer logischen Begründung der Arithmetik überhaupt[18].

In der Tat hatte Frege eine hervorragende Leistung erbracht und es bewahrheitete sich seine Skepsis „um die Möglichkeit einer logischen Begründung der Arithmetik überhaupt“, wie das Scheitern der weiteren Bemühungen der beiden großen Logizisten Russell und Carnap zeigen wird.

Russell betrachtet die Arithmetik aus der Sicht der Mengenlehre, wobei er u.E. von einem Logizismus stricto sensu abweicht, denn die Mengenlehren gehören nicht zur Logik. Um seiner eigenen Antinomie auszuweichen, gründet er die Typentheorie. Der Leitgedanke besteht darin, auf den Umfang einer Menge nicht einzugehen, sondern die Elemente nur zu typisieren. Wer z.B. von der Menge der Schmetterlinge spricht, muß in der Lage sein, alle Schmetterlinge erfaßbar zu machen. Der Typ ist eher das Etikett der Schublade, in der Schmetterlinge abgelegt werden.

[12]Vgl. [Frege, 1884], § 55.
[13]Vgl. [Frege, 1893, 1903], Vorwort, S. X.
[14]Vgl. [Russell, 1902].
[15]Entsprechend der damaligen Mengenlehre stand früher an dieser Stelle *Menge* anstatt heute *Klasse*.
[16]Vgl. z.B. [Panza & Sereni, 2013], S. 139 ff.
[17]= Es ist ein Trost für Unglückliche, Leidensgenossen zu haben.
[18]Vgl. [Frege, 1893, 1903], Nachwort, S. 253.

5.3. Grundlagenkrise der Mathematik

Dem Logizismus setzt Hilbert den Formalismus entgegen. Die ontologische Beschaffenheit der mathematischen Objekte ist weniger von Interesse als die strukturellen Relationen zwischen den Objekten, die hinter den Kreidestrichen an der schwarzen Tafel stehen. Solange keine Widersprüche entstehen, ist Mathematik ein Operieren mit Zeichen nach mathematisch-logischen Regeln und Axiomen, und die Objekte der Mathematik existieren in diesem Sinne. Gleichgültig wie Punkte, Linien und Ebenen ontologisch aufgefaßt werden mögen, legen Axiome die Bedingungen fest, damit die mathematischen Objekte die gewünschten Eigenschaften erfüllen.

Dem Formalismus setzte Luitzen E. J. Brouwer den Intuitionismus entgegen. Mathematische Objekte sind mehr als bloße Zeichen; sie existieren, zwar nicht als Abbilder von Platonischen Ideen, sondern in der Intuition. Die geistige Konstruktion ist keine sprachliche, womit sich Brouwer auch vom Logizismus distanziert. Das Fundament der Brouwerschen Intuition ist die Apriorität der Zeit: durch seine angeborene „Ur-Intuition" der Zeit ist der Mathematiker in der Lage, eine Abfolge von Ereignissen zu durchleuchten: „The primordial phenomenon is no more than the intuition of time, in which repetition of *thing-in-time and again thing* is possible[19]." Diese menschliche Gabe des Iterierens wird auch von Poincaré besonders hervorgehoben. Die Apriorität der Zeitform wird von Brouwer nur behauptet, d.h. als Urintuition vorausgesetzt.

Auf einer Tagung in Königsberg sprach 1930 Kurt Gödel über seine Unvollständigkeitsergebnisse, die er ein Jahr später in [Gödel, 1931] veröffentlichte, womit der Grundlagenstreit ein jähes Ende fand. Gödels beide Unvollständigkeitssätze erschütterten die formalistische und logizistische Selbstsicherheit mit folgender Feststellung[20]. Da jede Arithmetik auf nur endlich vielen widerspruchsfreien Axiomen aufgebaut ist, gibt es mindestens einen Satz γ, so daß weder γ noch dessen Negation $\neg\gamma$ in dieser Arithmetik beweisbar sind. Will man die Arithmetik mit γ als Axiom erweitern, bleibt sie gleichwohl unvollständig. Auch läßt sich die Widerspruchsfreiheit einer Arithmetik nicht innerhalb ihres

[19] Vgl. Walter P. van Stigt: Brouwer's Intuitionism, 1990, englische Übersetzung der von Korteweg gestrichenen Stellen von Brouwers Dissertation *Over de grondslagen der wiskunde.*

[20] Es sind zwei Unvollständigkeitssätze, die wir nur kurz umreißen.
Sei T ein genügend starkes formales System, z.B. ein rekursiv aufzählbares System T der Arithmetik.
Der erste Unvollständigkeitssatz S_1 besagt: Es gibt in der Sprache von T eine Aussage γ, so daß weder γ noch $\neg\gamma$ Sätze von T sind.
Gödel beweist dann: i) S_1 ist in T beweisbar; ii) falls T konsistent ist, dann γ.
Aber nach S_1 sind weder γ noch $\neg\gamma$ Sätze von T. Aus dem Widerspruch folgt der zweite Unvollständigkeitssatz S_2: Die Konsistenz von T ist nicht in T beweisbar.

Axiomensystems beweisen.

Die Unmöglichkeit eines Konsistenzbeweises der Mathematik im allgemeinen und der Arithmetik im besonderen entzieht Kant die Beweisgrundlage für die Apriorität der Anschauungsformen Raum[21] und Zeit. Deswegen haben wir auf einem ganz anderen Weg für die Apriorität des topologischen Raums und der Chronologie argumentiert.

Der Platonische Dualismus kann, wie von Benacerraf richtig diagnostiziert, kein Tor aufzeigen, durch das die vom Menschen konstruierte Mathematik in die Ideenwelt führen würde. Inspiriert durch den Logizismus ist nach dessen Scheitern eine Vielzahl von Theorien ohne Einbindung jedwedes metaphysischen Hintergrunds entstanden. Da wir keine historische Arbeit vorhaben, bieten wir keinen repräsentativen Rundgang an, der vielerorts kompetent und talentiert z.B. in [Panza & Sereni, 2013] nachzuschlagen ist.

5.4. Vorstellen ist kein Erkennen

Der Logizismus bekommt dadurch Wasser auf die Mühle, daß seriöse Beweise ohnehin in der Sprache der Logik geschrieben werden. Im 20. Jh. wurde es regelrecht zur Mode, selbst in Büchern der Geometrie keine Diagramme in die Beweise einzubinden. Die Visualisierung ist ein willkommenes Werkzeug zur Orientierung, nicht zum Beweisen.

Im Kantischen Schematismus, siehe S. 135, besitzt der Mensch das Vermögen, Bilder zu generieren, um Anschauung und Begriff zusammenzuführen. Beim Lesen eines Buches sorgt ein Schema dafür, daß die objektive sinnliche Perzeption (schwarze Tintenstriche auf einem weißen Blatt) spontan als Schrift interpretiert werden. Der Schematismus vermag u.E. zu erklären, wie Begriffe funktionieren, denen keine sinnliche Anschauung gegenübersteht; sie sind, hier müssen wir Kant widersprechen, beileibe nicht leer. Solche Begriffe wird man in der elementaren Geometrie nicht finden, der Kant seine Beispiele entnimmt, sie dominieren hingegen in der höheren Mathematik. Von der Basis eines Vektorraums kann man eine Skizze kritzeln, aber nicht von der zugehörigen Dualbasis, für die es aber ein simples Kantisches Schema gibt. Um die Problematik der Anschauung zu vertiefen, teilen wir erst die Mathematiker in zwei Gruppen ein.

Wie sich manche Schachspieler im Angriff andere in der Verteidigung wohl fühlen, unterscheiden sich die Mathematiker im angeborenen Temperament. Die Analytiker (=

[21] Ist die Arithmetik nicht konsistent, so auch nicht die Geometrie. Seit Descartes ist die Geometrie letztlich ein Umgang mit Zahlen. Auch Hilberts Axiome bauen, z.B. zur Definition des Punktes, auf den algebraischen Zahlen auf.

Logiker) prägen sich die abstrakten Regeln einer Theorie ein; sie rechnen sich probeweise in alle Richtungen. Sie sind den defensiven Schachspielern nicht unähnlich, die ihre Stellung beharrsam festigen, bis sich eine Bresche auftut, die sie strategisch ad hoc nützen[22]. Die andere Gruppe, die der Geometer, wie sie Poincaré paradigmatisch nennt, überblicken erst das Schlachtfeld, bis sie eine Stoßrichtung intuitiv wittern; sie schauen gern um sich und rechnen nur notgedrungen.

Diese Asymmetrie charakterisiert die Psyche des Erfinders, ohne daß die eine Veranlagung erfolgreicher als die andere wäre. Poincaré stellt die beiden Koryphäen der komplexen Analysis einander gegenüber:

> Weierstraß führt alles auf die Betrachtung von Reihen und ihre analytische Umformung zurück; besser gesagt, er reduziert die Analysis auf eine Fortsetzung der Arithmetik; man kann seine sämtlichen Schriften durchblättern, ohne ein einziges Diagramm zu finden. Riemann hingegen nimmt sofort die Geometrie zu Hilfe, jede seiner Vorstellungen ist ein Bild, das niemand vergessen wird, der den Sinn einmal erfaßt hat [...]
> Bei unseren Studenten sind dieselben Unterschiede festzustellen. Die einen behandeln ihre Probleme lieber durch „die Analysis“, die andern durch „die Geometrie“. Erstere sind unfähig „im Raum zu sehen“, die andern würden bei langen Berechnungen rasch ermüden und sich verwirren. Die Fortschritte der Wissenschaft benötigen beide Geistesbeschaffenheiten in gleichem Maße; die Logiker sowohl wie die Intuitiven haben Großes geleistet, was die anderen nicht vollbracht hätten [...] Die Analyse und die Synthese haben also beide ihre Berechtigung[23].

Was im Kopf des Geometer-Typus umherschwirrt, sind selbstgewirkte mentale Bilder, die nichts sinnlich Vorstellbares abbilden[24]. Metaphysische Spekulationen über Existenz oder Nicht-Existenz von Urbildern in der Ideenwelt münden in Aporien. Es macht nur Sinn, nicht die Existenz sondern die Erfindung abstrakter Objekte zu hinterfragen. Als Paradigma kann ein 1000-Eck (Descartes) bzw. 96-Eck (Kant) gewählt werden, d.h. ein Polygon mit so vielen Kanten, daß es das Auge als Kreis wahrnimmt. Bei einem Dreieck ist das mentale Bild ein idealisiertes getreues Abbild eines gezeichneten Dreiecks. Das mentale Bild eines 1000-Ecks ist ein kreisähnliches Etwas, in das Ecken und Kanten hineingedacht werden. Diese unscharfe Anschauung hilft nichts, um die Eigenschaften des 1000-Ecks von denen eines 10^n-Ecks zu unterscheiden. Die Erkenntnis des 1000-Ecks zusammen mit seinen Eigenschaften wird nicht durch die diffuse mentale Vorstellung sondern durch eine „besondere Anstrengung der Seele“ vermittelt, d.h. Erkenntnis ist

[22]In Vgl. [Dieudonné, 1966] berichtet Dieudonné von dem genialen Grothendieck, der wie eine Planierraupe seine logische Trasse durchschiebt: „Wenn die Tiefenanalyse einen Punkt erreicht, wo nur noch eine Frontalattacke möglich ist, findet er [Grothendieck] in seiner reichen Phantasie den Rammbock, der das Hindernis zermalmt.“ Übersetzung CF.

[23]Vgl. [Poincaré, 1905b], S. 15. Übersetzung CF.

[24]Wie Wittgenstein mit der Käfer-Metapher erkennt: „Da könnte es ja sein, dass Jeder ein anderes Ding in seiner Schachtel hätte.“

eine *reflektierte* Vorstellung. Descartes macht in der 6. Meditation den „Unterschied zwischem dem Vorstellungsvermögen und dem reinen Erkennen“ deutlich:

> Damit dies deutlich werde, untersuche ich zuerst den Unterschied zwischen dem Vorstellungsvermögen und dem reinen Erkennen. Wenn ich z.B. ein Dreieck mir vorstelle, so sehe ich nicht blos ein, daß es eine von drei Linien eingeschlossene Figur ist, sondern ich schaue zugleich jene drei Linien wie dem geistigen Blick gegenwärtig, und dies ist das, was ich bildlich vorstellen nenne [...] Wenn ich aber an ein Tausendeck denken will, so sehe ich zwar ebenso gut ein, daß es eine Figur ist, die aus tausend Seiten besteht [...], aber ich kann mir nicht in gleicher Weise diese tausend Seiten bildlich vorstellen oder sie als gegenwärtig anschauen [...] Auch nützt mir diese Vorstellung nichts, um die Eigenschaften zu erkennen, durch die sich das Tausendeck von anderen Vielecken unterscheidet[...] Hier bemerke ich deutlich, daß ich einer eigenthümlichen geistigen Anstrengung bedarf, um bildlich vorzustellen, deren ich zu dem Denken nicht bedarf, und diese besondere Anstrengung der Seele zeigt deutlich den Unterschied zwischen dem bildlichen Vorstellen und der reinen Erkenntniß[25].

Der vielgerühmte Mathematiker Gassendi wendet Descartes ein, daß das Wort 1000-Eck die 1000 Winkel einbezieht, ohne daß die Figur deswegen „existiert“, was nur dann der Fall wäre, wenn sie gezeichnet werden könnte:

> Ich habe gegen Ihre Ausführungen am Anfang der Sechsten Meditation nichts einzuwenden, wenn Sie meinen, daß materielle Dinge „existieren können, soweit es sich um Objekte der reinen Mathematik handelt.“ Dennoch sind materielle Dinge Gegenstände der gemischten, nicht der reinen Mathematik (objectum mixtae, non purae, matheseos), während die Objekte der reinen Mathematik - auch der Punkt, die Linie, die Fläche und die unzerlegbaren Figuren, die aus diesen Elementen zusammengesetzt werden und doch unsichtbar bleiben - in der Wirklichkeit nicht existieren können[26].

Man möchte hier Gassendi fragen: ab welches n gehört das n-Eck in die reine Geometrie und hört somit zu existieren auf? Gehört das 17-Eck in die reine oder in die gemischte Mathematik, das der 18-jährige Student Gauß als mit Zirkel und Linear konstruierbar nachwies, allerdings *ohne Gebrauch der Anschauung*[27]?

Kant hielt zwar an der sinnlichen Anschauung fest, ohne aber wie Gassendi nach einer willkürlichen Grenze zwischen reiner und „gemischter“ Mathematik zu suchen. Im Schematismus dynamisiert die „Einbildungskraft“ das statisch Angeschaute. In seiner Replik [Kant, 1790] auf August Eberhard, der ihn in seiner Zeitschrift angegriffen hatte, ordnet Kant den Algorithmus des größer werdenden Vielecks der Anschauung zu. Es ist dabei irrelevant, daß Kant ein 96-Eck anstatt eines 1000-Ecks wählte:

> Wenn nun Archimedes ein Sechs-Und-Neunzigeck um den Cirkel und auch ein dergleiches in demselben beschrieb, um, daß und wie viel der Cirkel kleiner sei als das erste und größer

[25] Vgl. [Descartes, 1641], S. 94.

[26] Vgl. [Rochot, 1962], SS. 518-519. Übersetzung CF.

[27] Mit Zirkel und Lineal kann man addieren, skalieren und Quadratwurzeln ziehen. Gauß ermittelte in einer diffizilen Berechnung den Zentriwinkel:

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2\left(17-\sqrt{17}\right)}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2\left(17-\sqrt{17}\right)}-2\sqrt{2\left(17+\sqrt{17}\right)}}\right)$$

Große Teile des Beweises sind arithmetisch, daher nicht anschaulich.

> als das zweite, zu beweisen: legte er da seinem Begriffe von dem genannten regulären Vieleck eine Anschauung unter, oder nicht? Er legte sie unvermeidlich zum Grunde, aber nicht indem er dasselbe wirklich zeichnete (welches ein unnöthiges und ungereimtes Ansinnen wäre), sondern indem er die Regel der Construction seines Begriffs, mithin sein Vermögen, die Größe desselben so nahe der des Objects selbst, als er wolle, zu bestimmen und also dieses dem Begriffe gemäß in der Anschauung zu geben, kannte und so die Realität der Regel selbst und hiemit auch dieses Begriffs für den Gebrauch der Einbildungskraft bewies. Hätte man ihm aufgegeben auszufinden, wie aus Monaden ein Ganzes zusammengesetzt sein könne: so würde er, weil er wußte, daß er dergleichen Vernunftwesen nicht im Raume zu suchen habe, gestanden haben, daß man davon gar nichts zu sagen vermöge, weil es übersinnliche Wesen sind, die nur in Gedanken, niemals aber als solche in der Anschauung vorkommen können[28].

Kant war klar, daß sich trotz Hinzufügen infinitesimaler „Monaden“ Umfang und Fläche des n-Ecks durch den Umkreis begrenzt sind. Durch einen ähnlich wirkenden Algorithmus visualisiert der Computer eine geschlossenen Kurve, die auch eine begrenzte Fläche umschließt, aber deren Umfang, zur Verwirrung der Anschauung, über alle Grenzen hinauswächst.

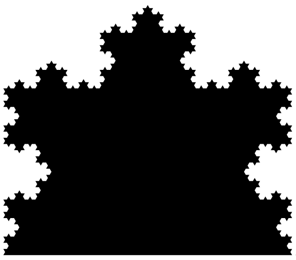

Abbildung 5.1.: Schneeflocke

Abb. 5.1 zeigt ein Fraktal, die Schneeflocke von Koch. Begonnen wird mit einem gleichschenkligen Dreieck der Kantenlänge = 1. Bei den Iterationen werden auf jeder Kante dem Mittelabschnitt zwei Abschnitte mit 1/3 der Kantenlänge aufgesetzt, somit wird der Umfang jeweils mit 4/3 multipliziert; d.h. die Länge des Randes geht durch vollständige Induktion gegen unendlich. Die eingeschlossene Fläche strebt[29] aber gegen den endlichen Wert $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{9}{5}$.

Die Koch-Kurve zeigt, daß der Geometer durch seine Anschauung irregeführt wird, während der Analytiker, der die Kurve brutal berechnet, in die Falle nicht tappt. Für ihn überwiegt das Schema die Anschauung und kann sie korrigieren.

Bei der Konstruktion der Sphäre läßt uns ein adäquates Schema die Leiter der Dimensionen hinaufzuklettern.

[28] Vgl. [Kant, 1790], S. 212.

[29] Beweis: Sei $\mathbb{R} \ni r < 1$, dann

$$\begin{aligned} S(n) &= 1 + r + r^2 + \ldots + r^n \\ rS(n) &= r + r^2 + \ldots + r^n + r^{n+1} \end{aligned}$$

Durch Substraktion folgt: $S(n) = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-r}$. Hier ist $r = \frac{4}{9}$.

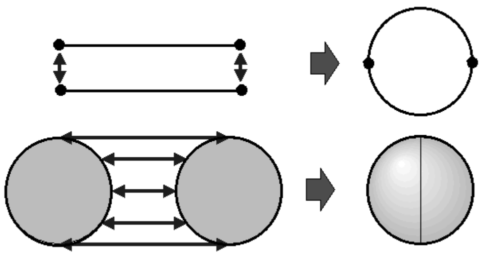

Abbildung 5.2.: Sphärenkonstruktion

Abb. 5.2 zeigt oben zwei 1-dimensionale Linien (etwa zwei Schnürsenkel). Durch Zusammenbinden der Randpunkte und Ausstrecken in die zweite Dimension entsteht die 1-dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^1$, prosaisch: ein Kreis. Füllt man diesen Kreis zu einer Scheibe aus und klebt deren Rand mit dem einer identischen Kopie, erhält man unten die 2-dimensionale Sphäre, ähnlich wie beim Aufblasen eines Luftballons. Durch Induktion können wir diese Sphäre $\mathbb{S}^2$ zu einer Kugel ausfüllen, und eine Kopie anfertigen die am sphärischen Rand identifiziert wird. So entsteht die 3-dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^3$, und so weiter[30]. Es gibt keine Anschauung mehr, das Schema wirkt aber weiter.

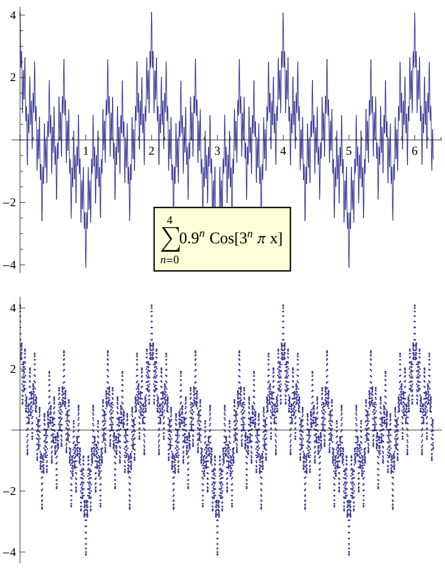

Abbildung 5.3.: Weierstraß-Funktion

Wir lassen den Einwand gelten, daß sich der Mathematiker seine hochdimensionalen Welten nach seinen selbstverfügten Regeln zimmert. Es ist dann seine eigene Schuld, wenn er dabei die sinnliche Anschauung verliert. Die Problematik taucht aber auch in der sinnlich erfahrenbaren Welt auf.

Sinnlich nachvollziehbar wurde früher die Kontinuität so definiert, daß eine Kurve dann stetig ist, wenn beim Zeichnen die Bleistiftspitze nicht angehoben wird. Es war somit anschaulich klar, daß in jedem Punkt einer stetigen Kurve durch Rotieren einer Sekante immer eine Tangente entsteht; diese Eigenschaft definierte die Differenzierbarkeit. Weierstraß wartete mit einer Familie von Funktionen auf, die wie $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} 0.9^n \cos(3^n \pi x)$ in Abb. 5.3 überall stetig aber nirgends differenzierbar sind.

Den Graph haben wir mit der Software Mathematica® geplottet[31]. Im oberen Bild kommt die Stetigkeit durch Linien zum Ausdruck. Wenn dem so wäre, ginge die Nichtdifferenzierbarkeit auf diesen Linien verloren. Im unteren Graph werden die nicht existenten

[30] Vgl. z.B. [Stillwell, 1980] S. 12 für eine seriösere Beschreibung.

[31] Der Plot zeigt die Partialsummenfolge $x \mapsto \sum_{n=0}^{4} 0.9^n \cos(3^n \pi x)$; bereits ab etwa dem 10. Glied verwischt der Sägezahngraph zu einem klotzigen Wurm.

Linien zwischen den Punkten weggelassen, wobei die Stetigkeit verloren geht. Der PC berechnet die Reihe mühelos, aber die Funktion läßt sich nicht visualisieren[32]!

Der Analytiker hat keinerlei Probleme mit der Dimensionsleiter. Seine Vektoren ergänzt er jeweils um einen Eintrag, seine Matrizen entsprechend. Der Geometer kann $\mathbb{S}^3$ nicht sinnlich erfassen, aber er kann mit ihr sicher umgehen. Seine mentalen Bilder sind intelligibel verzerrt. Er weiß nicht wie die mentalen Bilder seiner Kollegen aussehen. Welcher Art ist dann seine Anschauung? 1956 hat Milnor 28 „exotische“ $\mathbb{S}^7$ nachgewiesen; das Wort Anschauung muß offenbar anders verstanden werden als beim 96-Eck, bei dem bereits Descartes zwischen Vorstellen und Erkennen zu unterscheiden wußte; Kant hätte sich von den hochdimensionalen Sphären abgewandt „weil es übersinnliche Wesen sind, die nur in Gedanken, niemals aber als solche in der Anschauung vorkommen können.“ Von einigen Übersinnlichen Wesen, z.B. einem Einhorn, machen wir uns mentale Bilder. Welche übersinnliche Fiktionen sind für das Wissen von Interesse?

5.5. Können mathematische Fiktionen kollidieren?

Die Sphäre $\mathbb{S}^3$ bzw. der 4D-Würfel auf S. 76, und dergleichen mehr Objekte erwecken den Eindruck, daß spitzfindige Geometer beim Erfinden höherer Dimensionen nur darauf zu achten brauchten, daß ihre Definitionen auf die „normalen“ Dimensionen auch passen. Dann wäre Mathematik ein Elfenbeinturm, in dem mit fiktiven Gegenständen nur die Probleme gelöst werden, die man sich selbst zurechtgelegt hat.

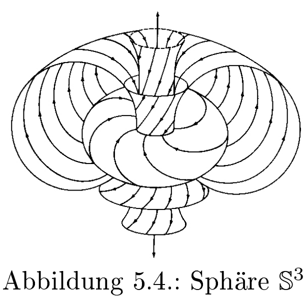

Abbildung 5.4.: Sphäre $\mathbb{S}^3$

Andere vielgestaltige Definitionen wurden erfunden, die auch auf die niedrigen Dimensionen passen. Wie man die Erdoberfläche durch stereographische Projektion auf eine flache Atlaskarte abbildet, zeigt Abb. 5.4 wie $\mathbb{S}^3$ in den euklidischen 3D-Raum anschaulich projiziert wird. Weitere Alternative: Zum Rechnen verwendet man die Riemannsche Sphäre, wo der euklidische 3D-Raum um den zum Punkt ∞ erklärten Nordpol von $\mathbb{S}^3$ zusammengeschnürt wird[33]. Die drei Fiktionen, die wir für $\mathbb{S}^3$ anführen, sehen zwar verschieden aus, sie sind aber wundersamerweise kompatibel! Das ist kein Einzelfall;

[32] Die Schneeflocke von Koch konnten wir aber visualisieren, die auch überall stetig und nirgends differenzierbar ist.

[33] Der Analytikertyp, der auf Anschauung verzichtet, schreibt ganz einfach für die Sphäre mit Radius r um den Ursprung: $S^3 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, r \in \mathbb{R}^+ \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2\}$.

auch für den hyperbolischen Raum stehen entweder das Poincaré-Halbraum-Modell, das Poincaré-Ball-Modell, das Hyperboloid-Modell, oder noch das projektive Klein-Modell zur Verfügung, unter denen sich der Mathematiker das „bequemste“ frei aussuchen kann, denn sie sind alle äquivalent.

Abbildung 5.5.: Apollo Belvedere

Dem in der Höhle angeketteten Mathematiker würde der Schatten einer draußen vorbeigetragenen Statue von Mal zu Mal anders erscheinen: von der einen oder von der anderen Seite, von oben oder unten, von vorn oder hinten, usw. Der Mathematiker merkt, daß ein und derselbe Gegenstand vorgeführt wird, und grübelt vergeblich darüber nach, wie die vielfältige Schatten werfende Statue in der dualen Ideenwelt aussehen mag.

Das Staunen über die Harmonie der Mathematik zur Erklärung der Dynamik der Welt ist u.E. vergleichbar mit der Perplexität, die uns das aus der inerten Materie entstandene Leben einflößt. Bei der Fülle mathematischer Theorien wäre nicht zu erwarten, daß die Folgerungsstränge wie Regentropfen parallel verlaufen, ohne daß Kollisionen zwischen den atomaren mathematischen Objekten auftreten[34]; doch gerät keine definitiv anerkannte mathematische Fiktion in Konflikt mit einer anderen.

Daß Widerspruchsfreiheit möglich ist, liefert in unseren Augen die beste Rechtfertigung des Platonismus. Wir verweisen auf unseren Anhang E, S. 261, wo der Platonismus als Schluß auf die beste Erklärung dargestellt wird.

Doch lädt ein Schluß auf die beste Erklärung erst recht zum Weiterforschen ein. Manche Fiktion kann zum Preis von Kontorsionen Widerspruchsfreiheit erreichen. Benacerrafs Sorge ist berechtigt, daß der mathematische Wahrheitsbegriff zwar mit rationalem Denken kompatibel ist, aber möglicherweise so sehr vom landläufigen Wahrheitsbegriff abweicht, daß Mathematik am Ende eine geschlossene Veranstaltung wäre.

5.6. Ist Mathematik ein Elfenbeinturm?

Ein Schluß auf die beste Erklärung wird gestärkt, wenn er zum „Wunderargument“ (= indispensability argument) ergänzt wird. Es ist in der Tat verwunderlich, daß die besten

[34] Bei Lukrez läßt der Zufall (das Clinamen) die Demokritschen Atome kontingent gegeneinander prallen.

Modelle der empirischen Anwendungswissenschaften von der Mathematik reichlich Gebrauch machen. Mathematik ist keine kontemplative Wissenschaft. Selbst in der reinen Mathematik bringt jeder neue Satz einen Gewinn an Erkenntnis, wenn nicht immer an sofortiger Nützlichkeit in der realen Welt. Doch besteht die Gefahr, daß durch exzessive Abstraktion ein Rad erfunden wird, „das man drehen kann, ohne daß Anderes sich mitbewegt" (Wittgenstein). Dazu Poincaré:

> Die Philosophen machen noch einen andern Einwurf: Was ihr an Strenge gewinnt, sagen sie, das verliert ihr an Objektivität. Ihr könnt euch zu eurem Ideal der Logik nur erheben, indem ihr die Fesseln zerschneidet, die euch an die Wirklichkeit knüpfen. Eure Wissenschaft ist makellos, aber sie kann es nur bleiben, indem sie sich in einen Elfenbeinturm einschließt und sich jede Beziehung zur Außenwelt versagt[35].

Der philosophische Einwand rührt daher, daß Ähnlichkeit keine transitive Eigenschaft ist. Hätten wir statt der pathologischen $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} 0.9^n \cos(3^n \pi x)$ z.B. die fast identische Weierstraß-Funktion $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} 0.2^n \cos(3^n \pi x)$ gewählt, so wäre diese, obwohl lediglich der Koeffizient $0,9$ gegen $0,2$ ausgetauscht wurde, differenzierbar und ihre Visualisierung unproblematisch. Die Griechen begnügten sich damit, anschauliche Gegenstände geometrisch zu idealisieren. Das Überhandnehmen der Abstraktion läßt wahrhaftig befürchten, daß Mathematik zu einem closed Shop wird. Dazu Poincaré:

> Ich will zum Beispiel beweisen, daß eine gewisse Eigenschaft einem gewissen Gegenstand zukommt, dessen Begriff mir anfangs undefinierbar erscheint, weil er der Anschauung entstammt. Ich scheitere zunächst mit meinem Versuch, oder ich muß mich mit ungefähren Beweisen begnügen; ich entschließe mich schließlich, meinem Gegenstand eine genaue Definition zu geben, die mir erlaubt, diese Eigenschaften in einwandfreier Weise festzustellen. Und was dann? fragen die Philosophen. Es bleibt noch zu zeigen, daß der Gegenstand, der dieser Definition entspricht, auch genau der gleiche ist wie der, den die Anschauung dich kennen lehrte; oder noch besser, daß dieser wirkliche und konkrete Gegenstand, dessen Übereinstimmung mit deiner intuitiven Idee du sofort zu erkennen glaubst, deiner neuen Definition genau entspricht. Nur dann kannst du behaupten, daß er die in Frage stehende Eigenschaft besitzt; du hast die Schwierigkeit nur verschoben[36].

Tatsächlich ist das früher anschauungsnahe Prädikat „stetig" heute nur noch Eingeweihten zugänglich[37]. Da Wörter der allgemeinen Sprache „unscharfe Ränder" haben, ist ein Jargon der Preis, den aber auch die Juristen, die Mediziner, die Informatiker, die Entomologen, die Philosophen, usw. für Eindeutigkeit zahlen müssen:

---

[35] Vgl. [Poincaré, 1905b], S. 18-19. Übersetzung CF.

[36] Vgl. ebd.

[37] Als sich die Mengentheorie durchsetzte, wurde es sinnvoll, den Funktionsbegriff zu *erweitern*. Bei Dirichlet sollen „Ideen an die Stelle von Rechnungen" dem Funktionsbegriff zugrundegelegt werden. Für jede reelle Zahl x nannte er z.B. Funktion die Zuordnung des Wertes 0 falls x irrational und 1 falls x rational. Folglich konnten bisher vage Relationen als Funktionen klassifiziert werden, die kein Diagramm veranschaulichen kann. Dazu wurde es notwendig, Stetigkeit über das „esoterische" Epsilon-Delta-Kriterium neuzudefinieren. Die Funktion $f : D \to W$ ist stetig an der Stelle x_0 falls: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$.

> Lange Zeit waren die Gegenstände, mit denen sich die Mathematiker beschäftigten, zum größten Teil schlecht definiert; man glaubte sie zu kennen, weil man sie sich mit den Sinnen oder der Einbildungskraft vorstellte; aber man hatte nur ein grobes Bild, keinen genauen Begriff, auf den man eine Schlußfolgerung hätte gründen können [...] Die unbestimmte Vorstellung der Stetigkeit, die wir der Intuition verdanken, hat sich in ein kompliziertes System von Ungleichungen aufgelöst [...] Die Mathematik hat sich, wie man sagt, arithmetisiert[38].

Bei abstrakten Objekten wird dennoch die Nabelschnur zur Realität nicht abgeschnitten. Die Arithmetisierung der Stetigkeit durch das Epsilon-Delta-Kriterium verinnerlicht der Student nur deswegen, weil er das latente mentale Bild der nie abhebenden Bleistiftspitze im Hinterkopf bewahrt. Dazu eine einprägsame Metapher von Poincaré:

> Sie haben wahrscheinlich die feinen Gefüge von Kieselnadeln gesehen, die das Skelett einiger Schwämme bilden. Wenn die organische Materie vergangen ist, bleibt nichts als ein zerbrechliches, zierliches Spitzengewebe übrig. Es ist zwar nur noch Silicium; aber interessant ist die Form, die dieses Silicium angenommen hat, und wir könnten diese nicht verstehen, würden wir den lebenden Schwamm nicht kennen, der ihm gerade diese Form aufgeprägt hat. So ist es auch bei den alten intuitiven Begriffen unserer Väter, die, selbst wenn wir sie aufgegeben haben, ihre Form noch dem logischen Gerüst aufdrücken, das wir an deren Stelle gesetzt haben. Einen solchen Überblick kann der Erfinder nicht entbehren; diesen Überblick braucht ebenso jeder, der den Erfinder wirklich verstehen will; kann uns ihn die Logik verschaffen? Nein [...][39].

Fazit:

i) Mathematische Aussagen werden in der Sprache der Logik geschrieben.
ii) Die Analytiker bedürfen kaum einer Anschauung zum Unterschied der Geometer, deren mentale Bilder aber nur noch spurenweise sinnlich geprägt sind.
iii) Mathematiker ziehen sich zunehmend in einen Elfenbeinturm zurück; sie antworten auf die Fragen, die sich selbst stellen. Doch bürgt die Effizienz der mathematisierten Wissenschaften dafür, daß der Elfenbeinturm auf die reale Welt einwirkt.
iv) Der Logizismus möchte die Mathematik zu einem Zweig der Logik erklären. Das Erfinden der Mathematik erfolgt, wie wir jetzt zeigen möchten, nicht über die Logik.

5.7. Logik erfindet nicht

Es kommt immer wieder vor, daß ein Professor auf eine unerwartete Anfrage seiner Studenten einen diffizilen Beweis logisch einwandfrei aus dem Stegreif komponiert. Wir dürfen getrost davon ausgehen, daß Poincaré dieses Kunststück oft vorexerzierte. Ein „Meister“ verfügt, anders als der auch so begabte „Lehrling“, über einen so profunden Überblick seines Fachs, daß er sofort die Anstoßstelle erspürt, von der aus die logischen

[38] Vgl. [Poincaré, 1905b], S. 17. Übersetzung CF.
[39] Vgl. ebd. S. 20-21.

Dominosteine unweigerlich weiterkullern. Detlefsen beschreibt in seiner grundlegenden Schrift zur Intuition, [Detlefsen, 1990], unter der Überschrift *Poincaré's Concern*, wie die Meisterschaft des Erfindens nicht in der Logik sondern in der Intuition wurzelt:

> Poincaré presented his point in the form of an observation which he then put forth as a central „datum" for the philosophy of mathematics [...] Imagine two cognitive agents M and L. M has the kind of knowledge or understanding of a given mathematical subject S that we typically associate with the master mathematician. L, on the other hand, has the sort of epistemic mastery of S that is typical of one whose epistemic command of S consists in a knowledge of a set of axioms for S plus an ability (possibly superb) to manipulate or process those axioms according to acknowledged logical means.
> Query: Is there any significant difference between the epistemic condition of M and the epistemic condition of L vis-a-vis their status as mathematical knowers?
> In Poincaré's view, the answer is „Yes". Even perfect logical mastery of a body of axioms would not, in his view, represent genuine mathematical mastery of the mathematics thus axiomatized. Indeed, it would not in itself be indicative of any appreciable degree of mathematical knowledge at all: knowledge of a body of mathematical propositions, plus mastery over their logical manipulation, does not amount to mathematical knowledge either of those propositions or of the propositions logically derived from them[40].

Poincaré benützt eine Metapher aus dem Schachspiel. Wer nur die Schachregeln - analog: die Regeln der Logik - kannte, könnte nur die Einhaltung dieser Regeln überprüfen; von der strategischen und taktischen Spielführung hinter den Zügen würde der Kiebitz nichts verstehen. Die Logik erzeugt nur analytische Urteile, Tautologien, Pleonasmen, wie man auch immer solche Aussagen zu nennen beliebt[41]:

> Die reine Logik würde uns nur zu Tautologien verhelfen [...] Um Arithmetik, bzw. Geometrie oder irgend eine andere Wissenschaft zu betreiben, braucht man mehr als nur die reine Logik. Um dieses Mehr zu bezeichnen, steht uns nur das Wort Intuition zur Verfügung; aber wieviele verschiedene Begriffe verbergen sich hinter diesem einen Wort? Vergleichen wir die folgenden vier Axiome:
>
> 1. Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie auch einander gleich.
> 2. Wenn ein Satz für die Zahl 1 wahr ist, und wir beweisen, daß er, falls er für n gilt, auch für $n+1$ wahr ist, so ist er für alle ganzen Zahlen wahr.
> 3. Wenn auf einer Geraden der Punkt C zwischen A und B liegt, und der Punkt D zwischen A und C, so liegt der Punkt D zwischen A und B.
> 4. Durch einen Punkt kann man nur eine Parallele zu einer Geraden ziehen.
>
> Alle vier Axiome entstammen der Intuition, und doch ist das erste Axiom eine Regel der formalen Logik; das zweite ist ein echtes synthetisches Urteil a priori, der Grundstein der stringenten mathematischen Induktion; das dritte ist eine an die Einbildungskraft gerichtete Aufforderung; das vierte eine verkappte Definition[42].

Eigentlich zerfällt das Wort Intuition in drei distinkte Extensionen: i) die von der sinnlichen Anschauung ausgehende Imagination, ii) die Verallgemeinerung durch Induktion, iii) die „Intuition der reinen Zahl".

Die „Intuition der reinen Zahl" kommt in spontanen Prädikaten wie alle, einzig, mehr, weniger, usw., und schließlich im angelernten Zählen zum Ausdruck. Allein diese Intuition legitimiert die vollständige Induktion des zweiten Axioms. Wie wir auf S. 149

---

[40] Vgl. [Detlefsen, 1990], S. 502-503.

[41] In der Mathematik ist die Kantische Unterscheidung zwischen analytisch und synthetisch der Kritik von Quine nicht ausgesetzt.

[42] Vgl. [Poincaré, 1905b], S. 17-18. Übersetzung CF.

vorführen, ist sie derart gebieterisch, daß derjenige, der die Wahrheit von Formeln wie z.B. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ beweist, sie deswegen nicht zu konstruieren wüßte. Ganz im Sinne Benacerrafs versagt die epistemische Forderung trotz guter Semantik. Allerdings haben wir auf S. 91 gesehen, daß das Beispiel $1+r+r^2+\ldots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ durch einen kleinen Trick sofort einleuchtet, und daher dem Dilemma nicht anheimfällt.

Da niemand die Arithmetik suspekt findet, liefert die „Intuition der reinen Zahl" zusammen mit einer Syllogismenkette die Gewähr für wahre mathematische Ergebnisse:

> Demnach gibt es, wenn man sich der Strenge verschreibt, in der modernen Analysis nichts als Syllogismen oder der Gebrauch dieser Intuition der reinen Zahl, die allein uns nicht täuschen kann. Man kann sagen, daß heute die absolute Strenge erreicht ist[43].

Wenn die absolute Strenge der Mathematik nunmehr etabliert ist, kann Poincaré dem „Einwand der Philosophen" begegnen, nämlich daß der auf abstraktem Umweg im Elfenbeinturm intuitiv konstruierte Gegenstand seinem realen Pendant ähnelt. Der Umweg ist nicht angreifbar, da er nur Syllogismen und Arithmetik einsetzt. Die Schwierigkeit der Identifizierung konkreter Objekte mit abstrakten Konstrukten wurde nicht „verschoben" sondern „zerlegt". Was es zu modellieren galt, bestand aus einer experimentellen und einer mathematischen Komponente. Erstere entzieht sich - wie die Naturgesetze auch - jeder Demonstration; damit muß der Wissenschaftler leben. Der mathematisierte Teil der Theorie ist aber unangreifbar: da liegt ein echter Gewinn.

Während Hartry Field die Newtonsche Gravitation partout nominalisieren will, um das platonistische Unentbehrlichkeitsargument zu entkräften, begrüßt Poincaré, daß die mathematische Komponente Wissen verschafft, während der nominalistische Teil bestenfalls experimentell falsifizierbar aber nie verifizierbar sein wird. Field möchte jede Frage noch verstehen, nachdem die Antwort gefallen ist; Poincaré meint, daß nicht die Logik sondern allein die Intuition diesen legitimen Wunsch erfüllt:

> Soll damit gesagt sein, daß nichts von diesem Einwand der Philosophen übrig bleibt? Das will ich nicht sagen; die mathematische Wissenschaft nimmt, sobald sie streng wird, einen Anflug des Künstlichen an, der alle Welt befremdet; sie vergißt ihren historischen Ursprung; man sieht, wie die Fragen gelöst werden können, man sieht nicht mehr, wie und warum sie gestellt wurden.
>
> Das beweist uns, daß die Logik nicht genügt, und daß das Wissenschaftliche nicht die ganze Wissenschaft ist, und daß die Intuition ihre Rolle als Ergänzung, ich möchte sagen als Gegengewicht oder als Gegengift, beibehalten muß[44].

---

[43] Vgl. [Poincaré, 1905b], S. 18. Übersetzung CF.
[44] Vgl. ebd. S. 19.

5.8. Das Erkennen von Analogien

Intuition bedeutet, wie bereits angeführt, dreierlei: i) die „Intuition der reinen Zahl“, ii) Imagination aus der Anschauung heraus, iii) Verallgemeinerung durch Induktion.

Die Intuition der reinen Zahl ist ein allen Menschen zugängliches Schema. Beim Geometer entstehen Ketten mentaler Bilder durch einen dynamischen Assoziationsprozeß. Wie funktioniert aber die Induktion, die letzterwähnte Art der Intuition, wenn die Logik nur Tautologien liefert?

Der Erfinder zerlegt komplizierte Zusammenhänge in leicht verdauliche Häppchen. Der Geometer sucht sich eine so kleine Punktumgebung aus, daß eine krumme Kurve lokal wie eine handliche Gerade aussieht; er entfernt sich in der Richtung der ersten Dimension, dann der zweiten, usw. Noch müssen die Häppchen angeordnet werden:

> Der Logiker [oder Analyst] zerlegt sozusagen jeden Beweis in eine sehr große Zahl von elementaren Operationen. Hat man alle diese Operationen, eine nach der anderen, überprüft und gefunden, daß jede einzelne fehlerfrei ist, wird man dann glauben, den wahren Sinn des Beweises verstanden zu haben? Wird man ihn verstanden haben, selbst wenn es durch eine Anstrengung des Gedächtnisses gelänge, den ganzen Beweis zu wiederholen, mit Anführung all der elementaren Schritte in derselben Reihenfolge wie sie der Erfinder angeordnet hat? Offenbar nicht; wir besäßen noch nicht den vollen Zusammenhang; dieses *Je-ne-sais-quoi*, das gewisse Etwas, das die Einheit des Beweises ausmacht, wird uns stets entgangen sein.[45].

Jede Wissenschaft setzt sich zum Ziel, durch Induktion vom Besonderen auf das Allgemeine zu schließen. Die Mathematik würde in manche Falle tappen, würde sie sich nicht zu einer drakonischen Form der Induktion verpflichten; dafür hat die Einhaltung der logischen Regeln zu sorgen. Was verschafft dem suchenden Analytiker den Ariadnefaden, dem er folgen wird? Das Vermögen, Analogien in der Struktur dynamischer Systeme zu erkennen, spürt das *Je-ne-sais-quoi* auf.

Als Paradigma der Analogie wählten wir bereits den Gruppenbegriff, mit dem Felix Klein das Tor zu den vielen modernen Geometrien öffnete und der zu vielen weiteren Analogiegebilden führte. Objekte X einer Klasse werden auf Objekte Y abgebildet. Sind X und Y bestimmte Mengen, dann ist ein Morphismus f eine Funktion $f : X \to Y$, die bestimmte Bedingungen erfüllt. In der Linearen Algebra fallen Wörter wie Homomorphismus, Isomorphismus, Endomorphismus, Automorphismus, Epimorphismus, Monomorphismus, usw.; bei topologischen Räumen Homöomorphismus, Homotopieäquivalenz, Deformationsretrakt, usw.; bei Mannigfaltigkeiten Diffeomorphismus, Fundamentalgruppe, usw.; in der Analysis von Gruppen, Körper, Ringe, uws. Diesen Fachtermini

[45]Vgl. [Poincaré, 1905b], S. 20. Übersetzung CF.

liegt ein paralleles dynamisches Verhalten zugrunde: der Erfinder, darin liegt seine Kunst, erkennt Analogien.

Fazit:

Wir haben die fundamentale Erkenntnis gewonnen, die das Frontispiz unserer Arbeit schmückt: die Logik ist das Werkzeug des Beweisens, die Intuition das Werkzeug des Erfindens[46]. Prosaisch formuliert heißt es: kein Beweis wird anerkannt, der nicht logisch formuliert ist, aber zum Erfinden hilft die Logik nichts.

5.9. Brouwers unorthodoxe Philosophie

Daß Logik kein Werkzeug des Erfindens ist, war die These des von Luitzen Brouwer initiierten Konstruktivismus. Wie der Name besagt, wird Mathematik nicht entdeckt (wie bei den Platonisten) sondern (wie bei Kant) konstruiert. Für Brouwer ist die Logik so sehr an die Verbalisierung gebunden, daß sie dem mathematischen Erfinden sogar hinderlich wirkt; Insbesondere lehnt er das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten ab und theoretisiert eine kreative Intuition des Kontinuums.

5.9.1. Die Intuition bei Brouwer

Bereits Aristoteles berief sich auf ein „Kontinuitätsprinzip", nämlich die empirische Überzeugung, daß die Natur keine Sprünge macht: natura non facit saltus. Leibniz erhebt das Prinzip zur Inspirationsquelle seiner Theorien:

> Nichts entsteht auf einmal, und es ist eine meiner großen und bestbewahrheiteten Maximen, daß die Natur keine Sprünge macht, was ich das Gesetz der Kontinuität genannt habe[47].

Poncelet, der Gründer der projektiven Geometrie, formalisierte das Prinzip. Relationen zwischen endlich vielen reellen Variablen müssen auch für die Fortsetzung im Komplexen gelten. Da z.B. die Hyperbel zwei (reelle) Asymptoten hat, muß auch die Ellipse (ein anderer Kegelschnitt) zwei imaginäre Asymptoten besitzen. Poncelets Intuition widerspricht der empirischen Anschauung, der imaginäre Asymptoten nicht zugänglich sind; es wird „instintiv" verallgemeinert, wie Poincaré anmerkt, der sich auch sofort von dieser Art waghalsiger Schlußfolgerung distanziert. Auch der französische Mathematiker

[46] Vgl. [Poincaré, 1908a], S. 410. Übersetzung CF.
[47] Vgl. [Leibniz, 1886], S. 110. Übersetzung CF.

André Weil erkennt, als er in [Weil, 1960] gegen das Prinzip argumentiert[48], die wichtige Rolle der Intuition beim Erfinden an:

> Die Mathematiker pflegten im 18. Jh., von der „Metaphysik der Infinitesimalrechnung“ bzw. von der „Metaphysik der Theorie der Gleichungen“ zu sprechen. Darunter verstanden sie eine Vielzahl von diffusen Analogien, die ihnen, wenn auch schwer greifbar, zu einem bestimmten Zeitpunkt ihrer Forschung und in der mathematischen Erfindung eine wichtige Rolle zu spielen schienen [...] Nichts ist fruchtbarer, das wissen alle Mathematiker, als diese obskuren Analogien, diese trüben Widerspiegelungen, dieses flüchtige Streicheln, dieser unerklärliche Wirrwarr; nichts kann dem Forscher eine größere Freude bereiten[49].

Meistens ist Mathematik eine penible Übungsaufgabe der Logik, wo zum Schluß nur das bewiesen wird, wovon man intuitiv längst überzeugt war. Das Erfinden wird erst wirklich interessant, wenn Hindernisse auftauchen. Poincaré glaubte anfangs, daß die Homologie ausreiche, um die 3-dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^3$ eindeutig auszuweisen. Bald entdeckte er selbst das Gegenbeispiel der Homologiesphäre.

Die Poincarésche Vermutung war viel mehr als ein zu beweisender Satz, nämlich eine epistemologische Etappe; Poincaré setzte seine herausragende Intuition dazu ein, überhaupt die hochdimensionale Geometrie und Topologie zu erforschen. Das Ziel der Suche ist die „Meisterschaft“, die Integration in ein größeres Wissensgebilde, ohne unmittelbaren pragmatischen Nutzen. Darin unterscheidet sich Poincaré vom Intuitionismus Brouwers, der primär auf die einzelne Problemlösung fokussiert, wobei die Erweiterung des allgemeinen Wissens eher als respektables Nebenprodukt en passant begrüßt wird:

> The significance of mathematics with regard to scientific thinking mainly consists in this that a group of observed causal sequences can often be manipulated more easily by extending its of-quality-divested mathematical substratum to a hypothesis, i.e. a more comprehensive and more surveyable mathematical system. Causal sequences represented in abstraction in the hypothesis, but so far neither observed nor found observable, often find their realizations later on[50].

Oft wird die Existenz einer Familie von Objekten indirekt durch Reductio ad absurdum der Nicht-Existenzannahme. Für Brouwer ist das Tertium-non-datur ein verdächtiges Postulat der Logik; die Existenz von Objekten ist unmittelbar durch Konstruktion nachzuweisen; sein Intuitionismus ist zugleich ein Konstruktivismus.

[48] Sein fast-homonymer deutscher Standesgenosse Hermann Weyl stärkte hingegen das Kontinuitätsprinzip. Er definierte in [Weyl, 1918] das Kontinuum so, daß er ohne das Tertio-non-datur, ohne das Auswahlaxiom und ohne Cantorsche unendliche Mengen mit einer Analysis nach den konstruktivistischen Prinzipien aufwartete.

[49] Vgl. [Weil, 1960]. S. 1. Übersetzung CF.

[50] Vgl. [Brouwer, 1948], S. 482.

5.9.2. Brouwers Konstruktivismus

Für Brouwer ist Mathematik eine *téchne* ($\tau\acute{\epsilon}\chi\nu\eta$) im platonischen Sinne, d.h. ein Handwerk, das zu jeder partikularen Problemstellung in einem intentionalen Verhältnis steht; die primäre Zielsetzung ist nicht darauf ausgerichtet, eine möglichst breite Palette similärer Fälle auf einen Schlag zu lösen. Brouwer vertritt einen radikalen Intuitionsbegriff. Für den Konstruktivisten ist die Intuition nicht nur ein universales Werkzeug, dessen Ergebnisse der Verifikation durch die Logik bedürfen, sie schürft tiefer als die Logik.

Die klassische Epistemologie richtete ihren Blick auf die Inhalte der Erkenntnis, ohne intensiv danach zu fragen, auf welchem Weg das Wissen gewonnen wurde. Anschauung und Logik waren die tragenden Säulen. Empirisch erkannte bzw. imaginierte Gleichmäßigkeiten wurden in Axiomen verbalisiert, aus denen gemäß den Regeln der Logik sprachlich gefaßte Schlüsse gefolgert wurden. Demnach war Logik ein autonomes Denkschema, und Mathematik ein Derivat der Logik.

Die Abhängigkeit der Mathematik von der Sprache als Medium logischen Folgerns abzuschaffen, war Brouwers *First Act of Intuitionism*. Mathematik ist eine introspektive Suche, deren konstruierendes Fortschreiten von logischen Tautologien befreit werden soll. Brouwer vertritt einen dynamischen Standpunkt; er führt Mathematik auf die Wahrnehmung des Zeitpfeils zurück[51]. Auch der Schachspieler oder der Ingenieur, der eine technische Zeichnung interpretiert, oder der Bastler, der eine Montageanleitung dekryptiert, setzen das Medium Sprache nicht ein[52]. In der Mathematik gilt es:

> [...] completely separating mathematics from mathematical language and hence from the phenomena of language described by theoretical logic, recognizing that intuitionist mathematics is an essentially languageless activity of the mind having its origin in the perception of a move of time[53].

Für Poincaré war Logik das „Gegengift “ zur Intuition, bei Brouwer vergiftet sie gar die Intuition. Es steht nicht zur Debatte, daß die Logik das geeignete Instrument zum Formalisieren und Kommunizieren einer einmal erfolgten Konstruktion ist. Die Logik ist

[51] Brouwer spricht von der Intuition der *Zwei-Einigkeit*. Vgl. [Brouwer, 1912], S. 57: „This neo-intuitionism considers the falling apart of moments of life into qualitatively different parts, to be reunited only while remaining separated by time as the fundamental phenomenon of the human intellect, passing by abstracting from its emotional content into the fundamental phenomenon of mathematical thinking, the intuition of the bare twooneness. This intuition of two-oneness, the basal intuition of mathematics, creates not only the numbers one and two, but also all finite ordinal numbers, inasmuch as one of the elements of the two-oneness may be thought of as a new two-oneness, which process may be repeated indefinitely. “ Daß Gegenwart von ihrer vergangenen Umgebung nicht separabel ist, entspricht genau der auf S. 51 besprochenen These von Bergson.

[52] In unserer Masterarbeit [Fabre, 2014] vertreten wir eine verwandte These, nach der mathematisches Denken durch vorsprachliche mentale Bilder die Dynamik durchschaut.

[53] Vgl. [Brouwer, 1951], S. 4.

unverzichtbar, wenn Beweise memoriert bzw. kommuniziert werden[54], aber sie steht im Prozeß des Erfindens der Dynamik im Wege. Die Quelle der Kreativität besteht u.E. darin, zeitweilig die eingefahrenen logischen Gleise zu verlassen. Niemand schaut dem Erfinder über die Schulter, wenn er sich über die Hindernisse hinweg logisch unkontrollierte Sprünge vergönnt.

Brouwer hatte einen starken Grund, das mathematische Erfinden von den Fesseln der Logik befreien zu wollen. Die Verbalisierung handicapt den epistemischen Fluß, da sie die Dynamik der Konstruktion durch Einschieben von Tautologien zerhackt. Paradigmatisch ist das von Brouwer bekämpfte Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten. So fruchtbar das Tertium-non-datur ist, wird auf intuitive Erkenntnis verzichtet. Das Prinzip ist ein Helfer in der Not: wenn du nicht weiterkommst, hilft dir die Kontraposition. Das Tertium-non-datur sollte in Brouwers Augen bestenfalls dazu dienen, gute Kandidaten für einen konstruktiven, damit epistemisch akzeptablen Beweis zu finden.

Wenn Logik kein Werkzeug des Erfindens ist, können gleichwohl auf das Medium der Sprache angewiesene logische Prinzipien Gleichmäßigkeiten aufstöbern und damit am Beweisen partizipieren. Brouwer hat keine Einwände weder gegen Syllogismen noch gegen das Widerspruchsprinzip, aber dem Prinzip des ausgeschlossenen Dritten darf man nicht immer blind vertrauen:

> Thus there remains only the more special question: Is it allowed, in purely mathematical constructions and transformations, to neglect for some time the idea of the mathematical system under construction and to operate in the corresponding linguistic structure, following the principles of syllogism, of contradiction and of tertium exclusum, and can we then have confidence that each part of the argument can be justified by recalling to the mind the corresponding mathematical construction?
> Here it will be shown that this confidence is well-founded for the first two principles, but not for the third[55].

Aus dem bereits auf S. 100 angesprochenen Leibnizschen Kontinuitätsprinzip, ein beim Beweisen verpöntes aber beim Erfinden effektives Werkzeug, macht Brouwer nunmehr einen Satz! Unser Anhang F zeigt wie Brouwer am Beispiel der Dirichlet-Funktion seine unorthodoxe Definition des Kontinuums zum Beweisen einsetzt.

[54]Vgl. [Brouwer, 1908], S. 108: „[T]he function of the logical principles is not to guide arguments concerning experiences subtended by mathematical systems, but to describe regularities which are subsequently observed in the language of the system.“

[55]Vgl. ebd. S. 108-109.

5.9.3. Brouwer als Herold einer alternativen Mathematik

Es würde unseren Rahmen sprengen, tief in die Theorien zum Kontinuum und somit in das Brouwersche Werk einzusteigen. Der Konstruktivismus war lange Zeit Gegenstand einer lebhaften Diskussion. Namhafte Mathematiker wie Hermann Weyl, Nikolai Kolmogorow, Paul Lorenzen, usw. bürgen für die mathematische Solidität der Theorie. Das Beispiel der pathologischen[56] Direchlet-Funktion zieht das Tertium-non-datur in Zweifel, ein intuitiv einleuchtendes und breit eingesetztes Werkzeug der Mathematik. Die divergente Auffassung beruht letztendich auf den metaphysischen Grundlagen der Kontinuität. Während das Epsilon-Delta-Kriterium mit statischen Punktumgebungen arbeitet, zeigt Brouwers von der Zeit vererbte „Fluidität" auf Dynamik.

Brouwer argumentiert gegen einen Hard-road-Platonismus. Er geht von der Annahme aus, daß mathematische Objekte und Relationen vom Träger der Sprache unabhängige Konstruktionen sind. Die Anerkennung eines Satzes besteht darin, daß ein konstruktiver mentaler Prozeß überzeugt. Wahrheit und Beweisbarkeit sind ein und dasselbe. Der Intuitionismus wendet sich sowohl gegen die Vorstellung einer unabhängigen dualen Welt als auch gegen eine als Zeichenmanipulation aufgefaßte Mathematik (Formalismus).

Auch wer das Tertium-non-datur für evident hält, mag mit dem geringen epistemischen Wert unzufrieden sein. Um den Mangel spürbar zu machen, betrachten wir zum Beispiel Euklids Unendlichkeit der Primzahlen. Es wird die Gegenannahme ad absurdum geführt, daß es eine größte Primzahl gäbe. Einen direkten Beweis, der sofort einleuchtet, verdanken wir Riemann[57] (Vgl. riemannsche Formel auf S. 279). Ohne Umweg über eine Kontraposition wird konstruktiv sofort klar, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

Mit der Aufgabe des Tertium-non-datur brechen einige Wände des mathematischen Palastes ein. Die Irritation der Mathematiker formuliert Hilbert in klaren Worten: „Dieses Tertium non datur dem Mathematiker zu nehmen, wäre etwa, wie wenn man dem Astronomen das Fernrohr oder dem Boxer den Gebrauch der Fäuste untersagen wollte[58]." Es ist nicht verwunderlich, daß der Mathematiker auf die Barrikaden steigt, wenn nur wegen der Epistemik erschlossene Wahrheiten angezweifelt werden.

Die 23 Probleme, die Hilbert beim Internationalen Mathematiker-Kongreß in Paris vorstellte, sowie die 7 Probleme des Clay Mathematics Institute sind derart schwierig,

[56]Ein seltener Fall, denn sie ist Lebesgue- aber nicht Riemann-integrierbar.
[57]Aigner und Ziegler führen im schönen „Buch der Beweise", [Aigner, Ziegler, 2002], mehrere (allerdings nicht triviale) Beweise an.
[58]Vgl. [Hilbert, 1928], S. 80.

daß selbst ein gebildeter Außenseiter nicht einmal die Fragestellung versteht. Es sieht fast so aus, als ob die Mathematik nur hochgestochene Herausforderungen noch nicht bezwungen hätte. Es harren aber immer noch harmlose Probleme der Lösung, für die im Elfenbeinturm keine Belohnung ausgelobt wurde.

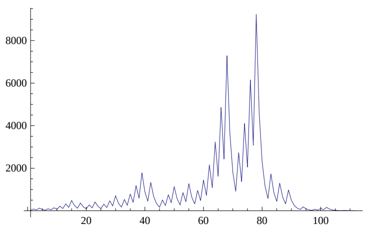

Abbildung 5.6.: Collatz, $n = 27$

Das $3n + 1$-Problem mutet arglos an: Nimm eine natürliche Zahl n, falls n ungerade ist, berechne als nächste Zahl $3n + 1$, sonst $n/2$. Immer steht am Ende die Zahl 1. Alle Iterationen wurden bis 5×2^{60} durchgerechnet, aber ein nicht nur heuristischer Beweis steht noch aus[59]. Der geniale Paul Erdös bot für die Lösung \$ 500 aus eigener Tasche an: „Mathematics may not be ready for such problems. Hopeless. Absolutely hopeless.“

Hilbert proklamierte: „In der Mathematik gibt es kein Ignorabimus“, aber u.E. manchmal zum Preis eines Verzichts auf Erkenntnis. Die Mathematik wird nicht entdeckt, wie der harte Kern der Platonisten meint, sondern konstruiert. Dem Erfinder genügt, daß sich der Beweis entsprechend den Regeln der Logik schreiben läßt. Die Masse der „unschönen“ Beweise bestätigt die Mathematik als Menschenwerk, eine glänzende Leistung des Gespanns aus erfindender Intuition und verbürgender Logik.

Brouwer zeigt, daß eine alternative Mathematik auf rationalem Wege konstruiert werden kann. Damit stellt der Konstruktionismus eine große Bereicherung dar. Wie können zwei Mathematiken, die auf divergenten Auffassungen des Kontinuums aufbauen, friedlich nebeneinander bestehen? Als Antwort bieten wir eine Metapher an. Der Violonist holt aus seiner Geige keine Klaviertöne heraus. Die Parallelität zwischen musikalischem und mathematischem Konstruieren besteht trotz eines Unterschiedes: Musik entpricht der geistigen Verarbeitung der sinnlichen Hörerfahrung, während die abstrakten mathematischen Gegenstände und Relationen die Baumaterialen des Verstandes sind.

[59] Man zeigt leicht, daß beim Iterieren „im Durchschnitt“ mit 3/4 multipliziert wird, so daß bei solchen sehr großen Zahlen heuristisch davon ausgegangen werden kann, daß jede Zahl irgendwann nach unten gehen muß. Es könnten aber Zykeln entstehen; wie Abb. 5.6 visualisiert, wäre es möglich, daß eine Zahl beim Hinunterfahren einen Wert erreicht, den sie schon hatte. Allerdings liegt mit größer werdenden Zahlen die Wahrscheinlichkeit der Wiederholung einer Zahl immer dichter bei Null. Da es unendlich viele Zahlen gibt, besteht die Möglichkeit doch. Für eine eingehende Besprechung vgl. [Lagarias, 1985].

Fazit:

i) Beweise leiden gelegentlich an einer epistemischen Schwäche; die Modelle sind nur ein diesseitiger Abglanz der Platonischen Ideen, falls es diese gibt.
ii) Brouwer schenkte uns einen alternativen Elfenbeinturm: eine *konsistente* Mathematik, über die wegen ihrer geringen Ergiebigkeit lieber geschwiegen wird.
iii) Brouwer und Poincaré sind sich jedenfalls darüber einig, daß Logik definitiv nicht das Instrument des Erfindens ist.

Wir werden später aus der Sicht des Mathematikers auf den Logizismus zurückkommen, der heute noch Gegenstand von Rettungsversuchen ist. Es scheint in der Tat naheliegend, daß die Mathematik, deren Beweise in der Sprache der Logik abgefaßt werden, überhaupt eine Disziplin der Logik sei. Dem ist nicht so. Mathematische Theorien sind Fiktionen. Daher steigen wir jetzt in die Varianten des Fiktionalismus ein.

6. Fiktionalismus

Wir skizzieren synoptisch den Antagonismus Realisten kontra Nominalisten. Platonisten und Nominalisten scheiden sich an der Existenz abstrakter Gegenstände; was heißt Gegenstand? was heißt Existenz? Kritische Rezeption des Fiktionalismus Hartry Fields. Balaguers „easy-road“ Fiktionalismus. Mathematische Fiktionen verfügen wie Biographien über einen schmalen Freiraum.

Die Beschäftigung mit dem imponierenden Werk Brouwers, das von namhaften Mathematikern ernstgenommen wird, stärkt den Verdacht, daß die monolithische Mathematik, wie sie gelehrt und praktiziert wird, dem platonistischen Glauben entgegen eine anthropische Fiktion mit selbstgemachten Regeln und Gegenständen sei, die trotz der Effizienz in den Anwendungswissenschaften (Indispensability-Argument) keinen alleinigen Gültigkeitsanspruch erheben darf.

Die Philosophen haben eine kaum zu überblickende Fülle von Theorien ausgearbeitet, die wir einleitend grob katalogisieren. Zwei Lager stehen einander gegenüber: die Realisten und die Nominalisten, je nachdem ob an die Existenz abstrakter Gegenstände geglaubt wird oder nicht. Wir beginnen mit einer synoptischen Darstellung. Dann gehen wir auf den Fiktionalismus ausführlich ein, in den sich unsere These des Modellismus eingliedern wird.

6.1. Realismus und Nominalismus

Die Hauptrichtungen des Realismus heißen:

i) Ontologischer Realismus (= Platonismus): die Theoreme der Mathematik beziehen sich auf abstrakte Gegenstände, die unabhängig vom Verstand existieren.
ii) Semantischer Realismus: Die Theoreme der Mathematik sind wahr. Die Existenz der mathematischen Gegenstände wird nicht problematisiert.
iii) Wissenschaftlicher Realismus: Die Theoreme der Mathematik bilden einen unverzichtbaren Bestandteil des wissenschaftlichen Wissens.

iv) Erkenntnistheoretischer Realismus: Die Theoreme der Mathematik sind bedeutsam, selbst wenn deren Hintergrund geheimnisumwittert ist.

v) Logizismus: Die Mathematik läßt sich auf die Logik zurückführen. Die Axiome sind evidente logische Wahrheiten, die „eines Beweises weder fähig noch bedürftig“ sind (Frege).

Während die Realisten transzendente Gegenstände und Strukturen der Mathematik aufdecken möchten, negieren die Nominalisten die Existenz jeglicher abstrakter Objekte. Die Aussagen der Mathematik sind zwar intelligibel aber ohne realen Inhalt:

i) Fiktionalismus (Field, Yablo): Gegenstände und Strukturen der Mathematik existieren nicht real sondern innerhalb einer Erzählung.
ii) In-Rebus-Strukturalismus: Die Strukturen der Mathematik beschreiben Relationen zwischen Gegenständen, aber keine Gegenstände selbst; Die Strukturen werden nicht von einer etwaigen übergeordneten Entität abgeleitet (daher in rebus).

Schließlich sind die Theorien zu erwähnen, die nicht eindeutig dem Realismus bzw. Nominalismus zuzuordnen sind, da sie auf die Gegenstände fokussieren, ohne deren Immanenz bzw. Transzendenz dogmatisch zu problematisieren:

i) (Objektiver) Konstruktivismus: Diejenigen Objekte der Mathematik existieren , die durch einen Algorithmus konstruierbar sind.
ii) (Subjektiver) Konstruktivismus = Intuitionismus (Brouwer, Poincaré): der Akzent wird auf die konstruierende Intuition des Mathematikers gelegt.
iii) Konventionalismus (Poincaré): Gegenstände und Strukturen der Mathematik beruhen auf zweckvollen Konventionen.
iv) Formalismus (Hilbert): Axiome legen die formalen Eigenschaften mathematischer Symbole fest. Der Mathematiker folgt bestimmten Regeln, um Relationen zwischen den Symbolen zu etablieren; er fühlt sich für die Frage der *Wahrheit der Axiome* nicht zuständig; jedes widerspruchsfreie Axiomensystem ist zu akzeptieren.
v) Ante-Rem-Strukturalismus (Shapiro): wie beim In-Rebus-Strukturalismus werden strukturelle Relationen zwischen Gegenständen von keiner übergeordneten Entität instanziert; sie würden aber auch dann existieren, wenn es den Menschen nicht gäbe.

Kant meinte zur Begründung der Praktischen Vernunft: „Ich mußte also das Wissen aufheben, um zum Glauben Platz zu bekommen[1]“. Auch in der Philosophie der Mathematik teilt sich die Palette der Theorien in zwei Glaubensrichtungen auf. An einem

[1] Vgl. [Kant, 1787], S. 24.

Extrem sitzen die Platonisten, die an eine jenseitige Idee der Mathematik glauben. Am anderen Pol möchten die radikalen Logizisten sogar die - laut Kronecker von Gott eingegebenen - natürlichen Zahlen am liebsten von der Logik ableiten. Zur Einschätzung der dazwischen liegenden Theorien orientiert man sich am besten an der Frage: Existieren mathematische abstrakte Gegenstände? Diese zerfällt wiederum in zwei weitere Fragen: Was ist ein abstrakter Gegenstand? Was bedeutet Existieren?

6.2. Was ist ein Gegenstand?

Da sich Platonisten und Nominalisten darin unterscheiden, daß erstere an die Existenz abstrakter Gegenstände glauben, letztere hingegen nicht, ist erst zu klären, was Gegenstand überhaupt bedeutet. Ein Gegenstand ist, der Etymologie nach, das, was dem Subjekt objektiv gegenübersteht. Das lat. *obiectum* (= Entgegengeworfenes) verleiht den Derivaten: Objekt, object (engl.), objet (franz.), eine synonyme Bedeutung. Kant definiert *Objekt* in der *Kritik der reinen Vernunft* folgendermaßen:

> Verstand ist, allgemein zu reden, das Vermögen der Erkenntnisse. Diese bestehen in der bestimmten Beziehung gegebener Vorstellungen auf ein Object. Object aber ist das, in dessen Begriff das Mannigfaltige einer gegebenen Anschauung vereinigt ist[2].

Der Verstand des Subjekts synthetisiert in einer einheitlichen Struktur die Eigenschaften des von ihm sinnlich „angeschauten“ Objekts. Also ist das Objekt - oder der Gegenstand, denn Kant verwendet, u.E. zu Recht, beide Termini konkomitant - das transzendentale Pendant zu dem rational unzugänglichen realen Objekt-an-sich, wie Kant in den *Prolegomena* präzisiert:

> Das Objekt bleibt an sich selbst immer unbekannt; wenn aber durch den Verstandesbegriff die Verknüpfung der Vorstellungen, die unserer Sinnlichkeit von ihm gegeben sind, als allgemeingültig bestimmt wird, so wird der Gegenstand durch dieses Verhältnis bestimmt und das Urteil ist objektiv[3].

Da wir uns zu dem extramentalen Objekt-an-sich - nach Kantischer Auffassung - nicht durchdringen können, lebt das Objekt in unserem Verstand, d.h. wir vergeben ihm eine vom Menschen gewirkte Struktur, aber beileibe keine arbiträre. Hier liegt u.E. der wesentliche Zug, der einen Gegenstand kennzeichnet: Der Gegenstand schreibt uns seine Prädikate vor. Dieser Stein draußen in der Sonne diktiert uns seine Form, seine Schwere, seine Farbe, seine Oberflächenbeschaffenheit, etc. Wir können zwar von diesen Akzidenzien absehen, und zum Steinbegriff gelangen. Begriff und Gegenstand sind aber zweierlei:

[2] Vgl. [Kant, 1787], B 137.
[3] Vgl. [Kant, 1783], § 19.

niemand wurde je vom Hundebegriff gebissen. Auch Artefakte sind Gegenstände. Rodin hat zwar als causa efficiens seinen Denker frei gestaltet; die Bronzefigur, die uns vor dem Musée Rodin in Paris gegenübersteht, ist ein Gegenstand.

Daß uns ein Gegenstand seine Eigenschaften vorschreibt, heißt nicht, daß ein Begriff, unter den er fällt, sinnvoll bzw. eindeutig wäre. So wurden Morgenstern und Abendstern, oder noch Koffein und Thein, nicht für identische Gegenstände gehalten. Das Phlogiston erwies sich als ein leerer Begriff. Ein Begriff ist dann adäquat, wenn nach ihm „sortiert“ und anschließend gezählt werden kann. Panza und Sereni definieren dementsprechend „sortale“ Begriffe folgendermaßen:

> Ein Begriff P ist genau dann sortal, wenn entschieden werden kann, ob zwei unter P fallende Gegenstände x und y identisch sind, d.h. ob x und y für denselben Gegenstand stehen oder nicht[4].

Diese Definition geht auf eine von Frege initiierte sprachliche Unterscheidung zurück[5]:

> In der That, während ich nicht im Stande bin, durch bloße Auffassungsweise die Farbe eines Dinges oder seine Härte im Geringsten zu verändern, kann ich die Ilias als Ein Gedicht, als 24 Gesänge oder als eine große Anzahl von Versen auffassen. Spricht man nicht in einem ganz andern Sinne von 1000 Blättern als von grünen Blättern des Baumes? Die grüne Farbe legen wir jedem Blatte bei, nicht so die Zahl 1000.

Nach [Panza & Sereni, 2013] stimmen die Philosophen mehrheitlich darüber ein, daß ein Gegenstand zum Unterschied einer Empfindung dadurch charakterisiert wird, daß er unter einen sortalen Begriff fällt, z.B. einen Gattungsbegriff. Der sortale Begriff *Blume* zeigt auf eine Pflanze mit einem Bündel typischer Eigenschaften; er enthält keine Beziehung zu einer weiteren Entität außerhalb der Blume. Daher sind sortale Begriffe einstellige Prädikate. Ein Begriff ist sortal, wenn jede Zerteilung eines unter ihn fallenden Gegenstands keinen sonstigen Gegenstand ergibt, der unter den Begriff fallen würde.

Demzufolge nennt man *sortal*, was gezählt werden kann; die Frage <Wieviel Grünes gibt es?> wäre sinnlos. Zählbare Gegenstände müssen aber nicht, wie von Panza und Sereni gefordert, *identisch* sein. Sortierte Pralinen in einer Schachtel sind zählbar aber nicht identisch. *Mensch* ist ein sortaler Begriff, aber ein Mann ist nicht identisch mit einer Frau. Ist ein alter Mensch derselbe Gegenstand wie das Baby, das er einmal war, oder hat sich seine „Identität“ gewandelt? Da Farbe kein mathematisches unterscheidendes Merkmal ist, mögen umgekehrt in der Geometrie kongruente Dreiecke, ein rotes und ein blaues, identisch sein, obwohl sie das Auge sinnlich unterscheidet. Identität ist ein schwieriger Begriff, da sie u.a. zum Unterschied von Ähnlichkeit transitiv ist. Ähnlichkeit reicht aber zum Zählen von Objekten nicht aus.

---

[4] Vgl. [Panza & Sereni, 2013], S. 32. Übersetzung CF.

[5] Vgl. [Frege, 1884] § 22.

Die Definition wird u.E. handlicher - allerdings unter einem Verlust an Generalität -, wenn Identität durch *Isomorphie* ersetzt wird, wie in der Mathematik üblich. Das offene Intervall $(-1, 1)$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind isomorph (präziser: diffeomorph), d.h. sie sind derselbe Gegenstand. Ein Rugbyball, eine Sphäre und ein Würfel sind derselbe topologische Gegenstand (sie sind homöomorph), da sie sich ohne Reißen ineinander deformieren lassen. Da uns Gegenstände ihre Eigenschaften vorschreiben, schlagen wir folgende Anpassung der Definition vor:

> Ein Begriff P ist genau dann sortal, wenn anhand einer endlichen Menge vorgegebener Kriterien $k_1, \ldots, k_n$ entschieden werden kann, ob zwei unter P fallende Gegenstände x und y isomorph sind, d.h. ob x und y für einen und denselben Gegenstand stehen.

Dann ist klar, daß z.B. die Prädikate *Lebewesen* und *vernunftbegabt* den sortalen Begriff *Mensch* auszeichnen. Diese Definition mag auf *konkrete* Gegenstände besser passen; bei den abstrakten treten dennoch nach wie vor Schwierigkeiten auf.

Wie von Panza & Sereni angemerkt, könnte selbst ein radikaler Nominalist, d.h. ein solcher, der die Existenz abstrakter Objekte verneint, nur zaghaft behaupten, daß z.B. die nationale Fußballmannschaft nicht existiere. Derartige Gegenstände gibt es in Hülle und Fülle: juristische Personen, politische Parteien, religiöse Gemeinschaften.

Auch gehen Panza & Sereni nicht darauf ein, ob eine *Struktur* unter den Begriff *Gegenstand* fällt. Poincaré betonte, daß wir zu den Gegenständen der Mathematik keinen Zugang haben, aber sehr wohl zu den Relationen zwischen den Gegenständen, d.h. zu Strukturen wie z.B. einer mathematischen Gruppe[6].

Ein Puzzle, eine technische Zeichnung, eine Musikpartitur, und dergleichen mehr werden von einem Säugling verständnislos wahrgenommen. Was sie später zu Gegenständen machen wird, ist nicht ihre materielle Verfaßtheit sondern die Struktur, von der sie nur der Träger sind. Der semiotische Inhalt wird durch intentionales Anschauen in ein Handeln umgesetzt. Heidegger spricht von „um zu-Bezügen“, von „Zuhandenheit“: ein Hammer ist ein „Zeug“, das zum Hämmern dient. Die Welt ist nicht etwas, was der Mensch erst nachträglich zusammenbaut, sondern sie geht dem „Zuhandenen“ voraus:

> Das in der Vorhabe gehaltene Seiende, der Hammer zum Beispiel, ist zunächst zuhanden als Zeug [...] Die Vorsicht zielt auf ein Vorhandenes am Zuhandenen. Durch die Hin-sicht und für sie wird das Zuhandene als Zuhandenes verhüllt. Innerhalb dieses die Zuhandenheit verdeckenden Entdeckens der Vorhandenheit wird das begegnende Vorhandene in seinem So-und-so-vorhandensein bestimmt. Jetzt erst öffnet sich der Zugang zu so etwas wie Eigenschaften[7].

[6] Für zwei ganze Zahlen a und b ist das Produkt $a \times b$ wieder eine ganze Zahl. Wird der Mercedes-Stern erst a-mal um 120° rotiert und dann b-mal, so wurde er $(a + b)$-mal gedreht. Die Referenten sind einerseits ganze Zahlen andererseits Drehungen. Dem Parallelismus der Strukturen liegt der Gruppenbegriff zugrunde.

[7] Vgl. [Heidegger, 1927], S. 157-158.

In dem von Heidegger in seiner schwierigen Sprache beschriebenen Prozeß, ist das Wort *Eigenschaften* bedeutungsvoll; der Verstand projiziert Eigenschaften auf einen materiellen Träger und macht ihn erst zu einem Gegenstand, d.h. einer Symbiose zwischen Struktur und materiellem Träger. Im Beispiel des Gruppenbegriffs schreibt uns der Name *Gruppe* ein Bündel von Eigenschaften vor. Die abstrakte Gruppenstruktur gehört u.E. nicht weniger in die Gattung der Gegenstände als etwa eine Zahl oder ein Dreieck.

Der scheinbar klare Satz <Der Nominalist leugnet die Existenz abstrakter mathematischer Gegenstände> wird durch die sortale Definition von *Gegenstand* noch nicht erhellt, denn nicht weniger heikel ist die Frage: Was heißt Existieren?

6.3. Existieren abstrakte Gegenstände?

Die Schwierigkeit der Frage war, und ist noch, Anlaß einer Debatte um die ontologischen Gottesbeweise, insbesondere um den „Urbeweis“ von Anselm von Canterbury. Frege hat damit Licht in die Diskussion gebracht, daß er Existenz als Prädikat zweiter Stufe - d.h. ein Prädikat, das sich auf Prädikate bezieht - entlarvte. Den Ansatz zu dieser Klärung gab aber bereits Kant mit der Feststellung, daß *Existenz kein reales Prädikat sei.* Kants Begründung läßt sich eins-zu-eins auf mathematische Gegenstände übertragen:

> *Sein* ist offenbar kein reales Prädikat, d. i. ein Begriff von irgend etwas, was zu dem Begriffe eines Dinges hinzukommen könne [...] Im logischen Gebrauche ist es lediglich die Copula eines Urteils. Der Satz: Gott ist allmächtig, enthält zwei Begriffe, die ihre Objekte haben: Gott und Allmacht; das Wörtchen: ist, ist nicht noch ein Prädikat oben ein, sondern nur das, was das Prädikat *beziehungsweise* aufs Subjekt setzt[8].

Das Verb *sein* kann in doppeltem Sinne gebraucht werden: <Gott ist> (oder das Kartesiche <(cogito ergo) sum>) drückt die Existenz aus: es gibt Gott. In <Gott ist allmächtig> wird das grammatische Subjekt <Gott> über die Copula <ist> mit dem Prädikat <allmächtig> in Beziehung (im Zitat: *beziehungsweise*) gebracht, wobei <ist> nicht gleichzeitig auch noch für <es gibt> steht[9]. Aus der Aussage <die Zahl 17 ist prim> folgt nicht verbaliter (at face value), daß Zahlen existieren. Der Schluß wäre eine Petitio Principii: Die Arithmetik schickt Zahlen, d.h. abstrakte Gegenstände, durch eine operative Struktur. Innerhalb der arithmetischen Struktur existieren Primzahlen strukturintern. Nur innerhalb einer Gott postulierenden Struktur, kann Gott mit allmächtig, allwissend, allgütig, usw. prädiziert werden. Für einen Atheisten, der keinen Gott setzt, ist <Gott ist allmächtig> trivial wahr, wie etwa <Gott ist viereckig>, denn

[8] Vgl. [Kant, 1787], S. 696 ff.
[9] Siehe auch [Carnap, 1931a], S. 233f.

auf Elemente der leeren Menge treffen alle Prädikate zu. Für Kant kann Existenz kein Prädikat abstrakter Gegenstände („Objekte des reinen Denkens") sein:

> Hundert wirkliche Taler enthalten nicht das mindeste mehr, als hundert mögliche [...] Wenn ich also ein Ding, durch welche und wie viel Prädikate ich will, (selbst in der durchgängigen Bestimmung) denke, so kommt dadurch, daß ich noch hinzusetze, dieses Ding ist, nicht das mindeste zu dem Dinge hinzu. Denn sonst würde nicht eben dasselbe, sondern mehr existieren, als ich im Begriffe gedacht hatte, und ich könnte nicht sagen, daß gerade der Gegenstand meines Begriffs existiere [...] Wollen wir dagegen die Existenz durch die reine Kategorie allein denken, so ist kein Wunder, daß wir kein Merkmal angeben können, sie von der bloßen Möglichkeit zu unterscheiden [...] [F]ür Objekte des reinen Denkens ist ganz und gar kein Mittel, ihr Dasein zu erkennen, weil es gänzlich a priori erkannt werden müßte, unser Bewußtsein aller Existenz aber (es sei durch Wahrnehmung unmittelbar, oder durch Schlüsse, die etwas mit der Wahrnehmung verknüpfen,) gehört ganz und gar zur Einheit der Erfahrung, und eine Existenz außer diesem Felde kann zwar nicht schlechterdings für unmöglich erklärt werden, sie ist aber eine Voraussetzung, die wir durch nichts rechtfertigen können[10].

Existenz darf für möglich oder unmöglich gehalten werden, aber niemand kann seinen Glauben an die Existenz abstrakter Gegenstände durch Sätze der Logik rechtfertigen. Im Ergebnis zeigt sich, daß Platonisten und Nominalisten es mit Gegenständen und Existenz etwa so schwer haben wie Gläubige und Atheisten. Die Platonisten sind weitgehend unbesorgt, da sie an eine transzendente Ideenwelt glauben. Daß die Nominalisten auf die Harmonie der Mathematik nicht eingehen, ist eine echte Lücke. Sämtliche Mathematiker, gleichgültig welcher Couleur, empfinden beim mathematischen Erfinden ein Gefühl der Harmonie, z.B. Hardy:

> The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful; the ideas, like the colours or the words must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in this world for ugly mathematics[11].

Das logizistische Instrumentarium erlaubt in der Tat nur *ugly mathematics*. Um die Intuition des Mathematikers auszuklammern, spekuliert der Logizismus, daß Beweise eine logische Geistesübung seien. Dann wäre es nur eine Frage der Zeit, bis Computerbeweise das Zepter übernehmen. Detlefsen vergleicht sehr schön den logizistischen Prozeß mit dem weißen Stock eines blinden Menschen:

> [G]enuine mathematical reasoning does not proceed in „logic-sized" steps, but rather in bigger steps-steps requiring genuine insight into the given mathematical subject being inferentially developed. This sets it at odds with logical reasoning which, by its very topic-neutral character, neither requires nor even admits use of such insight in the making of inferences [...] [L]ogical reasoning also foreswears the easy, loping stride of one familiar with the twists and turns of a given local terrain, and opts instead for the halting step of one who is blind to the special features of all localities, and who must therefore take only such steps as would be safe in *any* [...] Logical astuteness may keep one from falling into a pit, but having a cane with which to feel one's way is a poor substitute for being able to see[12].

[10]Vgl. [Kant, 1787], S. 696 ff.
[11]Vgl. [Hardy, 1941], S 14.
[12]Vgl. [Detlefsen, 1990], S. 503.

Wir machen hier einen kurzen Halt und fassen unsere Schlüsse über die Existenz abstrakter mathematischer Gegenstände zusammen:

i) Wir definieren *Gegenstand als eine Entität, die uns ihre Eigenschaften vorschreibt*;
ii) Auch eine Struktur ist ein abstrakter Gegenstand;
iii) Abstrakte Existenz und ihre Negation sind metaphysische Postulate.

Logizismus und Formalismus gehen wie ein Gerichtsmediziner, der aus methodischen Gründen Schönheit übersieht, an die Mathematik heran. Harmonie kommt nicht durch Semantik zum Ausdruck, sondern in der blitzartigen Eingebung einer strukturellen Relation: „Das Ergebnis habe ich schon, jetzt brauche ich nur noch den Weg, der zu ihm führt“ (Gauß).

Wir wenden uns jetzt der Kompromißtheorie des Fiktionalismus zu, der sich zwar in ein nominalistisches Kleid hüllt, aber die mathematische Schönheit vom Platonismus herholt. Überspitzt und karikaturistisch formuliert, nehmen die Fiktionalisten die Konstruktion des Platonismus in Anspruch, aber sie lehnen den Glauben an die Existenz abstrakter Gegenstände ab. Der Mathematiker erfindet seine Gegenstände; Mathematik ist eine Fiktion. Romane und Biographien sind auch Fiktionen. Während aber im Roman der Phantasie kaum Grenzen gesetzt sind, sind dem Biographen (wie dem Mathematiker) auf seinem Slalomlauf Ereignisse vorgeschrieben. Den Ariadnefaden liefert der Gründer des Fiktionalismus, Hartry Field.

6.4. Hartry Fields Fiktionalismus

Nach der Unterscheidung in [Hale & Wright, 2002] zwischen konservativen und nichtkonservativen Repliken auf das Benacerrafsche Dilemma (vgl. Anhang D, S. 257) zählt Hartry Fields Position zu den nichtkonservativen: die erste Forderung wird übernommen aber nicht die zweite. Field meint also:
i) Mathematische Aussagen sind zwar nach dem Wortlaut (at face value) zu lesen, aber
ii) Diejenigen Aussagen, die i) erfüllen, bilden *keinen* Korpus apriorischen Wissens.

Mathematisches Wissen reduziert sich auf die Ermittlung von Theoremen gemäß logischen Regeln. Die mathematische Wahrheit entspringt einer „guten“ Semantik, die an Objekten und Strukturen angewandt wird, die der Mathematiker nicht a priori erkennt. Wissen-daß-p beweist daher nicht, daß p wahr sei. Allein der Mathematiker kann urteilen, ob eine Theorie „gut“ ist; eine gute Theorie muß der Philosoph nicht für „wahr“

halten. Field kann keine mathematische Theorie für wahr halten, da er als Nominalist an die Existenz mathematischer Entitäten nicht glaubt. Sein mathematischer Atheismus hindert Field nicht daran, den Mathematikern Respekt zu zollen, die Axiome und Theorien für wahr halten, denn auch eine nicht wahre Theorie kann gut sein:

> [I]f a mathematical theory is sufficiently rich to be interesting, the only further thing we ought to ask of it is that it be consistent; it is quite irrelevant to require that it also be true, and, in fact, this latter goal is never fulfilled since it would require the existence of mathematical entities[13].

Der radikale Platonismus, wie er z.B. durch Michael Resnik vertreten wird[14], geht zwar davon aus, daß wir mit den jenseitigen mathematischen Gegenständen nicht kausal interagieren können, aber daß wir ohnehin einen Zugang zu ihnen finden. Die Agnostiker unter den Nominalisten verneinen, daß wir von etwas wissen können, wenn keine Interaktion stattfindet; falls abstrakte mathematische Gegenstände existieren, können wir nichts über sie erfahren[15]. Field lehnt jedoch den sturen Agnostizismus ab:

> We also can't have direct evidence against the hypothesis that there are little green people living inside electrons and that are in principle undiscoverable by human beings; but it seems to me undue epistemological caution to maintain agnosticism rather than flat out disbelief about such an idle hypothesis[16].

Mit seinem radikalen Nominalismus befreit sich Field erfolgreich vom Benacerrafschen Dilemma. Wenn aber mathematische Entitäten nicht real existieren, so existieren sie doch transzendental im Bewußtsein des Mathematikers; Field betrachtet sie daher als *Fiktionen*, die zur Konstruktion einer Erklärung erfunden werden:

> It goes without saying that $2 + 2 = 4$ is *true according to arithmetic*; the philosophical assumption at issue isn't that it is true according to arithmetic, but that it and the rest of arithmetic are true. If the philosophical assumption is incorrect, then $2 + 2 = 4$ is a lot like „Santa Claus lives at the North Pole", which is *true according to a certain myth* but is nonetheless false[17].

Hier möchten wir einwenden, daß Santa Claus zwar fiktiv ist, aber in der Fiktion *konkret*, sonst lebte er nicht am Nordpol. Er hat nicht denselben Status wie *abstrakte* Zahlen, die sich ob real oder fiktiv nicht anfassen lassen. Der Fiktionalismus ersetzt -

[13]Vgl. [Field, 1982], S. 46.

[14]Vgl. [Resnik, 1990], S. 41: „Mathematical objects are causally inert and exist independently of us and our mental lives [... However] we can refer to such alien creatures and acquire knowledge and beliefs about them."

[15]Poincaré ist auch der Meinung, daß wir keinen Zugang zu den mathematischen Gegenständen haben, aber sehr wohl zu den Relationen zwischen ihnen. Wir haben bereits dafür argumentiert, daß die relationalen Strukturen in unseren Augen Gegenstände sind, da sie auf uns einwirken.

[16]Vgl. [Field, 1989], S. 45.

[17]Vgl. [Field, 1982], S. 67.

auch bei Yablo, Balaguer, usw. - den Begriff der absoluten Wahrheit durch die Wahrheit-in-der-Erzählung[18]. Es ist z.B. wahr-in-der-Erzählung, daß Sherlock Holmes in London wohnt. Es ist sogar nicht nur in der Erzählung sondern simpliciter wahr, daß ein Haus $221B$ in der Baker Street steht.

6.4.1. Wissenschaft ohne Zahlen

Während Hilbert eine widerspruchsfreie Theorie genügt[19], reicht Field die Konsistenz nicht aus, um eine Theorie „gut" zu nennen. In [Field, 1980] mit dem expressiven Titel *Science Without Numbers* spricht der Nominalist Field sämtlichen mathematischen Entitäten - Zahlen, Funktionen, Mengen, usw.[20] - jegliche Existenz konsequent ab:

> Since I deny that numbers, functions, sets, etc. exist, I deny that it is legitimate to use terms that purport to refer to such entities, or variables that purport to range over such entities, in our ultimate account of what the world is really like[21].

Eine *gute* mathematische Theorie muß nicht wahr sein, womit kein Disput über Wahrheit entsteht. Die Theorie ist dann gut, wenn sie mit jeder konsistenten physikalischen Theorie kompatibel ist:

> Let us say that for an interesting mathematical theory to be good, it need only be *consistent with every internally consistent theory about physical word*. This is still a version of anti-realism, because the point remains that the theory need not to be true to be good[22].

Leider führt Field kein Beispiel einer Theorie an, die nicht mit *allen* physikalischen konsistenten Theorien kompatibel wäre. Wenn die Mathematik die Zofe der Physik ist, welcher Konflikt könnte in diesem renitenten Fall entstehen? Warum läge die Schuld bei der Mathematik eher als bei der Physik?

Da die reine Mathematik zur Untersuchung eines (konkreten) Phänomens nicht unmittelbar herangezogen wird, benötigt Field eine Brücke zur realen Welt, um die Güte einer mathematischen Theorie einzuschätzen. Durch Überleitungsgesetze (*bridge laws*)

[18] Etwas präziser als *Erzählung* wäre der linguistische Terminus *Diegese*. Laut Genette ([Genette, 1998], S 201f) ist „die Diegese [...] eher ein ganzes Universum als eine Verknüpfung von Handlungen. Sie ist mithin nicht die Geschichte, sondern das Universum, in dem sie spielt." *Erzählung* ist aber bei Fiktionalisten allgemein üblich.

[19] Vgl. [Gabriel, 1976], S. 66, Schreiben Von Hilbert an Frege vom 29. Dezember 1899: „Es hat mich sehr interessirt, gerade diesen Satz bei Ihnen zu lesen, da ich nämlich, solange ich über solche Dinge denke, schreibe und vortrage, immer gerade umgekehrt sage: Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz."

[20] Ob auch Strukturen darunter fallen, erwähnt Field nicht.

[21] Vgl. [Field, 1980], S. 1.

[22] Vgl. [Field, 1982], S. 49.

verankert Field die mathematischen Gegenstände an die Welt der Physik[23]. Field nennt eine Sprache „nominalistisch", wenn deren Terme und Variablen sich auf konkrete Gegenstände und Gebiete der Raum-Zeit beziehen; er behauptet, daß sich eine Theorie der Physik in eine nominalistische Theorie und eine mathematische Theorie aufsplitten läßt. Fields Lehrer Putnam hatte Zweifel daran geäußert, ob sich das Newtonsche Gesetz nominalistisch schreiben lasse:

> Newton's law has a content which, although in one sense perfectly clear [...] quite transcends what can be expressed in nominalistic language [...] Even if no nominalist has yet proposed to „translate" Newton's law into nominalistic language, how can we be sure that no way exists[24]?

Die Herausforderung nimmt Field wahr und er gibt in [Field, 1980] Kapitel 8 eine sehr detailliert ausgearbeitete nominalistische Version des Newtonschen Gesetzes. Was er erreicht, ist eine bereinigte Variante des Newtonschen Modells, in der nur soviel wie nötig reine „gängige" Mathematik enthalten ist. Gleichwertige Ergebnisse werden auf einem zumindest ungewohnten - wenn nicht gar umständlichen - Weg erreicht:

> So the nominalistic formulation of physics and the platonistic formulation have precisely the same nominalistically-statable consequences; and so mathematical entities are theoretically dispensable in the theory of gravitation [...] I do not of course claim that the nominalistic concepts are anywhere as convenient to work in solving problems or performing computations: for these purposes, the usual numerical apparatus is a practical necessity[25].

Als Attacke gegen das Indispensability-Argument ist Fields „Nominalisierung" der Newtonschen Gravitation stichhaltig. Wohlgemerkt hatte Newton in der Ausgabe von 1687 der *Principia* (allerdings nicht mehr in den späteren Auflagen) sein Gesetz rein geometrisch, d.h. ohne Einsatz seiner „method of fluents and fluxions" ausgearbeitet. In seiner Proposition 71 (Beschleunigungen sind „pretty near" umgekehrt proportional zu den Quadraten der Entfernungen bis zum Erdmittelpunkt) betrachtet er verschachtelte dünne materielle Sphären. Field benötigt 30 Seiten um erste und höhere Ableitungen, Skalarprodukt, Laplace-Operator, Ableitung von Vektorfeldern, Poisson-Gleichung, etc. nominalistisch zu konstruieren, während Newton 1687 ohne diese Begriffe sondern nur anhand elementarer Geometrie einen besonders eleganten allgemein verständlichen Beweis bereits gegeben hatte. Es war allerdings zu erwarten, daß sich die inhaltsgleiche moderne Version der Newtonschen Gravitation nominalistisch umschreiben läßt, da Newton von vornherein sein Gesetz nominalistisch verfaßte. Um so mehr bleibt fraglich, inwieweit sich die nominalistische Umschreibung auf andere physikalische Theorien, insbesondere die Quantenmechanik, übertragen ließe.

[23]Vgl. [Field, 1980], S. 9ff.
[24]Vgl. [Putnam, 1983], S. 338.
[25]Vgl. [Field, 1980], S. 90f.

Ein physikalische Theorie, d.h. ein Modell, besteht aus einem nominalistischen Teil, der abbildenden Struktur, und einer mathematischen Verarbeitung. Field nennt *konservativ* eine mathematische Theorie, die mit jeder konsistenten Theorie der Physik kompatibel ist. Seien einerseits A eine nominalistische Aussage und N ein Korpus solcher Aussagen, andererseits S eine konsistente mathematische Theorie, dann ist $N + S$ eine Fortsetzung (*extension*) von N, die nur die Theoreme enthält, die bereits Theoreme von N sind.

Mit seinem konservativen *Prinzip C* verfolgt[26] Field das Ziel, in einer physikalischen Theorie nominalistische und mathematische Bestandteile auseinanderzuklauben, um die epistemologische Rolle der Mathematik zu minimieren. In [Gandon, 2013] urteilt Gandon, daß Field, getreu seinem nominalistischen Credo, die Mathematik zu einem Rechenwerkzeug reduzieren möchte, das die Physik nicht im mindesten bereichere:

> Der Einsatz der Mathematik erleichtert bestenfalls die Schlußfolgerungen; er erweitert nicht die Sphäre der Wahrheiten; er trägt zum Fortschritt der Erkenntnisse über die Welt nicht bei[27].

In seinem Streben „Wissenschaft ohne Zahlen“ zu betreiben, läßt sich Field zu einer gewagten Allaussage verleiten:

> It would be extremely surprising if it were to be discovered that standard mathematics implied that there are at least 10^6 non-mathematical objects in the universe, or that the Paris Commune was defeated; and were such a discovery to be made, all but the most unregenerate rationalist would take this as showing that standard mathematics needed revision. Good mathematics is conservative; a discovery that accepted mathematics isn't conservative would be a discovery that isn't good.[28].

Wir hätten uns bessere Beispiele gewünscht als die 10^6-Obergrenze der nichtmathematischen Objekte oder die Pariser Kommune, für welche sich schwer eine nominalistische Theorie ausdenken ließe. Es gibt in der Tat Gegenbeispiele, bei denen die Überzeugung der Pythagoräer, daß der Kosmos eine nach bestimmten Zahlenverhältnissen aufgebaute harmonische Einheit bildet, prima facie plausibel klingt. Wir führen zwei Fälle an.

Schneiden wir regelmäßige Polygone aus Pappe heraus und kleben sie Kante an Kante zu einem Polyeder zusammen, erhalten wir die 5 Platonischen und 13 Archimedischen Körper. Welche nominalistische Überlegung könnte uns verraten, warum es darüberhinaus keine regelmäßigen Polyeder gibt? Doch genügt ein elementares mathematisches

[26] Principle C definiert Field in [Field, 1980], S. 11-12: „First introduce a 1-place predicate $M(x)$, meaning intuitively $<$x is a mathematical entity$>$; second for any nominististically-stated assertion A, let A^* be the assertion that results by restricting each quantifier of A with the formula $< \text{not} M(x_i) >$ for the appropriate variable x_i [...] Principle C (for ‚conservative‘): Let A be any nominalistically statable assertion, and N any body of such assertions; let S be any mathematical theory. Then A^* is not a consequence of $N^* + S + < \exists x \neg M(x) >$ unless A is a consequence of N.“

[27] Vgl. [Gandon, 2013], S. 107. Übersetzung CF.

[28] Vgl. [Field, 1980], S. 13.

Nachdenken über die an einer Ecke zusammenlaufenden Winkel, um uns aufzuklären. Allerdings liegt dieses Beispiel einer Obergrenze für die Anzahl selbstgebastelter Polyeder sehr nah an der reinen Mathematik; dem helfen wir mit dem lange ungelösten Phänomen der Phyllotaxis (Blattstellungslehre).

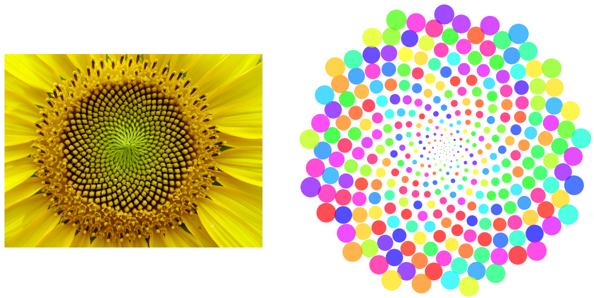

Abbildung 6.1.: Sonnenblume

Jeder Sonnenblumenkern der Abb. 6.1 gehört zu einer der 21 links- bzw. 34 rechtsdrehenden Spiralen. Das Besondere ist, daß die Anzahl der links- und rechtsdrehenden Spiralen immer benachbarte *Fibonacci-Zahlen*[29] sind. Dieses Phänomen läßt sich so begründen, daß sich die Ansätze derart in der Knospe verteilen, daß sie ein Maximum an Sonnenlicht erhalten, das erreicht wird, wenn der Winkel zwischen Blättern einer Teilung des Kreises durch den Goldenen Schnitt entspricht; dabei strebt der Quotient benachbarter Fibonacci-Zahl gegen den Goldenen Schnitt[30].

Wir haben es hier nicht etwa mit einer Rarität zu tun, sondern mit dem Grundphänomen der Phyllotaxis. Der nominalistische kleine Anteil der Theorie ist lediglich das in zahlreichen Experimenten nachgewiesene Darwinsche Streben nach einem Maximum an Sonnenbestrahlung, alles andere, d.h. der weitaus größere Teil, ist Mathematik. Wer - wie Field mit dem Newtonschen Gesetz - die *reellen* Zahlen aus jeder Theorie eliminieren möchte, stieße darauf, daß der $\sqrt{5}$ enthaltende Goldene Schnitt eine irrationale Zahl ist. Klarerweise ist die Mathematik nichts mehr als eine Auswertung der Implikationen des Strebens nach Licht. Andererseits würden ohne Mathematik die Spiralen der Sonnenblume ein Geheimnis bleiben, was das Indispensability-Argument der Platonisten stark macht, das Field im Gegenteil entschärfen möchte.

Dieses mathematiklastige Beispiel läßt das Prinzip der wissenschaftlichen Modellierung erkennen. Ein rätselhaftes Phänomen (die deterministische Blattstellung) soll von

[29] Die Fibonacci-Zahlen F_n bilden eine rekursive Folge $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Die Hauptfolge startet mit $F_1 = F_2 = 1$. Bei Sonnenblumen findet man in der Regel die Kombinationen $21/34$ oder $34/55$ oder $55/89$, bei besonders großen Exemplaren auch $89/144$ oder $144/233$. Dieses Prinzip gilt beispielsweise auch bei Gänseblümchen, Tannenzapfen, Pinienzapfen, Kohl, Ananas, etc. und überhaupt allgemein in der Pflanzenwelt für die Verteilung der Blätter um den Stengel.

[30] In Abb. 6.1 werden die Kerne durch $r(cos\frac{2r\varphi}{\pi}, sin\frac{2r\varphi}{\pi})$ parametrisiert, wobei r die Anzahl der Kerne von 1 bis n durchläuft und $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ für den Goldenen Schnitt steht. Die links- und rechtsdrehenden Spiralen entstehen durch eine optische Täuschung, denn die Kerne befinden sich alle auf einer archimedischen Spirale. Für weitere Details und Computer-Animationen vgl. [Fabre, 2010].

einem apriorischen Naturgesetz (dem Darwinschen) über *bridge laws* so abgeleitet werden, daß Vorhersagen (die links- und rechtsdrehenden Spiralen in der jeweiligen richtigen Anzahl) gemacht werden können. Anders als sein Urbild lebt das Modell in unserer intelligiblen Welt, so groß manchmal die Versuchung sein mag, das Modell mit der Realität gleichzusetzen. Der Fiktionalismus betrachtet die Mathematik als eine Fiktion, aber die Modelle der Physik sind erst recht Fiktionen. Während kein Fortschritt die Mathematik je invalidiert, werden die Modelle der Anwendungswissenschaften immer wieder ausgetauscht. Betrachten wir aus diesem Blickwinkel den für Putnam und Field paradigmatischen Fall der Gravitation. Fields nominalistische Umschreibung, nennen wir Fiktion Nr. 2. Davor war Fiktion Nr. 1 das Ptolomäische Modell. Die Relativitätstheorie löste Newton als Fiktion Nr. 3 ab.

Lange Zeit vor Newton galt das Ptolomäische Modell der Epizykeln mit einem von Beginn an viel größeren nominalistischen Anteil als in der von Field mühsam erarbeiteten Version des bereinigten Newtonschen Modells. Nach der Epizykeltheorie beschreiben die Planeten einen kleinen Kreis - Epizykel -, der auf einem größeren Kreis rotiert. Die Bewegung entlang der Kreise erfolgt etwa parallel zur Ebene der Ekliptik. Der Kunstgriff besteht darin, Epizykel auf Epizykeln aufzutürmen, um sich - wie bei Fourier-Reihen - der Beobachtung beliebig genau anzunähern; Kopernikus konnte in seinem Weltsystem mit 34 Epizykeln die Bindung der Merkur- und Venusbahnen an die Sonne konstruieren[31].

Heuzutage könnte ein Computer mit beliebig vielen Epizykeln arbeiten, sogar Sphären auf Sphären rollen lassen - z.B. durch Rechnen mit Quaternionen. Fiktion Nr. 1 würde den Lauf der Planeten mit hoher Präzision bei kleinem Rechenaufwand beschreiben. Das Ptolomäische Modell könnte rehabilitiert werden. Warum tut man es nicht? Die mathematische Fiktion wurde seit der Antike enorm angereichert und durch den Computer potenziert; sie interagiert deswegen immer noch nicht mit der realen Welt. Wir reaktivieren die Ptolemäische Fiktion Nr. 1 deswegen nicht, weil sie den Lauf der Planeten deskriptiv aber nicht interpretativ - an die griechischen himmlischen Sphären glaubt niemand mehr - vorhersagt, während die Newtonsche Fiktion Nr. 2 epistemisch reicher ist (Poincaré würde sagen: sie ist komfortabler). Newtons Theorie hat das Naturgesetz der Gravitation eingeführt, wo Ptolemäus nur die Bahnen der Planeten beschrieb.

Mit Fiktion Nr. 3 hat Einstein den mysteriösen Newtonschen Kraftbegriff durch geo-

[31] Zwischen 70 und 60 v. Chr. sank ein Schiff vor der griechischen Insel Antikythera, auf dem eine kleine verblüffend leistungsfähige Kunstuhr - mit Kurbeln statt einem Antrieb - entdeckt wurde. Über Zahnräder, von denen über 30 erhalten sind, konnten vier nach dem Ptolomäischen Modell erstellte Kalender aufgekurbelt werden, für Sonne, Mond, Finsternisse und die Olympiaden.

dätische Bahnen in einem 4D-Raum verdrängt. Putnams Herausforderung hieße heute, eine nominalistische Version der Relativitätstheorie zu schreiben.

Hervorzuheben ist, daß nominalistischer und mathematischer Teil einer physikalischen Theorie einen parallelen Fortschritt verzeichnen. Die Epyzikeln waren eine gewaltige Rechenaufgabe in einer simplen Geometrie. Für sein Modell initiierte Newton mit der Differentialrechnung (*Fluxionsmethode*) eine neue Ära der Mathematik. Einstein hätte mit seinen Freunden Hoffmann und Infeld kein mathematisches Modell bauen können, wenn nicht zuvor der geniale Riemann über seine intrinsische Geometrie mehrdimensionaler Räume gebrütet hätte. Der wesentliche Zug im Fortschreiten der Theorien ist, daß die drei Modelle der Physik von nicht miteinander verwandten Fiktionen getragen werden, während die Mathematik ohne Kontinuitätsbruch, und ohne das bisher Erreichte zu verwerfen, ihren Wissensbestand erweitert hat. Die Mathematik wurde durch die Physik angetrieben, die stets neue mathematische Werkzeuge forderte. Zugunsten des Platonismus kann man sich nur wundern, daß die Mathematik den sich ständig wandelnden Theorien der Physik dienen konnte, ohne sich selbst zu verleugnen.

<u>Fazit</u>:

i) Field hat mit dem Fiktionalismus einen bedeutenden Beitrag zur Philosophie der Mathematik geleistet.
ii) Die Aufteilung zwischen nominalistischem und mathematischem (zwar *gutem* aber nicht *wahrem*) Anteil einer Theorie dient letztendlich dazu, die u.E. dogmatische Ablehnung der Existenz mathematischer abstrakter Gegenstände zu rechtfertigen.
iii) Selbst wenn es im Einzelfall des Newtonschen Modells Field gelungen sein soll, eine (unersprießliche) nominalistische Theorie aufzubauen, kann er selbst bei dieser Geistesübung auf ein Minimum an Mathematik nicht verzichten.
iv) Physik und Mathematik mögen beide die Realität nicht widerspiegeln; während aber die Physik zu derselben Fragestellung ihre Fiktion immer wieder von Grund auf revidiert, schreiben die Mathematiker an derselben Fiktion frohgemut weiter.

Wir gehen auf die zahlreichen Kritiken an der Fieldschen Theorie nicht ein, und setzen uns mit dem von uns favorisierten Fiktionalismus von Balaguer auseinander.

6.5. Balaguers Replik

Balaguer nennt Fields Weg „hard road fictionalism“ mit dem Hinweis auf die Ochsentour der nominalistischen Umschreibung einer physikalischen Theorie.

6.5.1. Easy vs. hard road Fiktionalismus

Da er zweifelt, ob sich jede Theorie nominalistisch umschreiben ließe, zieht Mark Balaguer eine easy-road Replik (Stichwort: *nominalistic scientific realism*) vor. Wird des Arguments willen angenommen, daß abstrakte, somit inerte, Objekte existieren, dann können sie nichts verursachen. Die Wahrheiten der empirischen Wissenschaft hängen daher nur einerseits von rein physikalischen andererseits von rein mathematischen Sachverhalten ab, die irgendwie zusammenwirken. Da der Fiktionalist abstrakte Objekte nicht für möglich hält, sind empirische Theorien zwar sensu stricto nicht wahr, aber sie vermögen trotzdem die physikalische Welt zu beschreiben, weil diese Welt derart konstruiert wird, daß die empirische Wissenschaft wahr ist:

> [F]ictionalists can maintain that even if there are no such things as mathematical objects and, hence, our empirical theories aren't strictly true, these theories still paint an essentially accurate picture of the physical world, because the physical world is just the way it needs to be for empirical science to be true. In other words, fictionalists can maintain that the physical world „holds up its end of the empirical-science bargain[32].“

Verwirrend ist die durch Anführungszeichen hervorgehobene Behauptung, daß die physikalische Welt ihren Pflichten in der empirischen Wissenschaft nachkommt, während Mathematik lediglich die Funktion einer deskriptiven oder repräsentativen Hilfe erfüllt[33]. Dann braucht Mathematik nicht wahr zu sein:

> [M]athematics can succeed in its role as a descriptive aid even if it isn't true; indeed, [Balaguer] argues that truth is simply no help at all in this connection[34].

Ist die Mathematik die passive Zofe der Physik, zersplittert das Indispensability-Argument daran, daß in einer Theorie nur der nominalistische Teil relevant ist: „the nominalistic content of empirical science is all empirical science is really ‚trying to say‘ about the world[35].“

Ist die Harmonie zwischen der Welt der Physik und der empirischen Wissenschaft (the physical world is just the way it needs to be for empirical science to be true) so selbstverständlich? Das Sagen hat allein die Welt, nach der sich die Wissenschaft richtet. Die Modelle der Physik sind vergänglich. Die Mathematik mag ihre Aufgaben von der nominalistischen Theorie erhalten; sie ist aber nicht nur deskriptiv sondern vor allem explikativ. Auf diesen Einwand macht Balaguer aufmerksam, als er die Arbeiten von Baker erwähnt. In [Baker, 2005] und [Baker, 2009] berichtet Alan Baker von den

[32]Vgl. [Balaguer, 1998], S. 134.
[33]Vgl. ebd. S. 11.
[34]Vgl. ebd.
[35]Vgl. [Field, 1982], S. 141.

periodischen durch Primzahlen gesteuerten Lebenszyklen der Singzykaden[36]. Balaguer meldet berechtigte Zweifel an dieser Interpretation, gegen die aber unser Paradigma der Phyllotaxis (vgl. S. 119) immun wäre. Das „mathematisierte Verhalten" der Pflanzenwelt hat eine ganz andere Tragweite als die anekdotische Primzahlen-Abwehr der Singzikaden.

6.5.2. Formalistischer Fiktionalismus

Balaguer übt Kritik an Fields *formalistischem* Fiktionalismus. Für alle Fiktionalisten sind die Aussagen $2+2=4$ und $2+2=5$ beide nicht wahr. Die Formalisten unter den Fiktionalisten bezeichnen jedoch die erste Aussage $2+2=4$ als *wahr-in-der-Erzählung* mit der Begründung, daß sie, anders als die zweite Aussage $2+2=5$, von fundierten Axiomen abgeleitet wird.

Wir möchte hier anmerken, daß Fields Anerkennung der Wahrheit-in-der-Erzählung in einer verdächtigen Nähe zum Platonismus steht. In einem Atemzug wird die Existenz mathematischer Objekte verneint und auf diese Objekte in-der-Erzählung doch zugegriffen. In einem ähnlichen Kontext meint Putnam humorvoll zu dem latenten Widerspruch:

> [It is like] trying to maintain that God does not exist and angels do not exist while maintaining at the very same time that it is an objective fact that God has put an angel in charge of each star and the angels in charge of each of a pair of binary stars were always created at the same time![37].

Wahrheit-in-der-Erzählung wird laut Field jedenfalls zur Aporie, wenn der Wahrheitswert nicht theorieintern entscheidbar ist. Dazu der Nichtformalist Balaguer:

> Most importantly, the formalistic view entails (incorrectly) that there can be no objectively correct answers to questions that ask about the truth values of mathematical sentences that are undecidable in currently accepted mathematical theories. The most famous example here is probably the continuum hypothesis (CH), which is undecidable in currently accepted set theories[38].

Ist die Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese (kurz: CH) ein guter Einwand gegen Fields Formalismus? Gödel und Fränkel zeigten, daß CH von der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre (kurz: ZFC) unabhängig ist, dann erhielt Cohen 1966 die Fields-Medaille für den Beweis, daß ZF sowohl mit CH als auch mit $\neg CH$ kompatibel ist. Field vertritt die Meinung, daß weder CH noch $\neg CH$ zu objektiven mathematischen Aussagen führen

[36]Gehorchte die Singzykade *Magicicada* im Osten der USA einem Zyklus von beispielsweise zwölf Jahren, so könnte sie von allen Räubern gefressen werden, die alle 1, 2, 3, 4, 6 und 12 Jahre auftreten. Mit einem Zyklus von 13 oder 17 Jahren schützen die Primzahlen 13 und 17 die Magicicada vor kurzlebigen Räubern.

[37]Vgl. [Putnam, 1983], Mathematics Matter and Method, p. 74.

[38]Vgl. [Balaguer, 2011], S. 14.

können. Balaguer kontert in seinem Beitrag der *Stanford Encyclopedia of Philosophy* mit einem Gedankenexperiment, das wir kurz zusammenfassen[39].

Einem Mathematiker könnte irgendwann ein *offensichtliches* (sic: intuitively obvious) Axiom AX einfallen, so daß CH aus $ZFC + AX$ folge. Field würde, so Balaguer, nur sagen, daß CH erst durch AX das Tor in die Fiktion der Mathematik geöffnet wurde. Die Mathematiker aber würden, so Balaguer, weniger sanktionieren, daß die Wahrheit von CH aus der neuen Theorie folgt, als daß CH schon immer wahr gewesen sein muß.

Wir erheben Einwände gegen die Plausibilität dieser Story. Die Annahme der Entdeckung eines *offensichtlichen* Axioms AX sprengt u.E. die Grenzen angängiger mathematischer Phantasie. Den vielen Koryphäen, die sich seit jeher mit CH beschäftigen, ist nichts Offensichtliches entgangen, damit auch kein Axiomkandidat AX. Als Außenstehender sollte Balaguer nicht über die Zukunft um CH spekulieren, die bisher von den besten Mathematikern nicht durchschaut wurde. Dieses Rätselraten ist um so weniger angebracht, als ein völlig paralleler wohlbekannter Fall bereits zur Verfügung steht: die Auflösung des Parallelenpostulats. Anstatt über die Zukunft von CH zu spekulieren, über die sich selbst die Experten im unklaren sind, ziehen wir lieber die bereits abgeschlossene Debatte um die euklidische Geometrie herbei.

Wie CH von den anderen Axiomen der ZFC unabhängig ist, so auch das Parallelenaxiom von den anderen euklidischen Axiomen. Wie wurde das Problem gelöst? Es wurde kein etwaiges neues *offensichtliches* Axiom eingeführt, sondern neue Geometrien mit alternativen Metriken, d.h. Meßregeln. Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms vom euklidischen Axiomensystem induzierte in der Tat nur solche neuen Wahrheiten, die schon immer wahr gewesen waren. Damit wird Balaguers Besorgnis aus den Angeln

[39] Vgl. Originaltext, [Balaguer, 2011], S. 14: „The most famous example here is probably the continuum hypothesis (CH), which is undecidable in currently accepted set theories, e.g., Zermelo-Frankel set theory (ZF) [...] $ZF{+}CH$ and $ZF{+}\neg CH$ are both consistent set theories. Given this, it follows from Field's view that neither CH nor $\neg CH$ is part of the story of mathematics and, hence, that there is no objectively correct answer to the CH question. This, however, seems unacceptable, because it could turn out that mathematicians are going to discover an objectively correct answer to the CH question. For instance, suppose that some mathematician came up with a new axiom candidate AX such that (i) all mathematicians agreed that AX was an intuitively obvious claim about sets, and (ii) $ZF + AX$ entailed CH. If this happened, then mathematicians would say that they had proven CH, and that they had discovered that CH was correct, and so on. Field's view would force us to say that if we endorsed AX, then CH would become true in the story of mathematics. But this seems to get things wrong. Given the intuitive obviousness of AX, it seems very natural to say that, in this scenario, mathematicians discovered that CH had been true [...] all along - i.e., that we didn't just make this up by endorsing a new theory. And, again, it seems that this is what mathematicians would say. So, Balaguer argues, Field's formalistic view of the objectivity of mathematics is unacceptable."

gehoben. Es wäre ein erschütterndes Novum in der Geschichte, wenn die Entdeckung einer noch nicht erkannten Wahrheit die Mathematik in die Bredouille brächte. Wir fassen die Geschichte des Parallelenaxioms zusammen.

In Euklids Elementen Buch 1 wird die Gerade als die Linie definiert, die beim Gleiten auf sich selbst die Identität ergibt: „Eine gerade Linie ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.“ Diese Eigenschaft besitzt aber der Kreis auch[40], wenn man ihn um seinen Mittelpunkt dreht[41]. Auf der Erdoberfläche gleitet der Äquator identisch auf sich selbst; er ist, wie überhaupt alle im Mittelpunkt der Erde zentrierten Großkreise, eine sphärische Gerade mit der sphärischen Metrik, kurz eine S-Gerade. Ebenso lassen sich mit der hyperbolischen Metrik H-Gerade, die visuell in der Poincaréschen Kreisscheibe als Kreisbögen erscheinen, definieren. S-Gerade und H-Gerade besitzen alle Eigenschaften der E-Geraden (euklidische Gerade), insbesondere die der kürzesten Verbindung. Daraus ergeben sich drei konsistente Geometrien, denn die S-gerade besitzt gar keine Parallelen, und die H-Gerade mindestens zwei. Die Fiktion der euklidischen Geometrie ist die gleiche geblieben, sie wurde lediglich sphärisch und hyperbolisch fortgesetzt.

Wird in der CH-Story von Balaguer „Kontinuumshypothese“ durch „Parallelenaxiom“ ersetzt, wird sofort klar, daß die Unentscheidbarkeit eines Postulats nicht mit der Entdeckung eines neuen Axioms enden muß. Welches CH-Szenario irgendwann zum Tragen kommt, können nicht einmal die Mathematiker voraussagen. Allerdings hätte die Mathematik ein echtes Problem, wenn sich eine neue Wahrheit nicht in den Korpus der bestehenden Wahrheiten integrieren ließe. Warum kann das nicht passieren?

6.5.3. Mathematik: eine nie irrende Fiktion

Balaguers Konklusion lautet (er schreibt in der dritten Person):

> Balaguer’s non-formalistic version of fictionalism retains Field’s thesis that mathematical „correctness“ has to do with being true in the story of mathematics, but it abandons the Fieldian view that the story of mathematics consists in currently accepted axioms [...] A mathematical sentence is fictionalistically correct if and only if it would have been true if there had actually existed abstract mathematical objects of the kinds that platonists have in mind[42].

---

[40]Das wußte Euklid natürlich auch, aber es kann ihm nicht übelgenommen werden, daß er den Kreis nicht als Gerade ansehen wollte.

[41]Es muß auch so sein, sonst könnte die Gerade nicht als Kreis mit unendlichem Radius aufgefaßt werden; Kreis und Gerade werden in dem bequemeren Begriff der *verallgemeinerten Geraden* verschmolzen.

[42]Vgl. [Balaguer, 2011], S. 14.

In unseren Augen ist der Disput unbegründet. In der Fiktion der Mathematik haben Wahrheiten schon immer sub specie aeternitatis bestanden; daß sich daran etwas ändern könnte, darf mit größter Gelassenheit ausgeschlossen werden. Es ist u.E. eine hinreichende Bedingung, daß sich die Fiktion der Mathematik, wie von Field gefordert, nach den jeweilig geltenden Axiomensystemen richtet. Balaguers evidente Forderung des rückwirkenden Charakters der Wahrheit ist eine Selbstverständlichkeit, die kein Kriterium liefert, an dem Korrektheit erkannt wird.

Es ist richtig, daß die Mathematiker beim Erkennen einer Wahrheit immer wieder in Schrecken gerieten. Zuletzt versetzten Russell mit seiner Aporie und Gödel mit seinen Unvollständigkeitstheoremen die Philosophie der Mathematik in Unruhe. Freges Arbeit war damit ruiniert und die hilbertsche lädiert. Die bereits erzielten Erkenntnisse der Mathematik wurden aber nicht tangiert.

Ein diffiziles Beispiel der Integration neuen Wissens liefert die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien. Die Erschütterung war so groß, daß sich Gauß nicht traute, seine Ergebnisse zu veröffentlichen. Er hatte Angst vor dem „Geschrei der Böotier“ (vgl. unsere S. 35), die den Verlust der Einzigartigkeit der euklidischen Geometrie als Gotteslästerung empfunden hätten, denn die drei Geometrien mußten, an uns vorbei, schon immer wahr gewesen sein: Gott hätte auch einen krummen Kosmos schaffen können! Kants Primat der euklidischen Geometrie brach zusammen! Das euklidische Axiomensystem blieb aber unangetastet[43]. Heute wissen wir einiges mehr: die für unabhängig voneinander gehaltenen drei Geometrien werden zur Einheit im hyperbolischen Raum, in dem Sphären, hyperbolische und flache Ebenen leben (vgl. unsere S. 36, Zitat von Needham). Der mathematische Bestand an Wissen bedurfte keiner etwaigen Korrekturen, sondern er wurde merklich erweitert und transparenter gemacht.

Ein anderes leichter zugängliches Beispiel wählen wir aus der Zahlentheorie. Die Entdeckung, daß die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats durch $\sqrt{2}$, d.h. keine rationale Zahl, gemessen wird, soll die Pythagoräer in Unruhe versetzt haben. Heute möchte niemand mehr zur durchlöcherten Geraden der rationalen Zahlen zurückkehren.

Viel später (1545) veröffentlichte Gerolamo Cardano in seinem Buch *Ars Magna* Formeln zur Lösung von Gleichungen 3. Grades. Verblüffend war, daß in einem hartnäckigen Fall (*casus irreducibilis*) durch Quadratwurzeln aus negativen Zahlen reelle Lösungen ermittelt wurden, die sich stets durch Einsetzen als richtig erwiesen. Verwirrung herrschte

[43] Die Fehler, die Hilbert in euklidischen Axiomen entdeckte, stehen nämlich mit der Entdeckung der neuen Geometrien in keinem Zusammenhang.

in der Mathematik: wie kann die Absurdität der Quadratwurzel einer negativen Zahl richtige Lösungen produzieren. Noch einmal wurde unser Kenntnisstand erweitert: die komplexen Zahlen, eine aus dem Rückblick immer wahr gewesene Konstruktion, räumten mit Cardans Parodoxon auf[44]. Auch in diesem Beispiel wurde die Theorie transparenter; erst im Komplexen werden manche Rätsel des Reellen geklärt[45].

Diese Beispiele sind paradigmatisch für ein Spezifikum der Mathematik, das Balaguer in seiner CH-Story nicht beachtet. Anders als die Physik, die mit dem Fortschritt der Experimentiermethoden und -apparate den nominalistischen Teil ihrer Theorien immer wieder austauschen muß, wird in der Mathematik die bisherige Fiktion nicht zurückgenommen, sondern in einen breiteren Zusammenhang gebracht. Die Fiktion wird erweitert; sie wird zugleich transparenter, was der Außenstehende nicht erkennt, dem der größere Umfang eher komplizierter vorkommt.

Der Geist der Zeit prägt den nominalistischen Teil der Theorien mit, sodaß der Begriff der Wahrheit relativiert werden muß. Foucault spricht treffend lieber von der „Episteme“:

> [Ich könnte] die Episteme [...] als strategisches Dispositiv definieren, das es erlaubt, unter allen möglichen Aussagen diejenigen herauszufiltern, die innerhalb, ich sage nicht: einer wissenschaftlichen Theorie, aber eines Feldes von Wissenschaftlichkeit akzeptabel sein können und von denen man wird sagen können: diese hier ist wahr oder falsch. Die Episteme ist das Dispositiv, das es erlaubt, nicht schon das Wahre vom Falschen, sondern das wissenschaftlich Qualifizierbare vom Nicht-Qualifizierbaren zu scheiden[46].

Die Aussagen der Mathematik sind zwar apodiktisch und unvergänglich, aber die Episteme geht an den Beweisen und deren Formulierungen nicht vorbei. Im Spruch von Gauß: „Das Ergebnis habe ich schon, jetzt brauche ich nur noch den Weg, der zu ihm führt“ drückt sich die Episteme im lästigen Niederschreiben eines Beweises aus. Nur der Historiker interessiert sich für den Originalbeweis, der mit der Erweiterung des Wissens obsolet wird. Die Gültigkeit des Beweises bleibt zwar erhalten, aber neu entdeckte Zusammenhänge verdrängen die älteren. Dadurch ergibt sich ein Einwand gegen die Überzeugung der radikalen Platonisten, daß sie einen Einblick in die Ideenwelt bekommen würden. Die Wahrheit lebt in der unverrückbaren Ideenwelt, unser Wissen verläßt nicht die diesseitige Welt der wandelbaren Fiktionen.

Daß mathematische Wahrheiten ewige Wahrheiten sind, spricht umgekehrt für den Platonismus. Der Mathematiker freut sich, wenn er ein Modell erfunden hat. Er weiß

[44]Bei der Cardanischen Formel wird „unwissend“ im Oberkörper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen gerechnet, um als Lösung eine Zahl mit verschwindendem Imaginärteil, d.h. eine reelle Zahl zu erhalten.

[45]Man wundert sich z.B. im Reellen, daß die Taylor-Reihe aus der harmlosen auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ nur für Werte $|x| < 1$ konvergiert, weil man die komplexen Singularitäten in den Nullstellen des Nenners $\pm i$ nicht sieht.

[46]Vgl. [Foucault, 1978], S. 124.

aber auch, daß andere Modelle zur selben Problemstellung bald folgen werden. So wird seine Überzeugung gestärkt, daß zukünftige Modelle mit seinem Modell in der Ideenwelt zusammenlaufen werden. Es entstehen keine Widersprüche, sondern nur ein diesseitiger Wechsel der Perspektive.

6.5.4. Oberflächengrammatik

Der Dissens zwischen Field und Balaguer geht hauptsächlich um die Möglichkeit *und* Notwendigkeit, alle physikalischen Theorien in eine nominalistische Sprache zu übersetzen, was eine Revolution in der Wissenschaft auslösen würde. Für die Sympathisanten des „revolutionism“ müssen die Theorien derart bereinigt werden, daß die mathematischen Aussagen verbaliter (at face value) gelesen werden können. Allerdings ist fraglich, wer außer den fieldschen Fiktionalisten noch auf die Barrikaden steigen würde. Der Mathematiker orientiert sich beim Erfinden mathematischer Objekte an dem Maßstab der Nützlichkeit. Aus dieser Motivation heraus haben sich zuerst die Physiker die heute unverzichtbare Tensorrechnung zurechtgebastelt, bis Mathematiker ein präsentables Fundament nachlieferten. Ob Tensoren existieren, gehört in den Bereich der Metaphysik. Auch Newton hat seine anfängliche nominalistische erste Version der Gravitation zugunsten einer handlichen und effektiven Mathematik aufgegeben.

Dem „revolutionism“ setzt der „hermeneuticism“ entgegen, daß Aussagen in ihrem Kontext zu interpretieren sind. Im Satz <Der Mann ist in einem Bach mit 30 cm Durchschnittstiefe ertrunken> ist der Referent ein virtuelles mentales Bild eines Bachs mit uniformer Wassertiefe. Wittgenstein unterscheidet in der Sprache die Oberflächengrammatik von der Tiefengrammatik[47]. Im mathematischen Sprachspiel brauchen die Aussagen nicht in den nominalistischen Jargon übersetzt zu werden, denn sie besitzen bereits einen nominalistischen Inhalt, der so aufgezeigt werden kann, daß ihn der Fiktionalist akzeptiert. In unserem Beispiel sollte der Satz nicht in eine logische Form umgeschrieben werden, die ihn *at face value* wahr machen würde; der Fiktionalist kann die Aussage in der irreführenden Oberflächenform belassen und die Tiefenform extrahieren.

Die hermeneutische Strömung ist eine Variante des *if-then-ism*. Der Satz <3 ist eine Primzahl> paraphrasiert die längere Aussage < *Wenn* Zahlen existierten, *dann* wäre 3

[47] Vgl. Wittgenstein, [Wittgenstein, 1953], §664: „Man könnte im Gebrauch eines Worts eine ‚Oberflächengrammatik‘ von einer ‚Tiefengrammatik‘ unterscheiden. Das, was sich uns am Gebrauch eines Worts unmittelbar einprägt, ist seine Verwendungsweise im Satzbau, der Teil seines Gebrauches - könnte man sagen - den man mit dem Ohr erfassen kann.“

eine Primzahl>, die kein Bekenntnis zur Existenz der Zahlen enthält. Für den revolutionären Fiktionalisten meint der Mathematiker seine Aussagen buchstäblich, während der hermeneutische Fiktionalist die pragmatische Formulierung hinterfragt.

Zwischen Mathematikern und Philosophen herrscht keine Irritation, eher eine Komplementarität. Die Floskel, wonach der Mathematiker die Mathematik eher entdeckt als erzeugt, täuscht darüber nicht hinweg, daß Mathematik Menschenwerk ist. Insoweit darf Mathematik eine Fiktion genannt werden, gleichgültig ob jemand an die Existenz abstrakter Objekte glaubt oder nicht. Was für eine Art Fiktion ist dann die Mathematik?

6.5.5. Welche Fiktion ist die Mathematik?

Das Wort Fiktion stammt vom lat. *fingere* ab und heißt etwa *kneten, formen, erdenken.* Eine Fiktion wird mental erzeugt. Welche Freiräume genießt sind dabei die Imagination?

In den Fiktionen der Literatur und des Films hat es der Autor leicht, sogar den tödlich verunglückten Protagonisten ins Leben zurückzurufen; er muß nur etwaige zeitliche oder räumliche Anomalien meiden, d.h. er darf nichts Inkohärentes schreiben. Eine andere Gattung der (nichtsprachlichen) Fiktion bilden Spiele. Die ursprünglichen Spielregeln wurden nach und nach angepaßt, um die Attraktivität zu maximieren[48]. Die Fiktion eines Spieles entwickelt eine Eigendynamik, die mehr als Kohärenz verlangt, nämlich Konsistenz: die Struktur des relationalen Netzes darf keine Risse aufweisen. Sehr beengt in der Wahl ihrer Fiktionen ist die Physik wegen des Korsetts der obligaten experimentellen Verifizierung. Am wenigsten Freiheit genießt der Biograph, der sich an diskret verteilte Ereignisse zu halten hat und nur die Lücken interpretiert[49].

Fiktion ist somit ein breitgefächerter Begriff, den die Fiktionalisten präzisieren sollten. Sie tun es aber selten; Balaguer geht soweit, größere Disparitäten zwischen Mathematik und Fiktion zu tolerieren, ohne zuvor das Wort Fiktion definiert zu haben:

> [F]ictionalists can simply deny that their view entails that there are no important disanalogies between mathematics and fiction [. . .] In short, fictionalism is perfectly consistent with the claim that there are numerous important disanalogies between mathematics and fiction[50].

[48] Im 16. Jh. führte man z.B. beim Schachspiel die Rochade ein.

[49] Wir denken z.B. an die Diatribe, die der Philosoph Michel Onfray mit „Anti Freud. Die Psychoanalyse wird entzaubert“ ausgelöst hat. Der rote Faden stimmt, d.h. seine historischen Stützstellen sind authentisch, aber sein Szenario empört die Freudianer.

[50] Vgl. [Balaguer, 2011], S. 16.

Wir möchten mehr über diese „zahlreichen bedeutsamen Disparitäten" erfahren. Worin Mathematik und Fiktion auseinandergehen, wurde selten gründlich diskutiert[51]. Einen interessanten Standpunkt vertritt der Fiktionalist John P. Burgess. Anders als die mathematische Fiktion müsse sich eine literarische Fiktion einem empirischen Vergleich mit der Realität stellen:

> But I do agree with Carnap that the question of the Real existence of mathematical entities does lack empirical meaning [...] I think [this] does have an important bearing on the question of how much mathematics is like novels, fables, and other forms of fiction. For consider the question whether, say, the works of Carlos Castañeda or Rigoberta Menchù are non-fiction or fiction [...] In these cases, we know very well what it would have looked like for the events in Menchu's book to have occurred[52].

Allerdings wäre z.B. im Falle der Science-Fiction ein empirischer Vergleich diffizil, wo eine Realität-in-der-Erzählung durch einen imaginativen Transfer zwischen Autor und Leser fingiert wird. In der literarischen und überhaupt in der künstlerischen Fiktion muß sorgfältig auf Konsistenz geachtet werden[53]. Wenn ein Kriterium der empirischen Verifikation an der Science-Fiction angewandt werden kann, warum nicht auch an der Mathematik? Die Nichtexistenz mathematischer Gegenstände mag der Philosoph problematisieren, aber sie steht dem Mathematiker nicht im Wege. Dazu Burgess:

> By contrast, as regards the question of the ultimate metaphysical Reality of numbers, we have absolutely no idea of what difference it would make to how things look; or rather, we have a very strong suspicion that it would make no difference at all. This is what is meant by having an empirically meaningful question in one case, and an empirically meaningless question in the other. I think that in view of this radical difference between mathematics and novels, fables, or other literary genres, the slogan „mathematics is a fiction " is not very appropriate[54].

Hier legt Burgess den Finger auf ein u.E. lediglich metaphysisches Problem: bei seiner Arbeit ist es für den Mathematiker in der Tat irrelevant, ob Zahlen existieren oder nicht. Wenn aber Zahlen existieren, müssen sie eindeutig definierbar sein; wenn sie nicht existieren, wären die Definitionen arbiträr, somit unbrauchbar! In seinem Beitrag *What numbers could not be*, [Benacerraf, 1965], spürt Benacerraf ein solches Problem auf: Zermelo und von Neumann benützen zwei divergente Fiktionen beim Gleichsetzen der natürlichen Zahlen mit Mengen.

Ernst Zermelo stellt die natürlichen Zahlen rekursiv so dar, daß z.B. $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ der Zahl Drei entspricht. In der Darstellung John von Neumanns wird die Zahl Drei durch

[51] Wir verweisen auf die lehrreichen Beiträge von Robert Thomas, [Thomas, 2000] und [Thomas, 2002], wo die Einwände zur Identifikation von Mathematik und Fiktion verschieden ausfallen.

[52] Vgl. [Burgess, 2008], S. 64-65.

[53] Jules Verne ließ sich von hochkarätigen Wissenschaftlern beraten. In *Von der Erde zum Mond* ist die vis-viva Gleichung $\frac{1}{2}(\nu^2 - \nu_0^2) = gr\{\frac{r}{x} - 1 + \frac{m'}{m}(\frac{r}{d-x} - \frac{r}{d-r})\}$ abgedruckt, um die Grenze zwischen Fiktion und Realität zu verwischen.

[54] Vgl. [Burgess, 2008], S. 64-65.

$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ erzeugt. Offenbar handelt es sich um zwei verschiedene Mengen, zwischen denen auf keinen Fall ein Gleichheitszeichen stehen darf:

> There is no way with the reference of number words that will allow us to choose among them, *for the accounts differ at places where there is no connection whatever between features of the accounts and our uses of the words in question*[55].

Daraus schließt Benacerraf, daß die Drei, und damit alle Zahlen überhaupt, auf keinen Fall Mengen sein können. Beide Fiktionen sind immerhin konkurrierende Beschreibungen der natürlichen Zahlen. In der mathematischen Praxis, wo nach der Zahl-an-sich nicht gefragt wird, sind beide Beschreibungen nutzbar, soweit keine Widersprüche entstehen. Der Mathematiker wird je nach Bedarf die eine oder die andere verwenden[56]. In der Geometrie kann analog wahlweise die hyperbolische Ebene im Kleinschen Modell - die Geodätischen sind gerade Segmente - oder im Poincaréschen - die Geodätischen sind Kreisbögen - dargestellt werden. In beiden Fällen gehört der metaphysische Status des Referenten - Zahl bzw. Geodätische - nicht zur Mathematik.

In unseren Augen gibt es sehr wohl einen *bedeutsamen* Unterschied zwischen der literarischen und der mathematischen Fiktion, der den Nominalisten stört aber den Platonisten erfreut: dem Mathematiker sind anders als dem Literaten beim Erfinden Handschellen angelegt. Welchen Freiraum hat er noch? Für Putnam kann die Mathematik nur zwischen Möglichem und Unmöglichem unterscheiden:

> What [the mathematician] asserts is that certain things are possible and certain things are impossible - in a strong and uniquely mathematical sense of „possible“ and "impossible“. In short, mathematics is essentially modal rather than existential[57].

Putnam wird darin bestätigt, daß eine und dieselbe Proposition durch vielerlei „mögliche“ mathematische Fiktionen bewiesen wird. Die große Herausforderung gilt, eine Behauptung als Erster zu beweisen. Auch wenn es wenig ruhmreich ist, freut sich jeder, einen neuen Beweis, d.h. seine eigene Fiktion, zu erfinden. Poincaré vertraut einem Kollegen an, daß er grundsätzlich immer eigene Beweise aufstellt:

> I find it more convenient to do proofs over than to examine thoroughly those of the author. My proofs are generally far poorer, but they have for me the advantage that they are mine[58].

Poincaré hegt kein Mißtrauen gegenüber dem Autor. Er möchte nur seine eigene, ggf. etwas unterlegene, Fiktion konstruieren. Auch weniger begabte Mathematiker arbeiten

[55] Vgl. [Benacerraf, 1965], S. 285.

[56] Die Neumannsche Darstellung hat den Vorteil, daß die Konstruktion $n+1 = n \cup \{n\}$ auf nicht-endliche Ordinalzahlen erweiterbar ist: $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$, $\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\}$, etc.

[57] Vgl. [Putnam, 1975], S. 70.

[58] Vgl. Poincaré an Mittag-Leffler: in Philippe Nabonnand, The Poincaré-Mittag-Leffler Relationship, The Mathematical Intelligencer 21 (1999, No. 2, 58-64).

fremde Beweise sorgfältig durch, um sich die Fiktion anzueignen. Mathematisches Erfinden setzt mehr voraus, als anerkannte Sätze zu verwenden; der Mathematiker muß sie sich erst „aneignen“.

Fazit:

i) Mathematik ist Menschenwerk. Folglich sind mathematische Aussagen Fiktionen.
ii) Die abstrakten Objekte existieren im Verstand des Mathematikers, der mit ihnen hantiert, sonst ermittelte er keine Relationen.
iii) Der Platonist meint, daß die Dynamik der Schatten an der Höhlenwand mit Strukturen in einer Ideenwelt korreliert sei. Die Fiktionalisten betreiben ihrerseits einen großen Aufwand, um den abstrakten Objekten jegliche Existenz zu verweigern.
iv) Die Diskussion ist ontologisch geprägt. Wie die Entitäten der höheren Mathematik erfunden werden, wird selten thematisiert.
v) Während der Hardliner Field zu keinen Konzessionen bereit ist, borgt sich Balaguer so vieles vom Platonismus, daß uns sein Lippenbekenntnis zum Nominalismus den Weg zu dem Modellismus ebnet, den wir im Kapitel 10 vorschlagen werden.

Nachdem wir uns mit ausgesuchten Theorien der Philosophen beschäftigt haben, wenden wir jetzt das Blatt, um den besten Mathematikern das Wort zu übergeben. Wie etwa ein Pianist und ein Klavierlehrer zu einer je eigenen Verinnerlichung desselben Instruments gelangen, führen zwei komplementäre Wege in die Philosophie der Mathematik. Große Mathematiker haben sich über ihr persönliches Erlebnis und Verständnis der Mathematik geäußert. Wir werden uns, aus Platzgründen, auf Poincaré und Hadamard konzentrieren, die philosophische Schriften hinterlassen haben, während sich Leibniz, Hilbert, Gödel, und einige andere Koryphäen verstreuter in ihren Werken beim mathematischen Erfinden selbst introspektiv zuschauten. Oft werden wir uns denselben Themen bei einem Wechsel der Perspektive zuwenden. Zuerst setzen wir uns mit dem Schematismus Immanuel Kants auseinander, mit dem sich auch die moderne Mathematik gut durchleuchten läßt.

Teil III.

Mathematik aus der Sicht des Erfinders

7. Wie Schemata die Formen befüllen

Seit dem Erlanger Programm (Felix Klein, 1872) wird unter Geometrie die Beschäftigung mit den Invarianten einer Gruppenaktion verstanden. Um die den geometrischen Raum bestimmende Gruppe zu erkennen, bedarf es eines Schemas, d.h. eines Mittlers zwischen Verstand und Raumform. Dem mathematischen Erfinden liegt der Kantische Schematismus zugrunde. Neben dem Gruppenschema verfügt der Mathematiker insbesondere über die Induktion, die z.B. zur Konstruktion der Zahlen unentbehrlich ist. Die Schlüsselrolle der Schemata wird zeigen, daß der von Frege eingeleitete Logizismus bei dem Versuch scheitert, die Mathematik auf einen Zweig der Logik zu reduzieren.

In diesem zweiten Teil schalten wir auf die Perspektive der modernen Mathematik um, an deren Grundlagen Poincaré maßgeblich mitwirkte. Von Kant werden der Primat der euklidischen Geometrie und der Bezug zur Anschauung im Zeichen der Gruppentheorie aufgegeben. Noch immer gültig bleibt der wichtige Markstein, den Kant mit dem Schematismus legte. Der Paradigmenwechsel setzte sich zögernd durch. Wenn Frege an der euklidischen Präferenz und der Anschauung festhält, steht er noch in der Nachfolge Kants, während seine formale Logik ein neues Licht in die Konstruktion der Mathematik wirft. Wir werden uns erst mit dem Kantischen Schematismus beschäftigen, um dann in die Schemata des Gruppenbegriffs und der Induktion einzusteigen. Dabei begründen wir, warum die Logik kein Werkzeug zum Erfinden der Mathematik sein kann.

7.1. Der Kantische Schematismus

Der Raum ist an sich weder euklidisch noch nichteuklidisch, sondern amorph. Kant behält indessen Recht mit der Koperkanischen Wende: wir konstruieren den Raum als Form unserer Innenwelt. Wie wählt dann der Verstand Formen aus und füllt sie mit Inhalten? Aus neuzeitlicher Sicht ist das, was unser Verstand in die Form des euklidischen bzw. nichteuklidischen Raumes projiziert, eine Gruppenaktion[1].

[1] Bei einer Gruppenaktion auf eine Menge X werden die X-Elemente z.B. permutiert. Das neutrale Gruppenelement läßt alles unverändert, während das Produkt zweier Gruppenelemente der Hinter-

Eine Form ist etwas an einer Erscheinung. In der *Kritik der reinen Vernunft* war sich Kant darüber im klaren, daß es zwischen den Formen der Anschauung und dem Verstand ein Verbindungsglied geben muß, das die Begriffe in Formen gießt. Er stellt die Frage, „wie reine Verstandesbegriffe auf Erscheinungen überhaupt angewandt werden können“ und antwortet: „Nun ist klar, daß es ein Drittes geben müsse, was einerseits mit der Kategorie, andererseits mit der Erscheinung in Gleichartigkeit stehen muß, und die Anwendung der ersteren auf die letzte möglich macht[2].“

Poincaré meint seinerseits zur Geometrie:

> Was die Geometrie zum Gegenstand hat, ist das Studium einer besonderen „Gruppe“; aber der allgemeine Gruppenbegriff präexistiert in unserem Verstand, zumindest potentiell. Er drängt sich uns auf, nicht als eine Form unserer Sinnlichkeit, sondern als eine Form unseres Verstandes[3].

Mit dem Terminus „Form unseres Verstandes“ meint Poincaré eine Regel, nach der die in der mentalen Vorstellung erkannten Verhältnisse in die Einheit des Verstandes integriert werden. In der Kantischen Terminologie ist der Terminus „Form“ bereits anderweitig besetzt, weshalb adäquater von einem „transzendentalen Schema“ des Verstandes die Rede ist. Beide Denker stimmen bis auf das Vokabular überein:

> [R]eine Begriffe a priori [müssen], außer der Funktion des Verstandes in der Kategorie, noch formale Bedingungen der Sinnlichkeit (namentlich des innern Sinnes) a priori enthalten, welche die allgemeine Bedingung enthalten, unter der die Kategorie allein auf irgend einen Gegenstand angewandt werden kann. Wir wollen diese formale und reine Bedingung der Sinnlichkeit, auf welche der Verstandesbegriff in seinem Gebrauch restringiert ist, das Schema dieses Verstandesbegriffs, und das Verfahren des Verstandes mit diesen Schematen den Schematismus des reinen Verstandes nennen[4].

Über das Verbindungsglied zwischen Erscheinung und Verstand können die Neurowissenschaft und die Psychologie noch heute wenig aussagen. Inzwischen kann (und muß) sich die Philosophie damit begnügen, das Kantische Schema bzw. die Verstandesform Poincarés als eine Blackbox zu behandeln.

Als Beispiel eines Schemas verwendet Kant den Begriff eines Hundes[5], über den sich Menschen in einem Sprachspiel austauschen. Wir müssen uns einen Kanevas gewebt haben, um uns dieses Tier ohne seine Gegenwart vorzustellen, d.h. „eine Regel, nach welcher

einanderausführung der einzelnen Aktionen entspricht. Ein regelmäßiges n-Eck 8-mal nach rechts und 3-mal nach links zu drehen, permutiert die Ecken wie die 5-malige Drehung nach rechts. $-3, 5, 8$ gehören zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen mit der 0 als neutralem Element; die Aktion des Drehens um $2\pi/n$ bildet die n-elementige Menge der Ecken auf sich selbst ab.

[2] Vgl. [Kant, 1787], S. 221.

[3] Vgl. [Poincaré, 1902], S. 93. Übersetzung CF.

[4] Vgl. [Kant, 1787], S. 223.

[5] In [Kant, 1787], S. 224, führt Kant zusätzlich das Beispiel des Dreiecks an, womit er den Schematismus auch auf abstrakte Gegenstände ausdehnt: „Dem Begriffe von einem Triangel überhaupt würde gar kein Bild desselben jemals adäquat sein. Denn es würde die Allgemeinheit des Begriffs nicht erreichen.“

meine Einbildungskraft die Gestalt eines vierfüßigen Tieres allgemein verzeichnen kann." In der Tat wird jeder die Skizze der Abb. 7.1 sofort als Hund identifizieren. Das Schema ist also nicht das mentale Bild selbst, sondern das Verstandesvermögen, eine *Blaupause* zu schaffen, die dem Bild Kategorien zuordnet: „Diese Vorstellung nun von einem allgemeinen Verfahren der Einbildungskraft, einem Begriff sein Bild zu verschaffen, nenne ich das Schema zu diesem Begriffe[6]."

Die Zuordnung der Kategorien (bei Kant: Quantität, Qualität, Relation, Modalität) auf die Erscheinungen erfolgt über die subjektive Zeitbestimmung: „Die Schemate sind daher nichts als Zeitbestimmungen a priori nach Regeln[7]." Schemata wenden u.E. dynamische Strukturen auf Anschauungen an. Wäre der Hund die bloße statische Vereinigung von Hundeteilen, dann wäre ein toter Hund von einem lebendigen nicht zu unterscheiden.


Abbildung 7.1.: Hund

Wie ist die Blaupause für einen Hund entstanden? Wir wurden gelehrt, daß solche Gegenstände, die den Verstandeskategorien isomorph zugeordnet werden, unter den Begriff Hund fallen. Dennoch genügen die wenigen Striche der Abb. 7.1, um einen traurigen Hund zu evozieren; daher steckt offenbar im Schema potentiell mehr als im Bild realisiert. Kant betont nachdrücklich den wesentlichen Unterschied zwischen Schema und Bild:

> So, wenn ich fünf Punkte hinter einander setze ..., ist dieses ein Bild von der Zahl fünf. Dagegen, wenn ich eine Zahl überhaupt nur denke, die nun fünf oder hundert sein kann, so ist dieses Denken mehr die Vorstellung einer Methode, einem gewissen Begriffe gemäß eine Menge (z. E. Tausend) in einem Bilde vorzustellen, als dieses Bild selbst, welches ich im letztern Falle schwerlich würde übersehen und mit dem Begriff vergleichen können[8].

Es ist ein Schema am Werke[9], das die Verbildlichung z.B. eines 5-Ecks auf ein 1000-Eck fortsetzt. Die unscharfen Kontouren des mentalen Bildes könnten mit dem „Begriff" nicht exakt verglichen werden, während uns das Schema, d.h. die „Methode", überzeugt, daß wir den Begriff präzis erfaßt haben. Ohne sinnliches Bild des 1000-Ecks erschließt das Schema die (im Kantischen Vokabular) *reine Anschauung*. Dabei ist die Grenze der Anschauung diffus: liegt sie beim 7-Eck, beim 9-Eck? Die Anschauung ist u.E. im Vergleich zum leistungsstarken Schema eine willkommene aber verzichtbare Zugabe.

---

[6] Vgl. [Kant, 1787], S. 224.
[7] Vgl. ebd.
[8] Vgl. ebd. S. 223-224.
[9] Das Schema könnte *Extrapolation* genannt weden. Aus *extra* = außerhalb und *polare* = putzen, Duden: aus Bekanntem unter Voraussetzung gleichbleibenden Verlaufs erschließen.

Ein Schema kann auf das Hören angewandt werden. Anders als dem Hund fehlt uns die genetische Ausstattung, um Ultraschall wahrzunehmen, wir können aber an eine bis in den Ultraschallbereich verlängerte Klaviertastatur denken. Unsere Phantasie verschafft uns Bilder von einem Kentaur, einem Einhorn, usw.; das Schema ist dann nur eine Rekombination aus bekannten Erscheinungen. Doch verschafft die Extrapolation kein brauchbares Bild, falls der urbildliche Gegenstand sinnlich nicht erfahrbar wäre.

Es gibt z.B. für Farben zwar ein Extrapolationsschema aber keine sachgerechte Form. Der Verstand eines Farbenblinden ist nicht defekt, sondern nur seine Farbrezeptoren. Viele Vögel oder Fische (z.B. der Goldfisch), besitzen zusätzlich zu Rot, Grün und Blau einen UV-Zapfen, den sie im Gegensatz zum Menschen aktivieren können. Ein Schema zum Extrapolieren auf die nicht wahrnehmbare UV-Farbe stellt uns der menschliche Verstand zur Verfügung, es fehlt aber das mentale Bild. Paradigmatisch für diesen Stolperstein ist die höherdimensionale Geometrie.

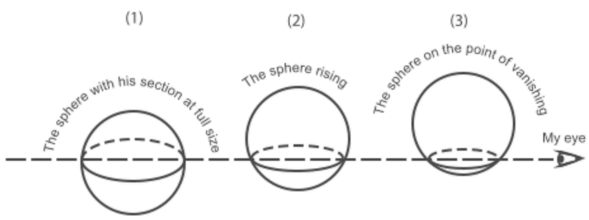

Abbildung 7.2.: Flatland

In [Abbott, 1884] führt Abbott vor, wie den flachen Bewohnern von *Flatland* der Begriff der Sphäre beigebracht wird. In Abb. 7.2 wird eine Sphäre durch *Flatland* geschoben. Wie bei einer Tomographie sieht der flache Betrachter einen Kreis, der erst größer und dann kleiner wird. Er versteht, was eine Sphäre ist, er kann sich aber das mentale Bild eines Bewohners der 3D-Welt nicht machen. Ebenso sehen wir 2D-Sphären an- und abwachsen, wenn die 3D-Sphäre $\mathbb{S}^3$ durch den euklidischen 3D-Raum gezogen wird. Trotzdem finden wir keinen Zugang zu dem mentalen Bild eines hypothetischen Bewohners einer 4D-Welt. Es gibt zweckabhängige Vorstellungsformen von $\mathbb{S}^3$, die untereinander äquivalent sind, und dem Geometer über subjektiv verzogene Skizzen weiterhelfen. Von dem Gegenstand $\mathbb{S}^3$, der in der Platonischen Ideenwelt leben mag, können wir keine Anschauung erhalten[10]. Das „Schema“ existiert wohl in unserem Verstand, denn der Geometer *versteht* $\mathbb{S}^3$, er kann mit ihr umgehen, er kann sich mit anderen über sie austauschen.

[10] Manche Geometer behaupten, sich die vierte Dimension vorstellen zu können. Daß sie mit ihr umgehen können, ist sicher. Was verstehen sie aber genau unter *vorstellen*?

7.2. Freges Verteidigung der euklidischen Präferenz

Wie wir bereits gezeigt haben, sind die Stellen aus heutiger Sicht nicht mehr haltbar, wo Kant die Unmöglichkeit nichteuklidischer Geometrien nachweisen wollte. Die Emergenz neuer Geometrien entzog der euklidischen Geometrie die Exklusivität, was aber nicht eo ipso den Verlust ihrer Dominanz in der angewandten Mathematik zur Folge hat.

Daß die nichteuklidischen Geometrien eine eklatante Widerlegung der Kantischen euklidischen Anschauungsform des Raumes, war Gauß kaum mehr als eine beiläufige Anmerkung wert (vgl. S. 28). Auch Einstein nannte die Apriorität der euklidischen Raumform einen „verhängnisvollen Irrtum".

> Der verhängnisvolle Irrtum, daß der euklidischen Geometrie und dem zugehörigen Raumbegriffe eine aller Erfahrung vorangehende Denknotwendigkeit zugrunde liege, beruhte darauf, daß die empirische Basis, welche der axiomatischen Konstruktion der euklidischen Geometrie zugrunde liegt, in Vergessenheit geraten war[11].

Poincaré erklärt zwar anhand der (Transformations)gruppen, daß der euklidischen Geometrie kein mathematischer Sonderstatus zukommt, dennoch räumt er ein, daß der Mensch aus der Perspektive des Physikers oder des Astronomen lieber euklidisch denkt, um so mehr als sich die nichteuklidischen Geometrien in die euklidische Sprache übersetzen lassen (vgl. S 146.).

Der Kantische Hang zur euklidischen Geometrie wurde nicht widerstandslos zur Seite gelegt. Ein namhafter Fürsprecher der traditionellen Geometrie war Frege, der als promovierter Geometer Fachkompetenz[12] besaß. Er bekannte sich dezidiert zur euklidischen Geometrie: die Mathematiker mögen andere Geometrien für gleichwertig erklären, der Common Sense kennt nur die euklidische Anschauung. Im Anhang J zitieren wir in ungekürzter Länge, um den rhetorischen Faden der tiefen Überzeugung zu wahren, ein Exzerpt aus den *Grundlagen der Arithmetik*. Die lange sarkastische Kritik an den nicht euklidischen Geometrien baut auf dem Fehlen der Anschauung auf. Dieser Mangel haftet aber der in Stein gemeißelten Arithmetik nicht an, „denn nicht nur das Wirkliche, nicht nur das Anschauliche gehört [dem Gebiet des Zählbaren] an, sondern alles Denkbare. Sollten also nicht die Gesetze der Zahlen mit denen des Denkens in der innigsten Verbindung stehen?" Dann würde dem Umgang mit Zahlen ein Schema zur Verfügung stehen, aber keines der neuzeitlichen Geometrie mangels getreuer mentaler Bilder.

[11] Vgl. [Einstein, 1936], S. 321. Erinnert man sich daran, daß Euklid die Gerade, als die Linie definiert, die längst sich selbst identisch bewegt werden kann, dann erfüllt auch der Kreis die Forderung; es fehlt nur die adäquate Metrik.

[12] Titel seiner Dissertation: „Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene."

7.2.1. Ist Arithmetik apriorischer als Geometrie?

Frege behauptet zwar wie Kant den Primat der euklidischen apriorischen Anschauungsform, er folgt aber einer stark abweichenden Argumentationslinie. Kant meinte, daß zusätzlich zur Logik auch die sinnliche Anschauung erforderlich ist, um in der Mathematik - nicht nur in der Geometrie sondern auch in der Arithmetik[13] - zu synthetischen (d.h. die Erkenntnis erweiternden) Urteilen zu gelangen. Für Frege hingegen verschafft die Abstraktheit der Arithmetik ein stabiles Fundament, das der anschauungslastigen Geometrie fehlt. Wenn dem so wäre, könnte man sich tatsächlich auf die algebraische Geometrie als verlängerten Arm der Arithmetik konzentrieren, aus der seit Descartes nichtfigurative Geometrien abgeleitet werden.

Poincaré vertritt auch den Standpunkt, daß die Arithmetik, wegen der empirisch angehauchten geometrischen Axiome und des diffizilen Raumbegriffs, dem reinen Denken näher steht als die Geometrie[14]. Dabei denkt er primär an den Aufbau der natürlichen Zahlen. Sobald man tiefer schürft, erweist sich u.E. das Fundament der weiterführenden Arithmetik kaum stabiler als in der Geometrie. Wir stimmen Frege nicht zu, daß „alles in Verwirrung stürzt", wenn ein Axiom der Arithmetik „geleugnet" wird. Dazu führen wir zwei Beispiele kurz an: i) Die p-adischen Zahlen „leugnen" das trivial anmutende archimedische Anordnungsaxiom[15]; ii) Die Cantorsche Kontinuumshypothese wird in konsistenten Axiomensystemen angenommen oder auch „geleugnet".

Die p-adischen Zahlen

Da der Quotient zweier ganzen Zahlen keine ganze Zahl sein muß, ist es sinnvoll, die ganzen Zahlen zu einem Körper zu erweitern, in dem ungehindert dividiert werden kann. Üblicherweise wird der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gebildet, dessen verbleibende Löcher im Oberkörper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen geschlossen werden. Problematisch ist, daß sich periodische Dezimalzahlen auf zweifache Art darstellen lassen, z.B. in $\mathbb{R}$ zur Basis 10 die Eins als $1,000\ldots$ oder $0,999\ldots$[16]. Die rationalen Zahlen lassen sich aber ohne gravierende Änderung der Rechenregeln durch die Körper $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen[17]

[13] Vgl. [Kant, 1787], B14, Zitat auf S.83.

[14] Vgl. [Poincaré, 1908a], S. 34: „Wir müssen das mathematische Denken dort suchen, wo es rein geblieben ist, d.h. in der Arithmetik." Übersetzung CF.

[15] Zu je zwei Zahlen $y > x > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.

[16] Alternatives Beispiel: die beiden Schreibweisen $8,31999\ldots$ und $8,32$.

[17] $\mathbb{Q}_p = \{\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i p^i : a_i \in \{0,1,\ldots p-1\} : p, prim : n_0 \in \mathbb{Z}\}$. Jede Primzahl p ermöglicht eine Umrechnung nach p-adisch, z.B. in der Zehnerbasis: $108 = 3,12_7$, $\frac{31}{4} = 4,21111\ldots_5$, $\sqrt{2} = 3,1261212466267\ldots_7$.

erweitern. Falls die nicht eindeutige Darstellung durch reelle Zahlen stärker stört als das Fehlen der Anordenbarkeit, wird man den p-adischen Zahlen den Vorzug geben[18]. Also gilt: Der allseits wohlbekannte abstrakte Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist als Oberkörper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ nicht legitimer als die p-adischen Körper $\mathbb{Q}_p$.

Die reellen Zahlen sind nur, meistens aber nicht immer, bequemer als die $\mathbb{Q}_p$. Frege meint: „Für das begriffliche Denken kann man immerhin von diesem oder jenem geometrischen Axiome das Gegentheil annehmen, ohne daß man in Widersprüche mit sich selbst verwickelt wird.“ Die p-adischen Zahlen, die das archimedische Axiom weglassen, zeigen aber, daß die monierte Willkür auch die arithmetische Axiomatik belastet.

Kontinuumshypothese

Auch die Kontinuumshypothese kann ohne Widersprüche umgestülpt werden. Die Kontroverse erinnert an die früheren Debatten um das geometrische Parallelenaxiom. Von der Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems ZFC ausgehend zeigte Cohen 1963, daß die Kontinuumshypothese (CH) nicht innerhalb von ZFC bewiesen werden kann. Gödel hatte seinerseits 1938 gezeigt, daß $\neg CH$ nicht innerhalb von ZFC bewiesen werden kann. Daraus folgt nicht, daß CH weder wahr noch falsch sei, sondern daß ZFC unvollständig ist, d.h. einer Ergänzung bedarf[19]. Die Diskussion ist noch nicht abgeschlossen; es könnten, wie beim Parallelenaxiom, stärkere Axiomensysteme erfunden werden.

7.2.2. Gehört Anschauung zum Wesen der Geometrie?

Die Konstruktionen der Geometrie halten, anders als in der Arithmetik, der Kontrolle durch die Anschauung stand[20]. Die Anschauung ist für Kant wesentlich: ein Zweieck wäre logisch zulässig, aber wir „sehen“, daß zwei Gerade nur einen gemeinsamen Punkt haben. Wenn wir Freges trügerische Hoffnung aufgeben, in der Arithmetik ein weniger willkürliches Fundament als in der Geometrie gefunden zu haben, müssen wir uns noch mit der Relevanz der euklidischen Anschauung in der Geometrie beschäftigen.

[18] Es gibt andere Vorteile, z.B. konvergiert eine Reihe aus p-adischen Zahlen bereits dann, wenn die Folge der p-Beträge der Summanden gegen Null geht.

[19] Z.B. im *Ultimate L* Modell von H. Woodin.

[20] Der Arithmetiker braucht nur einen Haken vor die Zwei zu setzen, um die Zahl $\sqrt{2}$ zu erfinden. Für den Geometer ist $\sqrt{2}$ der Platzhalter für die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats.

Frege behauptet den Primat der Anschauung. Wir zitierten Kants Definition des „Schemas zu einem Begriff“ als Vorstellung „von einem allgemeinen Verfahren der Einbildungskraft, einem Begriff sein Bild zu verschaffen.“ Wenn nicht „Schema“ wie soll die Verstandesaktivität heißen, wenn kein angemessenes Bild vorgestellt werden kann?

Im Zitat von Anhang J begründet Frege sein hohes Vertrauen zur Arithmetik über eine herbe Kritik an den neuzeitlichen Geometrien, die „der Anschauung widerstreitende Annahmen“ treffen. In sarkastischen Tönen wütet Frege: „Die tollsten Fieberphantasien [...] lehren, wie man sich am eignen Schopfe aus dem Sumpfe zieht“. Angeprangert werden die Axiome der Geometrie: „von diesen kann nur das begriffliche Denken in gewisser Weise loskommen, wenn es etwa einen Raum von vier Dimensionen oder von positivem Krümmungsmaaße annimmt.“ Frege bemängelt das Fehlen an Anschaulichkeit einerseits in der euklidischen vierdimensionalen Geometrie andererseits in der sphärischen Geometrie; die Problematik ließe sich um so mehr auf höhere Dimensionen bzw. negativ gekrümmte Räume erweitern. Dieser Kritik widersprechen wir jetzt.

7.2.3. Anschauung im 4D-Raum

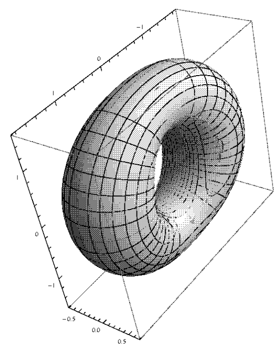

Abbildung 7.3.: Zyklide

In Abb. 7.3 haben wir eine Fläche (eine Zyklide) im gewohnten euklidischen 3D-Raum dargestellt. In einem Vorschritt hatten wir die Fläche als Schnitt mit der Sphäre $\mathbb{S}^3$ in den $\mathbb{R}^4$ eingebettet, weil sie sich dort viel bequemer berechnen läßt. Es wurde durch vierdimensionales Rechnen eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ visualisiert. Wenn auch die Anschauung im vierdimensionalen (hier euklidischen) Raum eine Expertise voraussetzt, kann von „Fieberphantasie“ nicht die Rede sein: die Zyklide steht vor unseren Augen. Wie die Keopspyramide, verrät sie ihr Baugeheimnis jedoch nicht.

Gewiß ist die Anschauung in höheren Dimensionen diffuser als im Standardraum, aber willkommen. Das abstrakte Rechnen wird als Werkzeug auf die mentalen geometrischen Bilder im Kopf des Geometers angewandt. Abb. 7.3 ist fraglos anschaulich; dann war das vierdimensionale Grundmaterial zur Berechnung der Zyklide keine Schimäre. Es wird nicht bestritten, daß die höherdimensionale Anschauung schwierig ist; aber auch der Physiker weiß nicht, wie die Elementarteilchen des Standardmodells „wirklich“ aussehen; trotzdem ist das mentale verzogene Bild, mit dem er arbeitet, eine brauchbare Arbeitsvorlage.

7.2.4. Anschauung in gekrümmten Räumen

Die sphärische Geometrie mit ihrem „positiven Krümmungsmaaße“ mache uns eine krumme Linie für eine Gerade vor, wendet Frege ein. Der Flugzeugpilot, der z.B. von Berlin nach Melbourne fliegt, nennt seine gebogene Flugstrecke entlang einem Großkreis der Erde nicht nur „symbolisch“ eine Gerade. Der Terminus *Gerade* drückt aus, daß der Steuerknüppel nie zu einem Kurswechsel bewegt wird und die Strecke die kürzeste ist. Wörter wie *gekrümmt* oder *flach* könnten hingegen nicht ohne Petitio Principii eine Gerade sauber definieren[21].

In der hyperbolischen Geometrie stellt sich die Frage der Anschauung schärfer als in der sphärischen, da die hyperbolische Ebene nicht in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden kann (Hilbert hat es bewiesen). Die schönen Stiche von M.C. Escher auf S. 33 vermitteln jedem Betrachter ein Bild des Unendlichen, auch wem die hyperbolische Geometrie nicht kennt. Das euklidische Anstarren der Kreisbögen ist aber rudimentär; es ist, als ob jemand nur die Phonetik der deutschen Sprache gelernt hätte; er könnte Sätze aussprechen, sie aber weder verstehen noch selbst bauen. Auch Escher sah, trotz seines einzigartigen Raumverständnisses, in der Vorlage von Coxeter ein Geflecht von Kreisbögen, das er mit dem Zirkel nicht ohne die Hilfe des großen Geometers nachkonstruieren konnte.

Gerade weil der Mensch sein anthropisches Netz über die Welt wirft, läßt die transzendentale Betrachtung erwarten, daß manches durch die Maschen geht. Kant meinte: „Die Bedingungen a priori einer möglichen Erfahrung überhaupt sind zugleich Bedingungen der Möglichkeit der Gegenstände der Erfahrung[22].“ Da die Geometrie die Möglichkeit höherdimensionaler bzw. nichteuklidischer Objekte a priori zuläßt, ist deren Existenz auch möglich. Wem die Existenz der Objekte verneint, obliegt die Beweislast. Kant hat daher, methodisch völlig richtig (siehe Zitat auf S. 31), beweisen wollen, daß der logisch einwandfreie Begriff eines Zweiecks nur der Nichtkonstruierbarkeit wegen fehlschlägt. Da er die Gerade als ein Ungekrümmtes versteht, positioniert er sich zirkulär in der euklidischen Geometrie, wo Zweiecke nicht existieren.

Frege geht weniger sorgfältig vor als Kant, und proklamiert rhetorisch ohne Beweisversuch seine Präferenz für die euklidische Geometrie. Er schließt sich denen an, die mathematische Gegenstände, soweit in der normalen Welt nicht instanziiert, für schlechthin

[21] Wie sollte nämlich *gekrümmt* definiert werden, ohne die Definition von *gerade* zu verwenden? Beide Termini bezeichnen ein gegensätzliches Wahrnehmungspaar; es sind Sinneseindrücke, keine mathematischen Definitionen.

[22] Vgl. [Kant, 1787], A 110.

nicht anschaulich halten. Es muß aber nicht jedermann anschauen können; es genügt, wenn der Geometer im Besitz eines adäquaten Schemas verzerrte mentale Bilder erzeugt.

Poincaré meinte, daß physikalische Theorien nur notgedrungen und ungern den gewohnten Boden der euklidischen Geometrie verlassen. Wenn etwa ein Lichtstrahl nicht gerade verläuft, wird man eher nach einer Theorie suchen, die ihn verbiegen könnte, als eine Krümmung des Raumes anzunehmen. Der Epistemolog Gaston Bachelard war über diesen Standpunkt entsetzt, den er gnadenlos als „erreur scientifique de Poincaré“ bezeichnete[23]. Wir vertreten die konträre These, daß Poincaré in die Debatte um die euklidische Geometrie endlich Klarheit gebracht hat. Diese Auffassung vertrat übrigens kein geringerer als Einstein[24].

Poincaré mischt sich in die metaphysische Kontroverse Realismus vs. Nominalismus in seinem philosophischen Werk nicht ein[25]. Von den mathematischen Gegenständen können wir nichts wissen. Wir können nur über die Relationen zwischen den Objekten Aussagen machen. Mangels eines absoluten Raums sollen wir nicht fragen, ob sich die Erde dreht; es genügt, daß die Phänomene im Weltraum mit dem heliozentrischen Modell adäquat beschrieben werden. Poincaré ist weit entfernt vom Logizismus[26]. Sein Augenmerk gilt der Intuition als dem Vermögen, Mathematik zu erfinden.

Koryphäen vom Schlage eines Poincaré, Gauß, Euler, oder Hilbert erfinden die mathematischen Gegenstände, die ihnen ihre Intuition suggeriert, ohne deren Existenz zu problematisieren[27]. Wie sich die Züge eines Schachmeisters nicht von den Regeln der Fi-

---

[23] Vgl. [Bachelard, 1934], S. 32-33: „Nachdem Poincaré die logische Äquivalenz der verschiedenen Geometrien nachgewiesen hatte, behauptete er, daß die Geometrie des Euklid immer die bequemere bleiben würde, und daß man, im Falle eines Konflikts dieser Geometrie mit dem physikalischen Experiment, immer lieber die physikalische Theorie als die elementare Geometrie ändern würde.“ Übersetzung CF.

[24] Vgl. [Einstein, 1921] S. 126: „[S]o gelangt man leicht zu der folgenden Auffassung, welcher insbesondere der scharfsinnige und tiefe H. Poincaré gehuldigt hat: Von allen anderen denkbaren axiomatischen Geometrien ist die euklidische Geometrie durch Einfachheit ausgezeichnet [...] Denn man wird sich lieber zu einer Änderung der physikalischen Gesetze als zu einer Änderung der axiomatischen euklidischen Geometrie entschließen, falls sich Widersprüche zwischen Theorie und Erfahrung zeigen.“

[25] Poincaré will mathematische Probleme lösen; metaphysische Probleme lassen sich nicht stringent lösen und gehören in die Privatsphäre. Damit liegt er auf der Linie von Hilbert, der in seiner berühmten Rede auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß, [Hilbert, 1900], verkündete: „[W]ir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik giebt es, kein Ignorabimus!“

[26] Er spreche Peanisch nicht fließend! gesteht Poincaré in [Poincaré, 1908a] ein, und er empfindet dies nicht als Mangel. Das Bemühen von Peano sowie z.B. von Russel und Hilbert, die ganzen Zahlen zu definieren, führe zu einer Petitio Principii, da sie in ihren Definitionen die ganzen Zahlen implizit verwenden. Damit werden wir uns noch beschäftigen.

[27] Vgl. [Poincaré, 1902], S. 70. Übersetzung CF: „Man darf auch nicht vergessen, daß das Wort *Existenz* nicht denselben Sinn hat, wenn es sich um eine mathematische Entität handelt, als wenn von einem

gurenführung deduzieren lassen, empfinden solche Talente das logische Niederschreiben eines Beweises als lustloses Pensum, da sie das Problem bereits intuitiv gelöst haben.

Unsere These behauptet, daß beim Erfinden der Geometrie die bildliche Anschauung entbehrlich ist. Was die Intuition erzeugt, ist keine Anschauungsform sondern das Schema, über das die mitunter unanschauliche Form konstruiert wird. Wir erwähnten bereits in diesem Zusammenhang den Gruppenbegriff, mit dem wir uns nunmehr befassen.

7.3. Schemata der Geometrie

Im Vorwort von *Wissenschaft und Hypothese* faßt Poincaré seine These zum Raumbegriff prägnant zusammen:

> Ein anderer Rahmen, den wir der Welt anpassen, ist der Raum. Woher stammen die ersten Grundlagen der Geometrie? Werden sie uns durch die Logik auferlegt? Lobatschewsky hat das Gegenteil gezeigt, indem er die nichteuklidischen Geometrien schuf. Wird uns der Raum durch unsere Sinne offenbart? Auch nicht, denn der Raum, den uns unsere Sinne zeigen können, unterscheidet sich grundsätzlich von dem Raum des Geometers. Wird die Geometrie von der Erfahrung abgeleitet? Eine gründliche Erörterung wird uns zeigen, daß es nicht der Fall ist[28].

Anders als Gauß, dem die nichteuklidischen Geometrien als Widerlegung der Kantischen apriorischen Form bereits genügten, nimmt Poincaré die Kantischen Argumente ernst, die wir jetzt näher betrachten wollen.

7.3.1. Sind Axiome apriorische synthetische Sätze?

Die Konsistenz der nichteuklidischen Geometrien beweist in der Tat, daß die geometrischen Axiome nicht analytisch sind, sonst ließe sich kein Axiom - in diesem Fall das Parallelenaxiom - umstülpen. Die Übung am Zweieck illustriert, wie sorgfältig Kant vorgeht; es genügt ihm nicht, daß die geometrischen Gegenstände den Regeln der Logik nicht widersprechen, sie müssen auch durch die „reine Anschauung“ konstruiert werden können. Folglich sind die Axiome synthetische Urteile. Da kein empirisches Urteil den allgemein gültigen und notwendigen Charakter der Axiome begründen könnte, sind sie a priori. Kants begründetes Mißtrauen gegenüber empirischen Urteilen greift aber ins Leere, falls die vorausgesetzte Notwendigkeit der Axiome (hier des Parallelenaxioms) durch konsistente alternative Geometrien verneint wird. Poincaré dazu:

materiellen Gegenstand gesprochen wird. Ein mathematische Entität existiert, soweit ihre Definition keinen Widerspruch impliziert, weder in sich selbst noch zu den zuvor erwiesenen Propositionen.“

[28] Vgl. [Poincaré, 1902], S. 26. Übersetzung CF.

> Sind [die geometrischen Axiome] synthetische Urteile a priori, wie Kant sie nennt? Dann drängten sie sich uns mit solcher Macht auf, daß wir uns die gegensätzliche Behauptung nicht vorstellen, noch auf ihr ein theoretisches Gebäude aufbauen könnten. Es gäbe keine nichteuklidische Geometrie mehr[29].

Wenn die Notwendigkeit der Axiome angezweifelt wird, kann ein Empirist immer noch einwenden, daß die Konstruktion alternativer Geometrien erst durch geistige Kapriolen erfolgt, die dem Commonsense zuwiderlaufen. Während die Intuition des euklidischen Raumes einleuchtet, besitzen wir gewiß keine Intuition des hyperbolischen; sonst könnte jeder die Stiche von M.C. Escher auf S. 33 mit hyperbolischen Augen betrachten.

7.3.2. Der Betrachter schafft den Raum

Die euklidische Struktur unseres gewohnten Raums hat allerdings unserer Intuition eine getönte Brille aufgesetzt. Doch reagieren wir manchmal unwissend nicht-euklidisch: Wenn ein Schifahrer eine bucklige Landschaft hinuntersaust, erkennt er intuitiv die geradeste Strecke zur Schihütte, eine nicht-euklidische Geodätische auf der buckeligen Schneedecke. Der Schifahrer folgt einer Raumkurve im euklidischen 3D-Raum, die aber in der intrinsischen Geometrie der Fläche eine Geodätische ist. Die Kurve selbst lebt in der Welt draußen; sie schreibt keinerlei Geometrie vor, sondern wir projizieren eine Geometrie in den Raum, die wir uns nach dem Maßstab der Bequemlichkeit aussuchen.

Bei einer Konferenz wird nach Möglichkeit eine Sprache vereinbart, die allen Teilnehmern geläufig ist, oder es werden die Debatten übersetzt. Genauso ist es möglich eine Geometrie in eine andere zu übersetzen. Poincaré skizziert ein Wörterbuch *Hyperbolisch-Euklidisch*[30], um die hyperbolische Geometrie einer Fremdsprache gleichzusetzen:

> Laßt uns die Theoreme mit diesem Wörterbuch übersetzen, wie wir etwa mit einem Wörterbuch *Deutsch-Französisch* einen deutschen Text übersetzen würden. Was wir erhalten sind die Theoreme der gewöhnlichen Geometrie [...] Wären zwei Theoreme zueinander widersprüchlich, so auch die Übersetzungen der beiden Theoreme [...] Diese Übersetzungen sind aber Theoreme der gewöhnlichen Geometrie und niemand zweifelt daran, daß die gewöhnliche Geometrie widerspruchsfrei ist[31].

Ein Wörterbuch, der nur Wörter übersetzt, genügt aber nicht, um den Sinn eines Textes zu übertragen; der Übersetzer muß die Syntax beider Sprachen beherrschen, d.h. die Relationen zwischen den Wörtern:

[29] Vgl. [Poincaré, 1902], S. 74. Übersetzung CF.
[30] Poincaré spricht wie damals in Frankreich üblich von lobatchewskischer bzw. riemannscher Geometrie statt von hyperbolischer bzw. sphärischer Geometrie; die heute gebräuchlichen Termini haben sich erst sehr spät durchgesetzt, ohne inhaltlichen Unterschied.
[31] Vgl. [Poincaré, 1902], S. 68. Übersetzung CF.

> Die Möglichkeit der Übersetzung schließt aber das Vorhandensein einer Invariante ein. Übersetzen heißt gerade diese Invariante freimachen. Eine Geheimschrift entziffern, heißt suchen, was in diesem Dokument unveränderlich bleibt, wenn man die Buchstaben durch andere ersetzt[32].

Die Invariante, ohne die das Wörterbuch *Hyperbolisch-Euklidisch* nutzlos wäre, lieferte 1872 Felix Klein im Erlanger Programm; sie heißt (Bewegungs-)gruppe. Die mathematischen Gegenstände im Wörterbuch sind austauschbar; die Verkittung über die Syntax macht den Unterschied aus:

> Die Mathematiker untersuchen keine Gegenstände, sondern die Relationen zwischen Gegenständen; es kommt ihnen daher nicht darauf an, daß diese Gegenstände durch andere ersetzt werden, soweit die Relationen erhalten bleiben. Die Materie ist ihnen gleichgültig, allein die Form ist für sie von Interesse[33].

Anstatt die drei Kanten eines Dreiecks mit den Maßen eines anderen statisch zu vergleichen, *bewegt* der Geometer die das Dreieck tragende Ebene, um im Falle der exakten Überdeckung auf Kongruenz zu schließen. Mit dem Übergang von einer statischen Geometrie zu einer dynamischen, wo Gegenstände bewegt werden, begründet Poincaré, warum nicht die Geometrie a priori ist, sondern der Gruppenbegriff.

7.3.3. Dynamisierung durch das Gruppenschema

Eine Gruppe ist im wesentlichen eine mit einer Operation ausgestattete Struktur, so daß die Aufeinanderfolge zweier beliebiger Transformationen auf Mengenelemente einer einzigen Transformation in derselben Gruppe äquivalent ist. Den Mercedes-Stern erst r-mal, anschließend s-mal um seinen Mittelpunkt zu drehen, ist äquivalent zu einer $(r+s)$-Drehung. Werden die Null-Drehung und die gegenläufigen Drehungen hinzugenommen, bilden die Drehungen eine Gruppe. Da eine Translation eine Drehung mit Radius ∞ ist, bilden Drehungen und Translationen die Bewegungsgruppen der euklidischen sowie der hyperbolischen und sphärischen Geometrien. Werden Kopien eines gleichseitigen Dreiecks aneinander bewegt, entsteht eine Pflasterung der flachen Ebene. Durch die Wahl eines Dreiecks pflastert M.C. Escher die hyperbolische Ebene[34].

Da das Parallelenaxiom in zweifacher Weise umgekehrt werden kann - keine Parallele (sphärisch) oder minsdestens zwei (hyperbolisch) - gibt es für Flächen nur drei Geome-

[32] Vgl. [Poincaré, 1905b], S. 113. Übersetzung CF.
[33] Vgl. [Poincaré, 1902], S. 42. Übersetzung CF.
[34] Das Dreieck muß so gewählt werden, daß die in einer Ecke zusammenlaufenden Winkel 360° ergeben. Hat man die Translationen und Drehungen in einer Matrix dargestellt, kann die Poincarésche Kreisscheibe mühelos gepflastert werden, während Escher ordentlich schwitzen mußte, um die Vorlage von Coxeter mit euklidischen Augen nachzuzeichnen.

trien[35], die durch die Invariante der - mit dem adäquaten Maßstab gemessenen - Länge charakterisiert sind.

Die Transformationsgruppe kann aber viele andere Invarianten verwenden: in der affinen Geometrie kann jedes Dreieck auf jedes andere Dreieck abgebildet werden, in der projektiven Geometrie jedes Viereck auf jedes Viereck, in der Möbius Geometrie jeder Kreis auf jeden Kreis, etc. Während Kant implizit mit dem zu seiner Zeit üblichen Maßstab der euklidischen Länge in einer statischen Geometrie gefangen gehalten war, öffnet Poincaré das Tor zur Dynamik mit dem von Felix Klein initiierten Gruppenbegriff, der sich seitdem über die Geometrie hinaus in der gesamten Mathematik etabliert hat:

> Die Geometrie ist nichts anderes als die Zusammenfassung der Gesetze, nach welchen [die] Bilder aufeinanderfolgen. Nichts steht dem entgegen, eine Reihe von Vorstellungen auszudenken, welche unseren gewöhnlichen Vorstellungen vollständig ähnlich sind, aber welche nach Gesetzen aufeinanderfolgen, die von den uns vertrauten verschieden sind[36].

Damit ist Geometrie kein apriorischer statischer Anschauungsrahmen. Etwas mußte uns aber in die Wiege gelegt werden: das Schema zum Erkennen der Gruppenaktion. Dieser Perspektivenwechsel ist alles andere als banal:

i) Die nichteuklidischen Geometrien werden nicht länger durch künstliche geistige Kontorsionen konstruiert, an denen sich Frege störte.
ii) Es stellt sich dem Logizismus die schwierige Frage, die unseren Rahmen sprengen würde, ob der Gruppenbegriff von den Gesetzen der Logik abgeleitet werden könne.
iii) In der Welt draußen wirkt nur die familiäre euklidische Gruppe, was a posteriori den euklidischen Primat in der angewandten Mathematik begründet.
iv) Kant hatte Recht, der Geometrie ein Apriori zugrundezulegen. A priori ist aber nicht, wie Kant meint, die euklidische Raumform, die unsere Sinne auf die Welt projizieren, sondern wir vermögen, aus der Erfahrung ein Schema für den Gruppenbegriff zu erzeugen, das die Dynamik der Bewegungen strukturiert.

<u>Fazit:</u>

Wir hatten bereits den topologischen Raum als apriorische Form identifiziert. Dann erkannten wir auch die Chronologie als die apriorische Form zum Anschauen der Bewegung. Das mathematische Erfinden erfolgt über Schemata des Verstandes, an deren Spitze die Logik steht. Logische Aussagen wären nur analytisch; erst das Schema der Gruppenerkennung macht die geometrischen Sätze synthetisch.

[35] Thurston hat bewiesen, daß es eine Dimension höher acht Geometrien gibt, was wir hier nicht zu vertiefen brauchen.
[36] Vgl. [Poincaré, 1902], S. 37. Übersetzung CF.

Wir wenden nunmehr das Blatt von der Geometrie auf die Arithmetik. Zwischen Poincaré und dem Logizismus ist ein sehr aufschlußreicher Disput entfacht: es geht um den Aufbau der natürlichen Zahlen und allgemeiner um die Induktion.

7.4. Das Schema des induktiven Denkens

In einem ersten Schritt zeigen wir, daß die Induktion kein logisches Prinzip sondern ein Verstandesschema ist. Dann werden wir anhand dieser Erkenntnis gegen die logizistische Auffassung argumentieren, nach der die Mathematik von der Logik ableitbar sei.

Begriffsklärung: In der Philosophie wird seit Aristoteles Induktion, im Gegensatz zur Deduktion, als das Folgern vom Speziellen auf das Allgemeine verstanden. Doch ist die „vollständige“ Induktion des Mathematikers ein exaktes Beweisverfahren, das seit J.S. Mill als deduktive Beweismethode eingestuft wird[37]. Der scheinbare Widerspruch wird durch das Prädikat *vollständig* aufgehoben. Wir schließen uns der konsensfähigen Definition des britischen Psychologen Philip Johnson-Laird an: „Induction is any process of thought yielding a conclusion that increases the semantic information in its initial observations or premises[38].“ Darf Induktion wegen ihrer eminenten Funktion in der Mathematik und ihrer Nähe zur Syllogistik der Logik zugeordnet werden?

7.4.1. Induktion, Rekursion

Die menschliche Gabe, aus Analogien ein Schema - z.B. eine Gruppenstruktur - zu entwickeln, läßt sich von der Prädikatenlogik nicht ableiten. Ein derartiges Vermögen liegt der vollständigen Induktion zugrunde: Läßt sich eine für eine natürliche Zahl n geltende Eigenschaft auf $n+1$ übertragen[39], so auch auf alle Zahlen größer als n. Wir bringen dazu ein Beispiel.

[37] Vgl. [J. S. Mill, 1843] S. 125: „Reasoning [...] is synonymous with Inference [...] [R]easoning from particulars to generals, and reasoning from generals to particulars; the former being called Induction, the latter Ratiocination or Syllogism [...] When, in short, the conclusion is more general than the largest of the premises, the argument is commonly called Induction; when less general, or equally general, it is Ratiocination.“

[38] Vgl. [Johnson-Laird, 1994], S. 11.

[39] Vgl. die korrekte Definition der vollständigen Induktion in [Dedekind, 1888] § 6 Satz 80: „Um zu beweisen, daß ein Satz für alle Zahlen n einer Kette m_0 gilt, genügt es zu zeigen, daß er für $n = m$ gilt und daß aus der Gültigkeit des Satzes für eine Zahl n der Kette m_0 stets seine Gültigkeit auch für die folgende Zahl n' folgt.“

Wir betrachten die Reihe $S(n) := 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ der Quadratzahlen von 1 bis n. Durch göttliche Eingebung oder bequemes Googeln vermuten wir:
$S(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
Falls die Formel auf ein n paßt, gilt sie auch für $n+1$?:
$S(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 \stackrel{?}{=} S(n) + (n+1)^2$.
Die Ausrechnung der rechten Seite liefert tatsächlich:
$S(n) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)$.
Also stimmt die Formel $S(n)$ weiterhin, wenn $n+1$ statt n eingegeben wird. Wegen $S(1) = \frac{1.2.3}{6} = 1$ setzt sich die Formel sukzessiv durch alle n fort.

Bei der vollständigen Induktion wirkt auf die Zahlenkette ein Dominoeffekt ein. Es genügt, daß jeder mit der Zahl n numerierte Stein beim Umfallen den nächsten Stein aus dem Gleichgewicht bringt. Der Induktionsschritt $n \to n+1$ besteht in dem Umstand, daß das Umkippen mehr Energie freisetzt, als zur Herbeiführung aufgewendet wurde[40].

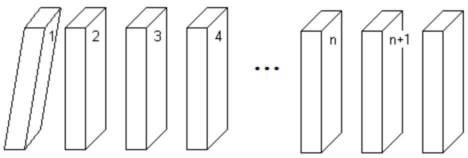

Abbildung 7.4.: Dominoeffekt

<Alle Schwäne sind weiß> ist eine empirische Induktion, wo der Allquantor „alle“ kühn von einer abzählbaren Menge auf eine putative Obermenge schließt. Bei der vollständigen Induktion wird nicht vom Besonderen auf das Allgemeine geschlossen. In unserem Beispiel ist n ein *Platzhalter* für jede beliebige natürliche Zahl. Da die Regeln der Arithmetik von den eingesetzten Zahlen nicht abhängen, leuchtet die Universalität der Formel sofort ein, sobald sie nachweislich für die Nachfolgerzahl gilt.

Auffallend ist, daß durch die vollständige Induktion ein echter Beweis erbracht wird, ohne jedoch den Induktionskeim $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ im geringsten zu erhellen. Benacerraf hat in diesem Fall Recht: Die Semantik ist beweiskräftig, aber die Epistemik versagt. Wir zweifeln an dem Beweis nicht, doch verstehen wir nicht, wie die Formel mit dem Addieren der Quadrate zusammenhängt[41]. Logisches Schließen verstehen wir aber. Daher situiert Poincaré die vollständige Induktion *außerhalb der Logik*:

> Warum drängt sich uns dieses Urteil mit solcher gebieterischer Evidenz auf? Das kommt daher, daß nur die Geisteskraft eingesetzt wird, die überzeugt ist, sich die unbegrenzte Wiederholung eines und desselben Schrittes vorstellen zu können, wenn dieser Schritt einmal als möglich erkannt wurde[42].

[40] Bei der *empirischen* Induktion würde etwa vermutet werden, daß alle Steine einen schwarzen Rücken haben, was einer Begründung von $n \to n+1$ bedürfte.
[41] Die Formel kann allerdings durch Ausrechnung der 2. Differenzen verständlich gemacht werden.
[42] Vgl. [Poincaré, 1902], S. 41-42. Übersetzung CF.

Das oft angewandte Schema der Iterierbarkeit, bei dem eine Kette von Wiederholungen in eine Einheit gebündelt wird, tritt in der mit der Induktion eng verwandten Form der Rekursion und bei dem Iterieren von Funktionen auf.

Bei der Rekursion wird ein Funktionswert erneut in die Funktion eingegeben, so daß eine Verschachtelung entsteht. Es wird z.B. die n-te Fibonnaci-Zahl f_n durch $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ rekursiv definiert. In beiden Fällen der Induktion und der Rekursion wird durch eine Formel eine Schleife in einem Computer-Programm vermieden. Bei iterierten Funktionen hingegen werden Werte in einer Schleife errechnet. Mit dem Newton-Verfahren werden z.B. nichtlineare Gleichungen numerisch gelöst[43].

Diese kurze Präsentation der Palette des induktiven Denkens sollte nur suggerieren, daß die Technik des Iterierens aktueller denn je große Teile der Mathematik beherrscht. Die herausragende Rolle der Iterierbarkeit hat Poincaré in den Vordergrund gestellt. Er macht in [Poincaré, 1908a], S. 435-436, darauf aufmerksam, daß Peano in seinem Axiomensystem die vollständige Induktion in kaum verkappter Form als 5. Axiom anführt:

Axiom (1) 0 ist eine natürliche Zahl.
Axiom (2) 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
Axiom (3) Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.
Axiom (4) Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
Axiom (5) Enthält eine Menge natürlicher Zahlen die 0 und den Nachfolger jedes Elements, dann ist diese Menge gleich $\mathbb{N}$.

Betrachte ich die Reihe $(0, 1, 2)$, schreibt Poincaré, so entspricht sie offenbar den ersten beiden Axiomen. Um Axiom (3) zu erfüllen, muß die 3 eine natürliche Zahl sein; folglich muß auch die Reihe $(0, 1, 2, 3)$ den Axiomen genügen, d.h. auch die 4 muß eine natürliche Zahl sein, und so weiter. Um eine Zahl festzulegen, braucht man in diesem infiniten Regreß die jeweils nächste Zahl. Damit das Axiomensystem konsistent ist, müßten alle Schritte auf Widerspruchsfreiheit hin geprüft werden; es sind aber unendlich viele.

Die Konstruktion von Peano wird durch diese Feststellung nicht angegriffen. Da sie aber auf vollständiger Induktion aufbaut, ist ihre Konsistenz nur gesichert, wenn das induktive Schließen legitimiert werden kann[44]. Der Streit mit der Fregeschen Zahlenkonstruktion geht darum, ob die Logik das leisten kann.

[43] Die beliebten Computer-Schleifen haben neue Zweige der Forschung möglich gemacht. So birgt die harmlos anmutende logistische Gleichung $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n); x \in [0, 1]; r \in [0, 4]$ große Überraschungen in sich. Die früher kaum erforschte fraktale Welt baut auch auf Iteration auf, z.B. das Mandelbrot-Männchen durch Iterieren von $f(z) = z^2 + c;\ z, c \in \mathbb{C}$. .

[44] Vgl. [Poincaré, 1908a], S. 436: „Die Folgerung verwendet eine vollständige Induktion; daher gilt es, genau das Prinzip der vollständigen Induktion zu rechtfertigen.“ Übersetzung CF.

7.4.2. Gehört Induktion in die Logik?

Die Logik allein liefert nur analytische Urteile. Der Mathematiker strebt aber synthetische Urteile an, um Neues zu erfahren. Wie geht das? Durch Konstruktion und Übergang vom Besonderen zum Allgemeinen:

> Die Mathematik kann daher, wie die anderen Wissenschaften auch, vom Besonderen zum Allgemeinen fortschreiten. Hierin liegt eine Tatsache, die uns am Anfang dieses Aufsatzes unverständlich erschienen wäre, aber die jetzt für uns nichts Geheimnisvolles mehr birgt, nachdem wir die Analogie zwischen dem Beweisen durch Rekursion bzw. durch die gewohnte Induktion festgestellt haben[45].

Diese Aussage hat eine große Tragweite. Poincaré ist etwas klar geworden, was er nach eigenem Bekunden anfangs nicht vermutet hätte: allein Rekursion und Induktion (zwei Seiten einer Medaille) machen mathematische Sätze synthetisch. Das behauptet jemand, der schwierigste mathematische Beweise und Theorien erfand. Kant nannte synthetisch die Urteile, die unsere Erkenntnis erweitern. Was genau die Synthetizität bewirkt, blieb offen. Poincaré fügt hinzu: da die Logik nur Tautologien liefert, entsteht die Synthetizität in der Mathematik durch das induktive Schema.

Für Poincaré gehört Induktion nicht in die aristotelische Logik, auch nicht in die Erweiterung durch Russell. Ohne nach dem damaligen Umfang der Logik zu fragen, erscheint es in der Tat sinnvoll, die Induktion von den Syllogismen und den Quantoren zu unterscheiden. Logisches Schließen erzeugt Urteile durch Deduktion. Die Induktion hingegen faßt eine Kette von Urteilen zu einem universalen[46] Urteil zusammen. Die Jakobsleiter der Mathematik kann man laut Poincaré nur mittels der Induktion hinaufklettern:

> [Man] muß notwendigerweise vom Besonderen zum Allgemeinen aufsteigen, indem man um eine oder mehrere Stufen weiterklimmt. Das analytische Verfahren „durch Konstruktion“ nötigt uns zwar nicht, von einer Stufe herabzusteigen, aber es läßt uns auf der Stufe stehen. Wir können uns nur durch die mathematische Induktion erheben, die allein uns etwas Neues lehren kann. Ohne die Hilfe dieser Induktion, die in mancher Hinsicht von der physikalischen Induktion verschieden aber genauso fruchtbar ist, würde die Konstruktion nicht imstande sein, Wissen zu erzeugen[47].

Wenn die Induktion kein Schließen durch Syllogismen ist, was ist sie dann? Eine Schema des menschlichen Verstandes:

> Die mathematische Induktion, d. h. der Beweis durch Rekursion, zwingt sich [anders als die des Physikers] uns mit Notwendigkeit auf, weil sie lediglich dem Gebrauch einer Eigenschaft des Verstandes entspricht[48].

[45]Vgl. [Poincaré, 1902], S. 14. Übersetzung CF.
[46]Während die wissenschaftliche Induktion nur falsifizierbare „generelle“ Urteile erzeugt, entstehen durch die mathematische Induktion „universale“ Urteile.
[47]Vgl. [Poincaré, 1902], S. 14. Übersetzung CF.
[48]Vgl. ebd. S. 41-42.

In einer langwierigen Kontroverse mit Russell über den Logizismus ging es Poincaré darum, daß durch die Ergänzung der klassischen aristotelischen Logik mit Quantoren Werkzeuge des Beweisens, wie etwa die Induktion, nicht erfaßt werden. Wer Mathematik zur Tochter der Logik deklarieren möchte, stößt auf das Problem, daß die Induktion außerhalb der Logik steht. Liegen der Mathematiker und der Philosoph wirklich so weit auseinander? Russell schreibt:

> Whatever may be the exact formulation of the fundamental principle of induction, it is evident that in the first place this principle is general, and in the second place that it cannot, without a vicious circle, be itself demonstrated by induction [...] Hence inductive knowledge, like all knowledge which is obtained by reasoning, needs logical principles which are a priori and universal. By formulating the principle of induction, we transform every induction into a deduction; induction is nothing else than a deduction which uses a certain premise, namely the principle of induction[49].

Wie ließe sich ohne Rückgriff auf die Induktion das Induktionsprinzip anders beweisen, d.h. ohne Zirkularität? Das dürfte in der Tat keinem gelingen. Daher erscheint das Induktionsprinzip notwendig und allgemeingültig d.h. a priori. Natürlich kann man jede Induktion zu einer Deduktion umformen, wenn das Induktionsprinzip als Prämisse eingesetzt wird. Diese Prämisse muß aber als wahr angenommen werden, sonst wäre der Schluß nicht gültig; das Induktionsprinzip mag unter der Rubrik Prämisse auftreten, oder Schlußregel oder noch Axiom; der Unterschied ist rein formal. Aus dem Zitat Russells geht übrigens hervor, daß er Freges logischen Status der Induktion (vgl. S. 155) offenbar nicht anerkennt.

Stellen wir die Zitate von Poincaré und Russell einander gegenüber, so behaupten beide dasselbe: das Prinzip der vollständigen Induktion läßt sich mit den Mitteln der Logik - auch der Russellschen Logik - ohne Zirkularität nicht beweisen. Daher ist das Induktionsprinzip ein Kantisches Schema.

Hinter einem scheinbaren Streit um des Kaisers Bart stehen sich zwei Mathematiker gegenüber. Russell behauptet, daß die um das „principle of induction" ergänzte Sprache der Logik genügt, um alle durch Intuition entdeckten mathematischen Wahrheiten niederzuschreiben. Poincaré bestreitet, als Vertreter einer dynamischen intuitionalen Mathematik, daß die Induktion zur Logik gehöre. Dazu wählt er das Paradigma der vollständigen Induktion, die kein logisches Werkzeug ist, sondern das Vermögen des Iterierens.

Wichtig ist in unseren Augen, daß neben der Logik andere angeborene Fähigkeiten des Verstandes notwendig sind, um mathematische Schemata zu erzeugen. Russells Logik mag Induktion als „a priori and universal logical principle" einverleiben und in die

[49] Vgl. [Russell, 1911].

Syllogismen einbauen. Wenn die Intuition den Beweis einmal dynamisch erfunden hat, muß sie sich beim statischen logischen Niederschreiben verabschieden.

Poincarés These, nach der die Induktion ein Urteil synthetisch macht, kann tatsächlich wie von uns beschrieben aus *La science et l'hypothèse* herausgelesen werden. Sechs Jahre später bestätigt Poincaré in *Science et méthode*, daß seine Formulierung manche Leser zu dieser unserer Interpretation verleitet hat.

> Ich habe nicht gemeint, wie ich verschiedentlich verstanden wurde, daß alle mathematischen Schlußfolgerungen auf die Anwendung dieses [Induktions-]Prinzips reduziert werden können. Sieht man sich diese Schlüsse etwas näher an, so werden viele andere analoge Prinzipien angewandt, die dieselben wesentlichen Charakteristika aufweisen. Unter den Prinzipien dieser Art ist die vollständige Induktion nur das einfachste von allen, weshalb ich es als Paradigma gewählt habe[50].

Leider nennt Poincaré keine weiteren weniger einfachen Prinzipien. Vielleicht denkt er an das Erkennen von Analogien: die Gruppeneigenschaft, die Gleichsetzung von Strukturen in Diffeomorphismen, Homeomorphismen und dergleichen, das Geschlecht einer geschlossenen Fläche in der Topologie, usw.

7.4.3. Induktion aus der Sicht Russells

In [Poincaré, 1913], § 4, setzt sich Poincaré ausführlich mit Russells *Axiom of Reducibility* auseinander, das gemäß Russells Typentheorie dem Induktionsprinzip substituiert werden könnte. Da wir den Tenor des Expertenwissen voraussetzenden Axioms in wenigen Worten nicht zu wiedergeben vermögen, berufen wir uns auf Kanamori, der es einen eleganten Schwindel (sic: artful dodger) zur Festigung der Typentheorie nennt[51]. Poincaré kommt zu dem Schluß, daß das Axiom das Induktionsprinzip voraussetzt und merkt beiläufig ironisch an: „Es ist mir nicht einmal gelungen, den Sinn dieses Axioms ganz zu verstehen[52].“ Wir enthalten uns vorsichtig jedes Kommentars, während Wittgenstein sich autorisiert fühlt, im *Traktatus* das Axiom schroff aus der Logik zu verweisen[53]. Nach einer langen Kontroverse gab Russell zu, daß sein Axiom nicht in die Logik gehört:

[50] Vgl. [Poincaré, 1908a], S.424. Übersetzung CF

[51] Vgl. [Kanamori, 2009], S. 411: „In traumatic reaction to his paradox Russell had built a complex system of orders and types only to collapse it with his Axiom of Reducibility, a fearful symmetry imposed by an artful dodger.“

[52] Vgl. [Poincaré, 1913], S. 51. Übersetzung CF.

[53] Vgl. [Wittgenstein, 1922], 6.1232: „Die logische Allgemeingültigkeit könnte man wesentlich nennen, im Gegensatz zu jener zufälligen, etwa des Satzes: 'Alle Menschen sind sterblich'. Sätze wie Russells *Axiom of Reducibility* sind nicht logische Sätze, und dies erklärt unser Gefühl: Daß sie, wenn wahr, so doch nur durch einen günstigen Zufall wahr sein könnten.“

> Viewed from this strictly logical point of view, I do not see any reason to believe that the axiom of reducibility is logically necessary, which is what would be meant by saying that it is true in all possible worlds. The admission of this axiom into a system of logic is therefore a defect, even if the axiom is empirically true[54].

Es macht nachdenklich, daß Poincaré, in seinen philosophischen Werken nirgendwo die Arbeiten von Frege erwähnt. Freges mächtiges Gebäude hatte zum Ziel die Arithmetik über sein Grundgesetz V in die Logik zu integrieren. Nachdem wir die These der Induktion als Schema dargelegt haben, sind wir jetzt in der Lage, daraus eine Kritik am Fregeschen Logizismus abzuleiten.

7.4.4. Induktion aus der Sicht Freges

Auf die Frage, ob das Induktionsprinzip ein logisches Prinzip sei, antwortet der Mathematilker Zermelo vorsichtig: „Ich für mein Teil traue mir im Augenblick nicht zu, diese rein philosophische Frage zu entscheiden[55].“ Der Stein des Anstoßes ist der Begriff der Eins. In seinen philosophischen Schriften zeigt Poincaré, daß die Logizisten die Eins zirkulär definieren. Die Petitio Principii hat ein zweifache Auswirkung: auf die Definition der Eins selbst, und auf das Induktionsprinzip, dem sie zugrundeliegt.

Frege stellte diese Zirkularität auch fest; die Grundidee von Grundgesetz V und Hume-Prinzip zielt dahin, durch eine Bijektion zwischen Gegenständen und Zahlen der Zirkularität zu entgehen. Um unsere These zu stützen, nach der auch bei solchen Bijektionen der Begriff der Eins vorausgesetzt werden muß, den es gerade zu definieren gilt, sehen wir uns die Argumentation Freges näher an.

Im Rückblick der *Grundlagen*§ 107 zieht Frege eine Bilanz und meint in dem von uns hervorgehobenen letzten Satz des folgenden Zitats (um den es uns allein geht) gezeigt zu haben, daß die vollständige Induktion keine „eigentümliche mathematische Schlußweise“ sondern ein logisches Prinzip sei:

> Auf jede Zahl folgt in der natürlichen Zahlenreihe eine Zahl.
> Wir wurden hierdurch auf den Begriff 'der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend' geführt, von dem wir zeigen wollten, daß die ihm zukommende Anzahl auf n in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar folge. Wir definirten ihn zunächst mittels des Folgens eines Gegenstandes y auf einen Gegenstand x in einer allgemeinen Φ-Reihe. Auch der Sinn dieses Ausdruckes wurde auf rein logische Verhältnisse zurückgeführt. *Und dadurch gelang es, die Schlußweise von n auf $(n+1)$, welche gewöhnlich für eine eigenthümlich*

[54] Vgl. [Russell, 1919], S. 193.

[55] Vgl. [Boniface, 2004], S. 147, Verweis auf Zermelo, *Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète*, 1907, zitiert in Heinzmann, Gerhard, Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. *Textes de la discussion sur les fondements des mathématiques*, Paris, Blanchard, 1986. Übersetzung CF.

> *mathematische gehalten wird, als auf den allgemeinen logischen Schlußweisen beruhend nachzuweisen*[56].

Eine Diskussion der *Grundlagen* würde unseren Rahmen sprengen. Wir werden uns daher am Ariadnefaden dieser gigantischen Arbeit orientieren, um uns auf das Induktionsprinzip und das fragliche Grundgesetz V zu konzentrieren.

7.4.5. Grundgesetz V und Hume-Prinzip

Der minimalste Anspruch an Logizismus und Platonismus zugleich ist die Konstruktion der natürlichen Zahlen. Im Anhang K besprechen wir die Schwachstellen des „Grundgesetzes der Werthverläufe“ [57] im Hinblick auf den Platonismus. Die Einwände gegen die finale Konsistenz von Grundgesetz V schließen dennoch nicht aus, daß dieses sich doch eignen würde, um das Hume-Prinzip zu begründen, dann aus diesem den Zahlbegriff. Wir verzichten auf eine fachliche Diskussion, die wir nach Anhang K ausgegliedert haben, um anhand von paradigmatischen Beispielen die Beweisideen Freges zu skizzieren.

Frege stellt im Grundgesetz V die Inputs und Outputs einer Funktion einander gegenüber, d.h. er schreibt die Argumente in eine Spalte und die Werte in eine zweite Spalte. So erhält er eine Tabelle, die anders als die Funktion ein gedachter Gegenstand ist: der Wertverlauf. Ergeben zwei Funktionen dieselbe Tabelle, dann besagt Grundgesetz V, daß beide dieselbe Bedeutung haben: sie *deuten* nämlich auf dieselbe Bijektion hin. Heute sagt man lieber Extension. Da die funktionellen Ausdrücke verschieden sind, haben sie nicht denselben Sinn (heute: Intension).

Modern formuliert lautet das Hume-Prinzip[58]: die unter den Begriff F fallende Zahl ist der unter den Begriff G fallenden Zahl identisch, wenn F und G equinumerisch (gleichzahlig) sind, d.h. wenn es zwischen den unter F und G fallenden Gegenständen eine Bijektion gibt.

Der wesentliche Zug unserer Überlegungen liegt darin, daß Gleichheit ein *zweistelliger* Relationsbegriff ist, der beim Vergleichen den Begriff der Eins benötigt:

<u>Zu Grundgesetz V</u>:

[56] Vgl. [Frege, 1884], S. 63. Hervorhebung CF.

[57] Im folgenden kurz Grundgesetz V in Anlehnung an das Basic Law V der englischsprachigen Literatur.

[58] In [Frege, 1884] § 63 übersetzt Frege (nicht ganz korrekt) einen Satz aus *A Treatise of Human Nature*, Book I, chapter III *Of Knowledge*: „When two numbers are so combined, as that the one has always an unit answering to every unit of the other, we pronounce them equal.“

Angenommen ein Bastler möchte ein Sortiment von Schrauben dem zugehörigen Sortiment von Muttern zuordnen, so daß Schrauben und Muttern gemäß Grundgesetz V zusammenpassen. Der Bastler kann wahlweise entweder versuchen, die Muttern aufzuschrauben, oder visuell die Durchmesser der Spiralen und der Gewinde vergleichen. Es sind also zwei Funktionen $<f=$ Mutter läßt sich aufschrauben$>$ und $<g=$ Schraube und Mutter haben denselben Durchmesser$>$, die zur gewünschten Paarung führen. Falls er keinen Begriff der Eins hat, kann der Bastler nicht genau je *eine* Schraube und *eine* Mutter auswählen. Er greift sich eine Handvoll Schrauben und Muttern. Dann wäre höchst unwahrscheinlich, daß Schrauben und Muttern zusammenpassen. Besitzt hingegen der Bastler den Begriff der Eins, dann wählt er *eine* Schraube und jeweils *eine* x-beliebige Mutter. Sobald eine Mutter f bzw. g erfüllt, legt er das Paar beiseite und holt sich irgendeine weitere Schraube[59].

Zum Hume-Prinzip:

Das Hume-Prinzip würde hingegen dem Bastler genügen, wenn die Muttern auf den Boden gefallen sind und er möchte sicher sein, daß er sie alle aufgehoben hat. Da nur geprüft wird, daß keine Mutter fehlt, wird der Bastler je eine Schraube mit je einer Mutter zur Seite legen, ohne daß sie zusammenpassen. Diese Paarung ist eine Bijektion[60], aber ohne die Zusatzforderung von Grundgesetz V, d.h. ohne die Funktionen f bzw. g. Hätte der Bastler keinen Begriff der Eins, entstünde das gleiche Problem wie vorhin.

Das Hume-Prinzip stellt eine Lockerung von Grundgesetz V dar, da keine Funktionen die Zuordnung steuern. Daher wird das Prinzip vom restriktiveren Grundgesetz V impliziert: Wenn Schrauben und Muttern zusammenpassen, dann sind die Anzahlen erst recht gleich. Die Anwendung des Hume-Prinzips war in der Geschichte die Vorstufe des Zählens[61]. Heute noch vertraut der Schankwirt darauf, daß die Menge der Striche auf dem Bierdeckel und die Menge der Biere „equinumerisch" sind.

Gegen das Hume-Prinzip als solches ist nichts einzuwenden. Da aber Russell die Inkonsistenz von Grundgesetz V gezeigt hat, ist Freges Versuch gescheitert, es als logisches Prinzip zu legitimieren. Würde das Hume-Prinzip, als extralogisches Axiom aufgefaßt,

[59] Für die erste Schraube hat der Bastler n Wahlen kombiniert mit n Wahlen für die Mutter, daher n^2 Möglichkeiten, für die zweite Schraube $(n-1)^2$ Möglichkeiten, und so weiter. Es sind also insgesamt $n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 1 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ Schritte.

[60] In diesem Fall sind es nur $(n-1)$ Schritte.

[61] Funde in der Stadt Susa bezeugen, daß des Zählens unkundige Hirten im 4. Jahrtausend vor Christus ihre Schafe vorbeilaufen ließen und dabei jeweils ein Steinchen in einen Krug steckten. So konnten sie nach dem Hume-Prinzip jeden Abend prüfen, ob sich alle Tiere eingesammelt hatten.

wenigstens ausreichen, um den Begriff der Eins und dann über Induktion die weiteren Zahlen logisch zu definieren? Wir meinen, daß es nicht der Fall ist.

7.4.6. Freges logische Konstruktion der natürlichen Zahlen

Fast am Ende der *Grundlagen*, d.h. nachdem er etliche dubiose Konstruktionen eliminiert hat, liefert Frege in § 74 und § 77 seine Definition der Null, aus der er dann die Eins (ohne wie Couturat[62] dabei die Zwei zu verwenden!) ableitet:

> 0 ist die Anzahl, welche dem Begriffe „sich selbst ungleich" zukommt [. . .]
> 1 ist die Anzahl, welche dem Begriffe „gleich 0" zukommt[63].

Der Begriff „sich selbst ungleich" ist sehr geschickt gewählt:

> Ich hätte zur Definition der 0 jeden andren Begriff nehmen können, unter den nichts fällt. Es kam mir aber darauf an, einen solchen zu wählen, von dem dies rein logisch bewiesen werden kann; und dazu bietet sich am bequemsten „sich selbst ungleich" dar, wobei ich für „gleich" die vorhin angeführte Erklärung Leibnizens gelten lasse, die rein logisch ist[64].

Was gäbe es für Alternativen[65]? Leider erwähnt Frege keinen anderen Begriff, unter den nichts fällt, den er hätte als Paradigma wählen können. In der Nachfolge Freges hat man sich bemüht, seine Konstruktion aus dem zum Axiom erklärten Hume-Prinzip, d.h. bei Aufgabe von Grundgesetz V, zu verbessern. In [Panza & Sereni, 2013], S. 125, führen die Autoren eine solche moderne Konstruktion an:

(i) 0 ist die Extension des Begriffes
<equinumerisch mit dem Begriff ≪sich selbst ungleich sein≫ > ;
(ii) 1 ist die Extension des Begriffes
<equinumerisch mit dem Begriff ≪gleich 0 sein≫ > ;
(iii) 2 ist die Extension des Begriffes
<equinumerisch mit dem Begriff ≪gleich 0 oder gleich 1 sein≫ >;
(iv) und so weiter.

In dieser Version steht nach wie vor der Begriff Sich-selbst-ungleich-sein. Wir werden nachher auf die Zirkularität des Begriffs eingehen und nehmen vorläufig an, daß ein leerer logischer Begriff anstelle von Sich-selbst-ungleich-sein gefunden werden kann. Dann wird die Eins aus der Einzigkeit der Null gewonnen.

[62] Einen mißratenen Versuch, die Eins logisch zu definieren, unternimmt z.B. der namhafte Logiker und Mathematiker Louis Couturat in [Couturat, 1905], S. 26: „Wie soll ausgedrückt werden, daß eine Klasse a einzig ist, d.h. nur ein Element enthält (oder noch, daß es nur ein a gibt)? Zuerst wird erklärt, daß es die Klasse a gibt (sie ist nicht gleich Null), dann, daß zwei beliebige Elemente identisch sind, falls sie a angehören." Poincaré antwortet darauf erbarmungslos: „Würde Couturat gefragt werden, was die Zwei sei, so fürchte ich, daß er gezwungen wäre, das Wort Eins zu gebrauchen."

[63] Vgl. [Frege, 1884], § 74 und § 77.

[64] Vgl. ebd., § 75.

[65] Russells Begriff „The present king of France" würde nicht passen, da Frege leere Kennzeichnungen als „Unvollkommenheiten der Sprache" zu Recht ablehnt. Ferner verlangt die Universalität der Null einen generellen leeren Begriff, keinen partikularen Widerspruch.

Zeigen Null Ehefrau und Null Auto auf dieselbe Null, wenn ein Junggeselle kein Fahrzeug besitzt? Alle Begriffe, unter die nichts fällt, sind klarerweise *in bezug auf die Anzahl isomorph*; hier ist aber ein logischer Beweis geboten, den Frege seinen Lesern offenbar als Übungsaufgabe überlassen hat. Das Argument könnte folgendermaßen laufen.

Betrachten wir A-Gegenstände, die sich selbst ungleich sind, sei 0_A deren Anzahl gemäß Definition der Null. Ebenso sei 0_B die Anzahl von sich selbst ungleichen B-Gegenständen. Dann gibt es $0_A = 0_A \dotplus 0_B$ Gegenstände, wenn keine B-Gegenstände dazugenommen werden[66], sowie auch $0_B \dotplus 0_A = 0_B$, wenn zu den B-Gegenständen keine A-Gegenstände hinzukommen. Offenbar macht es keinen Unterschied, ob bei den A- bzw. den B-Gegenständen begonnen wird, d.h. $0_A \dotplus 0_B = 0_B \dotplus 0_A$. Daraus folgt: $0_A = 0_A \dotplus 0_B = 0_B \dotplus 0_A = 0_B$. Da die sich selbst ungleichen A- bzw. B-Gegenstände beliebig gewählt wurden, gibt es nur eine Null (q.e.d).

Man muß nicht zählen können, um sich ein differenziertes mentales Bild von einem Einkaufskorb voll Äpfel bzw. Birnen zu machen; der quantitative Unterschied geht verloren, nicht aber der qualitative. Wenn der Korb leer ist, zeigt die Null auf einen formalen Gegenstand ohne Eigenschaften. Das leere mentale Bild sieht von allen qualitativen Prädikaten ab. Freges etwas bedenkliche Kennzeichnung „gleich Null" drückt durch Metonymie die qualitative Unbestimmtheit aus. Es findet kein Vergleich im Sinne Leibniz' statt, bei dem das eine durch das andere ersetzt wird (unam potest substitui alteri), denn „ersetzen" bedeutet die Substitution eines Gegenstandes durch einen anderen und setzt daher vorhandene Gegenstände voraus. Da kein Vergleich zwischen Gegenständen stattfindet, bestehen nur geringe Bedenken, wenn Frege die prägnante Paraphrase verwendet: 1 ist die Anzahl, die dem Begriffe „gleich 0" zukommt. Wird der Begriff der Eins einem Kantischen Schema zugeordnet, fällt es allerdings leichter, die Eins zur Anzahl der Nullen zu erklären, was Frege sich bemüht, anders zu formulieren, aber wohl meint.

Daß außer den Logikern niemand den Begriff der Eins auf diese Weise einführen würde, steht nicht zur Debatte: es gibt aus der Sicht der Logik keinen Einwand gegen Freges Definition der Eins, soweit die Definition der Null vorher zugelassen wurde. Dem stünde nichts entgegen, den Begriff der Eins *zusätzlich* einem Verstandesschema[67] zuzuordnen. Die Menschen konnten längst zählen, bevor die Null eingeführt wurde.

[66] Solange die Konstruktion der Zahlen nicht abgeschlossen ist, kann nicht addiert werden. Der Begriff der Null erlaubt jedoch eine Vorstufe der Addition. Wir definieren eine kommutative Verknüpfung $\dotplus$ so, daß $\forall a : a \dotplus 0 = 0 \dotplus a = a$ und $\forall b \neq 0 : a \dotplus b = b \dotplus a \neq a$.

[67] Das Naturvolk der Pirahã in Brasilien beherrscht nur die drei Zahlwörter Eins, Zwei und „Viele", was für die Natürlichkeit des Begriffs der Eins spricht.

Frege meinte im bereits zitierten § 107, vgl. S155, das Induktionsprinzip innerhalb der Logik abgeleitet zu haben. Daher kann er, nachdem er die Eins aus der Null logisch gewonnen hat, die weiteren Anzahlen durch Induktion aufbauen[68]:

> Der Satz „Es giebt einen Begriff F und einen unter ihn fallenden Gegenstand x der Art, daß die Anzahl, welche dem Begriff F zukommt, n ist, und daß die Anzahl, welche dem Begriff <unter F fallend aber nicht gleich x> zukommt m ist" sei gleichbedeutend mit „n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m."

Nehmen wir ein Beispiel: „Mutter" und „Vater" fallen unter den Begriff „Eltern". Dem Begriff „Mutter" kommt die bereits definierte Anzahl Eins zu. Der Begriff „Vater" fällt unter den Begriff „Elternteil aber nicht gleich Mutter". Also folgt die Zwei in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf die Eins. Dagegen wäre nichts einzuwenden, soweit Frege die Induktion als logisches Prinzip gültig nachgewiesen hätte.

Freges Folgerungskette baut auf der Definition der Null auf. Nachdem er meinte, das Hume-Prinzip logisch bewiesen zu haben, vergleicht Frege bei jedem Schritt Quantitäten anhand dieses Prinzips. Was heißt gleich bzw. ungleich? Frege übernimmt von Leibniz die Definition der Gleichheit: Zwei Entitäten sind gleich, wenn beim Austauschen der einen durch die andere die Wahrheit bewahrt wird:

> Nun definirt Leibniz: eadem sunt, quorum unam potest substitui alteri salva veritate. Diese Erklärung eigne ich mir für die Gleichheit an [. . .] In der allgemeinen Ersetzbarkeit sind nun in der That alle Gesetze der Gleichheit enthalten[69].

Um *das eine* durch *das andere* zu ersetzen (unam potest substitui alteri), braucht man den Begriff der Eins. Unsere Beispiele mit Schrauben und Muttern haben es deutlich gemacht. Gleichheit (bzw. ihre Negation) ist ein zweistelliger Terminus.

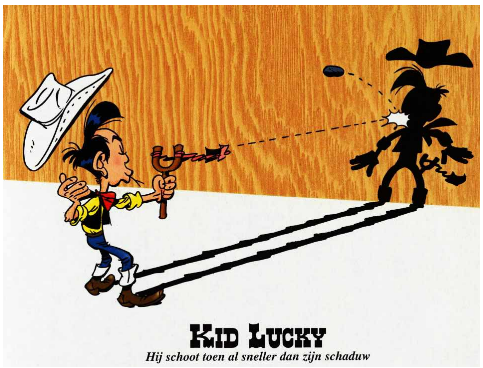

Abbildung 7.5.: Luke ungleich sich selbst

Zweifel sind berechtigt, ob bei Gleichheit mit sich selbst ein Vergleich stattfindet. Sobald man erfährt, daß ein Original sich selbst gegenübersteht, wird der absurde Vergleich blitzschnell abgebrochen. Jacques Lacan beobachtete, daß ein Kind vor dem 15. bis 18. Lebensmonat sein Spiegelbild, das ihm alles nachmacht, verständnislos betrachtet. Der Teenager lacht aber über Lucky Luke, der in Abb. 7.5 schneller als der projizierte Schatten seiner selbst schießt. Wird ein Übeltäter,

[68] Vgl. [Frege, 1884], § 76.
[69] Vgl.ebd. § 65.

der um seine Schuld weiß, mit dem Bild einer Überwachungskamera konfrontiert, gibt er sich sofort geschlagen. Um den Verdächtigen zu überführen, mußte der Kommissar vorher beim Vergleich zwischen Gesicht und Photo die Gesichtszüge einen nach dem anderen überprüfen.

Gleichheit mit sich selbst wird nicht a priori erkannt sondern empirisch angelernt. Es gibt Fälle, wo uns ein und derselbe Gegenstand in verschiedener Gestalt begegnet, d.h. sich selbst ungleich erscheint. Daß Kaffein und Thein dasselbe Alkaloid sind, wurde erst spät erkannt. Ebenso zeigt sich das Elektron als Teilchen oder als Welle. Frege führte eine sinnvolle Unterscheidung ein: Morgenstern und Abendstern sind Intensionen des Namens Venus, der Planet zwischen Merkur und Erde ist die Extension. Deswegen darf man nicht behaupten, daß die Venus sich selbst ungleich sei, denn Abend- bzw. Morgenstern sind sich selbst gleich. Es soll nur dokumentiert werden, daß die Gleichheit mit sich selbst keine Floskel ist, sondern prozessual ermittelt wird.

Schopenhauer hat erkannt und klar begründet, daß sich das Nichts nur durch einen Vergleich mit einem Etwas erklären läßt:

> Jedes Nichts ist ein solches nur im Verhältniß zu etwas Anderem gedacht, und setzt dieses Verhältniß also auch jenes Andere, voraus. Selbst ein logischer Widerspruch ist nur ein relatives Nichts. Er ist kein Gedanke der Vernunft; aber er ist darum kein absolutes Nichts. Denn er ist eine Wortzusammensetzung, er ist ein Beispiel des Nichtdenkbaren, dessen man in der Logik nothwendig bedarf, um die Gesetze des Denkens nachzuweisen[70].

Ungleichheit mit sich selbst ist „ein Beispiel des Nichtdenkbaren“, dessen sich Frege zur Definition der Null bedient. Ein etwaiger alternativer logischer Widerspruch wäre „ein relatives Nichts.“ Gleichheit mit sich selbst ist daher ein Postulat, „dessen man in der Logik notwendig bedarf, um die Gesetze des Denkens nachzuweisen.“ Wenn also Gleichheit mit sich selbst keine Schlußfolgerung der Logik ist, sondern von einem den Begriff der Eins voraussetzenden Vergleich abgeleitet wird, liegt eine Petitio Principii vor, wenn Frege die Definition der Null der Definition der Eins voranstellt[71].

[70] Vgl. [Schopenhauer, 1819], Kapitel 73, § 71.

[71] Die Zahlenkonstruktionen der Mathematiker bauen auch auf der Eins auf. Wenn von Neumann und Zermelo zwei Modelle für die Konstruktion der Zahlen vorlegen, brauchen sie am Anfang den Begriff der Eins, um die leere Menge zu definieren, die „kein“ Element enthält. Sie brauchen ihn ein zweites Mal für ihre abweichenden aber kompatiblen Induktionen. Bei Peano wird die Null nicht definiert sondern als Axiom (1) eingeführt, und der Begriff der Eins wird im Axiom (3) vorausgesetzt, nach dem jede natürliche Zahl „eine“ natürliche Zahl als Nachfolger hat.

Ergänzungsvorschlag zur Fregeschen Zahlenkonstruktion

Frege kam es darauf an, zur Definition der Null einen Begriff zu wählen, von dem „rein logisch bewiesen werden kann", daß unter den nichts fällt. Um der Zirkularität zu entgehen, kann in einem Vorspann zur Fregeschen Konstruktion erst die Existenz irgendeiner Null gezeigt werden. Der logische Beweis der Eindeutigkeit der Null führt dann zum Begriff der Eins, mit dem der Vergleich durch Bijektion möglich wird, der schließlich den Begriff „sich selbst ungleich" legitimiert. Der Beweis der Existenz vieler Kandidaten zum Begriff der Null greift implizit auf Zahlen zurück[72]. Daher schlagen wir eine Null aus der Topologie vor.

Alle Schleifen auf der topologischen 2D-Sphäre (d.h. sämtliche beliebige Flächen, die man durch Dehnen und Schrumpfen zu einer Sphäre verformen kann) lassen sich zu einem Punkt schrumpfen; auf allen anderen geschlossenen zusammenhängenden Flächen hingegen, d.h. auf allen Tori, gibt es Schleifen um die Löcher, die das Zusammenziehen abblocken. Der strenge Beweis würde ohne Zahlenbegriff schwer fallen, aber daß beim reißfreien Verformen keine Löcher entstehen bzw. verschwinden, ist eine anschauliche Eigenschaft; sie könnte somit als Axiom fungieren. Dann läßt sich wie folgt argumentieren, wobei die Induktion nach wie vor als logisches Prinzip zu begründen wäre:

i) 0 ist die (zunächst partikulare) Anzahl, welche dem Begriff der nicht zusammenziehbaren Schleifen auf der Sphäre zukommt.
ii) Aus der vorher bewiesenen Eindeutigkeit der Null auf allen Klassen von Gegenständen folgt die universale Definition der Eins, als Zahlangabe, die dem Begriff „gleich 0" zukommt.
iii) Anhand der Eins erlaubt die bijektive Gegenüberstellung mit sich selbst die Beibehaltung der universalen Definition der Null, nämlich: 0 ist die Anzahl, welche dem Begriff „sich selbst ungleich" zukommt.
iv) Da die Eins als Erste definiert wurde, bedarf die Induktion Freges zur Definition der weiteren Zahlangaben ebenfalls keiner Änderung.

7.4.7. Logik kontra originäres Vermögen

Dreh- und Angelpunkt der Fregeschen Konstruktion der natürlichen Zahlen ist der Begriff der Eins, der zur Induktion gebraucht wird. Wird dieser Begriff als Schema des

[72] Null als Anzahl der Rechtecke auf der Sphäre klingt gut, aber der rechte Winkel wird über den Begriff der Zwei definiert.

Verstandes aufgefaßt und das Hume-Prinzip als extralogisches Axiom eingesetzt, ist die Konstruktion gültig. Das widerspräche zugleich der logizistischen und der platonistischen Fregeschen Philosophie der Mathematik.

Der Mathematiker und der Philosoph gehen an den Aufbau der Zahlen aus komplementären Perspektiven heran. Dem ersteren genügt ein widerspruchsfreies System von möglichst wenigen offensichtlichen Axiomen. Der letztere möchte das Apriorische, insbesondere die extralogischen Axiome, umgehen, um den Aufbau der Zahlen innerhalb der Logik abzuleiten.

Anders als Grundgesetz V ist das Hume-Prinzip konsistent. Es macht u.E. von dem menschlichen Vermögen Gebrauch, Analogien zu erkennen. Das Hume-Prinzip ist jedoch ein statisches Postulat: mit den Strichen auf dem Bierdeckel wird nur zum Zeitpunkt t verglichen. Trinkt der Gast noch ein Bier, verlangt das dynamische Induktionsprinzip im Sprung $n \to (n+1)$ einen weiteren Strich.

Nimmt man wohlwollend an, daß die Induktion als logisches Prinzip abgeleitet werden könne, sei es durch Frege oder einen anderen Logizisten in der Zukunft, dann hätte man durch einen peniblen Beweis in einem schwierigen logischen System die Induktion in die Logik eingegliedert. Demgegenüber steht die Tatsache, daß jeder in der arkanen Logik ungebildete Mensch eine vollständige Induktion mühelos vollzieht. Dann wird man mit dem Rasiermesser von Ockham den Aufbau der Zahlen auf den intuitiven Begriff der Eins und das Schema der Induktion auch dann zurückführen, wenn auf Biegen und Brechen die Zahlen auch logisch abgeleitet werden könnten.

Die Auffassung Poincarés ist u.E. heute noch gültig, nach der Induktion ein unentbehrliches synthetisierendes Schema ist. Die von Poincaré herausgestellte „Geisteskraft, sich die unbegrenzte Wiederholung eines und desselben Schrittes vorstellen zu können“, kurz das *Iteriervermögen*, läßt Analogien erkennen und dynamisch in die Zukunft fortsetzen. Bis auf die Fachsparte der Logik setzt die Mathematik nur die rudimentäre Logik ein, die jedermann beherrscht. Die Lektüre von Frege nützt dem Erfinder der Mathematik nichts. Der Begriff der Eins, das analogische Denken, der Gruppenbegriff, das Induktionsprinzip sind Schemata. Das Werkzeug des mathematischen Erfindens ist die Intuition, während die Logik dem Niederschreiben dient.

<u>Fazit</u>

i) Wegen der Inkonsistenz von Grundgesetz V ist es Frege nicht gelungen, die Induktion als logisches Prinzip zu legitimieren.
ii) Diese Konstruktion scheitert außerdem an der Definition der Null als Sich-selbst-gleich-sein, welche den Begriff der Eins voraussetzt. Wir haben einen Vorspann zur Fregeschen Konstruktion vorgeschlagen, um der Zirkularität abzuhelfen.
iii) Da der Logizismus nicht vermag, die natürlichen Zahlen durchweg logisch abzuleiten, kann erst recht die Mathematik nicht einem Zweig der Logik gleichgestellt werden.
iv) Wird das Hume-Prinzip als extralogisches Axiom verwendet, liefert das Schema der Induktion, die der Mathematik Dynamik verleiht, eine konsistente Zahlenkonstruktion.
v) Daß sich der Begriff der Eins aus der Eindeutigkeit der Null nicht logisch erschließen läßt, tangiert nicht das spontane Erkennen der Eins als Verstandesschema.
vi) Die Induktion und das Erkennen einer Gruppe sind Verstandesschemata. Zum Erfinden der Mathematik werden weitere Schemata, z.B. das Iteriervermögen, aufgerufen.

Hinter den Gedanken Poincarés steht eine sehr starke Theorie: der Konventionalismus, in den wir jetzt einsteigen wollen. Es handelt sich um eine Form des Fiktionalismus, bei der Poincaré die Platonische Frage und die metaphysische Existenz der mathematischen Entitäten völlig außer Acht läßt, denn er schweigt grundsätzlich über alles, was sich nicht rational zeigen läßt.

8. Konventionalismus

Allein die Relationen zwischen mathematischen Gegenständen sind uns zugänglich. Die Evolution der Mathematik folgt einem darwinischen Modell. Kommode Konventionen ersetzen die Realität. Zu den Naturgesetzen paßt jede Geometrie, wenn keine empirischen Inkohärenzen entstehen. Axiome sind Konventionen oder verkappte Definitionen. Der Raum ist eine Gruppe. Visualisierung des Sierpinski-Teppichs.

8.1. Intuition erfindet, Logik versiegelt

Logiker und Mathematiker betrachten die Mathematik aus komplementären Perspektiven. Logik und Intuition sind gleichermaßen unverzichtbar: „Die Logik, die allein Gewißheit verschaffen kann, ist das Werkzeug des Beweisens; die Intuition ist das Werkzeug des Erfindens[1]". Es ist ein großes Glück, daß Poincaré, der als Erfinder auf einer Stufe mit Euler, Gauß, Hilbert und Leibniz steht, seine Gedanken zur Epistemologie in kristallklaren Worten zu Papier brachte. Der mit dem Treibstoff der Logik angetriebene Motor des mathematischen Erfindens heißt Intuition:

> Würde ein Naturforscher, der den Elephanten nie anders als mit dem Mikroskop studiert hat, sich einbilden, dieses Tier genügend zu kennen? Alsdann, es gibt in der Mathematik etwas Analoges. Der Logiker zerlegt sozusagen jeden Beweis in eine sehr große Zahl Elementaroperationen. Wenn man alle diese Operationen, eine nach der anderen, prüft und gefunden hat, daß jede von ihnen fehlerfrei ist, wird man dann glauben, den wahren Sinn des Beweises verstanden zu haben? Würde man ihn verstanden haben, selbst wenn es durch eine Anstrengung des Gedächtnisses gelänge, den ganzen Beweis zu wiederholen mit Anführung all der elementaren Schritte, in derselben Reihenfolge, in der sie der Erfinder angeordnet hat? Offenbar nicht; wir besäßen noch nicht die volle Wirklichkeit; das gewisse Etwas, das die Einheit des Beweises ausmacht, würde uns ganz entgangen sein[2].

Die Realität der Objekte der Wissenschaft, etwa die Dinger an sich, sind uns nicht zugänglich. Erkennbar sind einzig und allein die Relationen zwischen den Gegenständen, die immer wieder in neuen Theorien modelliert werden. Die Zeitlichkeit der Theorien bedeutet nicht, daß ein Modell, in dem die Wissenschaftler übereinstimmen, „wahrer" als

[1] Vgl. [Poincaré, 1905b], S. 20. Übersetzung CF.
[2] Vgl. ebd.

die Vorgängermodelle sei, denn ein Modell ist weder wahr noch falsch; ein zeitgemäßes Modell leistet der Falsifikation nur größeren Widerstand. Poincaré vergleicht in einer schönen Metapher das Werden der Wissenschaft mit der Evolution der Tierarten:

> Man darf den Gang der Wissenschaft nicht der Umgestaltung einer Stadt vergleichen, in der die alten Gebäude schonungslos niedergerissen werden, um neuen Bauwerken Platz zu machen, sondern der stetigen Entwicklung der Tierformen, die sich unaufhörlich fortbilden und schließlich dem gewöhnlichen Blick unkenntlich werden, während ein geübtes Auge immer die Spuren der Arbeit verflossener Jahrhunderte verortet. Man darf also nicht glauben, daß die veralteten Theorien unfruchtbar und vergeblich seien[3].

Poincaré warnt vor einem Nominalismus, der die Naturgesetze für bloße Konstruktionen der Wissenschaftler hielte. Die genealogische Kopplung zeigt auf eine transzendentale Realität, die in unserem Kopf und nur dort konstituiert wird. Daß jedes Modell etwas von seinen Vorgängern erbt, meint Poincaré nicht etwa im Sinne einer aristotelischen Entelechie, denn er hält sich von jedweder Metaphysik fern. Doch fasziniert ihn die Harmonie der mathematischen Artefakte so sehr, daß er sie „objektive Realität" nennt:

> Das aber, was wir objektive Realität nennen, ist letzten Endes das, worin mehrere denkende Wesen übereinstimmen; dieses Gemeinsame kann nichts anderes sein als die in den mathematischen Sätzen zum Ausdruck kommende Harmonie[4].

Trotz dieses platonistisch angehauchten Bekenntnisses hält Poincaré die mathematischen Theorien für pragmatische Konventionen; sein Stichwort lautet immer wieder *commode*, d.h. bequem, komfortabel. Was ist eine kommode Konvention?

8.2. Begriff der Konvention

Der Konventionalist (vgl. lt. conventio: Übereinkommen) vertritt die These, daß Naturgesetze und wissenschaftliche Erkenntnis nicht auf Übereinstimmung mit der Realität, sondern auf Konventionen beruhen, auf die man sich der Kommodität wegen einigt. Dabei besteht die Gefahr, eine Theorie durch Aufstellen von Hilfshypothesen gegen Widerlegungen zu immunisieren; diese Strategie nannte Popper das *konventionalistische Stratagem*, dem er die Falsifizierbarkeit entgegensetzte[5]. Die Physiker meinen z.B.,

[3]Vgl. [Poincaré, 1905b], S. 10. Übersetzung CF.
[4]Vgl. ebd. S. 11.
[5]Vgl. [Popper, 1963], S. 7: „Some genuinely testable theories, when found to be false, are still upheld by their admirers - for example by introducing ad hoc some auxiliary assumption, or by re-interpreting the theory ad hoc in such a way that it escapes refutation. Such a procedure is always possible, but it rescues the theory from refutation only at the price of destroying, or at least lowering, its scientific status. (I later described such a rescuing operation as a ‚conventionalist twist' or a ‚conventionalist stratagem'.) One can sum up all this by saying that the criterion of the scientific status of a theory is its falsifiability, or refutability, or testability."

daß unser Kosmos zu 68,3 % aus Dunkler Energie und 26,8 % aus Dunkler Materie besteht. Das Stratagem, die putativen Anteile mit einer Nachkommastelle anzugeben, täuscht darüber hinweg, daß wir nur über die 4,9 % sichtbare Materie Bescheid wissen.

Vor solchen Peinlichkeiten sind Poincarés Konventionen gefeit. Zu den Gegenständen hat der Mensch keinen Zugang, sondern nur zu deren Relationen zueinander. Die Modelle sind keine Abbilder realer Relationen, sondern vergängliche „bequeme“ Phantasmen. Speziell die abstrakten mathematischen Gegenstände entziehen sich jedem empirischen Experiment: „Man experimentiert doch nicht mit idealen geraden Linien oder Kreisen [...] Womit könnte experimentiert werden, um der Geometrie ein Fundament zu verschaffen? Die Antwort ist leicht[6].“

8.3. Physikalische Prinzipien sind Konventionen

Nicht nur die Gegenstände der Mathematik sondern auch die der Physik sind für Poincaré Konventionen; der Äther z.B. ist ein bequemes Stratagem:

> Was kümmert es uns, ob der Äther wirklich existiert? Das ist Sache des Metaphysikers; wesentlich für uns ist nur, daß alles sich so abspielt, als ob er existierte, und daß diese Hypothese zur Erklärung der Erscheinungen handlich ist. Haben wir übrigens einen anderen Grund, um an das Dasein materieller Objekte zu glauben? Auch das ist nur eine bequeme Hypothese; nur wird sie nie aufhören bequem zu sein, während der Äther eines Tages möglicherweise als unnütz verworfen wird[7].

Was passiert, wenn der Äther ausgemustert wird? Maxwell hat sich z.B. von dem Fresnelschen Äther verabschiedet, aber die Differentialgleichungen sind dieselben geblieben, d.h. auch die Relationen zwischen den mentalen Bildern. In Übereinstimmung mit Kant negiert Poincaré die Existenz von Gegenständen nicht; wir kommen nur an die Gegenstände „an sich“ nicht heran. Wir machen uns anthropische Bilder und erkennen in den mathematischen Beziehungen zwischen Bildern die Beziehungen zwischen den gegenständlichen Urbildern. Damit ist Mathematik das Werkzeug einer Modellierung:

> [Die] Gleichungen drücken Relationen aus. Soweit die Gleichungen beibehalten werden, bewahren auch die Beziehungen ihre Wirklichkeit. Die Gleichungen lehren uns, vorher wie nachher, daß eine gewisse Beziehung zwischen einem Etwas und einem anderen Etwas besteht; nur nannten wir dieses Etwas früher Bewegung, jetzt elektrischen Strom. Aber diese Namen waren nichts als Bilder, die wir als Platzhalter für die wirklichen Gegenstände verwenden, die uns die Natur ewig verbergen wird. Die echten Beziehungen zwischen den reellen Objekten sind die einzige Realität, die wir erreichen können; die einzige Bedingung

[6] Vgl. [Poincaré, 1902], S. 29. Übersetzung CF. Anmerkung: Der Computer visualisiert heute digitalisierte Simulacra, die zwar einen materiellen Träger haben aber nach wie vor reine Schöpfungen unserer Imagination sind.

[7] Vgl. ebd.S. 101.

> ist, daß dieselben Beziehungen zwischen Objekten auch zwischen den Bildern bestehen, die wir notgedrungen an die Stelle der Objekte setzen. Wenn uns diese Beziehungen bekannt sind, so ist es unerheblich, falls wir es für bequemer halten, ein Bild durch ein anderes zu ersetzen[8].

Während bei Newton die Gravitation eine Kraft ausübt, versteht Einstein die Bahnen der Planeten als Geodätische in einem durch die Masse der Sonne gekrümmten Raum. Was ist eine Kraft? ein abstrakter Vektor, mit dem bequem gerechnet wird:

> Wenn man sagt, daß die Kraft die Ursache einer Bewegung sei, so betreibt man Metaphysik [...] [E]s ist keineswegs nötig, daß [die Definition] uns lehrt, was die Kraft an sich sei, noch ob sie die Ursache oder die Wirkung der Bewegung ist [...] [A]ber eine Definition der Kraft brauchen wir nicht: die Idee der Kraft ist ein ursprünglicher, irreduzibler, undefinierbarer Begriff; wir wissen alle, was Kraft ist; wir haben davon eine unmittelbare Intuition. Diese unmittelbare Intuition entsteht aus dem Begriffe der Anstrengung, der uns von Kindheit an vertraut ist. Vorerst jedoch wird diese unmittelbare Intuition, selbst wenn sie uns die wahre Natur der Kraft an sich erkennen ließe, ungenügend sein, um die Mechanik zu begründen; sie wäre übrigens gänzlich unnütz. Es kommt nicht darauf an, zu wissen, was eine Kraft sei, sondern zu wissen, wie man sie mißt[9].

Ähnlich kann man fragen, was Energie sei, und ob sie sich erhält:

> In jedem Einzelfall sieht man wohl, was Energie ist, und man kann eine zumindest provisorische Definition geben; aber es ist unmöglich eine allgemeine Definition zu finden. Wenn man das Prinzip in seiner ganzen Allgemeinheit aussprechen und auf das Universum anwenden will, so sieht man es sozusagen sich verflüchtigen und es bleibt nichts zurück als die Feststellung: Es gibt ein Etwas, das konstant bleibt [...]
> Soll das heißen, daß das Prinzip [der Energieerhaltung] keinen Sinn hat und daß es sich in einer Tautologie auflöst? Keineswegs; es bedeutet, daß die verschiedenen Dinge, denen wir den Namen Energie beilegen, durch eine echte Verwandtschaft verbunden sind; es besagt, daß unter ihnen eine reelle Beziehung besteht [...]
> Wie erfahren wir, wann [dieses Prinzip] die volle Fortsetzung erlangt hat, die man ihm legitim zuweisen darf? Der Moment trifft ganz einfach ein, wenn es aufhört, dienlich zu sein, d. h. uns befähigt, neue Phänomene verläßlich vorauszusagen. In einem solchen Falle sind wir sicher, daß die behauptete Beziehung nicht mehr reell ist; denn andernfalls wäre das Prinzip nutzbringend[10].

In diesem Zitat resümiert Poincaré seinen Konventionalismus. Ein Nominalist sähe keine Realität hinter dem Wort *Energie*. Real und faßbar ist doch ein relationales Etwas, das sich durchhält - wie hier das Prinzip der Energieerhaltung oder noch die Bewegungsgruppe einer Geometrie. Welche Extension steht dem Namen Energie zu? Die Antwort ist pragmatisch: sobald das Etwas zu keiner vorausschauenden Berechnung dienlich ist, sollen wir es nicht mehr Energie nennen. Als eingefleischter Wissenschaftler stellt Poincaré nur Fragen, die durch ein Modell beantwortet werden könn(t)en; metaphysische Fragen stellt er nie zur Diskussion:

> [N]icht nur, daß die Wissenschaft uns die Natur der Dinge nicht offenbaren kann, sondern nichts ist imstande, sie uns zu lehren, und wenn ein Gott sie kennt, so würde er keine

[8] Vgl. [Poincaré, 1902], S. 80. Übersetzung CF.
[9] Vgl. ebd. S. 53 + 56.
[10] Vgl. ebd. S. 68 + 82.

> Worte finden, um sie auszudrücken. Wir können nicht nur keine Antwort geben, sondern wenn man sie uns auch gäbe, so würden wir sie nicht verstehen; ich zweifele sogar, ob wir die Frage verstünden[11].

Poincaré geht hier resolut auf Distanz zum Nominalismus: die Relationen sind eine objektive Realität; nach dem Dahinter zu fragen, wäre zwecklos. Nicht nur würden wir die Antwort des Weltenschöpfers nicht verstehen; selbst die Frage nach dem Wesen der Realität wüßten wir nicht zu formulieren.

Die Trennung zwischen mathematischem und „nominalistischem" Teil einer Theorie ist uns bereits begegnet (vgl. S. 117) bei dem Vorhaben Fields, eine in hohem Grad von der Mathematik bereinigte Version des Newtonschen Gesetzes herauszuarbeiten. Als Pragmatiker lehnt Poincaré den (allerdings damals noch nicht bis zum Exzeß betriebenen) Nominalismus ab. Er ist sich darüber im klaren, daß keine epistemologischen Fortschritte einen Rest an mysteriösen „Naturgesetzen" überflüssig machen werden:

> Manche Philosophen haben zu viel verallgemeinert; sie glaubten, die Prinzipien wären die ganze Wissenschaft, und hielten folglich die ganze Wissenschaft für konventionell. Diese paradoxe Lehre, die man Nominalismus nennt, hält einer Überprüfung nicht stand.
> Wie kann aus einem Gesetz ein Prinzip werden? Das Gesetz drückte eine Relation zwischen zwei realen Gliedern A und B aus. Aber das Gesetz war nicht streng genommen richtig, es war nur annäherungsweise richtig. Wir führen willkürlich ein mehr oder weniger fiktives Zwischenglied C ein, und C ist per definitionem das, was zu A genau in der Beziehung steht, die im Gesetze zum Ausdruck kommt.
> So hat sich unser Gesetz in ein absolutes und strenges Prinzip zerlegt, das die Beziehung zwischen A und C ausdrückt, und in ein experimentelles, annähernd richtiges und revidierbares Gesetz, das die Beziehung von C zu B ausdrückt. Es ist klar, daß es immer Gesetze geben wird, je feiner man die Zerlegung betreibt[12].

Diese Auffassung, nach der Naturgesetze bzw. physikalische Prinzipien *Konventionen* sind, die nichts über die Natur der Dinge offenbaren, unterstützt kein geringerer als Albert Einstein. Ein Modell, das eine beliebige der drei metrischen Hauptgeometrien mit einer Auswahl physikalischer Prinzipien kombiniert, ist dann zulässig, wenn es andere Naturgesetze nicht verletzt und empirisch verifiziert wird:

> [Man] fühlt sich zu folgender allgemeineren Auffassung hingedrängt, welche Poincarés Standpunkt charakterisiert. Die Geometrie (G) sagt nichts über das Verhalten der wirklichen Dinge aus, sondern nur die Geometrie zusammen mit dem Inbegriff (P) der physikalischen Gesetze. Symbolisch können wir sagen, daß nur die Summe (G) + (P) der Kontrolle der Erfahrung unterliegt. Es kann also (G) willkürlich gewählt werden, ebenso Teile von (P); all diese Gesetze sind Konventionen. Es ist zur Vermeidung von Widersprüchen nur nötig, den Rest von (P) so zu wählen, daß (G) und das totale (P) zusammen den Erfahrungen gerecht wird. Bei dieser Auffassung erscheinen die axiomatische Geometrie und der zu Konventionen erhobene Teil der Naturgesetze als erkenntnistheoretisch gleichwertig. Sub specie aeterni hat Poincaré mit dieser Auffassung nach meiner Meinung Recht[13].

[11] Vgl. [Poincaré, 1905b], S. 121. Übersetzung CF.
[12] Vgl. [Poincaré, 1904], S. 70-71. Übersetzung CF.
[13] Vgl. [Einstein, 1921], S. 126-127.

Eine wesentliche Konsequenz dieser Auffassung ist, daß allein der Metaphysiker fragt, ob der gekrümmte Raum der Relativitätstheorie der „reale" Raum sei; der Physiker achtet nur darauf, daß sich der „konventionale Teil" des Modells mit der „gekrümmten" Geometrie zusammendenken läßt. Für die Anwendungsbreite des Modells gilt das Kriterium der empirischen Verifizierung. Es kann z.B. die Relativitätstheorie in der Teilchenphysik keine nutzbringenden Prognosen machen, womit die „behauptete Beziehung nicht mehr reell" ist. Diese bei Poincaré und Einstein übereinstimmende Aufteilung zwischen mathematischem und konventionalem Erfinden setzt unserem Verstand keine Grenzen, aber die empirische Verifizierung weist ihn in seine Schranken:

> Diese Konventionen sind das Werk unseres Verstandes, der in diesem Bereich keine Hindernisse kennt. Hier kann unser Verstand behaupten, weil er verfügt; aber verstehen wir uns recht: diese Befehle beziehen sich auf unsere Wissenschaft, die sonst unmöglich wäre; sie nötigen sich der Natur nicht auf. Sind diese Befehle alsdann willkürlich? Nein, denn sonst wären sie unfruchtbar. Das Experiment enthebt uns nicht unserer freien Wahl, aber es begleitet diese, indem uns geholfen wird, den bequemsten Weg einzuschlagen. Unsere Verfügungen gleichen also denen eines absoluten aber weisen Herrschers, der zuerst seinen Staatsrat befragt[14].

Da wir ein anthropisches Netz über die Welt werfen, wittert der Nominalismus die Gefahr, daß wir eine Fiktion mit vielen „leerlaufenden Rädern[15]" schreiben. Das geozentrische Ptolomäische Modell würde heute dank der Rechenleistung des Computers einer Verifizierung standhalten. Doch nützt das Modell das konventionalistische Stratagem von auf Sphären rollenden Sphären, das beim „bequemeren" heliozentrischen Modell entfällt. Es hat sich aber etwas durchgehalten, nämlich die relationale Realität, die wir, anders als die dingliche Realität, durch Erweiterung der Modelle immer besser erfassen:

> Einige Leute waren von der konventionalen Prägung beeindruckt, die gewissen Grundprinzipien der Wissenschaften anhaftet. Sie haben zügellos verallgemeinern wollen und zugleich übersehen, daß Freiheit nicht gleich Willkür ist. Sie gelangten so zu dem sogenannten Nominalismus und sie fragten sich, ob der Wissenschaftler nicht Opfer der eigenen Definitionen wurde, und ob die Welt, die er zu entdecken meint, nicht einfach durch seine Laune geschaffen wurde. Dann garantierte Wissenschaft zwar Gewißheit, aber ohne jegliche Tragweite. Wenn dem so wäre, so wäre die Wissenschaft ohnmächtig. Nun sehen wir sie tagtäglich agieren. Das könnte nicht der Fall sein, wenn sie uns nicht etwas Reales erkennen ließe; aber was sie erreichen kann, sind nicht die Dinge selbst, wie die naiven Dogmatiker meinen, sondern es sind einzig und allein die Relationen zwischen den Dingen; außerhalb dieser Relationen gibt es keine erkennbare Realität[16].

Die Wissenschaft hat dann einen Wert, wenn zwei starke Argumente erfüllt sind: i) das Modell ist verifizierbar; ii) es besteht unter den Fachleuten ein Konsens:

[14] Vgl. [Poincaré, 1904], S. 4. Übersetzung CF.

[15] Eine plastische Metapher, die Wittgenstein oft gebrauchte, z.B. in [Wittgenstein, 1953] PU § 271: „Hier möchte ich sagen: das Rad gehört nicht zur Maschine, das man drehen kann, ohne daß Anderes sich mitbewegt."

[16] Vgl. [Poincaré, 1904], S. 4. Übersetzung CF.

> Das, was wir objektive Realität nennen, ist letztendlich, was einige mit Verstand begabte Wesen gemeinsam teilen und in dem alle übereinstimmen können. Dieses Gemeinsame kann, wie wir sehen werden, nichts anderes sein als die Harmonie, welche die mathematischen Gesetze ausdrücken[17].

Eine ungleiche Behandlung fällt auf: einerseits währt ein fragiler konventionaler Teil nur solange, bis ein besseres Modell erfunden wird, andererseits bleibt das Totem der Mathematik über alle Kritik stets erhaben. Es liegt daran, daß die Logik des Beweises „allein Gewißheit verschaffen kann." Wenn die Relativitätstheorie ins Schwanken geraten sollte, dann nicht wegen etwaiger Zweifel an der nichteuklidischen Geometrie. Bezieht sich dann der Konventionalismus nur auf die angewandte Wissenschaft? Eigentlich schon, aber bei Poincaré ruht auch die reine Mathematik auf einem konventionalen Sockel.

8.4. Axiome und Konventionen

Da eine Deduktionskette mit unstrittigen Prämissen beginnen muß, stehen bis auf wenige kniffliche Ausnahmen die Axiome in dem Ruf, *lückenlose* inkompressible Listen *offensichtlicher* Postulate zu sein. Das Vertrauen in die Axiome war stets so groß, daß erst Hilbert in der althergebrachten euklidischen Axiomatik Unstimmigkeiten entdeckte, die er aber prompt ausbessern konnte. Doch vertritt Poincaré eine unorthodoxe These: i) etliche Axiome der Geometrie - nicht aber diejenigen der Arithmetik - sind verkappte Definitionen; ii) nicht wenige weitere Axiome werden nicht explizit angeführt.

Von den vielen Beispielen, die Poincaré heranzieht, wählen wir paradigmatisch die Gleichheit zweier Figuren:

> [Z]wei Figuren sind gleich, wenn man sie aufeinander legen kann; um sie aufeinanderzulegen, muß man eine von beiden so verschieben, daß sie mit der anderen zusammenfällt; aber wie führt man die Verschiebung aus? Wenn wir danach fragten, würde man uns vermutlich antworten, daß man es ohne Deformation tun muß, wie bei einem starren Körper. Die Petitio Principii wäre dann offensichtlich.
> In der Tat definiert diese Definition gar nichts; sie hätte gar keinen Sinn für ein Wesen, das in einer Welt lebt, wo es nur Flüssigkeiten gibt[18]. Sie erscheint uns deswegen klar, weil wir die Eigenschaften der natürlichen starren Körper gewohnt sind, die sich von den Eigenschaften idealer starrer Körper nicht wesentlich unterscheiden, deren sämtliche Dimensionen nicht variieren[19].

In der Tat erscheint uns der Begriff des starren Körpers so natürlich, daß wir geneigt wären, die beanstandete Definition der Gleichheit hinzunehmen. Die Zirkularität gründet in dem Begriff des Transports ohne Deformation; was sich nicht verzerren läßt, bleibt

[17] Vgl. [Poincaré, 1905], S. 23. Übersetzung CF.
[18] Eine Welt von Flüssigkeiten, wie etwa eine Lava-Lampe, hätte nicht einmal eine Topologie, während die Ediacara-Fauna (vgl. S. 39) zwar weich aber nicht flüssig war.
[19] Vgl. [Poincaré, 1902], S. 70-71. Übersetzung CF.

sich selbst gleich; was heißt „sich selbst gleich“, wenn wir noch nicht wissen, was „gleich“ bedeutet? In dieser Definition ist der empirische Begriff des starren Körpers implizit enthalten; eine darauf aufbauende physikalische Theorie wäre somit nicht nur im „nominalistischen“ sondern auch im mathematischen Teil problematisch, was bedeutende Folgen in der Teilchenphysik oder der Relativitätstheorie mit sich bringen könnte[20].

Wie nicht selten der Fall, überläßt Poincaré seinem Leser die Lösung des Rätsels, die u.E. mit dem Objekt *Bewegungsgruppe* zu tun haben dürfte. Eine Figur beziehen wir auf ein Koordinatensystem, das wir uns z.B. in unserem Standort zentriert vorstellen. Anstatt die Figur zu bewegen, können wir das Koordinatensystem woanders hinstellen. Die Relation Figur vs. Koordinatensystem hat sich verändert aber nicht die Figur. Man könnte alternativ die Figur auf einer transparenten Folie abpausen und die Folie bewegen. Wie man es anstellen mag, steckt eine Bewegung implizit in der Definition:

> Die Möglichkeit der Bewegung einer unveränderlichen Figur ist keine an sich evidente Wahrheit, oder sie ist es bestenfalls nur in ähnlichem Sinne wie etwa das Euklidische Postulat aber nicht, als wäre sie ein analytisches Urteil a priori. Betrachtet man übrigens die Definitionen und Beweise der Geometrie etwas genauer, so sieht man sich gezwungen, nicht nur die Möglichkeit dieser Bewegung, sondern auch einige ihrer Eigenschaften zuzugestehen, ohne sie zu beweisen[21].

Schließlich kann man noch statt der Bewegung das Werkzeug *Gruppe* auf die Figur agieren lassen. Praktisch wird auf die Punkte der Figur eine Matrix angewendet, die im Falle der Gleichheit die Koordinaten der anderen Figur liefert. Das geometrische Problem wird durch ein gleichwertiges algebraisches substituiert. Die Problematik der impliziten geometrischen Axiome und der maximal dreidimensionalen Anschauung verschwindet mit der Übertragung auf die abstrakte Axiomatik. Sind die Axiome analytisch oder synthetisch, sind sie a priori oder a posteriori?

[20] Früher wurde ein Ur-Meter, eine Platin-Iridium-Legierung, bei konstant 0° C im Pavillon de Breteuil in der französischen Stadt Sèvres aufbewahrt. Selbst bei dieser sorgfältigen Lagerung war die Länge Schwankungen ausgesetzt, so daß heute der Meter über die Lichtgeschwindigkeit definiert wird. Der Begriff des starren Körpers, da es, wie Poincaré betont, physikalisch keinen solchen gibt, führt zu Verwicklungen, wenn es in der reinen Geometrie zu Maßvergleichen eingesetzt wird. In seinem Vortrag *Geometrie und Erfahrung* [Einstein, 1921] verteidigt Einstein die „praktische Geometrie“, auf die der Physiker angewiesen ist, wobei er den Einwand gelten läßt: „Die hier vertretene Interpretation der Geometrie versagt zwar bei ihrer unmittelbaren Anwendung auf Räume von submolekularer Größenordnung.“ Es ist nur verständlich, daß die „rein axiomatische Geometrie“ den empirischen Begriff des starren Körpers meidet, wobei der Primat der euklidischen Geometrie ins Schwanken kommt: „Lehnt man die Beziehung zwischen dem praktisch-starren Körper und der Geometrie ab, so wird man sich in der Tat nicht leicht von der Konvention frei machen, daß an der euklidischen Geometrie als der einfachsten festzuhalten sei.“

[21] Vgl. [Poincaré, 1902], S. 71. Übersetzung CF.

8.5. Axiome sind verkappte Definitionen

Analytisch können die Axiome der Geometrie nicht sein, sonst wären die nichteuklidischen Geometrien nicht konsistent. Sie sind also (im Kantischen Vokabular) synthetisch. So trivial wie Synthetizität läßt sich Aprioriät nicht abhaken. Für einen Realisten gelten die Axiome a priori, da sie Erkenntnisse der reinen Intuition sind. Für einen Empiristen hingegen sind die Axiome der Anschauung entnommene Abstraktionen bzw. Idealisierungen, die der experimentellen Bestätigung bedürfen; somit wären die Axiome zum Schrecken der Mathematiker revidierbar. Die Debatte zwischen Rationalisten und Empiristen dreht sich um den Wahrheitswert der Axiome, nach dem zu fragen sinnlos wäre. Wir fragen auch nicht, so Poincaré, ob das metrische Systeme wahrer sei als die königliche Elle oder die Kartesischen Koordinaten wahrer als die Polarkoordinaten:

> Die geometrischen Axiome sind also weder synthetische Urteile a priori noch experimentelle Fakten. Es sind *Konventionen*; unter allen möglichen Konventionen wird zwar unsere Wahl von experimentellen Fakten geleitet; aber sie bleibt frei und ist lediglich durch das Gebot begrenzt, jeglichen Widerspruch zu vermeiden. Auf diese Weise können die Postulate auch dann uneingeschränkt wahr bleiben, wenn die experimentellen Gesetze, die deren Annahme bewirkt haben, nur *annähernd* gelten. Mit anderen Worten: die geometrischen Axiome (ich spreche nicht von den arithmetischen) sind nichts anderes als *verkappte Definitionen*[22].

Der Realist, der Empirist oder der Kantianer würden sich am Vokabularwechsel wenig stören, wenn Axiome lieber versteckte Definitionen genannt werden; der Raum bliebe eine reale Entität bzw. eine anthropische Anschauungsform. Diese Auffassung entsteht zwangsläufig bei einem statischen Verständnis der Geometrie, sie entfällt aber, wenn unter Geometrie die Kinematik der Figurenbewegung verstanden wird:

> Wäre der geometrische Raum ein Rahmen, in den jede einzelne unserer Vorstellungen hineingezwängt würde, so wäre es unmöglich, sich ein von diesem Rahmen befreites Bild vorzustellen, und wir könnten an unserer Geometrie nichts ändern. Aber dem ist nicht so; *die Geometrie ist nur das Résumé der Gesetze, nach denen diese Bilder aufeinander folgen.* Nichts hindert uns daran, eine Reihe von Vorstellungen auszudenken, die unseren gewöhnlichen Vorstellungen vollkommen ähnlich sind, aber die nach Gesetzen aufeinanderfolgen, die von den uns angewohnten Gesetzen verschieden sind[23].

Die Dynamik, die Poincaré mit der Geometrie identifiziert, wird durch die Aktion einer Gruppe erzeugt. Wenn sich auf dem Bildschirm der Mercedes-Stern dreht, wird auf die Gruppe der Pixel eine Funktion angewandt, die die Pixel auf andere Pixel umrechnet, so daß unser Auge eine stetige Drehung wahrnimmt. Der geometrische Raum ist daher, wie Poincaré in *The Monist* klarstellt, nichts anderes als genau die Gruppe, die abstrakte oder konkrete Gegenstände bewegt:

[22] Vgl. [Poincaré, 1902], S. 75. Übersetzung und Hervorhebung CF.
[23] Vgl. ebd. S. 88. Übersetzung und Hervorhebung CF.

> *Der Raum ist keine Form unserer Wahrnehmung; er ist ein Werkzeug, nicht zur Vorstellung der Dinge sondern zum Urteilen über die Dinge.*
> Was wir Geometrie nennen ist nichts anderes als das Studium der formalen Eigenschaften einer bestimmten stetigen [d.h. nicht diskreten] Gruppe; wir können daher sagen, daß *der Raum eine Gruppe ist*. Der Begriff dieser stetigen Gruppe präexistiert in unserem Geist bereits *vor jeder Erfahrung*; dies gilt aber ebenso für den Begriff vieler anderer stetiger Gruppen; zum Beispiel für die Gruppe, die der Geometrie von Lobatchewsky [d.h. hyperbolische Geometrie] zugrundeliegt.
> Es sind also mehrere Geometrien möglich; wie erfolgt unter ihnen unsere eine Wahl? Unter allen geometrischen stetigen Gruppen, die unser Verstand konstruieren kann, wählen wir diejenige, die von der urtümlichen Gruppe am wenigsten abweicht, die dem physikalischen Kontinuum entspricht und die uns die Erfahrung als Gruppe der Bewegungen kennenlernen läßt. Unsere Wahl wird uns also nicht von der Erfahrung diktiert, sondern sie bleibt frei: wir wählen diese Geometrie lieber als jene, nicht weil sie wahrer ist, sondern weil sie bequemer ist[24].

Die Definition des Raumes im ersten Absatz stimmt insoweit mit Kant überein, daß er unserer Innenwelt angehört. Der Raum ist aber kein Korsett, das notwendig und allgemein unsere Wahrnehmung formt, sondern ein völlig amorpher mentaler Träger der kinematischen Bilder, die unser Verstand konstruiert. Wir werden noch darauf eingehen, warum Poincaré, der hier für geometriekundige Leser schreibt, den Raum eine Gruppe nennt. Das Erkennen einer Gruppe bewirkt ein Kantisches Schema. Im letzten Absatz begründet Poincaré in klaren Worten, warum unsere auf den euklidischen Raum limitierte Erfahrung eine Vorliebe für die euklidische Gruppe bewirkt.

In [Russell, 1897] S. 180, § 144, axiomatisiert Russell den herkömmlichen Begriff der Form: „Spacial magnitudes can be moved from place to place without distorsion [...] [S]hapes do not in any way depend on absolute position in space.“ Dem entgegnet der Geometer Poincaré:

> Was bedeutet der Ausdruck *ohne Distorsion*? Was bedeutet das Wort *Formen*? Ist die Form (shape) etwas, das wir im voraus kennen, oder ist sie per definitionem das, was die angedachten Bewegungen invariant lassen?
> Bedeutet Ihr Axiom etwa: Damit die Messung möglich ist, müssen die Figuren zu bestimmten Bewegungen fähig sein und es muß ein bestimmtes Etwas geben, das wir Form (shape) nennen mögen, das durch diese Bewegungen nicht verändert wird?
> Oder bedeutet Ihr Axiom eher: Sie wissen schon, was Form ist; nun wohl! Damit die Messung möglich ist, müssen die Figuren bestimmte Bewegungen zulassen, die keine Änderung der Form bewirken?
> Ich weiß nicht, was Hr. Russell meinte, aber in meinen Augen ist allein die erste Auslegung adäquat. Gemäß dieser ersten Lesart gilt das Axiom unbestreitbar a priori [...] Das Prinzip der ungehinderten Beweglichkeit hat in der mathematischen Sprache folgendermaßen zu lauten: es existiert eine Transformationsgruppe, die bestimmte Eigenschaften der Figuren bewahrt, und *die Gesamtheit dieser Eigenschaften bildet das, was wir Form nennen wollen*[25].

Die Erwiderung Poincarés liegt ganz auf der Linie der als Erlanger Programm bekannten Programmschrift von Felix Klein bei dessen Eintritt 1872 in die Universität

[24] Vgl. [Poincaré, 1898], S. 63. Übersetzung und Hervorhebung CF.
[25] Vgl. [Poincaré, 1899], S. 259-260. Übersetzung und Hervorhebung CF.

Erlangen. Es bedarf einer langjährigen Praxis der Geometrie, um Poincarés scharfsinnige Gedanken über die Gruppenaktion nachzuvollziehen. Erfreulicherweise versetzt uns der Computer in die Lage, die Gedanken Poincarés zu visualisieren.

Abb. 8.1 zeigt zwei Screenshots eines Sierpinski-Teppichs. Wir haben unten links ein beliebig gewähltes Pixel markiert, das der PC mittels einer Funktion (genauer: einer Matrix) nimmermüde iteriert. Links wurden 300 Iterationen durchgeführt. Man sieht nur einen scheinbar erratischen Pixelstaub. Führt man mehr Iterationen aus, verwandelt sich der diffuse Nebel nach und nach in immer schärfere Kontouren. Bei etwa 30 000 Iterationen (rechts) treten bedingt durch das Auflösungsvermögen des Bildschirms keine sichtbaren Veränderungen mehr auf[26].

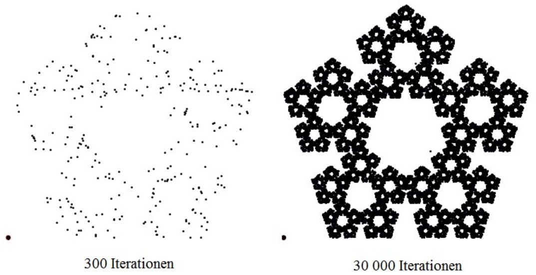

Abbildung 8.1.: Sierpinski-Teppich

Wo kommt die „Form“ her, die Poincaré meint und nunmehr vor unseren Augen steht. Offensichtlich nicht von den passiven Pixeln sondern ausschließlich von der Matrix, die jedes Pixel in das nächste „transformiert“, d.h. bewegt. Die Pixel bilden eine Gruppe; die Matrix, stellt die Operation dar, die gemäß Gruppendefinition jedes Element der Gruppe in ein anderes Element der Gruppe überführt. Gruppenfremde Pixel können so wenig entstehen, wie z.B. die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen ausschließlich natürliche Zahlen erzeugt.

Im auf S. 173 zitierten Artikel in *The Monist* mutet Poincaré seinem Leser eine schwierige mathematische Denkaufgabe zu, da keine Visualisierung der Gruppenaktion damals möglich war. Es können, hier liegt sein Kernargument, andere Matrizen gewählt werden; ob die entstehende Form zu der euklidischen oder sonst welcher metrischen oder nicht metrischen Geometrie gehört, bestimmt allein die Matrix. Wer heute am Computer sitzt, läßt sich lediglich die Matrix überreichen und bildet irgendeinen Punkt in einer Schleife ab; er braucht nicht vorher zu wissen, welche Form vor seinen Augen erscheinen wird;

[26] Technische Anmerkung: Es bezeichne $\{p_1, p_2\}$ jeweils eine der durch Zufallswahl durchlaufenen Ecken eines Polygons. Für eine Skalierung mit $k \in \mathbb{R}^+$ lautet $\{\{k, 0, k.p_1\}, \{0, k, k.p_2\}, \{0, 0, 1\}\}$ die 3×3-Bewegungsmatrix, die auf planare homogene Koordinaten $\{x_1, x_2, 1\}$ angewandt wird. Der Anfangspunkt kann beliebig gewählt werden, da die Anwendung der Matrix sehr rasch gegen Punkte der Gruppe konvergiert. Die Zufallswahl bezweckt nur eine gleichmäßige Verteilung der Pixel. Nach genügend vielen Iterationen entsteht hartnäckig immer dasselbe Sierpinski-Fraktal.
Unter http://demonstrations.wolfram.com/author.html?author=Claude+Fabre steht zur Visualisierung das anspruchsvollere Chaos Game 2D/3D für eine breite Auswahl von Polygonen und Polyedern. Mit der Maus kann man den Anfangspunkt wählen und den Parameter k variieren.

er braucht kein Geometer zu sein; es genügt, daß er die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor zu programmieren weiß.

Wir möchten kurz zusammenfassen. Man weiß schon lange, daß die Konsistenz der nicht-euklidischen Geometrien die Kantische These widerlegt: der geometrische Raum ist keine apriorische Anschauungsform. Damals war Geometrie eine Idealisierung der Raumwahrnehmung auf der Grundlage von erfahrungslastigen Axiomen. Poincaré lüftet endlich den Schleier: „Der Raum ist keine Form unserer Wahrnehmung; er ist ein Werkzeug, nicht zur Vorstellung der Dinge sondern zum Urteilen über die Dinge[27]“, kurz: *der mathematische Raum ist eine Gruppe*. Eine Gruppe wird vermöge eines Kantischen Schemas erkannt. Die Geometrie beschreibt die Dynamik der Gruppenaktion. Was das metaphysische bzw. neurowissenschaftliche Pendant zum mathematischen Raume sei, interessiert den Geometer nicht. Dann besteht die philosophische Frage weiter, welche Freiheit dem Geometer beim Erfinden zusteht; interessanterweise keine Narrenfreiheit.

Als Poincaré seine Replik auf Russell schrieb, dürfte ihm bereits das berühmte Uniformisierungstheorem vorgeschwebt haben, das er ein paar Jahre später (1907) bewies[28]. Wie wir bereits (vgl. S. 37) erwähnten, folgt aus diesem Satz salopp formuliert, daß jeder orientierbaren Fläche eine euklidische, sphärische oder hyperbolische Geometrie zugewiesen wird. Die drei Möglichkeiten schließen einander gegenseitig aus, mit der Ausnahme der Ebene und zwei ihrer Varianten, die mit einer euklidischen oder einer hyperbolischen Metrik ausgestattet werden können. Die Ausnahme führt dazu, daß Escher seine Kreislimit-Graphiken flach zeichnen konnte. Die Regel bestimmt hingegen, daß wir z.B. einen Filzhut nicht ohne Riß flachstrecken können; der Grund liegt nicht im Filz sondern in der Geometrie. Das Apriorische, das sich uns aufdrängt, steckt in der Geometrie selbst, nicht in ihrem Träger dem amorphen Raum.

Natürlich enthält keine konsistente Arithmetik anschaulich falsche Aussagen wie $2 + 2 \neq 4$. Die Anschauung läßt uns aber die Grenzen der Freiheit des Geometers oft nicht erkennen. Kant irrte sich in der Unmöglichkeit des Zweiecks, weil er sie zirkulär in der euklidischen Geometrie nachweisen wollte. Wer versteht aber, warum ein Flugzeug ein Rechteck nicht auf den kürzesten geraden Wegen fliegen kann? Der Platonist kommt hier leicht aus der Bredouille; was in der Ideenwelt klar einleuchten würde, bleibt in unserer Welt mysteriös. Der Schluß beruht aber auf einem „conventionalist twist“, das Poincaré sorgfältig meidet, indem er den Raum mathematisch statt anschaulich definiert.

[27] Vgl. [Poincaré, 1905], S. 65. Übersetzung CF.
[28] Für den Satz gab zur gleichen Zeit Paul Koebe einen unterschiedlichen Beweis.

8.6. Poppers Kritik

Wir erwähnten bereits Poppers berechtigtes Mißfallen am Konventionalismus wegen der Immunisierungsstrategien (vgl. S. 166). Popper wendet sich jedoch nicht gegen Poincaré sondern gegen einen radikalen Konventionalismus, der die Gesetzmäßigkeiten der Welt als Erfindung des Verstandes ansieht:

> Die Naturwissenschaft ist für den Konventionalisten kein Bild der Natur, sondern eine rein begriffliche Konstruktion; nicht Eigenschaften der Welt bestimmen die Konstruktion, sondern diese bestimmt die Eigenschaften einer künstlichen, von uns geschaffenen Begriffswelt, implizit definiert durch die von uns festgesetzten Naturgesetze. Nur von dieser Welt spricht die Wissenschaft[29].

Da die Naturgesetze die beobachteten Phänomene erst bestimmen, sind sie wegen Zirkularität nicht falsifizierbar, womit keine sachliche Debatte geführt werden kann:

> Unser Gegensatz zum Konventionalismus kann nicht durch eine sachlich-theoretische Debatte ausgetragen werden [...] Ähnlich wie der Konventionalismus sind auch die konventionalistischen Einwände in der Hauptsache unwiderleglich[30].

Der Stein des Anstoßes sind die unverrückbaren Naturgesetze der Physik. Anders als die von Popper gemeinten Konventionalisten läßt Poincaré die Naturgesetze nicht aus einem empirischen Standpunkt gelten, sondern gerade weil sie sub specie aeternitatis weder verifizierbar noch falsifizierbar sind, bleibt nichts weiter übrig, als sie zum Fundament der Physik zu erklären. In seinen posthum erschienen „Letzten Gedanken“ argumentiert Poincaré im 1. Kapitel, nicht daß die Naturgesetze von Ewigkeit geprägt sind, sondern daß wir auf keinen Fall in der Lage wären, etwaige langfristige Änderungen zu erkennen. Daher sieht man sich gezwungen, die Naturgesetze als unveränderlich anzunehmen:

> Die Welt von Bergson hat keine Gesetze; das einzige, was Gesetze haben kann, ist schlicht das mehr oder minder verformte Bild, das sich die Wissenschaftler von der Welt zurechtzimmern. Wenn gesagt wird, daß die Natur durch Gesetze regiert wird, ist gemeint, daß die Abbildung ziemlich ähnlich ausfallen dürfte. Daher müssen wir dieses Bild, und allein dieses, zugrundelegen, ansonsten verflüchtigt sich der Gesetzesbegriff, der Gegenstand unserer Reflexion war[31].

Wir gehen auf den Konventionalismus in der Physik nicht weiter ein, weil unser Objekt die reine Mathematik ist, wo Naturgesetze selten (Ausnahme: die Wahrscheinlichkeitstheorie) mitmischen. Der Konventionalismus, ursprünglich von Poincaré gegründet, wurde inzwischen zu einer größeren Schublade erweitert, sonst würde Popper nicht mit Einwänden, die auf Poincaré nicht zutreffen, zu den Konventionalisten auf Distanz gehen.

[29] Vgl. [Popper, 1935], S. 48.
[30] Vgl. ebd. S. 49-50.
[31] Vgl. [Poincaré, 1913], S. 16. Übersetzung CF.

Fazit

i) Axiome sind Konventionen bzw. verkappte Definitionen.
ii) Die Konventionen der Mathematik drängen sich der Realität nicht auf. Der Mathematiker ist „ein absoluter aber weiser Herrscher, der zuerst seinen Staatsrat befragt“: alle konventionalen widerspruchsfreien Theorien sind zulässig, noch müssen sie auf Nützlichkeit hin geprüft werden.
iii) Funktionen setzen die geometrischen Punkte der mentalen (auch der nicht visualisierbaren) Bilder in Bewegung.
iv) Dank der auf das Medium „Raum“ einwirkenden Schemata (z.B. Gruppenbegriff) modelliert der Mathematiker die Dynamik der selbstgeschaffenen mentalen Bilder.

Die Ingredienzien der Mathematik haben wir nunmehr verortet. Nachdem dem logisch denkenden Lehrling Spielregeln genannt wurden, muß seine Intuition geschult werden, um ihm die Dynamik nach und nach zu infundieren. Bei Poincaré und Hadamard erfahren wir, wie Mathematik von den Meistern erfunden wird.

9. Meisterhaftes Erfinden

Gauß' Blitzschlag der Illumination. Die Erfahrungsberichte Poincarés. Die Intuition überspringt Syllogismen. Lehrling und Meister. Der Mathematiker erfindet sich seine eigene Mathematik. Die Dichotomie des Ichs. Die Arbeit des subliminalen Bewußtseins. Das Harmoniegefühl leitet den Erfinder an. Das Vergessen und Querdenken. Das Erfindungsraster. Denken in Bildern statt in der Wortsprache. Die Bewußtseinsschichten. Intuition vs. Fokussierung.

Das Werkzeug des Erfindens ist die Intuition. Wie im Schachspiel jemand, der nur die Regeln der Figurenbewegung kennt, noch keine Ahnung des Spiels hat, so ist die Rolle der Logik in der Mathematik rein *normativ*; bei Poincaré schreibt die Logik die Regeln der Mathematik analog vor, wie die Grammatik die Schreibregeln:

> Die Logik lehrt uns, daß wir sicher sein können, auf diesem oder jenem Weg auf keine Hindernisse zu stoßen; sie sagt uns aber nicht, welcher Weg zum Ziele führt. Dazu müssen wir das Ziel aus der Ferne sehen, und das Vermögen, das uns sehen lehrt, ist die Intuition. Ohne sie gliche der Geometer einem Schriftsteller, der die Grammatik bestens beherrschte aber nichts zu erzählen hätte[1].

Wie erblickt der Erfinder das Ziel aus der Ferne?

9.1. Wie der Blitz einschlägt

In einem Brief an Olbers beschreibt Gauß seinen Leidensweg bei der Auffindung eines fehlenden Gliedes in der Beweiskette eines wichtigen in den *Disquisitiones arithmeticae* angedeuteten Satzes. Er hatte bereits bewiesen, wie aus der Gültigkeit im Falle einer Primzahl alles weitere folgen würde:

> [...] die Bestimmung des Wurzelzeichens ist es gerade, was mich immer gequält hat. Dieser Mangel hat mir alle Uebrige, was ich fand, verleidet, und seit 4 Jahren wird selten eine Woche hingegangen sein, wo ich nicht den einen oder den anderen Versuch, diesen Knoten zu lösen, gemacht hätte - besonders lebhaft nun auch wieder in der letzten Zeit. Aber alles Brüten, alles Suchen ist umsonst gewesen, traurig habe ich jedes Mal die Feder wieder niederlegen müssen. Endlich vor ein paar Tagen ist's gelungen - aber nicht meinem mühsamen Suchen, sondern bloß durch die Gnade Gottes möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst; ich selbst wäre nicht im Stande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wußte, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte,

[1] Vgl. [Poincaré, 1908a], S. 410. Übersetzung CF.

> - und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen. Sonderbar genug erscheint die Lösung des Räthsels jetzt leichter als manches andere, was mich wohl nicht so viele Tage aufgehalten hat als dieses Jahre, und gewiß wird niemand, wenn ich die Materie einst vortrage, von der langen Klemme, worin es mich gesetzt hat, eine Ahnung bekommen[2].

Wir zergliedern Gauß' Introspektion:

i) Beim Lösen eines Problems werden zuerst verschiedene Wege angedacht. Offensichtlich hat Gauß das Anfangsstadium längst hinter sich; seine Intuition läßt ihn nicht daran zweifeln, daß er den richtigen Lösungsweg gefunden hat. Doch kämpft er seit langem mit einem Stolperstein[3].
ii) Gauß hält für ausgeschlossen, daß seine intuitive Vermutung vielleicht nicht beweisbar sei[4]; es gibt kein Ignorabimus. Gauß' Intuition sagt ihm gebieterisch, daß er nur an einem Syllogismus scheitert. Damit quält er sich Woche für Woche.
iii) Das Einschlagen des Blitzes ist genau die triftige Metapher[5]. Ein wichtiges Charakteristikum ist, daß Gauß' Erleuchtung das sprachliche Medium nicht nützt, ja nicht nützen kann. Gauß könnte nicht so schnell verbalisieren, wie ihm die Lösung in einem Block erscheint: im mentalen Bild sitzen die Räder plötzlich dort, wo sie hingehören.
iv) Gauß kann: „den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wußte, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte, und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen" nicht finden. Nach allgemeiner Erfahrung kann ein Mathematiker selbst bei größter Anstrengung nie rekonstruieren, wie die plötzliche Eingebung zustande kam. Der mystische Moment tritt auch bei solchen Problemlösungen ein, an denen nicht so lange recherchiert wurde. Jeder Versuch scheitert unweigerlich, die Gedankenfolge unmittelbar vor dem „Blitz" ins Gedächtnis zu rufen, geschweige denn in Zeitlupe zu zergliedern. Die jähe und irreparable Verflüchtigung des Erlebnisses zeugt dafür, daß Erfinden nichts Sprachliches, folglich auch nichts Logisches ist.
v) Wonach Gauß suchte, war gewiß keine Kleinigkeit, sonst wäre einem anderen Mathematiker in der langen Zeitspanne seit der Veröffentlichung der Vermutung in den *Disquisitiones* die Lösung eingefallen. Doch erscheint dem Erfinder die Lösung auf einmal so sonnenklar, daß er sich wundert, an ihr so lange vorbeigegangen zu sein.

---

[2]Vgl. [Gauß, 1804], Brief Nr. 62 Gauß an Olbers, 3. September 1805, S. 278-281.

[3]Andrew Wiles befand sich in derselben Lage, als in seinem angekündigten Beweis der Taniyama-Shimura-Vermutung - aus der der große fermatsche Satz über $a^n + b^n = c^n$ unmittelbar folgt - eine Lücke aufgezeigt wurde, die erst nach ca. zwei Jahren harter Arbeit geschlossen werden konnte.

[4]Die Sachlage ist eine andere als etwa bei dem auf S. 105 erwähnten $(3n + 1)$-Problem, wo sich jeder hüten würde eine „Vermutung" zu riskieren.

[5]Ein ähnliches aber viel weniger intensives Gefühl packt uns, wenn ein Computer-Programm, das bisher nur Trash erzeugte, mit einem Schlag harmonisch abläuft. Doch lag in solchem Fall das Scheitern nur an ominösen Flüchtigkeitsfehlern; das Programm hätte schon längst funktionieren müssen.

vi) Gauß war nunmehr imstande, den Beweis jederzeit mühelos vorzutragen. Dabei würden die Zuhörer die Genialität des Erfinders bewundern, ohne zu ahnen, welche Qualen er erleiden mußte.

9.2. Die falsche Fährte

Auch wenn das Erfinden mit dem Werkzeug der Intuition operiert, kann selbst bei Genies die Intuition fehlgehen. Hilbert dachte z.B., daß die projektive Ebene in den $\mathbb{R}^3$ nicht eingebettet werden kann und betreute mit diesem Thema den Doktoranden Werner Boy, der Hilberts Intuition entgegen die Boysche Fläche entdeckte. Poincaré erlebte auch solches Mißgeschick mehr als einmal. Doch fand er immer selbst die eigenen logischen Fehler und korrigierte sie: die Logik dient nicht nur dazu, einen intuitiven Beweis in Worte der Sprache zu übertragen, sondern auch die Fehlleistungen der Intuition zu entlarven. Hierzu ein paar Beispiele.

Den vom schwedischen König Oskar II. zu seinem 60. Geburtstag veranstalteten Wettbewerb gewann Poincaré mit einer Schrift von 158 Seiten über das eingeschränkte Dreikörperproblem[6], in der er auf die Stabilität der Bahnen dreier Planeten um eine Sonne schloß. Plötzlich entdeckte Poincaré einen gravierenden Fehler, der auch den namhaften Juroren entgangen war, und er ließ die bereits verteilten Exemplare zurückrufen. Es folgte bald eine korrigierte Version, in der die Instabilität des Dreikörpersystems festgestellt wurde und die Poincarés erster Ansatz zur Chaostheorie war. Ein weiterer Fall ist die Homologie-Sphäre, die Poincaré selbst als Gegenbeispiel zu seiner ersten Überzeugung entdeckte, nach der die Sphäre $\mathbb{S}^3$ allein durch die Betti-Zahlen bestimmt sei; danach entwickelte er seine berühmte Vermutung. Über einen dritten Fall berichtet Poincaré in *Science et méthode*. Poincaré war erst intuitiv überzeugt, daß es sogenannte Fuchssche Funktionen nicht geben könne[7]. Poincaré erzählt :

> Seit zwei Wochen mühte ich mich um den Beweis ab, daß es Funktionen, die ich inzwischen „Fuchssche Funktionen" genannt habe, nicht geben könne; ich kannte mich damals in der Thematik nicht aus. Jeden Tag setzte ich mich an meinen Schreibtisch, verbrachte dort eine oder zwei Stunden und testete zahlreiche Arrangements, ohne ein Ergebnis zu erzielen. Eines Abends hatte ich entgegen meiner Gewohnheit starken Kaffee getrunken und konnte nicht einschlafen: Die Einfälle tauchten scharenweise auf; ich fühlte, wie sie sich überstürzten, bis sich endlich zwei von ihnen sozusagen ineinander verhakten, und

[6]Einer der drei Körper wirkt wegen seiner verschwindend kleinen Masse auf die beiden anderen nur vernachlässigbar ein.

[7]Mit Fuchsschen (oder: automorphen) Funktionen läßt sich u.a. die Kreisscheibe (bzw. die Kugel) hyperbolisch parkettieren (Stichwort: M.C. Eschers Kreislimit).

> eine stabile Verknüpfung eingingen. Bis zum Morgen hatte ich die Existenz einer Klasse von Fuchsschen Funktionen ermittelt, nämlich die von der hypergeometrischen Verteilung abgeleitete. Ich brauchte nur noch, meine Ergebnisse niederzuschreiben, was ich innerhalb von ein paar Stunden erledigte[8].

Anders als im Gauß-Zitat beschäftigt sich Poincaré erst seit zwei Wochen mit dem Problem, aus dem später seine großen Beiträge zur hyperbolischen Geometrie entstehen werden. Bemerkenswert ist die *passive Haltung* des Erfinders.

Er schaut wie in einem Theater dem Tanz der mathematischen Objekte zu. Plötzlich rasten zwei Objekte ohne sein Zutun ein. Gemäß seiner Gegenannahme durften sich keine zwei Objekte „verhaken“; sie taten es doch provokativ, gegen seinen Willen. So läßt sich u.E. erklären, warum das Aufblitzen nicht rekonstruiert werden kann; die Lösung ist von außen eingedrungen, sie wurde vom Erfinder nicht erzeugt, daran würde er sich erinnern, sondern sie lag wie eine fallengelassene Münze an einer Stelle, wo er nicht nach ihr suchte. Im Moment des „Verhakens“ erscheint Poincaré in voller Länge die Kette der Syllogismen, die zum Ziel führt; es folgt nur noch die Fleißarbeit logischen Niederschreibens, um das zu versprachlichen, was ihm die Illumination offenbarte.

Seine anfangs falsche Intuition führt Poincaré darauf zurück, daß er mit der Materie noch nicht vertraut war: „ich kannte mich damals in der Thematik nicht aus.“ Im allgemeinen hat der Mathematiker auf seinem Forschungsgebiet im Sinne von Detlefsen (vgl. S. 97) die Meisterschaft erlangt; es ist unwahrscheinlich, daß ihm seine Intuition einen falschen Weg suggeriert; Die Entdeckung ist dann kein glücklicher Zufall mehr. Die Selbsterzählung von Gauß schildert, wie er, geleitet durch seine Intuition, nicht nur das Ziel aus der Ferne entdeckte sondern auch noch den Weg auswählte, den bisher ein Hindernis beharrlich versperrte. Wie er den Lösungsweg selektiert hatte, erzählt Gauß nicht. Eine weitere Selbsterzählung Poincarés entschleiert den Prozeß.

9.3. Das Auffinden des Lösungswege

Poincaré, der nunmehr um die Existenz Fuchsscher Funktionen weiß, entdeckt einen Zusammenhang mit der hyperbolischen Geometrie:

> Dann verließ ich Caen, wo ich damals wohnte, um an einem von der *École des mines* veranstalteten geologischen Ausflug teilzunehmen. Das Reisen lenkte mich von meinen mathematischen Tätigkeiten ab; nach der Ankunft in Coutances stiegen wir zu einer Spazierfahrt in einen Bus ein; in dem Augenblick, als ich den Fuß auf das Trittbrett setzte, kam mir der Einfall, obwohl meine Gedanken derzeit offenbar ganz woanders lagen, daß die Transformationen, die ich zur Definition der Fuchsschen Funktionen benützt hatte, mit denjenigen

[8]Vgl. [Poincaré, 1908a], S. 358. Übersetzung CF.

> der nicht-euklidischen Geometrie identisch sind. Dies überprüfte ich nicht; ich hätte dazu keine Zeit gehabt, denn, kaum saß ich in dem Bus, setzte ich ein zuvor eingeleitetes Gespräch fort; aber ich wurde sofort von einer untrüglichen Überzeugung erfüllt. Zurück in Caen überprüfte ich in Ruhe das Ergebnis zur Beruhigung meines Gewissens[9].

i) Während Gauß sein Problem intuitiv gelöst hatte und nur noch nach der logischen Formalisierung suchte, denkt Poincaré noch immer über Lösungswege nach; er kämpft noch lange nicht mit verbalen Syllogismen.
ii) Wie Gauß beschäftigt sich Poincaré seit langer Zeit qualvoll mit seinem Problem. Offensichtlich müssen nicht nur „normale“ sondern auch geniale Mathematiker erst das Problem verinnerlichen, sich langsam von ihm durchtränken lassen. Wir werden uns noch oft mit der von Einstein beklagten „Enge des Bewußtseins“ beschäftigen. Der Erfinder muß sich alle Komponenten so einprägen, daß er zwischen ihnen blitzschnell hin und her schalten kann. Alternative Lösungswege werden dem Erfinder nach und nach präsenter; sie stehen wie im Cache-Bereich eines Computers jederzeit abrufbar.
iii) Offenbar grübelte Gauß über den fehlenden Syllogismus an seinem Schreibtisch nach, als der erlösende Blitz einschlug. Poincaré hingegen traf die Erleuchtung, als er nichts Mathematisches im Kopf hatte. Die Intuition hatte ihn noch nicht erfüllt, die einen Lösungsweg selektiert. Es ist eine allgemeine Erfahrung, daß die Lösung zu einem Zeitpunkt erscheint, wo sich der Mathematiker mit dem Problem gerade nicht beschäftigt; z.B. steht er unter der Dusche, als ihm sein Verstand auf die Schulter klopft und die Lösung übergibt. Poincarés Gedanken sind nur dem geologischen Ausflug gewidmet, als er den Fuß auf das Trittbrett des Busses setzt.
iv) Bei der plötzlichen Vision hat sich die Intuition ungebeten eingeschaltet. Als höflicher Mensch unterhält sich Poincaré mit seinem Nachbarn weiter und fürchtet nicht, daß sich der Lösungsweg verflüchtigen könnte. Erst zurück in Caen setzt er sich hin und überprüft, um sein Gewissen zu beruhigen, die Parallelität zwischen den Fuchsschen Funktionen und der hyperbolischen Geometrie. Er tut dies nicht fieberhaft, denn er erlangte volle Gewißheit in dem Augenblick, wo er den Fuß auf das Trittbrett setzte.

9.4. Intuition vs. Logik

In der Ära der Big Data stellt sich die Frage, ob und wie das interaktive computergestützte Beweisen die Intuition des Mathematikers potenziert. Dabei geht es nicht nur um den evidenten Gewinn durch den fehlerfreien Rechenkomfort, sondern auch um

[9]Vgl. [Poincaré, 1908a], S. 358. Übersetzung CF.

die Verläßlichkeit und lückenlose Nachprüfbarkeit der Semantik. Sind die maschinellen Monsterbeweise noch durchweg nachvollziehbar? Welche Rolle spielt noch die Intuition? Im Vorlauf der Diskussion schematisieren wir den allgemeinen Prozeß des Beweisens.

Der erste, meistens implizite, Schritt ist die Positionierung innerhalb eines Axiomensystems (z.B. hängt die Winkelsumme im Dreieck von der gewählten Geometrie ab). Dann soll gezeigt werden, daß eine Hypothese H durch eine Kette von Syllogismen in einen Satz S mündet, d.h. $H \Rightarrow S$. Der erste Syllogismus führt zu einer Zwischenkonklusion ZK_1, die als Prämisse für den nächsten Schritt eingesetzt wird, usw. Im letzten Schritt ist ZK_n mit dem Satz S identisch[10]:

Prämisse:	Hypothese H ist der Fall
Prämisse:	Implikation $H \Rightarrow ZK_1$ gilt
Zwischenkonklusion:	ZK_1 ist der Fall
Prämisse:	Implikation $ZK_1 \Rightarrow ZK_2$ gilt
Zwischenkonklusion:	ZK_2 ist der Fall
	$\vdots$
Prämisse:	Implikation $ZK_{n-1} \Rightarrow ZK_n$ gilt
Konklusion:	$ZK_n \equiv S$ ist der Fall

Falls ausnahmsweise sämtliche Implikationen Äquivalenzen sind, könnte sogar eine Maschine „gegen den Strich" vom Satz S ausgehen und ihn so lange umformen, bis die Hypothese dasteht[11]. Wenn eine der Implikationen keine Äquivalenz ist, d.h. wenn der Satz nicht analytisch sondern synthetisch ist, wäre die Verwendung der Konklusion in der logischen Deduktion eine Petitio Principii. Als Turing-Maschine nimmt der Computer die Implikationen der Syllogismen *passiv* auf; er arbeitet den Algorithmus statisch ab; allein die menschliche Intuition kann dem Algorithmus Dynamik verleihen.

Anders als der Mensch kennt ein Schachcomputer überhaupt kein Ziel; er bewertet jede Stellung und wählt blind die beste Wertung aus. Die Syllogismen der Mathematik sind *nicht bewertbar*; sie sind, gemessen am Lösungsweg, den der Computer nur rudimentär einbindet, entweder wertlos oder notwendig. Deswegen macht allein ein interaktives

[10] Bei der vollständigen Induktion wird der Algorithmus endlos fortgesetzt.

[11] Es soll z.B. bewiesen werden, daß bei natürlichen Zahlen das arithmetische Mittel größer als das geometrische ist: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Es gilt: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab-4ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$. Das ist aber immer der Fall. Es genügt dann, die Kette umzudrehen.

Computerprogramm Sinn. Mit oder ohne Computer gilt die Methodologie des Erfindens, die Poincaré in klaren Worten resümiert:

> Ein mathematischer Beweis ist kein bloßes Nebeneinanderstellen von Syllogismen, es sind Syllogismen in einer bestimmten Reihenfolge; die jeweilige Position in der Reihenfolge ist viel wichtiger als das Reihenglied selbst. Wenn ich die Reihenfolge so im Gefühl habe, etwa durch Intuition, daß ich mit einem Blick den ganzen Gedankengang erfasse, muß ich nicht länger fürchten, eines der Reihenglieder übersehen zu haben; jedes von ihnen wird sich in den dafür vorbereiteten Rahmen von selbst eingliedern, ohne daß ich mein Gedächtnis anzustrengen brauche[12].

Wenn Poincaré schreibt, daß ein Syllogismus weniger durch seinen Inhalt als durch seine Position in der logischen Kette wirksam ist, meint er nicht etwa, daß es gute und weniger gute Syllogismen gäbe; sie müssen schlicht schlüssig sein, nichts mehr. Syllogismen sind etwa mit U-Bahn-Strecken vergleichbar. Bei einer Reise von Station A nach Station B muß nicht die kürzeste Reiseroute gewählt werden. Auch auf einem mathematischen Lösungsweg gibt es Gabelungen, d.h. eine Freiheit der Syllogismenwahl, so daß Alternativbeweise zum Teil oder zur Gänze differieren. Als Gauß vergeblich gegen ein Hindernis stieß, erleuchtete der Blitz eine Abzweigung, die er noch nicht erblickt hatte. Detlefsen lobt mit einer schönen Metapher die Poincarésche Methode:

> [...] logical reasoning also foreswears the easy, loping stride of one familiar with the twists and turns of a given local terrain, and opts instead for the halting step of one who is blind to the special features of all localities, and who must therefore take only such steps as would be safe in any. In Poincaré's view, the security thereby attained cannot make up for the blindness which it reflects. Logical astuteness may keep one from falling into a pit, but having a cane with which to feel one's way is a poor substitute for being able to see[13].

Es kommt in dem Zitat zum Ausdruck, daß sich der Meister Mathematiker, der die Topoi seines Fachs souverän beherrscht, größere Sprünge als der Lehrling erlaubt. Es wäre aber falsch anzunehmen, daß der Lehrling bei jedem Schritt mit seinem Gehstock den Weg abtastet. Bei der Versprachlichung des logischen Beweises werden nur die Syllogismen festgehalten, die ein *kompetenter* Leser benötigt, sonst hätte der Beweis einen kaum vorstellbaren Umfang und wäre dadurch völlig unübersichtlich. Der Einsatz der Axiome erfolgt stillschweigend; auf die verwendeten Theoreme wird nur hingewiesen; dem Lehrling werden viele Syllogismen als „Übungsaufgabe" überlassen; an der Richtschnur der eingeschätzten Kompetenz des Adressaten wird entschieden, welche logischen Schritte in extenso ausgeschrieben werden sollen.

Benacerraf macht mit Recht darauf aufmerksam, daß die Mathematik keine pro domo Wahrheitsbegriffe verwenden soll, die vom normalen Diskurs abweichen. Es ist aber u.E. stets der Fall; mathematische Beweise bedienen sich lediglich der elementaren Logik.

[12] Vgl. [Poincaré, 1908a], S. 356. Übersetzung CF.
[13] Vgl. [Detlefsen, 1990], S.503.

Die abstruse Versprachlichung ist durch die Forderung nach Eindeutigkeit verursacht, während alltägliche Sprachspiele vieles kontextual Implizites weglassen.

Die Semantik des Beweises orientiert sich wie bei jeder wissenschaftlichen Arbeit an der Fachkompetenz des Adressaten. Das perpetuelle „Laufen am Stock" kann der Computer hingegen nicht vermeiden, was er allerdings durch schnelles Rechnen ausgleicht. Während die Semantik der Turing-Maschine durch ganz kleine Schritte (Lesen, Schreiben und Schreib-Lese-Kopf bewegen) umgesetzt wird, privilegiert der Wissenschaftler die Klarheit des Leitfadens und wählt so große Sprünge, daß sein kompetenter Adressat nicht mit Evidenzen unter seiner Würde überhäuft wird. Benacerrafs Sorge ist in unseren Augen unbegründet: wenn ein Meister im „easy, loping stride" mit ebenbürtigen Meistern kommuniziert, ist die durchlöcherte Semantik ergänzbar und die von der Schlacke befreite Beweislinie gereicht der Epistemik zum Vorteil.

Benacerraf's Sorgen um die Espistemik ist hingegen durchaus berechtigt. Die vollständige Induktion vermittelt keine Erkenntnis und jeder wird einem konstruktiven Beweis den Vorzug geben. Die Analogie mit dem Fernrohr (vgl. S. 104), das die Augenschwäche des Astronomen ausgleicht, holt Hilbert nicht herbei, um das Tertium-non-datur zu loben, sondern um es für unentbehrlich zu erklären.

Doch darf die Epistemik des Meisters nicht mit den Augen des Lehrlings betrachtet werden. Wir zitierten bereits Poincaré (vgl. S. 131):

> I find it more convenient to do proofs over than to examine thoroughly those of the author. My proofs are generally far poorer, but they have for me the advantage that they are mine[14].

Poincaré hegt kein Mißtrauen gegenüber dem Beweis eines Kollegen. Es geht ihm lediglich um die Epistemik: „Wenn ich die Reihenfolge so im Gefühl habe, etwa durch Intuition, daß ich mit einem Blick den ganzen Gedankengang erfasse, muß ich nicht länger fürchten, eines der Reihenglieder übersehen zu haben."

Fazit:

Selten und auch noch beiläufig haben sich die Mathematiker über das Platonistische Problem geäußert, eine Glaubensfrage, die in die Metaphysik gehört: wird Mathematik erfunden oder entdeckt? Will man die Frage nicht rein gefühlsmäßig angehen, kann zumindest erforscht werden, wie Mathematik in der Praxis erfunden wird. Dazu muß man erst wissen: Von wem wird Mathematik erfunden? Von einer Handvoll genialer

[14]Vgl. Poincaré an Mittag-Leffler: in Philippe Nabonnand, The Poincaré-Mittag-Leffler Relationship, The Mathematical Intelligencer 21 (1999, No. 2, 58-64).

Mathematiker. Bis die Psychologen irgendwann eine professionelle Umfrage unter den Koryphäen durchführen, liegt wenig wissenschaftliches Material über das Geheimnis mathematischen Erfindens vor. Es ist daher nicht verwunderlich, daß die „philosophischen" Schriften Poincarés heute noch Gegenstand philosophischer Arbeiten sind.

In *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* [Hadamard, 1945] setzt sich Jacques Hadamard, ein genialer Mathematiker des vorigen Jahrhunderts, mit der Psychologie des Erfindens auseinander. Offenbar hat sich Hadamard mit dem damaligen Kenntnisstand der Psychologie eingehend vertraut gemacht. Auch wenn er das Werk der Psychologen gebührend anerkennt, ist es keinem von ihnen gelungen, die blitzartige Illumination des Erfinders zu durchleuchten. Hadamard bemängelt zu Recht, daß unter den Autoren keiner über eine längere Erfahrung als Mathematiker verfügte. Die Teilnehmer an einer damaligen anspruchsvollen Umfrage[15] hatten zwar eine solche Erfahrung, es waren aber keine namhaften Mathematiker unter ihnen. Es ist ein unschätzbares Glück für die Forschung, daß Hadamard seine Gespräche mit Koryphäen und seinen Kommentar zum Vortrag Poincarés, *L'Invention Mathématique*, [Poincaré, 1908b], in seinem Essay festgehalten hat.

9.5. Lehrling und Meister

Um das Erfinden zu erforschen, muß man über eine eigene Erfahrung zurückblicken können. Darin liegt ein wesentlicher Zug unserer These. Warum ist dem so? Die ersten Jahre des Mathematikstudiums vermitteln keine Erfindungspraxis:

i) In der Vorlesung werden dem Studenten Theorembeweise, d.h. fertige logische Ketten, vorexerziert. Wie der Nervus Probandi gefunden wurde, wird nicht verraten.
ii) Bei Hausaufgaben sind die Propositionen alle wahr; dem Studenten ist die Konklusion der Syllogismenkette von Anfang an bekannt;
iii) Diese Aufgaben stellen außerdem eine unmittelbare Anwendung der Vorlesung dar; d.h. es gibt mindestens einen zur Konklusion führenden Lösungsweg, der mit der Vorlesung eng zusammenhängt.

In der Vorlesung wird also an den logischen aber nicht an den Erfindungsgeist appelliert. Bei den Hausaufgaben wird zwar Intuition gefordert, aber in bescheidenem Umfang. Die Vorlesung ähnelt einem grammatisch schwierigen Diktat, das der Student verstehen

[15] Die Umfrage [L'Enseignement mathématique, 1902] bzw. [L'Enseignement mathématique, 1904] wurde von der Zeitschrift *L'Enseignement Mathématique* veranstaltet.

und korrekt rekonstruieren lernt; bei den Hausaufgaben muß er einen vorlesungsnahen Erzählungsinhalt selbst in die logische Sprache umsetzen.

9.5.1. „I know of only one inventor, who is myself"

In den mathematikintensiven Anwendungswissenschaften stehen die Theoreme als fertige Bausätze zur gefälligen Verwendung. Der reine Mathematiker hingegen erfindet seine Bausätze. Die Meisterschaft wird dadurch erlangt, daß sich der Erfinder auch zu bekannten Theoremen eigene Lösungswege erarbeitet, wie etwa ein Handwerker, der Wert darauf legt, seine Werkzeuge selbst anzufertigen, um sie in seine Kunst zu integrieren; jeder erfindet *seine* Mathematik neu. Auch Hadamard baut sich seine eigenen Beweise:

> [M]ost mathematicians [...] prefer, when studying any previous work, to think it out and rediscover it by themselves. This is my approach, so that finally I know, in any case, of only one inventor, who is myself[16].

Der begabte Schachspieler memoriert die Eröffnungen nicht wie das Einmaleins, sondern als zielorientierte Folgen. Der Bedarf, einen Beweis nicht nur zu verstehen sondern sich ihn darüberhinaus *einzuverleiben*, dürfte in unseren Augen die Meisterschaft charakterisieren. Wir zitierten bereits Poincaré, der fremde Beweise zur Seite legt, um die eigenen selbst durchzuarbeiten, auch wenn sie nicht ganz so gut geraten sollten.

Erst das maßgeschneiderte Neuerfinden schafft den Wissensfundus, so daß der Mathematiker jeden Beweis jederzeit rekonstruieren kann, wie sich jemand einen gewohnten Fahrweg einprägt. Der Mathematiker wandert mühelos von einer Beweisetappe zur nächsten[17]. Das Gedächtnis merkt sich einen logischen Strang wie umfallende Dominosteine.

Das globale Erfassen tritt auch bei genialen Künstlern ein. Dazu zitiert Hadamard einen Brief Mozarts (vgl. Anhang G), der das Vermögen besessen haben dürfte, sich einen Ariadnefaden als eine abgeschlossene Erinnerungseinheit zu merken:

> [D]as Ding wird im Kopfe wahrlich fast fertig, wenn es auch lang ist, so daß ichs hernach mit einem Blick, gleichsam wie ein schönes Bild oder einen hübschen Menschen im Geiste übersehe, und es auch gar nicht mehr nach einander, wie es hernach kommen muß, in der Einbildung höre, sondern wie gleich alles zusammen. [...] Wenn ich nun hernach einmal zum Schreiben komme, so nehme ich aus dem Sack meines Gehirns, was vorher, wie gesagt, hineingesammelt ist. Darum kommt es hernach auch ziemlich schnell aufs Papier, denn es

[16] Vgl. [Hadamard, 1945], S. 11.

[17] Analog entsteht bei einer oft gefahrenen U-Bahnlinie eine pseudo-logische Verkettung zwischen den Bildern der Stationen. Das globale Memorieren einer Fahrroute wurde schon bei den alten Griechen in der mnemotechnischen Loci-Methode angewandt. Ein Redner wird z.B. für die Gliederung seines Vortrages Folgen von Schlüsselwörtern mit Routenpunkten, etwa den Stationen einer U-Bahnlinie, paaren.

> ist, wie gesagt, eigentlich schon fertig, und wird auch selten viel anders als es vorher im Kopfe gewesen ist[18].

Dieses Vermögen, „wie gleich alles zusammen", aus den Gliedern das mentale Bild der Kette zu gewinnen, kann nur durch Introspektion analysiert werden. Der Essay Hadamards zergliedert die eigene Erfahrung und zieht Zeugnisse anderer ebenbürtiger Mathematiker zum Vergleich heran.

9.5.2. Die Dichotomie des Ichs

Hadamard benützt als Grundlage den Vortrag Poincarés vor der Pariser *Société Psychologique*, der im wesentlichen auch in *Science et Méthode*, [Poincaré, 1908a], nachzulesen ist. In einem einzigartigen Erlebnis unterscheidet sich Poincaré von den anderen Mathematikern, als er sich zum Zuschauer seiner Entdeckung erklärt (vgl. S. 181):

> Ich sprach von einer unruhigen Nacht, in der ich sozusagen unwillkürlich arbeitete. Solche Erlebnisse kommen häufig vor, und es muß dabei nicht sein, daß die Tätigkeit des Gehirns wie im geschilderten Falle durch ein physisches Stimulans ausgelöst wird. Nun scheint es in solchen Fällen, daß jemand seiner eigenen unbewußten Arbeit zuschaut, die vom überreizten Bewußtsein bis zu einem gewissen Grad wahrgenommen wird, ohne deswegen grundsätzlich anders zu sein. Dann wird einem unscharf bewußt, was die beiden Mechanismen unterscheidet, bzw. die Arbeitsmethoden der beiden Egos. Meine psychologischen Beobachtungen in dieser Hinsicht scheinen mir, die von mir geäußerte Ansicht in groben Zügen zu bestätigen[19].

Dazu meint Hadamard:

> But that extraordinary fact of watching passively, as if from the outside, the evolution of subconscious ideas seems to be quite special to him. I have never experienced that marvelous sensation, nor have I ever heard of its happening to others[20].

Die Arbeit eines unterschwelligen Ichs dürfte in der Tat unter Mathematikern ein Einzelfall sein. Dementgegen wurde wissenschaftlich festgestellt, daß früher auf Bühnen auftretende Rechenkünstler eine innere fremde Stimme rechnen hörten, auf deren Ergebnismeldung sie lethargisch warteten. So spielte Giacomo Inaudi Flöte während seiner Darbietungen. Maurice Dagbert spielte vom Blatt auf der Geige, während er die Kubikwurzeln von vier neunstelligen Zahlen in weniger als anderthalb Minuten berechnete (vgl. Robert Clarke, *Super cerveaux*, PUF, 2001). Das Naturwunder des Schnellrechnens hängt definitiv mit der mathematischen Begabung nicht zusammen. Euler oder Gauß sollen zwar sehr gute Kopfrechner gewesen sein, Poincaré war es nach eigenem Bekunden keinesfalls. Inaudi war ein ungebildeter Hirte; Vito Mangiamele übrigens auch, der außerdem ein Autist war. Somit stellt sich die Frage der unbewußten Geistesarbeit.

[18] Vgl. Integraler Brieftext im Anhang G, S. 265.
[19] Vgl. [Poincaré, 1908b], Übersetzung CF.
[20] Vgl. [Hadamard, 1945], S. 15.

9.5.3. Subliminales Bewußtsein

In seiner Schrift *Gedächtnis und Erinnerung* unterscheidet Aristoteles das aktive schlußfolgernde menschliche Vermögen der verkettenden Erinnerung von dem passiven statischen Gedächtnis:

> Erinnerung unterscheidet sich vom Gedächtnis nicht nur bezüglich der Zeit, sondern auch darin, daß sich Gedächtnis auch bei vielen anderen Lebewesen findet, Erinnerung aber, so kann man sagen, sich bei keinem anderen bekannten Lebewesen findet, außer beim Menschen. Erinnerung ist nämlich gleichsam eine Art logischer Schluß (*syllogismós*)[21].

Ein Syllogismus kontaminiert (im positiven Sinne) den nächsten. Hadamard fragt zu Recht: „when I pronounce one sentence, where is the following one?“ In der Nachfolge Aristoteles' versucht der Assoziationismus die Frage zu vertiefen. Assoziation besteht darin, daß Wahrnehmungen, Gefühle, Ideen, usw. eine enge Verbindung eingehen, so daß beim Auftreten eines solchen psychischen Inhalts ein benachbarter psychischer Inhalt durch eines der drei Assoziationsgesetze der Ähnlichkeit, Kontiguität (d.h. räumliche bzw. zeitliche Berührung) und Kausalität aufgerufen wird. Der späte Assoziationismus zieht keine scharfe Grenze zwischen der unmittelbaren sinnlichen Perzeption und den erinnerten oder phantasierten Bildern. Die Bilder der Perzeption sind lediglich intensiver, daher exakter und schärfer als mentale Bilder.

Wird das Zusammenführen benachbarter Gedanken dem Zufall überlassen, oder sucht das Gehirn gezielt nach Familienähnlichkeiten? Um Assoziationen unter den Big Data aufzuspüren, benötigt der Computer einen vergleichenden Algorithmus. Eine ähnliche Struktur dürfte dem Gehirn zur Verfügung stehen. Wie sollte es sonst aus der riesigen Masse der abgespeicherten Daten Verlinkungen aufspüren? Hadamard widerlegt Charles Nicolles naive Zufallstheorie[22]. Wenn psychische Inhalte zufällig zusammenträfen, wie etwa die Demokritschen Atome, brauchte der Erfinder nur auf eine irgendwann eintretende Kollision geduldig zu warten. Es besteht aber Einigkeit darüber, daß sich der Erfinder stets lange und intensiv bemühen muß; den blitzartigen Einfall muß er sich erst verdienen; Archimedes mußte oft baden, bis er sein Heureka ausrief. Francis Galton beschreibt sehr treffend den langen Erfindungsprozeß:

> When a man has been thinking hard and long upon a subject, he becomes temporarily familiar with certain steps of thought, certain short cuts, and certain far-fetched associations, that do not commend themselves to the minds of other persons, nor indeed to his own at other times; therefore, it is better that his transitory familiarity with them should have come to an end before he begins to write or speak. When he returns to the work

[21] Vgl. *Peri mnemes*… 453a.
[22] Vgl. [Nicolle, 1932].

> after a sufficient pause he is conscious that his ideas have settled; that is, they have lost their adventitious relations to one another, and stand in those in which they are likely to reside permanently in his own mind, and to exist in the minds of others.[23]

Das scheinbar passive Verhalten der Wunderrechner läßt sich u.E. nur erklären, wenn eine nicht wahrgenommene Gehirnaktivität hinter dem Bewußtsein stattfindet. Francis Galton spricht von einem „Vorzimmer des Bewußtseins“:

> When I am engaged in trying to think anything out, the process of doing so appears to me to be this: The ideas that lie at any moment within my full consciousness seem to attract of their own accord the most appropriate out of a number of other ideas that are lying close at hand, but imperfectly within the range of my consciousness. There seems to be a presence-chamber in my mind where full consciousness holds court, and where two or three ideas are at the same time in audience, and an antechamber full of more or less allied ideas, which is situated just beyond the full ken of consciousness. Out of this antechamber the ideas most nearly allied to those in the presence-chamber appear to be summoned in a mechanically logical way, and to have their turn of audience[24].

Auch beim peripheren Sehen erhalten wir einen (diffusen) Gesamteindruck der Objekte, auf die das Auge nicht gerade fokussiert, sonst würden wir auf Gefahren nicht prompt reagieren können. Hadamard übernimmt von Galton den Begriff des Vorzimmers des Bewußtseins; er spricht von einem subliminalen Bewußtsein (= fringe consciousness), das unmittelbar unterhalb des Bewußtseins liegt. Einem similären Modell begegneten wir bereits beim Trichter von Bergson (vlg. S. 53), auf den sich Hadamard jedoch nicht explizit bezieht. Bergson stellt das Hinauffiltrieren der Assoziationen durch die Bewußtseinsebenen (plans de conscience) nur fest, ohne den Verlinkungsprozeß zu erforschen, was sich Hadamard im Falle des mathematischen Erfindens zum Ziele setzt.

Der tragende Gedanke liegt (wie bei Bergson) in der kontinuierlichen Aufteilung des Unterbewußtseins in Bewußtseinsschichten, wobei die subliminale, d.h. die direkt unter dem Bewußtsein liegende, anders als die tieferen der Introspektion zugänglich ist und beim mathematischen Erfinden stark involviert ist:

> [T]here must even be, in the unconscious, several successive layers, the most superficial one being the one we just considered [fringe consciousness] [...] There seems to be a kind of continuity between full consciousness and more and more hidden levels of the unconscious[25].

9.6. Ästhetik und Erfindung

Die Intuition, das Werkzeug zum Aufklettern der Unterbewußtseinsstufen, bleibt heute noch eine Blackbox für die Psychologie und die Neurowissenschaft. Warum greift der

[23] Vgl. [Galton, 1907], S. 146.
[24] Vgl. ebd.
[25] Vgl. [Hadamard, 1945], S. 26-27.

Erfinder eher zu diesem Werkzeug als zur Logik?

Nachdem es verstanden hat, daß die Spielidee eines Puzzles darin besteht, die Teile ineinander zu verhaken, versucht das junge Kind irgendwelche Teile gewaltsam zusammenzuführen. Daß die Syllogismen einer mathematischen Schlußfolgerung am Ende ähnlich verschachtelt sind, mag die Vorstellung erwecken, daß Beweisen ein anspruchsvolles logisches Spiel sei. Dabei würde man verkennen, daß die Logik Tautologien erzeugt, ohne darauf hinzuweisen, welche Auswahl von Tautologien die Puzzleteile oder die Atome des Demokrits verhakt. Mit welchem Ariadnefaden näht der Erfinder die Teile zusammen? Die Antwort findet Hadamard bei Poincaré:

> Der Wissenschaftler beschäftigt sich nicht mit der Natur eines Nutzen wegen, sondern weil er sein Vergnügen dabei findet, weil die Natur schön ist [...] Die Schönheit, die ich meine, ist intimer Art; sie entspringt der harmonischen Ordnung der Teile und kann nur von einer reinen Intelligenz begriffen werden [...] Es mag erstaunlich klingen, das Wort Gefühl im Zusammenhang mit mathematischen Beweisen zu gebrauchen, die scheinbar nur mit dem Intellekt zu tun haben. Andernfalls würde das Empfinden der mathematischen Schönheit, der Harmonie der Zahlen und der Formen, der geometrischen Eleganz übergangen werden. Es handelt sich um eine originale ästhetische Empfindung, die sämtliche echte Mathematiker kennen. Da muß wohl von einem Gefühl gesprochen werden[26].

Immer wieder begeistern sich die großen Mathematiker an der Harmonie der Mathematik, z.B. ist G. H. Hardys *A Mathematician's Apology* eine Hymne auf die Schönheit (vgl. Zitat auf S. 113). Poincaré beschränkt sich aber nicht auf einen Lobgesang. Er geht viel weiter, wenn er im Gefühl für das Schöne überhaupt das *Werkzeug* zum Erfinden entdeckt. Hadamard übernimmt die These kommentarlos, als sei sie selbstverständlich:

> But with Poincaré, we see something else, the intervention of the sense of beauty playing its part as an indispensable means of finding. We have reached the double conclusion : i) that invention is choice, ii) that this choice is imperatively governed by the sense of scientific beauty[27].

Während Poincaré mehr als einmal auf die ästhetische Komponente aufmerksam macht, verwendet Hadamard hierauf nur eine Seite, aber so dezidiert, daß die Tragweite der Aussage nicht unterschätzt werden darf. Nicht allein der „echte" Mathematiker lernt die Schönheit der Mathematik kennen. Wahrscheinlich würde ein Kantianer das übermannende Gefühl treffender *Erhabenheit* nennen:

> Erhaben nennen wir das, was schlechthin groß ist. Groß sein aber und eine Größe sein, sind ganz verschiedene Begriffe (magnitudo und quantitas). Imgleichen schlechtweg (simpliciter) sagen, daß etwas groß sei, ist auch ganz was anderes als sagen, daß es schlechthin groß (absolute, non comparative magnum) sei. Das letztere ist das, was über alle Vergleichung groß ist [...] Schön ist das, was in der bloßen Beurtheilung (also nicht vermittelst der Empfindung des Sinnes nach einem Begriffe des Verstandes) gefällt. Hieraus folgt von selbst,

[26] Vgl. [Poincaré, 1908a], S. 17 & 57. Übersetzung CF. Wir zitieren ein längeres Exzerpt als bei Hadamard steht.
[27] Vgl. [Hadamard, 1945], S. 31.

> daß es ohne alles Interesse gefallen müsse. Erhaben ist das, was durch seinen Widerstand gegen das Interesse der Sinne unmittelbar gefällt[28].

Das Erhabenheitsgefühl, das letztendlich zum Platonismus führt, ist zwar nicht den Genies vorbehalten, aber nicht gleichverteilt[29]:

i) Der „Lehrling", der sich Schritt für Schritt von der Logik einer schwierigen Deduktionskette überzeugt, gelangt anders als der „Meister" zu keiner globalen Verinnerlichung durch eigenes Nachbeweisen. Daher erfüllt ihn Erhabenheit bestenfalls nur bei leichten Beweisen (wie etwa im Falle des Pythagoräischen Lehrsatzes auf S. 62).
ii) Das Erhabenheitsgefühl empfindet der Lehrling zeitgleich mit dem Verstehen des Beweises. Vor der Illumination hat er von der Schönheit nichts verspürt, die Poincaré und Hadamard übereinstimmend zum „Werkzeug" der Erfindung erklären.

Wie kann eine Empfindung zu einem Werkzeug werden? Der Meister dürfte u.E. einen geschulten Zugang zur Dynamik der Mathematik entwickelt haben, während der Lehrling, der eine Formel versteht, sie statisch betrachtet. Diese unsere Vermutung leiten wir von der Visualisierung am Computer ab, die heutzutage die Dynamik konstanter Relationen direkt vor Augen führt. Durch die Vorführung entsteht die Motivation, nicht nur eine Formel zu ermitteln, sondern vielmehr die Quelle der Bewegung zu enträtseln.

Poincaré, der die Projektion der hyperbolischen Objekte in die Kreisscheibe erfand, hat die faszinierenden Bilder nie auf einem Bildschirm sehen dürfen. Das gereichte ihm nicht zum Schaden, denn es läßt sich aus manchen Äußerungen in seinen Schriften - insbesondere wenn er den Raum schlicht eine Gruppe nennt (vgl. S. 173) - schließen, daß er sich über die statischen Formeln hinaus klare mentale Bilder der hyperbolischen Bewegungen machte. Der elegante Tanz seiner genialen mentalen Bilder dürfte ihm als Richtschnur, d.h. als „Werkzeug" zum Erfinden gedient haben. Die Relationen zwischen mathematischen Objekten kommen erst in der harmonischen Dynamik zum Ausdruck: während z.B. der Behälterraum auf das Einlegen von Körpern passiv wartet, sind relationaler Raum und Bewegung eins.

---

[28] Vgl. [Kant, 1788] AA V, Kritik der Urteilskraft S. 248 & 267.

[29] Das Benaceraffsche Dilemma versäumt, das ungleich verteilte Talent des Mathematikers einzubeziehen. Connes schreibt in [Connes, Changeux 1989]: „Die Mathematiker wissen sehr wohl: ein Theorem zu verstehen, ist etwas anderes als einen Beweis zu verstehen, dessen Lektüre sich manchmal über mehrere Stunden erstreckt. Es bedeutet im Gegenteil, den Beweis in einer extrem kurzen Zeit global zu überblicken. Das Gehirn muß in der Lage sein, den Beweis innerhalb von einer oder zwei Sekunden zu ‚überprüfen'; ich weiß allerdings nicht wie. Man kann sicher sein, ein Theorem verstanden zu haben, wenn man dieses Gefühl empfindet. Dem ist nicht so, wenn jemand nur vermag, den Beweis durchzugehen, ohne einen Fehler zu finden; es handelt sich dann nur um ein lokales Verstehen."

9.7. Das Querdenken

Der Amateur macht beim Schachspielen oft den Fehler, sich in den dynamischen Verlauf der Partie derart zu versteigern, daß er taktische Drohungen des Gegners unterschätzt. Kreativität dürfte überhaupt das Vermögen sein, sich vom linearen Denken zu befreien. Ein logischer Strang setzt während der Inkubationszeit dem Geist Scheuklappen auf, so daß er für abzweigende Lösungsrouten blind wird; es wird krampfhaft nach fehlenden Kettengliedern gesucht, nicht nach alternativen Ketten. Wie Wittgenstein richtig erkennt, gibt es vielerlei Möglichkeiten, Regeln zu folgen; auch wenn wir uns für eine Regel entscheiden, heißt es nicht, daß wir sie bewußt wählen; sie drängt sich uns vielmehr unmittelbar auf: „Wenn ich der Regel folge, wähle ich nicht. Ich folge der Regel blind[30].“

9.7.1. Ausruhen vs. Vergessen

Zwei rivalisierende Theorien erklären, wie der kreative Mensch durch bewußtes Denken von den koerzitiven Gleisen abspringt. Eine Möglichkeit heißt Gewaltanwendung. Der Geist wird erst strapaziert, um seinen Widerstand zu zermürben; nach einer kurzen Ruhepause (*Rest-hypothesis*) sammelt sich der Erfinder und schaut mit frischen Augen um sich. In solchem Fall braucht keine Aktivität des Unterbewußtseins stattzufinden; die Richtung hatte schon gestimmt, es wurde nur die richtige Bifurkation bisher übersehen. Aus seinen Kontakten mit kreativen Wissenschaftlern folgert Hadamard, daß diese oft erhellende Theorie nicht das ganze Spektrum der Erfindung abdeckt.

Alternativ scheint eher eine lange als eine kurze Ruhepause geeignet zu sein, die aus dem Gedächtnis geholten unfruchtbaren Assoziationen kritisch in Frage zu stellen. Wenn wir ein Schriftstück, mit dem wir nicht unzufrieden waren, nach ein paar Wochen durchlesen, fallen plötzlich grammatikalische und stilistische Fehler auf, als würden wir einem fremden Text gegenüberstehen. Einige Passagen, die wir beim Schreiben völlig klar fanden, wirken nunmehr nebulös. Es kommt analog vor, daß wir in mathematischen Büchern eine Stelle lange Zeit nicht nachvollziehen; nach oftmaligem Lesen erscheint irgendwann der Gedankengang so rein, daß wir keine bessere Formulierung anzubieten wüßten.

Forgetting-hypothesis und *Rest-hypothesis* zielen darauf ab, keine unterbewußte Aktivität voraussetzen zu müssen. Dennoch blocken konkurrierende Lösungswege einander nicht immer ab. Vielmehr entsteht nur bei einfachen Problemen ein Lösungsweg aus

[30]Vgl. [Wittgenstein, 1953], § 219.

nur bewußten logischen Schritten. Wie die Berichte von Poincaré, Gauß und anderen bekunden, erscheint uns die logische Kette durch eine Illumination in ihrer Globalität, als ob alle Laternen am Straßenrand plötzlich aufblitzten. Folglich mögen die Rest- bzw. Forgetting-hypothesis auf viele bewußte Aktivitäten zutreffen, es gibt aber Erfindungen, die ohne das Mitwirken des Unterbewußtseins nicht zustandekämen.

9.7.2. Waches und subliminales Selbst

Wenn es ein bewußtes und ein unterbewußtes Selbst gibt, erfüllen sie dann dieselbe Funktion? Eine Mitwirkung des Unterbewußtseins muß bei der rasanten Leistung der Wunderrechner angenommen werden, aber nicht beim mühseligen mathematischen Erfinden. Es gibt manchmal eine erfolglose Inkubationszeit von mehreren Monaten oder Jahren. Zumindest im Moment der Illumination, als alle Räder plötzlich einrasten, meldet sich das Unterbewußtsein. Ist eine unterbewußte Arbeit nur in diesem Augenblick involviert oder begleitet sie ständig den Erfindungsprozeß mit?

Die unterbewußte Arbeit erbringt eine andere Leistung als die bewußte. Wie Poincaré betont, löst das Unterbewußtsein keine algebraischen Formeln auf. Jemandem, der am Vorabend zwei große Zahlen multiplizieren wollte, wird das Ergebnis beim Erwachen nie einfallen. Algorithmen erfordern Schritt für Schritt die ständige Kontrolle des Bewußtseins[31] im krassen Gegensatz zu der Realitätsferne der dämmerigen (Poincaré schreibt genauer: hypnagogischen) Gehirnaktivität. Das Aufblitzen der Illumination bezeugt, daß im Unterbewußtsein eine Lösung gefunden wurde, während die vorausgehenden bewußten Bemühungen scheiterten. Die Frage liegt dann nah, ob die Blackbox des Unterbewußtseins vielleicht sogar bewußtem Denken überlegen wäre:

> Das subliminale Selbst ist dem bewußten Selbst keineswegs unebenbürtig; es arbeitet nicht wie ein Automat, es vermag zu differenzieren, es ist taktvoll und einfühlsam; es weiß zu wählen, zu erraten. Mehr noch, es kann besser erraten als das bewußte Selbst, da es dort erfolgreich ist, wo das andere versagte. Kurzum: ist das subliminale Selbst dem bewußten nicht etwa überlegen[32]?

9.7.3. Ästhetik als Werkzeug zum Erfinden

Poincaré, der sich sonst selten ereifert, antwortet mit einer ästhetischen „Hypothese“:

[31] Die Leistung der Wunderrechner sind kein Gegenargument. Ihre Resultate decken sich zwar mit denen des üblichen Rechnens; daraus darf nicht geschlossenen werden, daß sie die üblichen (langsamen) Algorithmen verwenden.

[32] Vgl. [Poincaré, 1908b]. Übersetzung CF.

> Fast sämtliche zahlreiche Kombinationen, die das subliminale Selbst blind gebildet hat, sind reiz- und wertlos; aber gerade deswegen üben sie keinen Einfluß auf das ästhetische Empfinden; sie werden nie ins Bewußtsein gelangen. Nur wenige von ihnen sind harmonisch und daher zugleich nutzbringend und schön; diese sind in der Lage, die sonderliche von mir soeben erwähnte Empfindlichkeit des Geometers zu wecken, die derart angeregt uns auf diese Kombinationen aufmerksam macht und sie somit bewußt werden läßt.
> Dies ist allerdings nur eine Hypothese; doch könnte sie durch die folgende Beobachtung eine Bestätigung finden; wenn eine plötzliche Illumination den Geist des Mathematikers ergreift, irrt sie sich meistens nicht; es kommt aber manchmal vor, wie ich bereits erwähnte, daß sie die Etappe der Überprüfung doch nicht besteht; nun denn, man stellt fast immer fest, daß dieser falsche Einfall, wäre er doch richtig gewesen, unserem natürlichen Instinkt für mathematische Eleganz geschmeichelt hätte[33].

Wir wissen nicht, wie die erlauchten Psychologen des *Institut Général Psychologique* die Hypothese aufgenommen haben. Gemäß der konsensfähigen Kantischen Definition der Glückseligkeit als „Bewußtsein eines vernünftigen Wesens von der Annehmlichkeit des Lebens, *die ununterbrochen sein ganzes Dasein begleitet*[34]“ ist es in der Tat vorstellbar, daß der von seinem Problem besessene Forscher auch in seinem Unterbewußtsein daran weiter arbeitet. Der erste Absatz des Zitats enthält zwei implizite Postulate:

i) Das Unterbewußtsein arbeitet während der Forschungspausen im Hintergrund an dem Problem weiter; das Mysteriöse liegt nämlich darin, daß die Illumination nicht im Augenblick des bewußten Nachdenkens eintritt.
ii) Trotz der Ablenkung durch die bewußten Sinneswahrnehmungen wird die Empfindlichkeit für das Schöne im Unterbewußtsein nicht ausgeschaltet; sie leitet wie ein Spamfilter nur die harmonischen Kombinationen an das Bewußtsein weiter.

Im zweiten Absatz wird ein starkes Argument nachgeschoben: wie alle Mathematiker bestätigen, kann die Intuition fehlgehen, aber dann, so Poincaré, meistens, wenn sie eine Kombination suggeriert, die den Mathematiker in seinem Streben nach Harmonie glückselig gemacht hätte. Bis Psychologie und Neurowissenschaft eines Tages den Schleier etwas lüften, scheint uns Poincarés „Hypothese“ als „beste rationale Erklärung“ gelten zu dürfen. Wir werden in dieser Auffassung dadurch gestärkt, daß sich Hadamard ohne Zögern oder Bedenken der Hypothese anschließt: „[T]he intervention of the sense of beauty playing its part as an indispensable means of finding[35]“. Daß Poincaré und Hadamard den Sinn für das Schöne zum Werkzeug des Erfindens erheben, ist ein Ansatz, den die psychologische Forschung vertiefen sollte.

[33] Vgl. [Poincaré, 1908b]. Übersetzung CF.
[34] Vgl. [Kant, 1788b], KpV 1. Teil 1. Buch 1. Hauptstück § 3 . Hervorhebung CF.
[35] Vgl. [Hadamard, 1945], S. 31.

9.7.4. Unterbewußtsein und Logik

Eine weitere Frage bleibt bei Poincaré und Hadamard unbehandelt: die Rollenverteilung zwischen dem bewußten und dem unterbewußten Selbst. Sie sind offenbar nicht austauschbar. Nicht nur, weil das eine etwas erreicht, wo das andere versagte.

Poincaré berichtet mit Nachdruck, wie er in einer vom starken Kaffee verursachten dämmerigen Geistesverfassung, wo das subliminale Selbst mit dem bewußten eine Osmose eingeht, dem Tanz der nach seiner bisherigen Intuition nicht existierenden Fuchschen Funktionen unbeteiligt zuschaute. Dieses Erlebnis unterstützt die These der Ausschaltung des logisch denkenden Unterbewußtseins, sonst würde sich der Zuschauer gegen das Auftreten der nicht existierenden Funktionen sträuben.

Allerdings bemerkt Hadamard, daß er eine solches Erlebnis selbst nie hatte und darüberhinaus ein Ähnliches von seinen Kollegen nie zu hören bekam (vgl. Zitat auf S. 189). Beide Mathematiker sind sich jedoch darüber einig, daß das Unterbewußtsein keine Formeln ausrechnet, was ohne die ständige Überwachung durch das Intellekt nicht geht. Auch ist die Schrotgarbe sehr schmal, wenn ein Algorithmus abgearbeitet wird. Daraus entspringt unsere Hypothese, daß das Unterbewußtsein wegen (bzw. dank) seiner Logikferne zum Querdenken besser geeignet ist.

Angenommen der Sinn für das Schöne filtert die denkwürdigen Kombinationen heraus, wie emergieren diese im Bewußtsein?

9.8. Erfinden Schritt für Schritt

9.8.1. Das Erfindungsraster

Um die Phasen der bewußten bzw. unterbewußten Arbeit aufzuzeigen, umfaßt Hadamards Analyseraster vier Etappen:

i) Vorbereitung (bewußte Vorarbeit);
ii) Inkubation (unbewußtes Nachbrüten in Ruhepausen);
iii) Illumination (Übergang vom Unbewußten ins Bewußte);
iv) Überprüfung und logische Versprachlichung (bewußte und rationale Arbeit).

Diese Zerlegung des Erfindungsprozesses wird in [Connes, Changeux 1989] aufgenommen und bestätigt[36]. Im Wechselgespräch werden auf höchstem Kompetenzniveau Gedanken zur wissenschaftlichen Erfindung aus der Sicht des Biologen und des Mathematikers ausgetauscht.

Changeux erwähnt auf S. 111, daß Hadamards Essay von den Psychologen und Neurobiologen der Subjektivität wegen oft kritisert wurde. Hadamard hatte seinerzeit an der damaligen Mathematikerumfrage der Psychologen zu Recht bemängelt, daß keine namhaften Mathematiker befragt wurden. Der Einwand gilt u.E. nach wie vor. Wer die Psychologie der Erfindung erforschen möchte, darf die Introspektion der allerdings nicht zahlreichen großen Erfinder nicht auslassen. Die Übereinstimmung der Erfahrungsberichte von Poincaré, Hadamard und Connes kann nicht einem Zufall zugeschrieben werden. Es kann nur an die Psychologen appelliert werden, eine professionelle Umfrage durchzuführen, z.B. unter Fieldsmedaillenträgern, die alle nachweislich Großes erfunden haben.

Connes berichtet über seine persönliche Erfahrung gemäß Hadamards Einteilung:

> Die Inkubation besteht in einer auf bereits erworbenem Wissen basierten Annäherung. Es gelingt einem nach und nach, sich auf ein genau bestimmtes Denkobjekt zu konzentrieren. Man versucht beim Ebnen des Weges, das Denken zu fokussieren, indem man sich mit bekannten Sachen umgibt. Die Phase der Überprüfung beginnt, sobald die Illumination stattgefunden hat. Das Überprüfen ist sehr schmerzhaft, da man fürchtet, sich geirrt zu haben. [...] Die Intuition irrt sich oft. Ich erinnere mich, einmal einen Monat lang ein Ergebnis überprüft zu haben; ich siebte bis zur Besessenheit den Beweis in den feinsten Details durch, obwohl diese Arbeit notfalls einem Computer hätte überlassen werden können, der die Logik der Deduktionskette abcheckt. [...] Wenn die Phase der Vorbereitung abgeschlossen ist, rennt man gegen eine Wand. [...] Der Fehler ist auf jeden Fall zu vermeiden, eine Schwierigkeit frontal anzugreifen. Man soll sich auf Umwegen vorantasten, daneben arbeiten. Wenn man sich zu unmittelbar mit dem Problem auseinandersetzt, hat man die während der Inkubation angesammelten Werkzeuge bald ausgeschöpft und verliert den Mut. Man muß dem Denken freien Lauf lassen, damit die unterbewußte Arbeit stattfinden kann. Erledigt man z.B. relativ einfache aber langwierige algebraische Berechnungen, so ist die Zeitspanne, wo das Denken wenig fokussiert, der Einschaltung des Unterbewußtseins sehr förderlich. [...] So kann man sich in einen kontemplativen Zustand versetzen, der mit dem Sich-besinnen eines Studenten bei einer Prüfung nichts zu tun hat[37].

Auffallend ist die Furcht Connes, sich möglicherweise geirrt zu haben. Tatsächlich erwähnen auch Poincaré und Hadamard, daß sie ihre Intuition mehr als einmal fehlleitete. Die Unruhe ist wohl verständlich, da es um Resultate geht, an denen bisher alle Mathematiker scheiterten. Wir erinnern an zwei selbstsichere Zitate Poincarés, als ihm nicht

[36] Die Autoren, der Neurobiologe Jean-Pierre Changeux und der Mathematiker (Fields-Medaille 1982) Alain Connes, erhielten 1992 bzw. 2004 die Goldmedaille des CNRS, d.i. die höchste französische Auszeichnung für Wissenschaftler, die auch Hadamard 1956 verliehen wurde.

[37] Vgl. [Connes, Changeux 1989], S. 111-112. Übersetzung CF.

minder revolutionäre Ergebnisse intuitiv erschienen waren: „Ich brauchte nur noch, meine Ergebnisse niederzuschreiben, was ich innerhalb von ein paar Stunden erledigte“, oder bei einer anderen Illumination: „Zurück in Caen überprüfte ich in Ruhe das Ergebnis zur Beruhigung meines Gewissens“. Die souveräne Sicherheit Poincarés dürfte zum Teil an einer weniger emotionellen Geistesverfassung liegen. Vielleicht war er sich seiner unerschütterlichen Intuition deswegen so sicher, weil der gefundene Beweis seinem Streben nach Schönheit und Harmonie entsprach?

Connes warnt vor dem fatalen Fehler, „frontal anzugreifen“. Hadamard stellt das Sichschleichend-nähern überhaupt in den Vordergrund.

9.8.2. Streuung der Schrotgarbe

Hadamard entnimmt der Dissertation (Theorie der Erfindung, 1881) des Philosophen Paul Souriau eine triftige Empfehlung[38]: „Wer erfinden will, soll daneben denken.“ In seinem Vortrag vergleicht Poincaré die Einfälle in der Vorbereitungsphase mit Atomen von Epikur, die der Erfinder gegen ein Wand schießt, an der sie durch ihre Haken und Ösen festhaften bleiben[39]. Die Metapher baut Hadamard weiter aus: Beim Schießen der Atome gegen die Wand muß die Streuung der Garbe sorgfältig dosiert sein, darin liegt die Kunst. Eine große Streuung ermöglicht zwar, wenn man Glück hat, unverhoffte Glückstreffer, aber auch eine frustrierende Unmenge „steriler“ Treffer. Ist die Garbe sehr schmal, geht der Vorteil der Streuung verloren.

Hadamard berichtet ausführlich über seine persönliche Erfahrung, um die Bedeutung des Thinking-aside herauszustellen. In einem Fall war seine Forschung so eng auf das eigentliche Ziel ausgerichtet, daß er wegen der geringen Streuung danebenliegende Entdeckungen einfach verpaßte:

> My next work was my thesis. Two theorems, important to the subject, were such obvious and immediate consequences of the ideas contained therein that, years later, other authors imputed them to me, and I was obliged to confess that, evident as they were, I had not perceived them.[40].

[38] Allerdings vertritt Souriau ansonsten eine These, nach der Erfinden kein rationaler Prozeß sondern ein zufälliger sei. Dem entgegnet Hadamard, daß ein Kanonier beim Schießen zwar eine große Portion Glück benötigt, aber sein Ziel nie treffen wird, wenn er seine Kanone nicht sorgfältig auf das Ziel ausrichtet.

[39] Vgl. [Poincaré, 1908b], Übersetzung CF: „Stellen wir uns die künftigen Elemente unserer Kombinationen als etwa die hakigen Atome des Epikur. Solange der Geist total ruht, bewegen sich die Atome nicht, sie sind sozusagen an der Wand festgehakt. Dieser Ruhezustand kann ewig weiterbestehen, ohne daß die Atome in Berührung kommen, d.h. ohne daß Kombinationen zwischen ihnen entstehen.“ Hier kommt zum Ausdruck, daß Mathematik eine Wissenschaft der Bewegung ist.

[40] Vgl. [Hadamard, 1945], S. 51.

Umgekehrt übersah er Naheliegendes durch zersplittertes Forschen:

> I overlooked the fact that a problem in inversive geometry could be indeterminate a fact which leads to the beautiful properties discovered by Andre Bloch. It is not, this time, a consequence of having too strictly followed my original direction, which would precisely have led me to discuss more thoroughly the problem which I had solved, and therefore, to notice the possibility of indetermination. [...] I was unsufficiently faithful to my main idea[41].

9.9. Denken in Bildern

Die bewußte Arbeit endet mit der Überprüfung, d.h. der logischen Ausformulierung. Bei der Illumination erhält das Bewußtsein unvermittelt eine Meldung vom Unterbewußtsein und erfaßt sekundenschnell die Globalität des Beweises. Wenn im Unterbewußten gedacht wird, was nunmehr plausibel erscheint, welches Medium trägt das Denken? Wäre die gemächliche Wortsprache das Medium, könnte der Gedanke nicht abrupt ins Bewußtsein eindringen. Andernfalls müßte die Fähigkeit vorausgesetzt werden, daß die gedachte Sprache anders als die durch die Phonetisierung abgebremsten Sätze rasant beschleunigt werden könne. Alternativ könnten Bewußtsein und Unterbewußtsein über ein schnelles vorsprachliches Medium kommunizieren. Mentale Bilder, die uns schlagartig einen Freund erkennen lassen (selbst wenn er sich einen Bart hat wachsen lassen) könnten als Medium fungieren. Dann ergibt sich die Frage, ob der Mathematiker in den Phasen der Vorbereitung und der Inkubation auch mentale Bilder benützt.

Die philosophische Debatte währt heute noch, ob Denken und Sprache dissoziierbar seien. Ist insbesondere Mathematik schlichtweg ein Sprachspiel? Die der Illumination folgenden Nacharbeiten, d.h. die Formalisierung und Überprüfung einer logischen Deduktion, sind in der Tat sprachliche Übungen; aber auch in der Phase der Inkubation könnte man sich Mathematik als eine Sprache vorstellen, bei der Wörter durch Zeichen ersetzt sind und die Logik die syntaktische Funktion erfüllt; dabei ist ein Minimum an Wortsprache der Verständlichkeit zwar dienlich, aber zur Not auch entbehrlich[42]. Anders als beim Computer, der kein Glied der Deduktionskette ausläßt, setzt der Mathematiker die Wortsprache ein, um über im Fachkreis unproblematische Beweisstrecken hinwegzuspringen. Daher kann die Peer-Review nur teilweise einem Computer überlassen werden.

[41] Vgl. [Hadamard, 1945], S. 52-53.

[42] Vgl. [Ruelle, 2007], S. 71: „Wenn Sie zweisprachig sind und mit einem ebensolchen Kollegen einen Gedanken erörtern, werden Sie sich später vielleicht an das mathematische Thema des Gesprächs erinnern, nicht aber an die Sprache, in der es geführt wurde.“

Der Gebrauch der Wortsprache in der Phase nach der Zäsur der Illumination bedeutet nicht zwangsläufig, daß Verbalisierung beim eigentlichen Erfinden, speziell bei der Inkubation bzw. der Illumination mitwirkt[43].

Nach einem Rundgang durch die Thesen berühmter Philosophen bezieht sich Hadamard im Schlußwort auf einen verwirrenden[44] Ausspruch Schopenhauers: „I fully agree with Schopenhauer when he writes: ‚Thoughts die the moment they are embodied by words'. " Nachweislich steht in *Die Welt als Wille und Vorstellung* die schöne Metapher: „Zur Logik verhält sich die Grammatik wie das Kleid zum Leibe[45]." Wie das Kleid die Form des Leibes andeutet, so zeigt die Logik auf Syllogismen. Damit heißt es noch nicht, daß beim Übergang in die Sprache an dem Gedanken etwas verloren ginge. Schopenhauers tiefgehende Analyse stärkt im Gegenteil das Primat der Sprache als Denkmittel. Auch wenn wir gelegentlich den Eindruck haben, daß von Haus aus langsames Sprechen das plötzliche Aufkommen eines Gedanken nicht bewerkstelligen könne, wird unterschätzt, daß wir im Sprechen so meisterhaft geübt sind, daß wir Sätze im Zeitraffer produzieren können. Dazu Schopenhauer:

> Zwar geschieht es bisweilen, daß Begriffe auch ohne ihre Zeichen das Bewußtseyn beschäftigen, indem wir mitunter eine Schlußkette so schnell durchlaufen, daß wir in solcher Zeit nicht hätten die Worte denken können. Allein dergleichen sind Ausnahmen, die eben eine große Uebung der Vernunft voraussetzen, welche sie nur mittelst der Sprache hat erlangen können. Wie sehr der Gebrauch der Vernunft an die Sprache gebunden ist, sehn wir an den Taubstummen, welche, wenn sie keine Art von Sprache erlernt haben, kaum mehr Intelligenz zeigen, als die Orangutane und Elephanten: denn sie haben fast nur *potentiâ* nicht *actu* Vernunft. *Wort und Sprache sind also das unentbehrliche Mittel zum deutlichen Denken*[46].

Schopenhauer spürt die Inkompatibilität des schlagartigen Denkens mit dem behäbigen Sprachmedium. Die Rückführung auf „die große Übung" der sprachlich durchtrainierten Vernunft ist lediglich eine waghalsige Hypothese. Mit dem unseligen Hinweis auf die Taubstummen stellt er sich u.E. in seiner Argumentationsnot selbst ein Bein. Aus heutiger Sicht bestehen bei Gehörlosen keine kognitiven Defizite. Kaum vorstellbar wäre, daß ein taubstummer Schachspieler über die Gebärdensprache zur Inspiration gelangt.

Alle Anzeichen sprechen doch dafür, daß Illuminationserlebnisse bei mathematischem Erfinden der Konkomitanz von Sprache und Denken widersprechen. Das introspektive

[43] Nach unserer in [Fabre, 2014] vertretenen These erfolgt das eigentliche Denken generell über vorsprachliche mentale Bilder, die über das Medium der Sprache codiert werden.

[44] Vgl. [Hadamard, 1945], S. 75. Es ist uns nicht gelungen, das oft zitierte geflügelte Wort in Schopenhauers Werken zu finden. In unseren Augen ließe es sich mit seiner Auffassung von Sprache und Denken sogar schwer vereinbaren.

[45] Vgl. [Schopenhauer, 1819], Band 1, Anhang, S. 583.

[46] Vgl. [Schopenhauer, 1819], Band 2, Ergänzungen zum ersten Buch, Zweite Hälfte, §6 Zur Lehre von der abstrakten, oder Vernunft-Erkenntniß. S. 80. Hervorhebung CF.

Zeugnis Hadamards ist aufschlußreich:

> I insist that words are totally absent from my mind when I really think [...] [E]ven after reading or hearing a question, every word disappears at the very moment I am beginning to think it over ; words do not reappear in my consciousness before I have accomplished or given up the research. [...] I think it also essential to emphasize that I behave in this way not only about words, but even about algebraic signs. I use them when dealing with easy calculations ; but whenever the matter looks more difficult, they become too heavy. [...] Now, personally, if I had to think of any syllogism, I should not think of it in terms of words - words would hardly allow me to see whether the syllogism would be right or wrong - but with a representation [... using] spots of an undefined form, no precise shape being necessary for me to think of spots lying inside or outside of each other.[47].

Neben Worten handicapen selbst Symbole die Kreativität: „whenever the matter looks more difficult, they become too heavy.“ Wird Mathematik als Sprache aufgefaßt, so verschwimmen die Symbole aus der globalen Vogelperspektive. Analog bereitet uns das mentale Bild eines 1000-Ecks keine Schwierigkeiten, während in einer PC-Visualisierung bereits das Gauß ans Herz gewachsene 17-Eck keine Kanten erkennen läßt.

Hadamard detailliert die Kette mentaler Bilder bei Euklids klassischem Beweis der Unendlichkeit der Primzahlenfolge, in denen nicht der Beweis selbst sondern dessen Kohärenz zum Ausdruck kommt:

> [O]ne can easily realize how such a mechanism or an analogous one may be necessary to me for the understanding of the above proof. I need it in order to have a simultaneous view of all elements of the argument, to hold them together, to make a whole of them in short, to achieve that synthesis which we spoke of in the beginning of this section and give the problem its physiognomy. It does not inform me on any link of the argument (i.e., on any property of divisibility or primes) ; but it reminds me how these links are to be brought together. If we still follow Poincare's comparison, that imagery is necessary in order that the useful hookings, once obtained, may not get lost[48].

Selbst der Laie kann sich den „Mechanismus“ leicht einprägen und anschließend ähnliche mentale Bilder jederzeit abrufen und den Beweis vorführen. Würde man Benacerraf vertrauen, wären gute Semantik und gute Epistemologie nicht zu konzilieren. Dabei wird die Praxis übersehen, alle Beweisschritte „simultan“ als „Physiognomie“ - wie etwa die Züge eines bekannten Gesichts - abzuspeichern. Daher erfindet der Meister seinen eigenen Beweis, statt in die Semantik des Urhebers einzusteigen. Die Geistesgabe des Synthetisierens ist nichts Seltenes: der Maler weiß die wenigen Striche zu finden, die mehr Inhalt ausdrücken als detailreichere Kameraaufnahmen.

Bei der Überprüfung des Beweises, vor der sich nicht nur Alain Connes fürchtet, steht die Semantik im Vordergrund. Zwar kann sich der Mathematiker gelegentlich vom Computer helfen lassen. Hadamard vertritt eine wortlose Verbalisierung (das Oxymoron sei uns verziehen):

[47] Vgl. [Hadamard, 1945], S. 75-76.
[48] Vgl. ebd. S. 77. *Hookings* spielt auf die Atome des Demokrit an.

> Then comes the verifying and „precising“ stage. In that final phase of the work, I may use algebraic symbols ; but, rather often, I do not use them in the usual and regular way. I do not take time to write the equations completely, only caring to see, so to speak, how they look. These equations, or some terms of them, are often disposed in a peculiar and funny order like actors in a scenario, by means of which they „speak“ to me, as long as I continue to consider them. But if, after having been interrupted in my calculations, I resume them on the following day, what I have written in that way is as if „dead“ for me. Generally, I can do nothing else than throw the sheet away and begin everything anew[49].

Wenn Gleichungen zweckentfremdet als Platzhalter eingesetzt werden, warum nicht auch Worte?

George Pólyas Gebrauch von Worten

Bis auf eine Ausnahme ergeht es allen Mathematiker, denen Hadamard begegnet ist, nicht anders als ihm selbst: sie benützen keine Worte, nicht einmal Zeichen und Symbole, sondern verschwommene mentale Bilder. Allein Pólya pflegt einen - unkonventionellen - Umgang mit Worten. Er schreibt an Hadamard:

> I believe [...] that the decisive idea which brings the solution of a problem is rather often connected with a well-turned word or sentence. The word or the sentence enlightens the situation, gives things, as you say, a physiognomy. It can precede by little the decisive idea or follow on it immediately ; perhaps, it arises at the same time as the decisive idea [...] The right word, the subtly appropriate word, helps us to recall the mathematical idea, perhaps less completely and less objectively than a diagram or a mathematical notation, but in an analogous way [...] It may contribute to fix it in the mind[50].

Eine echte Ausnahme bildet Pólya nicht. Seine umfunktionierten Worte stehen nicht im üblichen syntaktischen Verhältnis einer Wortsprache; er zieht sie vielmehr wie Signalflaggen auf. Der gefeierte Semiotiker Roman Jakobson bestätigt Hadamard die Plastizität von Symbolen:

> Signs are a necessary support of thought [...] the most usual system of signs is language properly called ; but internal thought, especially when creative, willingly uses other systems of signs which are more flexible, less standardized than language and leave more liberty, more dynamism to creative thought [...] Amongst all these signs or symbols, one must distinguish between conventional signs, [...] on the other hand, personal signs which, in their turn, can be subdivided into constant signs [...] and into episodical signs, which are established ad hoc and only participate in a single creative act[51].

Bis auf den Fall Pólya gibt es eine persönliche Palette „episodischer“ Zeichen:

> The mental pictures of the mathematicians whose answers I have received are most frequently visual, but they may also be of another kind for instance, kinetic. There can also be auditive ones, but even these [...] quite generally keep their vague character[52].

[49] Vgl. [Hadamard, 1945], S. 82.
[50] Vgl. ebd. S. 84-85.
[51] Vgl. ebd. S. 96-97.
[52] Vgl. ebd. S. 85.

Kurz vor Druckfreigabe erhält Hadamard die Antwort Einsteins[53], die er nicht zu kommentieren braucht, da sie in perfektem Einklang mit seiner Theorie steht. Zum Gebrauch der Wortsprache schreibt Einstein:

> The words or the language, as they are written or spoken, do not seem to play any role in my mechanism of thought. The psychical entities which seem to serve as elements in thought are certain signs and more or less clear images which can be „voluntarily" reproduced and combined. There is, of course, a certain connection between those elements and relevant logical concepts. It is also clear that the desire to arrive finally at logically connected concepts is the emotional basis of this rather vague play with the above-mentioned elements. But taken from a psychological viewpoint, this combinatory play seems to be the essential feature in productive thought - before there is any connection with logical construction in words or other kinds of signs which can be communicated to others[54].

Ferner bestätigt Einstein, daß auch er Signalflaggen benutzt: in seinem Fall visuelle bzw. motorische Symbole. Besonders interessant ist, daß Einstein das Unterbewußtsein stets mitwirken läßt:

> It seems to me that what you call full consciousness is a limit case which can never be fully accomplished. This seems to me connected with the fact called the narrowness of consciousness (Enge des Bewußtseins)[55].

Warum wäre volle Bewußtheit ein *Grenzfall*? Eine mögliche Erklärung wäre u.E., daß die mentalen Bilder der Deduktionskette sequentiell aufeinanderfolgen. Es kann blitzschnell von einem Bild auf ein anderes umgeschaltet werden, was die Illusion der Parallelität bewirkt, aber das Bewußtsein ist zu eng, um auf zwei Bilder gleichzeitig zu fokussieren. Wenn Hadamard fragt: „when I pronounce one sentence, where is the following one?" dürfte die Antwort lauten: im subliminalen Bewußtsein! Mit diesem Problem ist auch der Computer konfrontiert, wenn er mit keinen Vektorprozessoren ausgestattet ist. Die bereits geladenen bzw. generierten Daten verbleiben abrufbereit in einem Pufferspeicher (dem *Cache*). Auch werden bald benötigte Daten vorab aus dem Hintergrundmedium aufgerufen und im Cache bereitgehalten (sogenanntes *read ahead*). Bei schwierigeren Aufgaben muß sich der Mathematiker von den sachrelevanten Daten - den Atomen, die Poincaré an die Wand geschossen hat - wie ein Schwam imprägnieren lassen. Nur parat gehaltene Atome verhaken miteinander. Allein das subliminale Bewußtsein kann die „following sequence" im holistischen mentalen Bild abspeichern.

9.10. Denkstrategien der Mathematiker

Hadamard teilt die Mathematiker in drei Kategorien ein:

[53] Originaltext in Anhang H, 267.
[54] Vgl. Anhang H, S. 267.
[55] Vgl. Anhang H, S. 267. *Enge des Bewußtseins* steht auf Deutsch im Original.

i) Unterschiedlich tiefes Eintauchen in die Schichten des Unterbewußtseins;
ii) Unterschiedliche Fokussierung des Denkens;
iii) Unterschiedliche Hilfsmittel der Anschauung.

Wie es beim Schach Angriffs- und Verteidigungsspieler gibt, erkennt bald jeder Mathematiker, ob er gern kryptische Formeln auffädelt oder lieber der Inspiration seiner inneren Anschauung folgt. Da er nur den Austausch zwischen dem bewußten und dem subliminalen Selbst in Betracht zieht, genügt Poincaré die heute noch geläufige Unterscheidung zwischen Analytikern und Geometern (Vgl. Zitat auf S. 89). Hadamard stellt diese Dichotomie in Frage. Der Mathematiker verfügt über beide natürlichen Anlagen, die aber im Unterbewußtsein verschieden aufgeschichtet sind.

9.10.1. Die Bewußtseinsschichten

Bei Poincaré überlappen sich die Denkprozesse der Analytiker und der Geometer wenig:

> Die einen sind vor allem um die Logik besorgt [...] Die andern lassen sich von ihrer Intuition an die Hand nehmen[...] Nicht der jeweilige Stoff drängt [den Mathematikern] die eine oder die andere Methode auf. Wenn man die ersteren oft Analytiker, die anderen Geometer nennt, so bleiben die einen Analytiker, selbst bei geometrischen Arbeiten, während die anderen auch dann noch Geometer sind, wenn sie sich mit reiner Analysis beschäftigen. Es ist die natürliche Anlage des Geistes, die sie zu Logikern oder Intuitiven macht, und sie können diese nicht abstreifen, wenn sie eine neue Aufgabe in Angriff nehmen. Es ist auch nicht die Erziehung, die in ihnen die eine der beiden Richtungen gefördert und die andere erstickt hat. Man wird nicht zum Mathematiker erzogen sondern geboren, und anscheinend wird man auch zum Geometer oder zum Analytiker geboren[56].

Poincaré räumt allerdings ein, daß sich der talentvolle Mathematiker trotz seiner natürlichen Inklination auf dem nicht heimischen Terrain auch behauptet. Hadamard läßt die von Poincaré begutachteten großen Namen kritisch Revue passieren und argumentiert gegen die Dichotomie für unterschiedlich angeordnete Schichten des unterbewußten Selbst; die allein ins Auge fallende, da oben liegende, subliminale Schicht zeugt zwar von einer analytischen bzw. geometrischen Präferenz; man soll aber tiefer graben.

Bernhard Riemann, der wie kaum ein anderer ein intuitiver Geist war, bietet sich als Paradigma an. Die sonst in seinen Schriften reichlich verstreuten geometrischen Bilder spielen in seiner berühmten Schrift über die Primzahlen[57] keine nennenswerte Rolle.

Hadamard ist mit dem riemannschen Werk am besten vertraut; er war nämlich derjenige, der sämtliche[58] intuitive Propositionen Riemanns bewiesen hat. Verblüffend ist,

[56]Vgl. [Poincaré, 1905b], S. 11-12. Übersetzung CF.
[57]*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*, 1859.
[58]Bis auf die heute noch widerspenstige Vermutung über die nicht trivialen Nullstellen der ζ-Funktion.

daß es zu Riemanns Zeiten das Instrumentarium noch nicht gab, das Hadamard 30 Jahre später erfolgreich einsetzte:

> Of course, all these complements could be brought to Riemann's publication only by the help of facts which were completely unknown in his time; and, for one of the properties enunciated by him, it is hardly conceivable how he can have found it without using some of these general principles, no mention of which is made in his paper[59].

Auch ein Genie ist auf den allgemeinen Wissenstand seines Fachs angewiesen. Das macht Marcel Berger mit dem Untertitel seines schönen Buchs [Berger, 2010] deutlich: *A Jacob's ladder to modern higher geometry*. Hilberts 23 Probleme werden nur dank des theoretischen Fortschritts nach und nach abgearbeitet. Als Poincaré seine berühmte Vermutung über die Sphäre verkündigte, war ihm klar, daß die Zeit noch nicht reif für einen Beweis war. Erstaunlich ist, daß Riemann mit seiner Intuition unserem heutigen Theoriestand deutlich vorauslief. In den untersten Schichten seines Unterbewußtseins lagen theoretische Ansätze versteckt, die ihn zu seinen damals kühnen Vermutungen autorisierten[60]. Im seinem Nachlaß wurde eine Notiz über die Nullstellen der ζ-Funktion gefunden: „These properties of ζ are deduced from an expression of it which, however, I did not succeed in simplifying enough to publish it.“; Hadamard zitiert die Notiz mit den Worten: „We still have not the slightest idea of what the expression could be.“

Für Poincaré war Weierstraß der typische Analytiker; demgegenüber war Riemann das Paradigma des Geometers: „Riemann hingegen nimmt sofort die Geometrie zu Hilfe, jede seiner Konstruktionen ist ein Bild, das keiner vergessen kann, wenn er einmal den Sinn erfaßt hat[61].“ Riemanns geometrische Präferenz steht nicht zur Debatte; jedoch mußte ihm seine mysteriöse Formel im Unterbewußtsein vorgeschwebt haben, aber so tief, daß es ihm nicht gelang, sie von der Schlacke zu befreien.

Daß es tatsächlich unter den Mathematikern Analytiker und Geometer gibt, dürfte daran liegen, daß die analytische und die anschauliche Schicht des Unterbewußtseins individuell verschieden angeordnet sind. Das Werkzeug der Introspektion vermag über die Struktur des unterbewußten Selbst und die Emergenz der Illumination keine Aussagen zu machen. Wir schilderten bereits auf S. 53 das Bergsonsche Bewegungsmodell,

---

[59] Vgl. [Hadamard, 1945], S. 118.

[60] Ein noch frappierender Fall der Emergenz aus den tiefsten Schichten des Unterbewußtseins sind die Ergebnisse von Ramanujan, der kein klassisch ausgebildeter Mathematiker war und von dem Hardy meinte: „I have never met his equal, and can compare him only with Euler or Jacobi.“ Heute noch schöpft die Mathematik aus seinem Nachlaß faszinierender Formeln, zu denen Hardy anmerkte ([Kanigel, 1991], S. 168): „[they] must be true, because, if they were not true, no one would have the imagination to invent them.“

[61] Vgl. [Poincaré, 1905b] S. 15. Übersetzung CF.

das unserer Ansicht nach große sinnreiche Einblicke eröffnete, und das Deleuze in seinen Vorlesungen [Deleuze, 1983] tiefsinnig kommentiert hat.

9.10.2. Weitere Idiosynkrasien

Als zweites Einteilungskriterium der mathematischen Forscher nannten wir die Fokussierung auf das Ziel, d.h. die Streuung der Atomgarbe, die gegen Poincarés Wand geschossen wird. Eine Korrelation zu den Bewußtseinsschichten würde Sinn machen. Dem intuitiven Geist dürfte das Querdenken leichter fallen, das Schrot über die Wandfläche zu verteilen, als dem Logiker, der den engen Pfad der Syllogismen freiharkt.

Hadamard vermutet einen Zusammenhang, er sieht aber ein Gegenbeispiel im posthumen Brief, den der hochintuitive Evariste Gallois in der Nacht vor seinem Duell schrieb; darin kommen scharf fokussierte Gedanken zum Ausdruck. Angesichts der dramatischen Geisteslage, in der sich Gallois befand, führt Hadamard das Gegenbeispiel - im übrigen das einzige, das er anbietet - vorsichtig an und kommt zu dem weisen Schluß, daß Intuition und Fokussierung „gelegentlich“ nicht inkompatibel sind.

Das dritte Unterscheidungskriterium steckt in der Verfaßtheit der individuell geprägten mentalen Bilder. Die Fähigkeit, die „Physiognomie“ eines Beweises - wie etwa eines Gesichts - zu erkennen, zeichnet zwar den Erfindergeist aus. Darüberhinaus Vermutungen anzustellen, aus welchen mentalen Bildern diese entspringt, wäre für den Psychologen eine unzumutbare Herausforderung.

<u>Fazit</u>

i) Poincaré hat Recht: nicht die Logik sondern „die Intuition ist das Werkzeug der Erfindung.“
ii) Mathematisches Denken erfolgt primär über nichtsprachliche mentale Bilder.
iii) Allein die Introspektion der großen Mathematiker informiert uns über die Wechselwirkung zwischen bewußtem und subliminalem Denken.
iv) Die Anordnung der Schichten des Unterbewußtseins ist individuell angelegt.
v) Wie die Arbeit der tieferen Schichten in das bewußte Selbst emergiert, kann der Philosoph nur metaphysisch erforschen.

Nach unserem Kommentar zu Poincaré und Hadamard, haben wir genügend Material eingesammelt, um auf der Linie des Fiktionalismus eine philosophische Synthese vorzuschlagen: den Modellismus.

10. Modellismus

Wittgensteins Modellbegriff. Der logische Bau verbindet Original und Abbild. Hilberts Formalismus. Das Quine-Putnam-Unentbehrlichskeitsprinzip stärkt den Platonismus a posteriori. Das Argument zum Modellismus. Fiktionen kollidieren bei zunehmender Komplexität. Abbilden erhält die Originalstruktur. Das Erfindungskriterium der Harmonie.

Über den hohen Stellenwert der Mathematik herrscht weitgehend Einvernehmen, weil die mathematisierten Naturwissenschaften eine exzellente Beschreibung der Welt abgeben. Die Unverzichtbarkeit der Mathematik stärkt die Platonisten in ihrem Glauben an die Wahrheit der Aussagen und die Existenz der Entitäten . Die Problematik ist aufgeschoben, nicht aufgehoben. Es ist jedoch u.E. möglich, anhand der Widerspruchsfreiheit, die beiden disputablen Begriffe Wahrheit und Existenz aus dem Spiel zu lassen. Wir steuern auf eine *platonistische Fortsetzung des Konventionalismus* zu, die wir Modellismus nennen. Diese Theorie wird einerseits durch die Unentbehrlichkeit der Mathematik begründet, andererseits durch das Gefühl, beim Erfinden der Mathematik von einer jenseitigen Harmonie angeleitet zu werden. Vorweg klären wir den Modellbegriff.

10.1. Modellierung dynamischer Systeme

Für Aristoteles (Physik II.3) wird nach dem Kausalitätsprinzip Bewegung durch vier Ursachen bewirkt: a) Stoffursache (causa materialis), b) Wirkursache (causa efficiens), c) Formursache (causa formalis), d) Zweckursache (causa finalis). Der Aquiner Thomas hebt die Zweckursache heraus, indem er jedem Handelnden eine bewußte Absicht auf ein Ziel hin unterstellt: „omne agens agit propter finem[1]“. Wie organisiert sich die Welt, bzw. wie organisiert unser Verstand unser Bild der Welt, um eine Dynamik zu erzeugen?

Ein *System* ist eine Menge von Objekten, zwischen denen Beziehungen in bezug auf ein Ziel bestehen[2]. Die durch Norbert Wiener initiierte Kybernetik ($\kappa\upsilon\beta\epsilon\rho\nu\acute{\epsilon}\tau\epsilon\varsigma$= Steu-

[1] Vgl. Summa Theologicae I, quaestio 44, articulus 4.

[2] Poincaré sprach von einem dynamischen System, wenn der Prozeß zeitabhängig aber homogen bezüglich der Zeit verläuft: der Anfangszustand ist allein relevant, der Anfangszeitpunkt bleibt beliebig.

ermann) fokussiert auf die Zielorientierung und beschäftigt sich mit der Steuerung dynamischer Systeme, die bei Artefakten zielgerecht gelenkt werden bzw. bei Natursystemen sich selbst lenken. Die vier aristotelischen Ursachen werden in ein relationales Netz aus sieben Komponenten eingebunden: 1) Systemumgebung, 2) Lenkkraft, 3) Ziel, 4) Struktur, 5) Eingaben, 6) Ausgaben, 7) Rückkopplung.

Die *Struktur*, der Deus ex machina, verarbeitet die Inputs zu Outputs, wie etwa die CPU eines Computers. Falls das System außerhalb von uns lebt (etwa das Sonnensystem), wird eine anthropische Struktur appliziert. Bei Artefakten wird die Struktur entweder von einem Urheber konstruiert (ein Fahrrad), oder unkoordiniert von einem Kollektiv (eine Sprache). Ein System, das ein anderes abbildet (ein Roboter) heißt *Modell*. Wir exerzieren die Zerlegung an einem bekannten Beispiel Wittgensteins:

> Die Grammophonplatte, der musikalische Gedanke, die Notenschrift, die Schallwellen, stehen alle in jener abbildenden internen Beziehung zueinander, die zwischen Sprache und Welt besteht. Ihnen allen ist der logische Bau gemeinsam[3].

Dieses musikalische Bric-à-brac weist *Familienähnlichkeiten* auf[4]. Zwar gleichen einige Familienmitglieder einander hinsichtlich ihres Wuchses, ihrer Gesichtszüge, ihrer Augenfarbe, usw., aber es gibt kein Merkmal außer der gemeinsamen Filiation, das allen Familienangehörigen zukäme. Die Grammophon-Platte ist ein Artefakt; die Notenschrift enthält Kryptogramme, die einen Transport des musikalischen Gedanken zwischen Musikkundigen ermöglichen; eine Schallwelle ist ein mathematisierbarer Begriff, den der Physiker zum Herstellen der Grammophon-Platte benötigt. Die vier Ursachen des Aristoteles sind in das kybernetische Schema[5] eingebettet. Beispielsweise läßt sich das System Grammophon-Platte folgendermaßen zerlegen:

Systemumgebung	$\longleftrightarrow$	Plattenfabrik,
Lenkkraft	$\longleftrightarrow$	das Produktionsteam, *causa formalis*,
Ziel	$\longleftrightarrow$	das Herstellen eines Abspielmediums, *causa finalis*,
Struktur	$\longleftrightarrow$	die Kunststoffpresse, *causa efficiens*,
Eingaben	$\longleftrightarrow$	Schellack und Hilfsstoffe, *causa materialis*,
Ausgaben	$\longleftrightarrow$	die abspielbaren Platten,
Rückkopplung	$\longleftrightarrow$	die Endproduktkontrolle.

[3] Vgl. *Traktatus*, [Wittgenstein, 1922], T 4.014.

[4] Wir paraphrasieren Wittgenstein, der in [Wittgenstein, 1953], § 67, den Begriff auf Spiele anwendet: „Ich kann diese Ähnlichkeiten nicht besser charakterisieren als durch das Wort ‚Familienähnlichkeiten'; denn so übergreifen und kreuzen sich die verschiedenen Ähnlichkeiten, die zwischen den Gliedern einer Familie bestehen: Wuchs, Gesichtszüge, Augenfarbe, Gang, Temperament, etc. etc."

[5] Die Darstellung als Flußdiagramm zeigt die Verknüpfungen zu übergeordneten, untergeordneten und benachbarten wechselwirkenden Systemen.

Die Notenschrift und die Schallwelle ließen sich analog zergliedern; ebenso die Sprache als autoreguliertes System, das vom Sprecherkollektiv gesteuert wird. Ein paralleles Verhalten verbindet die Systeme. Wittgenstein beabsichtigt mehr als eine Metapher: eine Modellierung. Wenn wir die Relationen zwischen den Komponenten eines Modells verstehen, können wir analoge Relationen in das Original hineindenken. Wer eine Notenschrift lesen kann, erkennt im voraus welche Tonfolgen die Musikplatte erzeugen wird, ohne etwas über Schallwellen zu wissen. Grammophonplatte, Notenschrift und Schallwellen stehen paarweise[6] „alle in einer abbildenden internen Beziehung zueinander".

In einem abbildenden System imitiert ein *Modell* das Original. Die Struktur des Modells[7] spiegelt entsprechend einer Zielvorgabe die Struktur des Originals ab. Der Mathematiker und Philosoph Stachowiak zeichnet das Modell durch drei Grundzüge (vgl. [Stachowiak, 1973], S. 131-133) aus: i) ein Modell ist eine Abbildung eines Originals, das selbst wieder ein Modell sein kann; ii) es erfaßt nicht alle Attribute des Originals, sondern nur die für die Outputs relevanten; iii) einem Original wird ein unterschiedliches Modell zugeordnet, je nachdem für wen, wann und wozu das Modell gebaut wird.

Die dynamischen Modelle der Wissenschaften stellen keinen Anspruch, Abbilder der Realität zu sein, denn die realen Gegenstände an sich (Noumena bei Kant) sind uns nicht zugänglich. Vielmehr projizieren wir die Modellstruktur auf die Realität, so daß chronologische Voraussagen über die Dynamik der Realität experimentell verifiziert werden; Modelle liefern eine Prädiktion, keine Explikation. Die modellierten Gegenstände bewegen sich analog zu den realen Urbildern. Das Modell hilft nur, die bestmögliche Parallelität zu erschließen. Fragonards junge Dame auf der Schaukel ahnt nichts von der mathematischen Sinusformel, die ihre Bewegung bestimmt! Einstein meinte auch nicht, daß wir in einem realen Minkowski-Raum leben.

Daß die Modelle die Realität nur imitieren, zeigt sich darin, daß sie von jeher einen *Zeitindex* hatten. Feinere Experimente bringen immer wieder Unstimmigkeiten zu Tage, die im Nachfolgermodell aufgehoben werden. Selbst die Modelle der Mathematik sind gegen den Zeitwandel nicht immun. Wahre Aussagen sind für immer wahr, aber sie werden in umfangreichere Theorien eingebunden. Die originären Beweise werden selten

[6] Fraglich bleibt, ob das schwer durchschaubare Modell der Sprache unser Verständnis der Welt erhellt. Eine Diskussion darüber würde unser Thema sprengen.

[7] Stachowiaks Modell-Definition ist auf die Zwecke der Kybernetik zugeschnitten. Davon abweichend sind in der mathematischen Logik unter dem Terminus Modell die Beziehungen zwischen den formalen Ausdrücken einer Sprache und deren Bedeutung zu verstehen. Ein Modell ist eine mit bestimmten Strukturen ausgestattete Menge, auf die die Axiome einer Theorie zutreffen; es veranschaulicht das Wesen eines Axiomensystems, dessen Konsistenz durch die Existenz des Modells sichergestellt ist.

benützt, sondern durch bequemere ersetzt. Selbst der Konventionalist Poincaré, der Metaphysik sonst sorgfältig meidet, vertritt die Meinung, daß jede Theorie einen wahren Kern enthält, der zwar anders ausgeleuchtet aber doch vererbt wird:

> Die Theorien machen gewiß zunächst einen zerbrechlichen Eindruck, und die Wissenschaftsgeschichte dokumentiert ihre Vergänglichkeit; doch verenden sie nie vollständig, und jede Theorie hinterläßt etwas. Genau dieses Etwas gilt es zu entwirren, denn dort, und ausschließlich dort, steckt die wahrhafte Realität[8].

Unseren Zwecken kommt die universelle Modelldefinition Stachowiaks gut entgegen. In diesem Sinne ist eine mathematische Theorie ein System: es werden Symbole und ein Axiomensystem eingegeben, die über eine logische Struktur verarbeitet werden. Der Kern, der sich in der Genealogie der Theorien durchhält, ist die „abbildende Beziehung". In der Physik zeigt sich die Überlegenheit einer Theorie im Experiment. Eine neuere mathematische Theorie schränkt hingegen die Gültigkeit der Vorgängertheorien nicht ein, sondern sie geht über sie hinaus, so daß weitergehende Theoreme bewiesen werden. Die Grundidee des hilbertschen Formalismus, zu dem wir uns bekennen, liegt darin, einen formalen Aufbau zu finden, der mehrere Repräsentanten derselben abbildenden Beziehung zusammenfaßt. Was ist mit einer abbildenden Beziehung gemeint?

10.2. Klärung des Abbildungsbegriffs

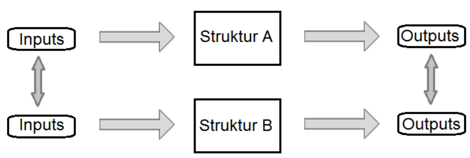

Abbildung 10.1.: Abbilden

Eine Struktur A wird nach Struktur B abgebildet, wenn eine bijektive Relation zwischen den Inputs sowie eine zweite bijektive Relation zwischen den Outputs beider Strukturen bestehen. Im Falle, daß Struktur A eine unverstandene Blackbox ist, macht es eine begreifliche Struktur B möglich, von den Outputs der Struktur B auf die Outputs der Struktur A zu schließen.

Wenn Wittgenstein im *Tractatus* § 4.014 meint, daß „die Grammophonplatte, der musikalische Gedanke, die Notenschrift, die Schallwellen, alle in einer abbildenden internen Beziehung zueinanderstehen", wird beim Abbilden trotz der Verschiedenheit der Strukturen etwas erhalten: „ihnen allen ist der logische Bau gemeinsam." Nennen wir A_1 die Struktur der Grammophonplatte, A_2 die der Notenschrift, A_3 die der Schallwellen und A_4 die der Sprache sowie B die Struktur der Welt[9].

[8] Vgl. [Poincaré, 1902], S.5. Übersetzung CF.
[9] Auf den musikalischen Gedanken kommen wir auf S. 226 noch zurück.

Die Inputs aller A_i sind Gegenstände (Schellackrillen, auditive Reize, Luftvibrationen, Phoneme) und die Outputs sind Artefakten (Schallfolgen, Zeichenfolgen, Musik, gesprochene Sätze). Es können daher zwischen den Gegenständen einerseits und den Artefakten andererseits bijektive Beziehungen ermittelt werden. Die Outputs von Struktur B, nämlich der Welt, sind aber keine Artefakten. Bei diesem kategoriellen Unterschied fällt es viel schwerer eine eineindeutige Beziehung zu explizieren.

Auch der Platonist darf sich nicht einbilden, daß sein Modell einen Einblick in die Platonische Idee der Mathematik verschaffe. Mehr als die Parallelität der Outputs ist aus einer Abbildung nicht herauszuholen. Wittgenstein nennt diese Parallelität „logischen Bau"; wir sprechen lieber von der gemeinsamen durchgängigen Ordnung zweier Strukturen, da wir über das Urbild der Logik in der Ideenwelt nichts wissen können.

10.3. Hilberts Formalismus

Wir erwähnten bereits auf S. 2 Leibniz' *cogitatio caeca vel symbolica.* Sybille Krämer weist auf die „Transformation von Wahrheit in Richtigkeit" hin und zeichnet drei Charakteristika der „blinden und zugleich symbolischen Reflexion" über formale Symbole aus: i) Die Symbole, die beim Denken zum Einsatz kommen, dienen nicht kommunikativen, sondern instrumentellen Zwecken; ii) In Kalkülen werden die Symbole autark gegenüber den Gegenständen ihrer Referenz; iii) Die Symbole bilden die in ihnen repräsentierten Gegenstände nicht einfach ab, sondern bringen sie hervor.

Auch das Schachspiel ist eine formale Struktur. Der kriegerische Kontext, die Namen und Gestalten der Schachfiguren sind formal irrelevant; sie regen lediglich die Imagination an und könnten anders inszeniert werden. Analog entpersonalisiert Hilbert die mathematischen Gegenstände und schaut stattdessen auf die Strukturen.

„Zwei voneinander verschiedene Punkte A und B bestimmen stets eine Gerade a." So lautet das erste der 20 Hilbertschen Axiome. Die Termini Punkt, Gerade, Ebene sind Platzhalter, die erst beim Operieren im formalen System eine instrumentelle Bedeutung erhalten, d.h.: Die Punkte A und B können z.B. auch Matrizen sein, zwischen denen sich anhand einer Linearitätsrelation eine Gerade aufspannen läßt. Im Brief vom 29. Dezember 1899 von Hilbert an Frege wird die Willkür der Benennung der formalen Gegenstände betont; es hätte das Etikett an der Schublade anders beschriftet werden können; es kommt nur auf die strukturellen Relationen an:

> Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z.B. das System: Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger [...] denke und dann nur meine sämtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze, z.B. der Pythagoras, auch von diesen Dingen. Mit anderen Worten: eine jede Theorie kann stets auf unendlich viele Systeme von Grundelementen angewandt werden[10].

Das Axiomensystem muß vollständig sein, denn die Triade Liebe-Gesetz-Schornsteinfeger reichte noch lange nicht aus, um den Pythagoras abzuleiten. Widerspruchsfreiheit gilt als zentrale Forderung:

> Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz[11] .

Darauf antwortet Frege im Geist der herkömmlichen Mathematik:

> Am schroffsten stehen sich wohl unsere Ansichten gegenüber hinsichtlich Ihres Kriteriums der Existenz und der Wahrheit. Aber vielleicht verstehe ich Ihre Meinung nicht vollkommen. Um darüber ins Reine zu kommen, lege ich folgendes Beispiel vor. Nehmen wir an, wir wüßten, daß die Sätze
> 1. A ist ein intelligentes Wesen;
> 2. A ist allgegenwärtig;
> 3. A ist allmächtig
> mit ihren sämtlichen Folgen einander nicht widersprächen; könnten wir daraus schließen, daß es ein allmächtiges, allgegenwärtiges, intelligentes Wesen gäbe? Mir will das nicht einleuchten. Das Prinzip würde etwa so lauten: Wenn die Sätze
> „A hat die Eigenschaft Φ“
> „A hat die Eigenschaft Ψ“
> „A hat die Eigenschaft χ“
> mit sämtlichen Folgen einander nicht (allgemein, was auch A sei) widersprechen, so gibt es einen Gegenstand, der diese Eigenschaften Φ, Ψ, χ sämtlich hat[12].

Hilbert zieht diplomatisch vor, auf Freges Einwand nicht einzugehen[13]. Mit seinem persiflierten Gottesbeweis thematisiert der Platonist Frege die Existenz der mathematischen Gegenstände. Für Hilbert ist die Existenzfrage mathematisch irrelevant. Freges Einwand hält ohnehin eine formalistische Prüfung u.E. nicht aus:

i) Die Liste erfaßt nur drei Eigenschaften. In Descartes' ontologischem Beweis heißt es: Das erste und oberste Seiende besitzt ALLE Vollkommenheiten. Würde Frege seine Liste ergänzen, könnten Vollkommenheiten miteinander kollidieren (z.B. unendlich gütig vs. uneingeschränkt gerecht).

ii) Allmächtigkeit ist widersprüchlich: könnte der Allmächtige einen so schweren Stein

[10] Vgl. [Steck, 1941].
[11] Vgl. [Gabriel, 1976], S. 66, Hilbert an Frege, 29. Dezember 1899.
[12] Vgl. Brief vom 6. Januar 1900, Frege an Hilbert, Gottlob Frege, Briefwechsel, Gabriel et al., Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1900. S. 18-19.
[13] Mit Datum 15. Januar erteilt Hilbert eine höfliche Abfuhr: „Sehr geehrter Herr College! Leider ist es mir bei augenblicklicher Überbürdung mit Arbeiten aller Art, nicht möglich Ihren Brief eingehend zu beantworten. Ihre Ausführungen sind mir von vielem Interesse und großem Werth. Sie werden mich jedenfalls zu einem genaueren Nachdenken und zu einer sorgfältigen Formulirung meiner Gedanken anregen. Mir bestem Gruß ...“ Vgl. ebd.

schaffen, daß er ihn nicht zu heben vermag?
iii) Gott werden anthropomorphe Eigenschaften zugeschrieben. Die einzig relevanten göttlichen Eigenschaften könnten allerdings ohne Petitio Principii nicht genannt werden.
iv) Angenommen eine vollständige Liste nichtwidersprüchlicher Eigenschaften könnte aufgestellt werden[14]. Dann würde Gott zwar existieren, aber nur in unserem Verstand. Deswegen fordert Anselm von Canterbury, daß Gott auch die letzte Vollkommenheit besitzt, real zu existieren.

Existenz im Sinne von Hilbert ist nicht ontologisch gemeint, sondern innerhalb eines formalen Systems. Ein Rechteck ist z.B. ein wohldefinierter Gegenstand (rechtwinkliges Viereck). Es existiert in der euklidischen Geometrie, wo die Winkelsumme im Dreieck genau π beträgt, aber weder in der sphärischen noch in der hyperbolischen. Die gegenständliche Auffassung der Geometrie, die Frege in der Nachfolge Kants noch vertritt, wird im Hilbertschen Formalismus eliminiert. Die Mathematik bezieht sich auf die strukturellen Relationen; sie sieht von den Gegenständen ab, die durch die instrumentellen Manipulationen von den Symbolen hervorgebracht werden. Mathematische Gegenstände existieren grundsätzlich als Zeichen (auf dem Papier, an der Tafel). Das freie Operieren mit Zeichen hört nur bei Widersprüchen auf. Es gelten drei Forderungen: (1) Die Axiome sind voneinander unabhängig; (2) Weder die Axiome noch die Folgerungen aus ihnen dürfen kollidieren; (3) Bei Erweiterung des Axiomensystems um eine aus den bisherigen Axiomen nicht ableitbare Aussage darf kein Widerspruch entstehen. Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit der Axiomensysteme werden allein *von der Form her* konstituiert.

Der Formalismus ist ein Fiktionalismus, der auf Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit achtet, und die Existenz mathematischer Gegenstände nicht thematisiert. Es genügt, daß die mathematischen Modelle neues Wissen erzeugen. Obwohl sich der Formalismus von der Metaphysik distanziert, trifft dasselbe Unentbehrlichkeitsargument zu, das auch den Platonismus stark macht: die besten Modelle der Anwendungswissenschaften integrieren mathematische Theorien, die sich dadurch Anerkennung verdienen.

[14] Was gemäß Gödels erstem Unvollständigkeitssatz nicht unproblematisch wäre.

10.4. Quine-Putnam-Unentbehrlichskeitsprinzip

10.4.1. Die These Colyvans

Die wissenschaftlichen Theorien sind dermaßen auf die Mathematik angewiesen, daß der indisputable empirische Erfolg auf das Werkzeug Mathematik überschwappt. Wie Colyvan in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* betont, gilt Unentbehrlichkeit nach wie vor als das hochaktuelle Argument par excellence zugunsten des Platonismus :

> If, as some believe, the indispensability argument is the only argument for platonism worthy of consideration, then if it fails, platonism in the philosophy of mathematics seems bankrupt. [...] [I]t is worth noting that the indispensability argument is one of a small number of arguments that have dominated discussions of the ontology of mathematics. [...] Finally, it is worth stressing that even if the indispensability argument is the only good argument for platonism, the failure of this argument does not necessarily authorize nominalism [...] It does seem fair to say, however, that if the objections to the indispensability argument are sustained then one of the most important arguments for platonism is undermined. This would leave platonism on rather shaky ground[15].

Wie lautet das Unentbehrlichskeitsprinzip[16] (kurz Q-P-Prinzip)? Colyvan wählt folgenden - auch bei anderen Philosophen nachzulesenden - gültigen Syllogismus[17]:

(1) Prämisse: (P1) Wir sollten ein ontologisches Bekenntnis zu allen und nur solchen Entitäten ablegen, die für die besten wissenschaftlichen Theorien unentbehrlich sind.
(2) Prämisse: (P2) Mathematische Entitäten sind für unsere besten wissenschaftlichen Theorien unentbehrlich.
(3) Konklusion: Wir sollten ein ontologisches Bekenntnis zu den mathematischen Entitäten ablegen.

Wenn er auch im Absatz „Objections" nicht näher darauf eingeht, erwähnt Colyvan en passant, daß dieser Formulierung der „double standard"-Einwand von Quine (vgl. [Quine, 1980]) entgegensteht: die Kriterien für Realität sind bei den abstrakten Gegenständen der Physik unbedacht großzügig, bei der Mathematik hingegen geradezu engherzig. In der Tat sind z.B. Relativitätstheorie und Quantenmechanik so eklatant experimentell bestätigt, das es schwer fällt, schwarzen Löchern bzw. dem Teilchenzoo des Standardmodells den ontologischen Status streitig zu machen. Verwahrt man sich gegen die diskriminierende Behandlung, kommt den im Modell mitgestrickten mathematischen Entitäten gleiche Realität zu. Gödel meinte entsprechend zur Existenz der abstrakten mathematischen Gegenstände:

[15] Vgl. [Colyvan, 2015].

[16] Das Argument wird den Urhebern zu Ehren oft Quine-Putnam-Prinzip genannt. Frege, Carnap und von Neumann machten es allerdings früher geltend. Putnam sprach prägnant von dem Wunderargument: „es ist ein Wunder, daß eine Theorie, die von gekrümmter Raum-Zeit handelt, erfolgreich Phänomene voraussagt." vgl. [Putnam, 1975a], S. 78-79.

[17] Vgl. [Colyvan, 2015].

> It seems to me that the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence. They are in the same sense necessary to obtain a satisfactory system of mathematics as physical bodies are necessary for a satisfactory theory of our sense perceptions and in both cases it is impossible to interpret the propositions one wants to assert about these entities as propositions about the „data", i.e., in the latter case the actually occurring sense perceptions[18].

Colyvan genügt diese metaphysische platonistische Aussage nicht; er möchte aus der epistemischen Unentbehrlichkeit einen ontologischen Anspruch ableiten. Prämisse (P2) postuliert korrekt, daß „mathematische Entitäten für unsere besten wissenschaftlichen Theorien unentbehrlich sind". Prämisse (P1) verkennt jedoch, daß inzwischen aufgegebene wissenschaftliche Theorien auch auf gesunden mathematischen Entitäten aufbauten. Wenn anwendungswissenschaftliche Modelle in Mißgunst geraten, darf der zugrundeliegenden Mathematik der ontologische Status nicht entzogen werden.

Das Ptolemäische Planetenmodell ist von der effektiveren Relativitätstheorie entthront worden. Die Existenz der putativen Himmelssphären ist aufgehoben, aber die für sie stehenden Epizykeln des Ptolemäus bleiben mathematisch einwandfrei: die mathematischen Entitäten verhalten sich u.E. *neutral* gegenüber dem nominalistischen Wahrheitsgehalt jeder wissenschaftlichen Theorie. Sie sind lediglich das *Werkzeug*, dessen Verwendung die Nominalisten eliminieren möchten, wenn z.B. Field (vgl. S. 117) das Newtonsche Gesetz neuschreibt. Nicht die Beschaffenheit des Gerätes sondern das Geschick des Handwerkers begründet die Exzellenz eines Artefakts: technisch vollendete moderne Meißel lassen keinen Bildhauer zum Praxiteles werden. Die Neutralität des mathematischen Apparats gegenüber einem etwa „ontologischen Bekenntnis" stellt u.E. einen starken Einwand gegen Prämisse (P1) dar: wir bestreiten, daß allen und *nur* solchen mathematischen Entitäten ein ontologisches Bekenntnis gebührt, die für die besten wissenschaftlichen Theorien unentbehrlich sind.

Nach unserer Meinung ist Colyvans Rekonstruktion wegen Prämisse (P1) nicht schlüssig. Kann sie umgeformt werden, um den ontologischen Anspruch zu fundieren, ohne für Mathematik und Wissenschaft einen „double standard" anzulegen? Das Q-P-Prinzip stellt fest, daß der Einsatz eines mathematischen Instrumentariums in allen Anwendungswissenschaften, vorneweg der Physik, „unentbehrlich" ist. Der nachweisbare Erfolg der Theorien bürgt tatsächlich für die Effizienz des mathematischen Substrats. Unentbehrlichkeit ist ein starkes Argument, weil es *a posteriori* gilt; es ist daher auch für die Empiristen unter Umständen annehmbar.

[18] Vgl. [Gödel, 1944], S. 137.

Wegen der zuverlässigen Prognosen der physikalischen Theorien über die Dynamik der Welt erscheinen uns die Objekte der Mikrophysik zwar nicht sinnlich wahrnehmbar aber deswegen nicht abstrakt. Darf man den Gegenständen der Mathematik weniger Realität gönnen als etwa den nicht minder präsumtiven Teilchen des Standardmodells? Das Higgs-Boson ist ein Kind der Mathematik. Nachdem seine Existenz nunmehr experimentell bestätigt wurde, kann ihm ein Quäntchen Realität nicht abgesprochen werden. Die mathematischen Entitäten, aus denen das Teilchen konstruiert wurde, fingen nicht erst mit seiner Entdeckung zu existieren an. Was heißt überhaupt existieren?

Im Zusammenhang mit den ontologischen Gottesbeweisen wirft Kant ein, daß Existenz kein reales Prädikat ist (vgl. S. 113): „Hundert wirkliche Taler enthalten nicht das mindeste mehr als hundert mögliche." Nach der Kantischen Transzendentalphilosophie existiert nur die Vorstellung materieller und immaterieller Gegenstände in unserem Verstand, der aus Subjektivem Objektives gestaltet. Raum und Zeit werden vom Menschen in die Welt getragen; sie existieren in ihrem anthropischen Gewand unabhängig von uns nicht. Wenn sich alle Mathematiker über Gegenstände wie z.B. Gruppen oder dergleichen einig sind und mit diesen abstrakten Entitäten einvernehmlich für wahr gehaltene Theorien konstruieren, fehlt im Vergleich zu den Theorien der Physik nur die experimentelle Bestätigung; nach dem Q-P-Prinzip erfolgt die Bestätigung durch eine holistische Auffassung des Erfolgs mathematisierter Theorien, der sich nicht nach mathematischen und nominalistischen Komponenten aufteilen läßt. Noch konkreter: wenn ein GPS-Navigator eine Genauigkeit von wenigen Metern leistet, die ohne Einbindung der Relativitätstheorie nicht erreicht werden könnte, droht die Debatte um die Wahrheit der Realitätstheorie in einen sterilen Solipsismus auszuarten.

Der Begriff Wahrheit sollte nicht überstrapaziert werden; er ist nicht weniger problematisch als Existenz. Die Theorien der Naturwissenschaften geben sich die Türklinke in die Hand, sie sind daher nie wahr im landläufigen Sinne. Sie sind auch nicht falsch. Das Prädikat *effizient* trifft eher zu. Die Relativitätstheorie ist bereits wegen ihrer Inkompatibilität mit der Quantenmechanik nicht wahr. Es kann daher von ihr nicht abgeleitet werden, daß die ihr zugrundeliegende Geometrie wahr sei, denn in der Mathematik ist „wahr" schlicht das Gegenteil von „falsch".

Das Q-P-Prinzip darf von der Wahrheit im Sinne von Effizienz einer physikalischen Theorie nicht auf die Wahrheit als das Gegenteil von Falschheit des mathematischen Instrumentariums schließen; die Grammatik führt uns in die Irre, wenn das Wörtchen *wahr* für sowohl schwache als auch starke Prädikationen steht.

10.4.2. Die Synthese Panzas

Marco Panza hat sich mit den zahlreichen Versionen des Q-P-Prinzips ausführlich auseinandergesetzt. Die Debatte ist derart weit verästelt (vgl. [Panza, 2012] *The Varieties of Indispensability Arguments*), daß bei der Vielzahl divergierender Schlüsse Zweifel aufkommen, was aus dem Prinzip zur Stärkung des Platonismus rational abgeleitet werden darf. Wir haben in Anhang I aus [Panza & Sereni, 2013b] eine Synopse ausgearbeitet, um die vier Hauptvarianten gegenüberzustellen. Identische Prämissen haben wir zum leichteren Überblick mit einem Gleichheitszeichen markiert.

Die beiden epistemischen Varianten sind nur umsichtiger formuliert; anstelle von <Die Behauptung A gilt> steht <Es darf legitim geglaubt werden, daß A>. Der Platonist fügt seinerseits die Prämisse der Existenz hinzu. Wird vereinbart, daß jede Behauptung durch Voranstellen des legitimen Glaubens epistemisch wird, lassen sich die vier Versionen in ein zweistufiges Argument (erst Wahrheit dann Existenz) umschreiben:

(1) Prämisse: (P'1) Es gibt wahre wissenschaftliche Theorien.
(2) Prämisse: (P'2) Für manche sind mathematische Theorien unentbehrlich.
(3) Prämisse: (P'3) Solche wissenschaftlichen Theorien sind erst dann wahr, wenn die mathematischen Theorien selbst wahr sind.
(4) Realistische Zwischenkonklusion: Die für wissenschaftliche Theorien unentbehrlichen mathematischen Theorien sind wahr.
(5) Prämisse: (P'4) Mathematische Theorien sind erst dann wahr, wenn die entsprechenden Entitäten existieren.
(6) Platonistische Konklusion: Die für mathematische Theorien unentbehrlichen Entitäten existieren.

Colyvans Argument entspricht also im großen und ganzen der epistemischen Version. Daher gilt unsere Stellungnahme zu den Wahrheits- bzw. Existenzeigenschaften entsprechend. Neu ist Prämisse (P'4), die allerdings bei Colyvan implizit hinzuzudenken war. Wie es sich gehört, ist (P'4) falsifizierbar. (P'4) ist nicht so trivial, wie sie anmutet. Im Widerspruch zu (P'4) ermittelte Cardano (1501-1576) vermöge „imaginärer“, somit nicht existierender Zahlen, die bisher nicht berechenbaren Nullstellen kubischer Gleichungen[19]. Das Paradoxon hat damals nicht nur die Platonisten gestört. Die Entitäten

[19] Cardanos Formel wird in der Physik erfolgreich angewandt. Die Van-der-Waals-Gleichung ist eine kubische Zustandsgleichung in der Theorie realer Gase. Um das Verhalten bei den Nullstellen zu bestimmen, wird die Cardanische Formel eingesetzt, bei der mitunter die drei reellen Lösungen über die Quadratwurzeln negativer Zahlen ermittelt werden. Zu Cardanos Zeiten, als es noch keine

müssen immanent im Verstand existieren, sonst kann keine Mathematik betrieben werden. Quadratwurzeln negativer Zahlen existieren nicht und doch versagt die Formel nie. Die mathematische Welt war erst wieder heil, als die reellen Zahlen als Unterkörper der komplexen Zahlen konstruiert wurden[20].

Prämisse (P'4) ist in Panzas Argument der Nervus Probandi: Mathematische Theorien sind erst dann wahr, wenn die entsprechenden Entitäten existieren. Die mathematischen Theorien waren vor Cardano schon wahr. Die Problematik rührt daher, daß die adäquaten mathematischen Entitäten noch nicht erfunden wurden, die nunmehr, wie alle anderen Entitäten auch, in unserem Verstand existieren. Ein ontologischer Anspruch darf u.E. nicht abgeleitet werden. Ein Nominalist würde die Konklusion des Arguments verwerfen, da keine der Prämissen extramentale Existenz explizit legitimiert.

10.5. Das Argument zum Modellismus

Das Q-P-Prinzip wird u.E. überfordert, wenn aus ihm Wahrheit bzw. Existenz abgeleitet werden sollte. Wenn wir jetzt im Unentbehrlichkeitsargument Panzas den Begriff Wahrheit durch Widerspruchsfreiheit substituieren, bleibt der Leitgedanke des Q-P-Prinzips erhalten, die Effizienz der Wissenschaften für einen aposteriorischen Schluß zu verwenden. Ein solches Argument haben wir im Anhang E aufgebaut, wo wir einen Schluß auf nur die beste Erklärung erreichen. Wir meinen, durch Einführung zweier Postulate das Argument stärken zu können :

i) Postulat 1: In konstruierten Fiktionen treten bei zunehmender Komplexität Widersprüche zwangsläufig auf .
ii) Postulat 2: Bei abbildenden Fiktionen überträgt sich die Kohärenz des Urbildes.

Bevor wir die Postulate begründen, formulieren wir das Argument aus, auf das wir hinaussteuern. Das Argument ruht auf drei Säulen, die noch zu begründen sind:
i) Anstelle von Wahrheit steht die Widerspruchsfreiheit des Hilbertschen Formalismus.
ii) Fiktionen führen zwangsläufig zu Kollisionen, d.h. ein Kartenhaus bricht irgendwann zusammen.
iii) Ein Abbild erbt vom Urbild die strukturelle Kohärenz.

Theorie der komplexen Zahlen gab, kam man über das Paradoxon nicht hinweg, daß stets „wahre“ reelle Lösungen mithilfe nicht existierender Quadratwurzeln ermittelt wurden.

[20] Cardano rechnete unwissend im damals unbekannten Körper $\mathbb{C}$ und blieb unbestraft, weil das Ergebnis eine reelle Zahl war.

Modellismus

(1) Prämisse: Naturwissenschaftliche und mathematische Theorien sind menschliche Fiktionen.

(2) Prämisse: Es gibt effiziente naturwissenschaftliche Theorien, deren Prognosen in höchstem Maße verläßlich sind.

(3) Prämisse: Für manche sind mathematische Theorien unentbehrlich.

(4) Prämisse: Wären die unentbehrlichen mathematischen Theorien nicht widerspruchsfrei, würden die Prognosen der besten wissenschaftlichen Theorien im Widerspruch zu deren Effizienz gelegentlich fehlgehen.

(5) 1. Zwischenkonklusion: Die hohe Effizienz vieler naturwissenschaftlicher Theorien belegt ***a posteriori*** die Widerspruchsfreiheit der eingesetzten mathematischen Theorien.

---

(6) Prämisse: Fallunterscheidung: fiktionale Strukturen werden entweder aus freien Stücken konstruiert oder sie bilden eine bestehende Ordnung ab.

(7) Prämisse: In konstruierten Strukturen treten bei fortschreitender Komplexität zwangsläufig Inkonsequenzen auf.

(8) Prämisse: In abgebildeten Strukturen vererbt sich hingegen die Widerspruchsfreiheit der urbildlichen Struktur.

(9) 2. Zwischenkonklusion: Die komplexen gemäß (5) widerspruchsfreien mathematischen Fiktionen werden gemäß (7) nicht konstruiert, sondern sie bilden wegen (8) eine durchgängige Ordnung ab.

---

(10) Prämisse: Intramental konstruierte komplexe Urbilder besitzen wegen (7) keine durchgängige Ordnung.

(11) 3. Zwischenkonklusion: Ein mit durchgängiger Ordnung ausgestattetes komplexes Urbild ist extramental.

---

(12) Konklusion: Die von den effizienten wissenschaftlichen Theorien eingesetzten mathematischen Theorien bilden eine platonische extramentale Ordnung ab.

10.6. Widerspruchsfreiheit statt Wahrheit

In seiner realistischen nichtepistemischen Variante folgert Panza, daß die für wissenschaftliche Theorien unentbehrlichen mathematischen Theorien wahr sind. Dem Wahrheitsbegriff substituiert unsere 1. Zwischenkonklusion den unprätentiösen aber scharf abgegrenzten Begriff der Widerspruchsfreiheit mit folgenden Konsequenzen:

i) Da mathematische Theorien ohnehin widerspruchsfrei konstruiert werden, wird die Widerspruchsfreiheit zwar nur bestätigt, jetzt aber *a posteriori*.
ii) Die Existenz der mathematischen Entitäten, die Panza aus deren Wahrheit folgert, darf nunmehr von der Widerspruchsfreiheit auf keinen Fall abgeleitet werden.
iii) Während Panzas Argument einen Wahrheitsanspruch nur für die wenigen von der Wissenschaft verwendeten mathematischen Theorien geltend macht, fällt diese lästige[21] Restriktion weg: alle (vollständigen[22]) mathematischen Theorien sind widerspruchsfrei.

10.7. Menschliche Fiktionen führen zu Kollisionen

Dreh- und Angelpunkt unseres Arguments ist Prämisse (7), nach der erfundene Fiktionen notwendig kollabieren, wenn sie stets komplexer werden.

Menschliche dynamische Konstruktionen lassen sich als kybernetische Systeme darstellen. Mit dem Grad der Komplexität nimmt die Zahl der Aporien zu. Die Politologie hat mit den Defiziten der Demokratie zu kämpfen, die Rechtslehre mit der Unvereinbarkeit von maximaler Freiheit und maximaler Gleichheit, die Ökonomie mit den Schwächen des Kapitalismus, usw. Selbst am System Sprache wurden von Leibniz, der nach der *characteristica universalis* forschte, über Wittgenstein („Der Satz kann die logische Form nicht darstellen, sie spiegelt sich in ihm.“), die Unzulänglichkeiten stets moniert.

Den mathematisierten Wissenschaften ergeht es nicht besser. Die Vergänglichkeit ihrer Modelle bestätigt, daß immer wieder neue experimentelle Erkenntnisse das theoretische Kartenhaus einstürzen lassen. Allem Anschein nach dürfte der Mensch auf ewig geltende mathematische Konstrukte nicht kollisionsfrei konzipieren können. Doch sind die

[21] Vor der Erfindung der Relativitätstheorie war z.B. die Riemannsche Geometrie wie die meisten Theorien der reinen Mathematik noch ungenützt, daher noch nicht nachweislich wahr!
[22] Von unvollständigen Theorien, wie etwa der Kontinuumshypothese, kann man hoffen, daß in Zukunft Widerspruchsfreiheit hergestellt wird.

(vollständigen) mathematischen Theorien derzeit konsistent und kollidieren nicht. Ist die Vereinigung dieser Theorien auch kollisionsfrei?

Darf man glauben, daß die Mathematik aus der holistischen Perspektive konsistent ist? Gödel lehrte uns, daß sich die Widerspruchsfreiheit einer formalen Theorie nicht innerhalb ihres Axiomensystems beweisen läßt. Zum Nachweis der Konsistenz muß eine auswärtige Theorie herangeholt werden. Auch wenn der Mathematiker Widerspruchsfreiheit als höchstes Gebot beachtet, überblickt er nie alle Sparten der weitverzweigten Mathematik. Es wäre wohl denkbar, daß eine Theorie, deren Konsistenz durch eine zweite Theorie sichergestellt wird, doch an einer dritten konsistenten Theorie jetzt oder in Zukunft zerprallt. Doch gelang es bis dato immer, etwaige Kollisionen in reicheren Theorien aufzuheben. Wir erwähnten die historischen Beispiele der Einschließung der reellen in die komplexen Zahlen oder der euklidischen in die metrischen Geometrien.

Es gibt allerdings Vermutungen, die heute noch nicht bewiesen sind. Diese Stolpersteine rechtfertigen etwaige Einwände gegen die globale Konsistenz des mathematischen Kartenhauses. Kann man darauf vertrauen, daß auch die renitenten Probleme nach und nach gelöst werden? „In der Mathematik gibt es kein Ignorabimus“ verkündet unverzagt Hilbert, der Recht haben dürfte, denn seine 23 Probleme sind inzwischen fast alle entweder ganz oder teilweise gelöst[23].

Hilberts Zuversicht entspringt nicht nur einer resoluten Einstellung; die Geschichte der mathematisierten Wissenschaften zeigt, daß eine Theorie nie restlos verschwindet, auch wenn das Nachfolgermodell oberflächlich betrachtet ganz anders aussieht. In [Connes, Changeux 1989] arbeiten Connes und Changeux die Darwinsche Theorie auf die Naturwissenschaften um; die Idee, auf die wir aus Platzgründen nicht eingehen, wurde bereits von Poincaré lanciert[24]. Ein Beispiel zeigt den Fortbestand der Grundidee.

Newtons Gravitationstheorie von 1686 wurde bereits dreimal modifiziert: bei sehr kleinen Abständen durch die Quantenmechanik, bei sehr großen Geschwindigkeiten durch die spezielle Relativitätstheorie und in der Nähe sehr großer Massen durch die allgemeine

[23]Genauer: nur noch das 6. Problem (Axiomatisierung der Physik), das 8. (Riemannsche und Goldbachsche Vermutung) und das 12. leisten hartnäckigen Widerstand.

[24]Vgl. [Poincaré, 1905], Introduktion, S.8: „Man darf den Gang der Wissenschaft nicht mit den baulichen Veränderungen einer Stadt vergleichen, in der die veralteten Gebäude schonungslos niedergerissen werden, um für neue Bauten Platz zu schaffen, sondern mit der stetigen Evolution der Tierarten, die sich unaufhörlich fortentwickeln und schließlich dem gewöhnlichen Blick unkenntlich werden, während ein geübtes Auge die Spuren der Arbeit verflossener Jahrhunderte stets wiedererkennt. Man darf also nicht glauben, daß die altmodischen Theorien unfruchtbar und vergeblich gewesen wären.“ Übersetzung CF.

Relativitätstheorie. 1983 schlug Mordehai Milgrom eine vierte Änderung als Alternative zur Schwarzen Materie vor[25]. Der harte Kern des Newtonschen Gedanken lebt noch.

Auch wenn es bisher gelungen ist, bei fortschreitender Komplexität die vorübergehenden Inkonsistenzen unvollständiger Theorien zu kurieren, gibt es für die Zukunft keine Gewähr. Wir müssen noch plausibel machen, daß die Methode des mathematischen Erfindens einen künftigen Kollaps verhindert. Es gilt also unsere Prämisse (8) zu begründen: Werden Strukturen *abgebildet* statt *erfunden*, vererbt sich die Widerspruchsfreiheit der urbildlichen Struktur.

10.8. Abbilden erhält die strukturelle Kohärenz

Hilberts Parole: „In der Mathematik gibt es kein Ignorabimus“ verdient Respekt, da sie aus dem Mund eines besonnenen Genies kommt. Wenn Mathematik gegen interne Kollisionen immun ist, müssen nach dem Principle of Charity gute Gründe für diesen Glauben angeführt werden können. Dazu meint Hilbert:

> [E]s drängt sich uns die Frage auf, ob der Mathematik einst bevorsteht, was anderen Wissenschaften längst widerfahren ist, nämlich daß sie in einzelne Teilwissenschaften zerfällt, deren Vertreter kaum noch einander verstehen und deren Zusammenhang daher immer loser wird. Ich glaube und wünsche dies nicht; die mathematische Wissenschaft ist meiner Ansicht nach ein unteilbares Ganze, ein Organismus, dessen Lebensfähigkeit durch den Zusammenhang seiner Teile bedingt wird. Denn bei aller Verschiedenheit des mathematischen Wissenstoffes im Einzelnen, gewahren wir doch sehr deutlich die Gleichheit der logischen Hülfsmittel, die Verwandtschaft der Ideenbildungen in der ganzen Mathematik und die zahlreichen Analogien in ihren verschiedenen Wissensgebieten. Auch bemerken wir: je weiter eine mathematische Theorie ausgebildet wird, desto harmonischer und einheitlicher gestaltet sich ihr Aufbau und ungeahnte Beziehungen zwischen bisher getrennten Wissenszweigen, werden entdeckt. So kommt es, daß mit der Ausdehnung der Mathematik ihr einheitlicher Charakter nicht verloren geht, sondern desto deutlicher offenbar wird[26].

Dieses Zitat ist ein Kompendium tiefgründiger Thesen:

i) Das gefürchtete babylonische Sprachengewirr ist inzwischen der Mathematik „widerfahren“. Ein Funktionalanalytiker kennt sich z.B. in den nichteuklidischen Geometrien oder in der Graphentheorie nicht aus. Auf einer Tagung besucht der Mathematiker Vorträge fremder Sparten nicht, da er nichts verstehen würde. Die Wissenschaftler wissen sich aber zu vernetzen, so daß ein nicht mehr individueller sondern kollektiver Zusammenhang die Einheit des unteilbaren Ganzen bewahrt.

---

[25] Seine MOND-Hypothese (für Modified Newtonian Dynamics) postuliert eine Änderung der Newtonschen Bewegungsgleichungen bei sehr kleinen Beschleunigungen, wie im Weltall der Fall. Die noch heranreifende Hypothese wird zwar kontrovers diskutiert, doch sehr ernst genommen.

[26] Vgl. [Hilbert, 1900], 6. Teil.

ii) Dem Vergleich mit einem „Organismus“ liegt der Gedanke zugrunde, nach dem Poincaré oder Connes das Darwinsche Evolutionsprinzip auf die Mathematik anwenden.

iii) Gemeinsam ist die logische Sprache des Beweisens, der Werkzeugkasten (die Hülfsmittel), das Procedere des Forschens (die Verwandtschaft der Ideenbildung).

iv) Das Geheimnis des Erfindens liefert den roten Faden der Einheit: bei zunehmender Komplexität wird eine Theorie paradoxerweise weniger kompliziert; die Harmonie, die Einheitlichkeit, die Querverbindungen enthüllen eine einprägsame Ordnung.

Unsere Mathematik wird erfunden. Ein Platonist geht davon aus, daß uns dabei das Gängelband einer jenseitigen Idee anführt. Statt ein Systemraster mühsam zu erfinden, kann man sich an einem Leitbild orientieren. In der Tat werden viele Systeme von anderen Systemen inspiriert. Ein abbildendes System muß nicht mit zunehmender Komplexität kollabieren, wenn es dem Ariadnefaden einer widerspruchsfreien Struktur folgt. Um z.B. hochkomplexe Prothesen zu bauen, werden die extramentalen Systeme Hand, Herz, usw. genauestens untersucht und die abbildende Struktur zielgerichtet überprüft: der Kunstherztransplantierte soll möglichst lange überleben. Das Herz aus Metall und Kunststoff hat eine andere Struktur als ein Herz aus Muskelfasern. Beim Abbilden treten zwar Kopierverluste ein, die aber den interessanten Outputs nicht abträglich sein müssen. Gelegentlich mag das Abbild dem Urbild in mancher Hinsicht überlegen sein, z.B. eine nachbearbeitete digitale CD im Vergleich zur analogen Grammophonplatte.

Die Kopierverluste führen dazu, daß Ähnlichkeit nicht transitiv ist. In einer Kette von Abbildungen $A_1, \ldots, A_n$ hält sich daher zwar die Struktur nicht durch, aber die Ordnung $ord(A_i)$ der Struktur muß sich vererben. Gälte nämlich $ord(A_{i+1}) \neq ord(A_i)$, dann wäre A_{i+1} per definitionem kein Abbild von A_i. Unsere Notation bildet bewußt die mathematische Schreibweise ab - sie ist u.E. kein Mißbrauch -, wo die vielfache Anwendung des Begriffs Ordnung durch eine „Familienähnlichkeit“ begründet ist. Was wir hier mit Ordnung meinen, ist genau das, was der Erfinder bei der *Illumination* erlebt.

Wenn eine Kette ihre Ordnung perpetuiert, wie gelangt man rekursiv in die erste[27] Struktur A_1? Erfindet A_1 der Mensch, so sind Inkonsistenzen zu befürchten. Ist A_1 ein System der immanenten Welt, so treten Imperfektionen irgendwo auf, sonst gäbe es für ein Kunstherz keinen Bedarf.

Nichts ist vollkommen auf dieser Welt, also muß sich die Mathematik als die einzige nie irrende Wissenschaft die urbildliche Ordnung aus dem Jenseits holen. Diese unsere

[27] Die Kette kann auch zyklisch sein, wie im musikalischen Beispiel Wittgensteins; dann setzen wir $A_n = A_1$ bei passender Umnumerierung.

(metaphysische) Hypothese ist nur diskussionswert, wenn der Transfer in die hiesige Welt glaubhaft erscheint. Mit diesem Problem ist Wittgenstein auch konfrontiert, wenn er den musikalischen Gedanken mit den musikalischen Artefakten auf eine Stufe setzt. Dieses mentale Bild ist keine Sinnesempfindung, sonst hieße es etwa Klang; es besitzt einen „logischen Bau“; es drückt Harmonie aus. Genau dieses Schlüsselwort Harmonie schlägt die gesuchte Brücke zwischen den Welten.

Unsere These wird durch das Postulat platonistisch, laut dem der Erfinder von der Harmonie der angedachten Lösungswege angeleitet wird:

i) Anders als in den Naturwissenschaften, wo der experimentelle Fortschritt früher oder später in jede Theorie Risse einschlägt, überwacht die Logik als Schiedsrichter jeden Deduktionsschritt. Die Gültigkeit der Axiome vorausgesetzt werden etwaige Unstimmigkeiten im Keim erstickt.
ii) Der Erfinder kombiniert unermüdlich Lösungswege. Syntaxfehler werden aussortiert.
iii) Wie beim Schachspiel können der großen Anzahl wegen nicht alle vorselektierten logisch sauberen Kombinationen systematisch abgearbeitet werden; sie müssen noch nach einem Kriterium gefiltert werden.
iv) Stachowiaks Modell-Definition entsprechend entstehen zu einer Proposition immer wieder neue Beweise, die alle das ordnende Prinzip der Harmonie beachten.
v) Das Harmonieempfinden wurde von Poincaré und Hadamard zum Kriterium erhoben, nach dem eine überschaubare Anzahl von Kandidaten in die engere Wahl gezogen wird.

Auch Kant vertritt die These, daß Harmonie nichts ist, was wir konstruieren und auf die Welt projizieren, sondern daß sie uns vom Jenseits aufgedrängt wird. Allerdings geht Kant weiter und identifiziert das Jenseits mit Gott[28]:

> Die ganze Natur, welche eine allgemeine harmonische Beziehung zu dem Wohlgefallen der Gottheit hat, kann diejenige vernünftige Creatur nicht anders als mit immerwährender Zufriedenheit erfüllen, die sich mit dieser Urquelle aller Vollkommenheit vereint befindet[29] [...]
>
> Wenn man aber erwägt, daß die Natur und die ewigen Gesetze, welche den Substanzen zu ihrer Wechselwirkung vorgeschrieben sind, kein selbständiges und ohne Gott nothwendiges Principium sei, daß eben dadurch, weil sie so viel Übereinstimmung und Ordnung in demjenigen zeigt, was sie durch allgemeine Gesetze hervorbringt, zu ersehen ist, daß die Wesen aller Dinge in einem gewissen Grundwesen ihren gemeinschaftlichen Ursprung haben müssen, und daß sie darum lauter gewechselte Beziehungen und lauter Harmonie zeigen, weil ihre Eigenschaften in einem einzigen höchsten Verstande ihre Quelle haben,

[28] Wird Harmonie auf Gott zurückbezogen, wäre die *prästabilisierte Harmonie* Leibniz’ eine Alternative; Kant lehnt sie wegen der deterministischen Prägung (Vgl. [Eisler, 1930], Harmonie) ab. Aus unserer Sicht genügt das unverbindliche Jenseits der Platonischen Ideenwelt.

[29] Vgl. [Kant, 1755], Siebentes Hauptstück.

> dessen weise Idee sie in durchgängigen Beziehungen entworfen und ihnen diejenige Fähigkeit eingepflanzt hat, dadurch sie lauter Schönheit, lauter Ordnung in dem ihnen selbst gelassenen Zustande ihrer Wirksamkeit hervorbringen[30].

Harmonie ist eine Variante der Kantischen Erhabenheit, auf die wir auf S.192 eingingen: „Erhaben ist das, was durch seinen Widerstand gegen das Interesse der Sinne unmittelbar gefällt." Es erscheint plausibel, daß sich transzendente Harmonie uns mitteilt. Wenn Harmonie als Erfindungskriterium der Mathematik fungiert, legitimiert der Modellismus den Platonismus.

10.9. Das Erfindungskriterium der Harmonie

Der Mensch ist in der Lage, Strukturen abzubilden aber mit unterschiedlichem Talent. Wer eine Sprache nicht als Kind erlernte, wird sich die Struktur eines Muttersprachlers nie aneignen. Analog entwickelt nicht jeder logische Denker eine Eignung zur Mathematik. Harmonie ist eine besondere Rezeptivität, die auch den Musiker, den Maler, den Poeten, überhaupt jeden kreativen Geist auszeichnet und anleitet. Wer Mathematik nicht mag, empfindet die Harmonie eines Beweises kaum.

Harmonie ist das Werkzeug der Heuristik. „Die Sonne tönt nach alter Weise \In Brudersphären Wettgesang." Mit diesen Worten eröffnet der Erzengel Raphael Goethes *Prolog im Himmel*. Die mit Sphärenmusik tönende Sonne zeichnet am Himmel nach den Keplerschen Gesetzen der *Harmonia Mundi* zusammen mit astralen Brüdern kreisförmige Bahnen. Das Prädikat *harmonisch* weist auf Transzendentes hin. Rudolf Eisler spricht von „Zusammenstimmung, Übereinstimmung, Anpassung der Teile eines Ganzen aneinander zu einer Ordnung." Besitzen zwei Systeme die gleiche strukturelle Ordnung, entsteht wie bei den Leibnizschen Uhren eine Resonanz.

Gewiß läßt sich die Möglichkeit einer Kommunikation - einer Platonischen Methexis - mit einer jenseitigen Welt nicht logisch deduzieren. Der Platonismus ist ein überlegter Glaube; etwa wie der Glaube, daß unsere Welt kein Chaos sondern ein Kosmos sei. Poincaré situiert im harmonischen Ordnungsprinzip den Schlüssel zum Erfinden:

> Es ist vorstellbar, daß diese Intuition der mathematischen Ordnung, die uns Harmonien und versteckte Relationen erraten läßt, nicht jedermann eigen sein kann.
> (1) Die Einen besitzen weder dieses delikate schwer zu determinierende Gefühl noch ein überdurchschnittliches Gedächtnis- bzw. Konzentrationsvermögen; dann sind sie total unfähig, die etwas höhere Mathematik zu verstehen; die meisten Menschen sind allerdings so gebaut.

[30] Vgl. [Kant, 1755], Achtes Hauptstück.

> (2) Andere besitzen dieses Gefühl in bescheidenem Maße aber sie entwickeln ein außergewöhnliches Erinnerungs- bzw. Konzentrationsvermögen; sie lernen alle Details nacheinander auswendig; sie werden die Mathematik verstehen und gelegentlich anwenden können; sie bleiben doch auf ewig des Schöpfens unfähig.
> (3) Schließlich gibt es diejenigen, die in einem größerem oder kleinerem Maße die besondere von mir beschriebene Intuition besitzen; diese Leute sind dann in der Lage, nicht nur die Mathematik zu verstehen, auch wenn ihr Gedächtnis vielleicht nicht hervorragend ist, sondern auch sich kreativ zu betätigen und mit mehr oder weniger Erfolg im Erfinden zu üben, in dem Maße wie diese Intuition in ihnen ausgebildet ist. [. . .]
> Es ist also dieses besondere ästhetische Empfindungsvermögen, das die Rolle des von mir erwähnten exquisiten Siebes spielt; so wird verständlich, daß jemand, der mit diesem Vermögen nicht ausgestattet ist, nie zum echten Erfinder werden kann.[31].

Poincarés Aussage, nach der der Erfinder die angedachten Lösungswege anhand des Kriteriums der Harmonie durchsiebt, löst auf den ersten Blick bei denen Perplexität aus, die nicht zur elitären Schicht (3) gehören. Wenn Hadamard in seiner Rezension des Vortrages vor dem *Institut Général Psychologique* die These kommentarlos übernimmt, als sei sie offensichtlich, bestätigt sich, daß das Benacerrafsche Dilemma nur auf die Kategorien (1) und (2) anwendbar ist.

<u>Fazit:</u>

Keine der vielen Variationen, die vom Q-P-Prinzip auf das platonistische Postulat schließen, hat uns überzeugt - sonst hätten wir sie besprochen. Die Begriffe Wahrheit und Existenz, die dabei verwendet werden, haben zu unscharfe Ränder, als daß ein rationaler Beweis daraus gewonnen werden könnte. Unser Modellismus stellt eine platonistische Fortsetzung des Konventionalismus dar. Das Reich der Ideen bleibt uns auf immer verschlossen; aber unter der eisernen Fuchtel der Logik gelingt es dem Mathematiker, dank des eingeborenen Harmonieempfindens die jenseitige Ordnung zu modellieren.

[31] Vgl. [Poincaré, 1908b]. Übersetzung und Durchnumerierung CF.

11. Konklusion

Im Hintergrund der Philosophie der Mathematik steht die Platonische Frage. Die eminente Harmonie der Mathematik und ihre Unentbehrlichkeit zum Umgang mit der Welt veranlaßten uns früher zu einem zurückhaltenden Platonismus. Es war unsere Motivation, dieses zaghafte Bekenntnis auf die rationale Prüfbank zu legen. Im Ergebnis erlebten wir zwar kein mystisches Erlebnis, aber wir wurden trotz der Qualität der besprochenen Gegenargumente in unserem Glauben an einen Platonismus dezidiert gestärkt.

Die Platonische Frage gehört in die Metaphysik, weshalb wir sie nicht erschöpfend besprachen. Vordergründig meinen wir einige rationale Erkenntnisse erreicht zu haben:

i) Das Harmonieempfinden leitet den Erfinder der Mathematik bei seiner Suche an.

ii) Die von Kant favorisierte sinnliche Anschauung ist in der gegenwärtigen höheren Mathematik zugleich verzichtbar und selten möglich.

iii) Der Computer hat den Weg zur experimentellen Mathematik geöffnet. Das Werkzeug potenziert die kreative Suche des Mathematikers.

iv) Das Benaceraffsche Dilemma verkennt, daß die Illumination zugleich die semantische und die epistemische Forderung erfüllt.

v) Über die Russellsche Aporie hinaus spricht noch einiges gegen den Anspruch des Logizismus, die Mathematik von der Logik abzuleiten.

vi) Die Arbeiten Brouwers zeigen, daß die akademische Mathematik nicht die einzig mögliche ist.

vii) Daß der Mathematiker in einem Elfenbeinturm lebt, ist ein ernstzunehmender Einwand gegen die Wahrheit der Mathematik. Dem steht entgegen die Unentbehrlichkeit der Mathematik für die Effizienz der Anwendungswissenschaften.

viii) Die mathematischen Theorien sind Fiktionen, allerdings keine arbiträren. Der nominalistische Streit um die Existenz der mathematischen Gegenstände gehört in die Metaphysik und ist nicht praxisrelevant.

ix) Wo die Blätter an ihrem Stengel anwachsen, folgt rein mathematisch (ohne nominalistische Reflektion) aus dem Prinzip der maximalen Sonnenbestrahlung.

x) Kants Bekenntnis zur euklidischen Geometrie ist zwar nicht mehr vertretbar, aber seine Transzendentalphilosophie, insbesondere der Schematismus wird davon nicht grundsätzlich tangiert.

xi) Daß mathematische Sätze a priori und synthetisch seien, ist fraglich und stellt keine akzeptable Grundlage für die Deduktion der Kantischen Anschauungsformen dar.

xii) Das Messen von Raum bzw. Zeit induziert aposteriorische Formen. Daher ist keiner der drei metrischen geometrischen Räume a priori, sondern der topologische Raum. Ebenso ist nicht die quantifizierte Zeit a priori, sondern die Chronologie.

xiii) In der modernen Mathematik sind Räume abstrakte mathematische Strukturen und die Zeit ist kein genuiner mathematischer Gegenstand.

Ausblick

Es war unser Ziel, die Konstruktion der Mathematik aus der Sicht der Philosophen mit Erfahrungsberichten illustrer Mathematiker zu konfrontieren. Den zündenden Funken gaben uns die philosophischen Werke Poincarés. Als wir uns in der Sekundärliteratur umschauten, hatten wir das Glück, Hadamards Monographie über die Psychologie des mathematischen Erfindens zu entdecken, die sich ausführlich mit den Thesen Poincarés anerkennend und ergänzend auseinandersetzt. Die Bearbeitung dieses Stoffes nahm bald einen solchen Umfang an, daß in der vorliegenden Dissertation keine weiteren Projekte zu unterbringen waren, von denen wir die zwei größeren nennen möchten.

Während Poincaré seine Gedanken zur Mathematik in einem philosophischen Nachlaß selbst aufbereitet hat, äußerten sich andere große Namen der Mathematik meistens nur verstreut in ihren mathematischen Werken und in ihrem Schriftwechsel. Zur Zeit der Big Data ist es nunmehr möglich, das digitalisierte Material nach den philosophischen Inhalten durchzustöbern. Wir denken in alphabetischer Reihenfolge an: Descartes, Euler, Gauß, Hilbert, Leibniz, Newton.

Auch wenn sich das mathematische Erfinden nicht grundsätzlich geändert hat, sollte die computerunterunterstützte Arbeit des modernen Mathematikers erforscht werden. Dazu wäre der Fragebogen Hadamards zu aktualisieren - einen Entwurf können wir anbieten -, um eine Umfrage unter den Fieldsmedaille-Trägern durchzuführen.

Als Schlußwort wählen wir gemäß unserem Frontispiz den Spruch Poincarés: „Die logik ist das Werkzeug des Beweisens, die Intuition das Werkzeug der Erfindung.“

A. Empirische Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Deduktion der Kantischen apriorischen Formen setzt voraus, daß die Grundlagen der Mathematik durch keine empirischen Experimente gewonnen werden. Die von Pascal und Fermat gegründete Wahrscheinlichkeitstheorie (kurz WT) stellt ein eklatantes Gegenbeispiel dar. Manche WT-Aussagen sind kontraintuitiv, somit nicht a priori. Entgegen der Annahme, daß mathematische Sätze apriorische Gültigkeit besitzen, steht die WT wie ein Koloß keineswegs auf tönernen aber doch auf empirischen Füßen.

Abb. A.1 zeigt vier nicht transitive Würfel von Bradley Efron mit derselben Augengesamtzahl 36. Wird ein beliebiges Paar Würfel geworfen, so schlägt einer den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 : 3. Dieses verwirrende Ergebnis erinnert an das Schere-Stein-Papier-Spiel oder an Eschers Treppe auf der linken Seite. Während wir uns an die 50 : 50 Verteilung von Münzwürfen gewöhnt haben, wundert sich jeder bei den Efron-Würfeln, daß jeder Würfel zwei von dreimal jeden anderen schlägt.

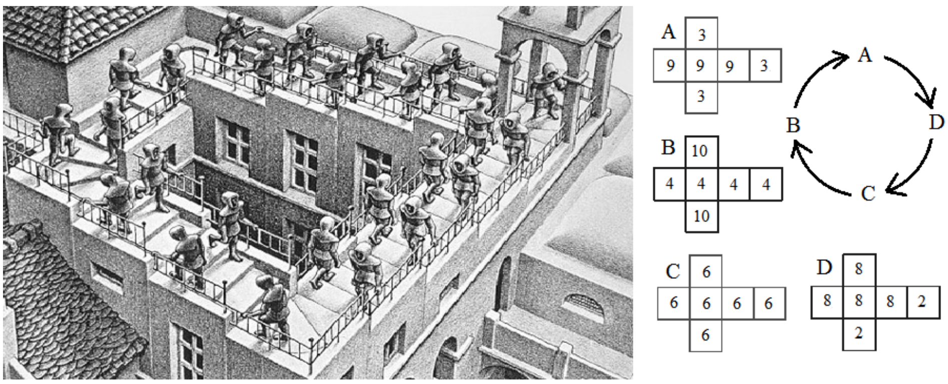

Abbildung A.1.: Efron-Würfel

Die Wahrscheinlichkeitstheorie kommt so oft zum Einsatz, daß die Gleichverteilung beim Münzenwurf als eine logische Folge der Symmetrie erscheint. In Wirklichkeit wissen wir allein aus der empirischen Beobachtung, daß symmetrische Gegenstände mit gleichen Wahrscheinlichkeiten in den mathematischen Kalkül einzufließen haben.

Unsere Beispiele der p-adischen Zahlen (S. 140), der Kontinuumshypothese (S. 141), oder des euklidischen Postulats dokumentieren, daß durchaus nicht alle Axiome von der „Notwendigkeit und strengen Allgemeinheit" geprägt sind, die Kant als „sichere Kennzeichen einer Erkenntnis a priori" fordert.

Oft entsteht ein Axiomensystem aus den wahrgenommenen Relationen zwischen Objekten der realen Welt; diese werden aber durch Sublimierung zu abstrakten eigenständigen mathematischen Entitäten, die nicht in der realen Welt leben. Hilbert soll gesagt haben, daß er anstelle von Punkten, Geraden und Ebenen Termini wie Tische, Stühle und Bierseidel hätte wählen können. Anders bei der WT, wo die mathematische Wahrscheinlichkeit dem Konvergenzwert von experimentell festgestellten Häufigkeiten entspricht. Durch die Identifizierung von empirischer konvergierender Häufigkeit mit mathematischer Wahrscheinlichkeit werden Sachverhalte der Welt berechnet. Es erfolgt keine Idealisierung der materiellen Welt sondern eine Übernahme empirischer Inputs in einen Kalkül.

Das empirische Fundament der Wahrscheinlichkeitstheorie

Beim Werfen einer Münze geht man davon aus, daß Wappen und Zahl die gleiche Chance besitzen. Diese Erfahrung faßte Jakob Bernouilli als *empirisches* Gesetz der großen Zahlen (Theorema aureum = goldener Satz) zusammen: Ist A ein Ereignis eines Zufallsexperiments, so stabilisieren sich bei einer hinreichend großen Anzahl n von Wiederholungen die relativen Häufigkeiten. Schulkinder werden damit abgespeist, daß eine nicht gezinkte Münze (bzw. Spielwürfel, usw.) keine Ursache hätte, eine Seite zu bevorzugen. Darin liegt eine Petitio Principii.

Stabilisiert sich die Häufigkeit des Ausfalls Wappen bei z.B. 60%, so könnte nachgemessen werden, daß die Wappenhälfte der Münze auch 60% des Münzgewichtes ausmacht. Die starke experimentelle Korrelation lädt dazu ein, die Verteilung der Masse zur Ursache der Häufigkeiten zu erklären. Würde aber eine Raumsonde auf einem kleinen Asteroiden intelligente Lebewesen antreffen, die wegen der schwachen Gravitation keine Münzexperimente durchführen können, so würden diese Wesen die WT zwar lernen, aber die einzugebenden Wahrscheinlichkeiten nicht evaluieren können.

Da der Vorwurf der Zirkularität an materiellen Gegenständen schwer zu erkennen ist, wollen wir sie am Beispiel der normalen Zahlen verdeutlichen. Émile Borel führte den Begriff der *normalen Zahlen* ein; es sind solche Zahlen, in deren Nachkommastellen alle möglichen Ziffern mit gleichen Wahrscheinlichkeiten auftreten, und ebenso alle zweistelligen Ziffernkombinationen, also etwa 00, 01, 02, ..., alle dreistelligen Ziffernkombinationen, usw. Borel bewies auch gleich, daß fast alle[1] reellen Zahlen normal sind. Damals konnte man zwar normale Zahlen konstruieren, aber wegen des großen Rechenaufwands keine Zahlen wie $\pi, e, \sqrt{2}$, usw. statistisch auf Normalität hin prüfen. 2005 haben E. Fischbach und Shu-Ju Tu die ersten 100 Millionen Dezimalstellen der reizvollen Kreiszahl π untersucht und keine der Normalität widersprechenden Muster entdeckt. Hier zeigt sich, daß der reine Zufall auf abstrakte Zahlen einwirkt. Die Wahrscheinlichkeit beim Würfelspiel folgt nicht aus der homogenen Verteilung der Masse, sondern das *empirische* Gesetz der großen Zahlen bestätigt uns, daß der Würfel nicht gezinkt ist.

Dieses Gesetz ist aber ein Satz der WT. Den Einwand wollen wir uns näher ansehen. Die heutige WT baut auf den drei Axiomen von Andrei Kolmogorow auf[2]:

1) Für ein Ereignis $A \in \Sigma$ ist die Wahrscheinlichkeit eine reelle Zahl zwischen 0 und 1: $0 \leq P(A) \leq 1$,
2) Das sichere Ereignis Ω hat Wahrscheinlichkeit 1: $P(\Omega) = 1$,
3) Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung abzählbar vieler paarweise disjunkter Ereignisse ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse: $P(A_1 \dot{\bigcup} A_2 \dot{\bigcup} \ldots) = \sum P(A_i)$.

Sein Axiomensystem hat Kolmogorow an der Mengenlehre orientiert. Verwirrend ist, daß in diesem System das Gesetz der Großen Zahlen bewiesen wird. Deswegen fällt die Empirie nicht mehr auf. In der Mathematik kommt es aber nicht selten vor, daß von zwei gleichinhaltlichen Propositionen die eine zum Axiom die andere zum Satz erklärt wird, beispielsweise: Lemma von Zorn vs. Auswahlaxiom. Es ist auch hier der Fall. Kolmogorow verwendet einen Begriff der Wahrscheinlichkeit, der nur *implizit* durch Axiom Nr. 1 definiert wird und mit dem Zufallsexperiment untrennbar verwoben ist. Des Problems bewußt schlägt der *Schüler-Duden* statt einer Definition eine Erläuterung vor:

> Die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls ist der beste *Schätzwert*, den man für die relative Häufigkeit in einer langen Zufallsversuchsreihe angeben kann[3].

[1] *Fast alle* in dem Sinne, daß die Menge aller nicht-normalen Zahlen Lebesgue-Maß 0 hat.
[2] Ein Wahrscheinlichkeitsraum Ω ist eine Menge von Elementarereignissen aus deren Teilmengen sich ein Ereignisraum Σ zusammensetzt, auf dem wiederum ein Wahrscheinlichkeitsmaß P definiert ist.
[3] Vgl. Schüler-Duden, Mathematik II, Dudenverlag, 1991, S. 430. Hervorhebung hinzugefügt.

Aber nichts anderes behauptet das Gesetz der Großen Zahlen auch!

Das Gesetz der Großen Zahlen wird mit der Tschebyscheff-Ungleichung bewiesen: $P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$. Wir brauchen nicht zu wissen, was die Formel bedeutet[4]; schauen wir nur auf die Variablen. k ist eine frei wählbare reelle Zahl. Was ist $E(X)$? Die durch die Wahrscheinlichkeiten gewichtete Summe der Ausfälle. Was ist die Varianz $V(X)$? Die Abweichung $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, die $E(X)$ auf beiden Seiten beschränkt und Konvergenz erzeugt. Die Tschebyscheff-Ungleichung setzt voraus, daß $E(X)$ und $V(X)$, damit erst recht die Wahrscheinlichkeiten existieren; sie ist die Ausziferung des in sie einfließenden Gesetzes der Großen Zahlen. Ferner steckt der empirische Begriff der Wahrscheinlichkeit mittelbar in den drei Axiomen. Darin liegt die - mathematisch unbedenkliche aber erkenntnistheoretisch nachdenkenswerte - Zirkularität der impliziten Definition der Wahrscheinlichkeit.

Während Axiom Nr. 2 lediglich eine definitorische Konvention ausdrückt, entspringt die Additivität von Axiom Nr. 3 einer aus Experimenten gewonnenen Erfahrung.

Die Axiome der Arithmetik bzw. Geometrie werden uns von der Anschauung oder von unserem Verstand diktiert; sie beziehen sich auf abstrakt konstruierte Gegenstände. Die Axiome der WT stehen auf einem empirischen Fundament. Wir haben es nicht mit einer Theorie zu tun, die nur widerspruchsfrei sein muß, sondern mit einem *Kalkül* auf hohem Niveau. Die Wahrscheinlichkeit 1 : 6 beim Würfelspiel ist kein Output sondern ein Input. Geben wir als Wahrscheinlichkeit den Konvergenzwert der experimentellen Häufigkeiten ein, wird uns die WT auch über einen gezinkten Würfel alle Daten verraten.

Wenn die WT ein Kalkül ist, was steckt dahinter? Das Streben der Häufigkeit gegen eine Wahrscheinlichkeit ist schlicht und einfach ein *Naturgesetz*. Diese Feststellung ist nicht als Kritik an der Solidität und der Nützlichkeit der Naturgesetze gemeint: die mysteriöse Konvergenz des Zufalls entspringt einem Glauben, an wen auch immer. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist a posteriori aber ohne Zeitindex.

Die WT zeigt uns, daß die der empirischen Anschauung entnommenen Axiome und somit die auf ihnen aufbauenden Schlußfolgerungen es nicht gestatten, einen Beweis der Apriorität der Anschauungsformen von der vermeintlichen Apriorität aller, d.h. inklusive der WT, mathematischen Aussagen abzuleiten.

[4]Der Schüler-Duden gibt auf S. 405 einen übersichtlichen Beweis.

B. Kants Paradoxon der Chiralität

Wir zitierten bereits (S. 29) Kants Absichtserklärung in *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raum*[1], vermittels der Apriorität der Urteile der Geometrie (= Meßkunst), die Realität des physikalischen Behälterraums nachzuweisen:

> [. . .] mein Zweck in dieser Abhandlung [ist] zu versuchen, ob nicht in den anschauenden Urtheilen der Ausdehnung, dergleichen die Meßkunst enthält, ein evidenter Beweis zu finden sei: daß der absolute Raum unabhängig von dem Dasein aller Materie und selbst als der erste Grund der Möglichkeit ihrer Zusammensetzung eine eigene Realität habe[2].

Damit attackiert Kant die relationale Auffassung:

> Nimmt man nun den Begriff vieler neueren Philosophen, vornehmlich der deutschen an, daß der Raum nur in dem äußeren Verhältnisse der neben einander befindlichen Theile der Materie besteht, so würde aller wirklicher Raum in dem angeführten Falle nur derjenige sein, den diese Hand einnimmt. Weil aber gar kein Unterschied in dem Verhältnisse der Theile derselben unter sich statt findet, sie mag eine Rechte oder Linke sein, so würde diese Hand in Ansehung einer solchen Eigenschaft gänzlich unbestimmt sein, d. i. sie würde auf jede Seite des menschlichen Körpers passen, welches unmöglich ist[3].

Wird von der Hand nur der Umriß betrachtet, unterscheidet sie sich von ihrem spiegelbildlichen „incongruenten Gegenstück“ (sic!). Die Eigenschaft, heute Chiralität[4] genannt, kann nach Ansicht Kants keine Eigenschaft des Raumes sein. Würde etwa die linke Hand aus dem Raum herausgenommen und die im Raum hinterlassene hohle Spur nach Längen und Winkeln vermessen werden, so ergäben sich dieselben Meßdaten wie für die rechte Hand. Da der Raum kein Gegenstand menschlicher Empfindung ist, sondern die Möglichkeit der Erscheinung überhaupt bedingt, bestimmt die Beschaffenheit der Hand den Unterschied beider Hände, eine aus der Sicht der Biologie richtige Behauptung:

[1] In dieser „vorkritischen“ Schrift vertrat Kant den Behälterraum, eine Auffassung, die er später aufgab.
[2] Vgl. [Kant, 1768], S. 378, AA II.
[3] Vgl. ebd.
[4] *Chiral*, aus gr. $\chi\varepsilon\widetilde{\iota}\rho$ = Hand, werden spiegelbildsymmetrische Paare genannt; alternativ sagt man auch *enantiomorph*, aus gr. $\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\acute{\iota}o\varsigma$ = gegensätzlich. Diese Termini standen Kant nicht zur Verfügung, vgl. [Kant, 1768]: „Ich nenne einen Körper, der einem anderen völlig gleich und ähnlich ist, ob er gleich nicht in eben demselben Grenzen kann beschlossen werden, sein incongruentes Gegenstück.“

> Es ist hieraus klar: daß nicht die Bestimmungen des Raumes Folge von den Lagen der Theile der Materie gegen einander, sondern diese Folgen von jenen sind, und daß also in der Beschaffenheit der Körper Unterschiede angetroffen werden können und zwar wahre Unterschiede, die sich lediglich auf den absoluten und ursprünglichen Raum beziehen, weil nur durch ihn das Verhältniß körperlicher Dinge möglich ist, und daß, weil der absolute Raum kein Gegenstand einer äußeren Empfindung, sondern ein Grundbegriff ist, der alle dieselbe erst möglich macht, wir dasjenige, was in der Gestalt eines Körpers lediglich die Beziehung auf den reinen Raum angeht, nur durch die Gegenhaltung mit anderen Körpern wahrnehmen können[5].

Kant geht von einem absoluten Raum aus, in den Körper, wie in einen Behälter, gelegt werden. Wir meinen hingegen, daß der *geometrische* Raum allein durch die Lage der Körper zueinander bestimmt wird.

Die Schrift über Chiralität lag etwa zwanzig Jahre vor den Kantischen kritischen Schriften, in denen durch reine Vernunft die Empirie herausgeschält werden soll. Gemäß der Substanzauffassung des Raumes liegt es an der „Beschaffenheit“ der rechten Hand, daß sie in den linken Handschuh nicht paßt. Sind die Sätze der Geometrie a priori, muß in der biologischen Hand, ein mysteriöser substantialer Links- bzw. Rechtsdrall verborgen stecken. Es ist tatsächlich der Fall[6]; daraus folgt aber nicht, daß die geometrische Chiralität geheimnisumwoben sei.

Die Substanzauffassung wurde bereits von Leibniz beanstandet mit dem Argument, daß ein Gegenstand nur durch einen Vergleich im Raum kleiner als sein größeres Ebenbild erscheint. Poincaré wird das Argument bestätigen: würde der Kosmos über Nacht seine Maße verdoppeln, merkten wir nichts davon. In der euklidischen Geometrie (allerdings nicht in den beiden anderen) gibt es kein absolutes Maß, sondern ein Netz von Ähnlichkeiten, die uns nur durch Gegenüberstellung verschieden erscheinen.

Das Erkennen der Chiralität wird uns nicht in die Wiege gelegt: früher wurde bei Rekruten ein Schuh mit Farben markiert, damit sie auf dem richtigen Fuß losmarschieren. Selbst wenn „der absolute Raum kein Gegenstand einer äußeren Empfindung sondern ein Grundbegriff“ ist, hilft dem Soldat keine Empfindung der chiralen Beschaffenheit seiner Füße, vorschriftsmäßig zu laufen.

[5] Vgl. ebd.

[6] In der Natur besitzen chirale Gegenstände im allgemeinen gleiche physikalische Eigenschaften wie Schmelz- und Siedepunkt, Dichte, Löslichkeit, IR-Spektrum, usw., die optischen Eigenschaften natürlich ausgenommen. In der Biochemie treten wahrnehmbare Unterschiede auf, z.B. bei ätherischen Ölen. Der Duftstoff Carvon produziert in der linksdrehenden Form einen Kümmelgeruch, während die rechtsdrehende nach Krauseminze duftet. Das linksdrehende Limonen in Edeltannen- und Pfefferminzöl riecht nach Terpentin, das rechtsdrehende Limonen hat einen orangenartigen Geruch. Das scheinbar divergente Duftempfinden liegt einfach daran, daß unsere Nase mit chiralen Rezeptoren für diese chiralen Geruchsstoffe ausgestattet ist. Nicht die Chiralität einer Substanz bedingt das Verhalten, sondern ihre Konfrontation mit der Chiralität des Rezeptors.

Seine Thesen der *Kritik der reinen Vernunft* stellte Kant vereinfacht und übersichtlicher in den *Prolegomena* dar, wo er in § 13 seine Auffassung der Chiralität anhand eines geometrischen Beispiels bekräftigt, das wir kurzweg Paradoxon der Chiralität nennen:

> Diejenigen, welche noch nicht von dem Begriffe loskommen können, als ob Raum und Zeit wirkliche Beschaffenheiten wären, die den Dingen an sich selbst anhingen, können ihre Scharfsinnigkeit an folgendem Paradoxon üben [...]
> Wenn zwei Dinge in allen Stücken [...] völlig einerlei sind, so muß doch folgen, daß eins in allen Fällen und Beziehungen an die Stelle des anderen könne gesetzt werden, ohne daß diese Vertauschung den mindesten kenntlichen Unterschied verursachen würde. In der Tat verhält sich dies auch so mit ebenen Figuren in der Geometrie; allein verschiedene sphärische zeigen [...] doch eine solche Verschiedenheit im äußeren Verhältnis, daß sich eine an die Stelle der anderen gar nicht setzen läßt; z. B. zwei sphärische Triangel von beiden Hemisphären, die einen Bogen des Äquators zur gemeinschaftlichen Basis haben [...] und dennoch kann einer nicht an die Stelle des anderen (nämlich auf der entgegengesetzten Hemisphäre) gesetzt werden; *und hier ist denn doch eine innere Verschiedenheit beider Triangel, die kein Verstand als innerlich angeben kann, und die sich nur durch das äußere Verhältnis im Raume offenbart*[7].

Im kursiv hervorgehobenen Satz überträgt Kant die biologische „innere Verschiedenheit“, d.h. die Chiralität, auf den geometrischen Gegenstand selbst. Anstelle der Hand wählt er jetzt sinnvoll eine nicht der Empirie verdächtige geometrische Figur. Dennoch stimmen wir Kant immer noch nicht zu: Chiralität ist keine geometrische Eigenschaft des Dreiecks. Sie ist eine, je nach Standort des Betrachters im Raum, variable Form der Anschauung, nämlich, dieser Abhängigkeit wegen, eine *aposteriorische* Form. Daß die „geometrische“ Hand nicht auf die andere Seite des Körpers passen würde, liegt daran, daß wir die dreidimensionale Hand im 3D-Raum anschauen. Aus der Perspektive der reinen Geometrie, die Kant in seinen Überlegungen zur Apriorität wählt, verschwindet das Paradoxon eine Dimension höher. Wir präzisieren jetzt unsere Überlegung.

Das Spiegeln des Kugeldreiecks erfolgt außerhalb der Sphäre; das Dreieck muß die Trägerfläche verlassen, um gespiegelt zu werden. Kant hätte keine Hand spiegeln können, denn er hätte zum Spiegeln in den vierdimensionalen Raum aufsteigen müssen! Daher ist die Parallele *illegitim*, die Kant zwischen einer nicht gespiegelten dreidimensionalen Hand und einem gespiegelten zweidimensionalen sphärischen Dreieck zieht.

Ferner spielt es beim Paradoxon keine Rolle, ob Kant das Dreieck sphärisch oder flach wählt. Warum holt Kant die damals schwierige sphärische Geometrie[8] herbei, statt ein flaches Dreieck auf einem Blatt Papier an einer Geraden zu spiegeln? Kant mußte einen Grund haben, den schwierigeren Weg zu wählen; welchen, können wir nicht nachvollziehen. Wir wollen ihn trotzdem auf diesem Weg weiterbegleiten.

[7] Vgl. [Kant, 1783], S. 39 ff. Hervorhebung hinzugefügt.
[8] Die 2D-Sphäre wurde als Einbettung im euklidischen 3D-Raum behandelt.

Unglücklich ist u.E. die Wahl eines Dreiecks, für das der Betrachter erst eine Orientierung wählen muß. Tut er das nicht, so entstehen maß- und winkelgleiche Dreiecke auch durch eine 180°-Rotation um den Mittelpunkt der am Äquator liegenden Dreieckskante. Um das Umklappen am Äquator zu visualieren, kann etwa ein Pfeil $\circlearrowleft$ bzw. $\circlearrowright$ eingezeichnet werden. Anstelle eines Dreiecks kann alternativ der Umriß einer Hand gezeichnet werden, den der Betrachter beliebig zu Handfläche bzw. -rücken erklärt.

Abbildung B.1.: links oder rechts?

Die „innere Verschiedenheit beider Triangel“ kann in der Tat kein Verstand als innerlich angeben, denn es gibt keine Verschiedenheit! Das vermeintliche Paradoxon ergibt sich nämlich nur aus dem Standort des Betrachters. Was jemandem außerhalb der Sphäre als ein im Uhrzeigersinn orientiertes Dreieck, bzw. einfacher: als rechte Hand, erscheint, sieht jemand aus dem Inneren der Sphäre als ein gegen den Uhrzeigersinn orientiertes Dreieck bzw. als linke Hand. Eine auf einer flachen transparenten Folie gezeichnete rechte Hand, wird zur linken Hand, wenn der im höheren Raum $\mathbb{R}^3$ lebende Betrachter das Blatt wendet. Analog würde eine Schuhfabrik im $\mathbb{R}^4$ lauter gleiche Schuhe herstellen und die halbe Produktion einfach umklappen, um Schuhpaare für den $\mathbb{R}^3$ zu erhalten: Die Chiralität in jedem d-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^d$ wird im $\mathbb{R}^{d+1}$ aufgehoben.

Hier wird eine wichtige Erkenntnis gewonnen: Was in der reinen Mathematik, die Kant ausdrücklich wählt, eine Hand zur rechten Hand macht, steckt nicht in der Hand selbst, sondern im relativen Standort des Betrachters. Den Einwand, daß wir mangels an einem dinghaften $\mathbb{R}^4$ unsere Hände in dieser Welt nicht vertauschen können, lassen wir nicht gelten: wenn die Chiralität von 2D-Händen nicht in der Hand steckt, müßte erklärt werden, durch welches Wunder die Dinge eine Dimension höher anders lägen.

Aus dem Paradoxon gewinnt Kant in den *Prolegomena* seine Auffassung des Raumes als Anschauungsform:

> Was ist nun die Auflösung? Diese Gegenstände sind nicht etwa Vorstellungen der Dinge, wie sie an sich selbst sind und wie sie der pure Verstand erkennen würde, sondern es sind sinnliche Anschauungen, d. i. Erscheinungen, deren Möglichkeit auf dem Verhältnisse gewisser an sich unbekannten Dinge zu etwas anderem, nämlich unserer Sinnlichkeit, beruht [...] Wir können daher auch den Unterschied ähnlicher und gleicher, aber doch inkongruenter Dinge (z. B. widersinnig gewundener Schnecken) durch keinen einzigen Begriff verständlich machen, sondern nur durch das Verhältnis zur rechten und linken Hand, welches unmittelbar auf Anschauung geht[9].

[9] Vgl. [Kant, 1783], ebd.

Chiralität ist, wie wir gezeigt haben, keine Eigenschaft des geometrischen Gegenstands. Analog bestimmt im noch nicht beschrifteten Blatt Papier nichts, was oben und unten bzw. Vorder- und Rückseite sein wird, sondern allein wie wir dieses Blatt in den Drucker einlegen. Sobald aber von den drei Paaren oben/unten, vorn/hinten und rechts/links beliebige zwei gewählt wurden, ergibt sich das dritte *zwangsläufig*.

Wenn Kant das Dreieck am Äquator spiegelt, folgen die Kongruenzen der Längen und der Winkel aus einem Axiom[10], also ist der Satz: „Die Spiegelung am Äquator der Sphäre dreht die Orientierung um", synthetisch[11]. Da die Axiome der Geometrie oft der Empirie entstammen, ist Kants Credo problematisch, daß die Sätze der reinen Mathematik nicht nur synthetisch sondern außerdem a priori seien:

> Zuvörderst muß bemerkt werden: daß eigentliche mathematische Sätze jederzeit Urteile a priori und nicht empirisch sind, weil sie Notwendigkeit bei sich führen, welche aus Erfahrung nicht abgenommen werden kann[12]. Will man aber dieses nicht einräumen, wohlan, so schränke ich meinen Satz auf die reine Mathematik ein, deren Begriff es schon mit sich bringt, daß sie nicht empirische, sondern bloß reine Erkenntnis a priori enthalte[13].

Ist Chiralität a priori? Eine Hand kann (im Standardraum $\mathbb{R}^3$) offenbar nur eine rechte oder eine linke sein. Somit ist im Geiste von Demokrit oder Descartes Chiralität eine *primäre* Eigenschaft der Hand ist, von der anders als bei *sekundären* Eigenschaften, wie etwa Farbe, Geruch, Geschmack, etc. nicht abgesehen werden kann. Das Beispiel der auf der Sphäre gezeichneten Hand zeigt aber, daß Chiralität keine intrinsische, also auch keine primäre Eigenschaft der Hand ist, sondern sie drückt die Form der Anschauung des Betrachters aus. Was der Betrachter außerhalb der Sphäre als rechte Hand wahrnimmt, wird zur linken Hand, sobald er seinen Standort ins Innere der Sphäre verlegt. Der Satz: „Die Spiegelung eines orientierten Dreiecks am Äquator der Sphäre dreht die Orientierung um" ist ein wahrer Satz. Aber auch wahr ist der Satz: „Die Spiegelung am Äquator ist äquivalent zu einem Standortwechsel des Betrachters ins Innere[14]."

Auf welchen geometrischen Satz spielt das Paradoxon der Chiralität an? Wir denken etwa an: „Maß- und winkelgleiche geometrische Figuren sind entweder deckungsgleich

[10]Hier das Axiom III.4 des Hilbertschen Axiomensystems, vgl. unsere S. 240.

[11]Das Gegenteil hieße in Kants Vokabular *analytisch*, oder *tautologisch* in der Sprache der Mathematik, z.B. „Alle Primzahlen größer zwei sind ungerade."

[12]Kann, wie Kant hier schreibt, Notwendigkeit „aus Erfahrung nicht abgenommen werden", dann werden sämtliche Naturgesetze verdächtig. Im Vorwort von *Après la finitude*, Editions du Seuil, 2006, bescheinigt Alain Badiou seinem Schüler Quentin Meillassoux, anhand der Mengentheorie nicht weniger als den „Beweis" der Kontingenz der Naturgesetze erbracht zu haben! A priori sind zwar die analytischen Sätze der Logik; von welchem Nutzen sind aber Tautologien? Mit seiner Aussage bringt Kant eine Lawine ins Rollen.

[13]Vgl. [Kant, 1787], Einleitung Abschn. V.

[14]Einfacher: wenn eine Folie mit einer aufgezeichneten Hand an einem Faden hängt, ist es dasselbe, ob die Folie umgedreht wird, oder der Betrachter begibt sich auf die andere Seite.

oder chiral". Ein solcher Satz folgt sofort aus dem hilbertschen Axiom III a, der lasch formuliert die Möglichkeit erklärt, jeden Winkel durch Spiegelung an einer Seite umzuorientieren. Der Satz erfüllt das vorerwähnte Kantische Kriterium der Apriorität: es ist „keine Ausnahme verstattet", denn auch das Bild symmetrischer Objekte ist bei Spiegelung erst recht mit dem Urbild deckungsgleich. Chiralität wäre demnach eine primäre Eigenschaft eines Objekts, was, wie bereits gezeigt, nicht der Fall sein kann.

Auch wahr wäre übrigens die nicht-mathematische empirische Aussage: „Chiralität ist eine Scheineigenschaft, die ein Betrachter den in demselben Raum lebenden Objekten vorschreibt." Analog spricht der Physiker von der Scheinkraft, die der Gasdruck auf Behälterwände ausübt, oder von der Trägheitskraft, die ganz entfällt, wenn man bei der Betrachtung der Bewegung von einem Inertialsystem ausgeht.

Letztlich scheitert Kants Vorhaben, die Realität des Raums durch die Geometrie zu beweisen. Die Problematik liegt darin, daß die mentale Anschauung des Geometers über die sinnliche Anschauung weit hinausgeht: im physikalischen Raum lassen sich linke Schuhe nicht in rechte Schuhe verwandeln, im geometrischen Raum kann das mathematische Schuh-Analogon gespiegelt werden. Die Gefahren, die Realität des Raums von der Geometrie abzuleiten, wurde von Kant in seiner Konklusion erkannt:

> Ein nachsinnender Leser wird daher den Begriff des Raumes, so wie ihn der Meßkünstler denkt [. . .], nicht für ein bloßes Gedankending ansehen, obgleich es nicht an Schwierigkeiten fehlt, die diesen Begriff umgeben, wenn man seine Realität, welche dem inneren Sinne anschauend gnug ist, durch Vernunftideen fassen will. Über diese Beschwerlichkeit zeigt sich allerwärts, wenn man über die ersten data unserer Erkenntniß noch philosophieren will, aber sie ist niemals so entscheidend als diejenige, welche sich hervorthut, wenn die Folgen eines angenommenen Begriffs der augenscheinlichsten Erfahrung widersprechen[15].

Daß ein geometrischer Begriff kein „bloßes Gedankending" ist, genügt nicht, „wenn die Folgen eines angenommenen Begriffs der augenscheinlichsten Erfahrung widersprechen." Doch widerspricht der „augenscheinlichsten Erfahrung" der an einer Tasse Kaffee angewandte Fixpunktsatz von Brouwer (vgl. S. 29). Es gibt etliche solche Beispiele, wo die reflektierte sinnliche Anschauung versagt.

[15]Vgl. [Kant, 1768], S. 378, AA II.

C. Ist die Zeit der Physik: reversibel, sogar real?

Wir behaupten im Kapitel 2, daß die Chronologie eine apriorische Anschauungsform ist. Quantenmechanik und Relativitätstheorie mögen Zweifel entstehen lassen, ob mit der Zeitmessung keine Widersprüche entstehen. Wir zeigen, daß dem nicht der Fall ist.

Ist die Zeit reversibel?

Das Spezifikum der objektiven Zeit, das mit dem subjektiven Zeitempfinden kollidiert, liegt darin, daß bei vielen physikalischen Gesetzen der Zeitpfeil umgedreht werden kann. In der Newtonschen Mechanik ändern sich unter Zeitumkehr Kraft, Masse und Beschleunigung nicht. Die allgemeine Relativitätstheorie und die Quantenmechanik sind zeitindifferent; selbst im Standardmodell der Teilchenphysik läßt sich bis auf die CPT-Invarianz[1] die Kausalitätskette rückwärts berechnen. Eine bedeutende Ausnahme stellt die Wärmelehre dar.

Im großen und ganzen sorgt das Entropie-Gesetz (Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik) dafür, daß die Zeit nicht zurückspringt: der Kaffee kühlt ab und keine Zuckerschicht schwimmt nach der Rühren an der Oberfläche. Sogar der dem Entropie-Gesetz scheinbar widerwirkende Dämon[2] von James C. Maxwell wurde entlarvt. Entropie ist keine meßbare Größe wie etwa Druck oder Temperatur, sondern sie macht sich durch

[1]Das CPT-Theorem (CPT = charge, parity, time) von Wolfgang Pauli besagt, daß jeder Vorgang im Einklang mit den Gesetzen der Physik steht (kurz: CP-Invarianz), der aus einem anderen Vorgang durch Vertauschung von Materie mit Antimaterie und zusätzliche Spiegelung des Raumes und Umkehr der Zeitrichtung hervorgeht. Das heißt, daß nicht, wie sonst üblich der Fall, allein der Zeitpfeil umgekehrt wird, während alles andere gleich bliebe; das zeitumgekehrte Analogon eines Prozesses bedingt eine Raumspiegelung und eine Ladungsumkehr.

[2]Ein Dämon läßt durch Öffnen und Schließen einer Klappe nur die schnellen Luftmoleküle von einer Kammer in eine angrenzende zweite Kammer durchgehen, so daß bald ein Temperaturgefälle entsteht.

ihre Veränderungen bemerkbar. Während der Erste Hauptsatz nichts anderes als eine Ausformulierung des Energieerhaltungssatzes erzeugt, liefert der Zweite Hauptsatz im Mikrokosmos eine mathematische Formel der Wahrscheinlichkeitstheorie, ähnlich wie der Gasdruck nicht direkt auf die einzelnen Moleküle zurückbezogen werden kann.

Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit eines Verstoßes gegen den Zweiten Hauptsatz in makroskopischen Systemen extrem gering. Verletzungen können nicht direkt aus den einzelnen mikroskopischen Gleichungen gefolgert werden, sondern nur wahrscheinlichkeitstheoretisch. Poincarés *Wiederkehrsatz* bietet sogar eine Widerlegung im Rahmen der klassischen Mechanik an. Ein Beispiel kann uns weiterhelfen, ohne tief in die Theorie einzusteigen.

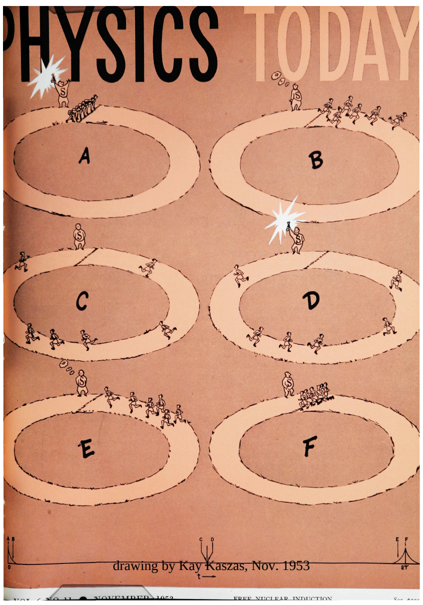

Abbildung C.1.: Zeitumkehr

In Abb. C.1 stehen im Bild A die Läufer geordnet an der Startlinie. In Bild C ist die Ordnung wegen der unterschiedlichen (konstanten) Laufgeschwindigkeiten völlig zerstört. Im Bild D fordert der Richter durch einen Pistolenschuß die Athleten auf, ihre Laufrichtung umzudrehen. Dieselben Zeitformeln stellen die anfängliche Ordnung längs der Startlinie im Bild F wieder her.

Was wäre passiert, wenn die Läufer nicht im Bild D umgekehrt wären? In seiner prämierten Arbeit über das Dreikörperproblem - statt der Läufer drehten sich Planeten im Kreis um die Sonne - bewies Poincaré mit seinem Wiederkehrsatz, daß alle Bahnen jedes, wenn auch so kleine, Gebiet unendlich oft durchlaufen. In unserem Fall stünden die Läufer unendlich oft beliebig nah an der Startlinie ausgerichtet. Aus der erratischen Verteilung würde entgegen dem Zweiten Hauptsatz immer wieder eine Quasi-Ordnung entstehen. Wieviel Zeit verstreicht bei zehn Läufern zwischen zwei an der Startlinie ausgerichteten Konfigurationen? Das Alter des Weltalls würde nicht ausreichen. Praktisch wird demnach der Zweite Hauptsatz nicht verletzt, theoretisch nur bei strenger Anwendung der auf dem Naturgesetz des Zufalls aufbauenden Wahrscheinlichkeitstheorie.

Nach dem Zweiten Gesetz der Wärmelehre darf die Entropie nicht abnehmen, womit der Zeitpfeil nicht umgedreht werden kann. Dazu Boltzmann:

> Alle unsere Vorstellungen und Begriffe sind ja nur innere Gedankenbilder, wenn ausgesprochen Lautkombinationen. Die Aufgabe unseres Denkens ist es nun, dieselben so zu gebrauchen und zu verbinden, daß wir mit ihrer Hilfe allezeit mit

größter Leichtigkeit die richtigen Handlungen treffen und auch andere zu richtigen Handlungen anleiten [...] Die begrifflichen Zeichen, welche wir bilden, haben also nur eine Existenz in uns, die äußern Erscheinungen können wir nicht mit dem Maße unserer Vorstellungen messen [...] [O]b bloß die Materie existiert und die Kraft eine Eigenschaft derselben ist [...], haben alle diese Fragen gar keine Bedeutung, da alle diese Begriffe nur Gedankenbilder sind, welche den Zweck haben, die Erscheinungen richtig darzustellen[3].

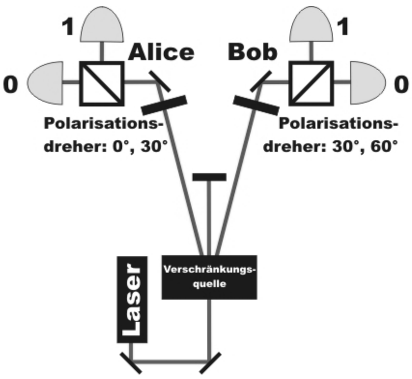

Abbildung C.2.: EPR-Paradoxon

Hier warnt uns Boltzmann sehr zu Recht davor, ein anthropisches Modell zu überinterpretieren oder ad absurdum zu führen, wenn wir uns an Ereignissen stören, die in Äonen stattfinden könnten. Sein Zweiter Hauptsatz spricht unstrittig für die Irreversibilität des Zeitpfeils. Nachdenkenswert sind hingegen die Fälle, wo die Quantenmechanik mit der Relativitätstheorie kollidiert.

In seiner Auseinandersetzung mit der Quantenmechanik spürte Einstein eine „spooky action at a distance“ in einem als EPR-Paradoxon bekannten Gedankenexperiment auf. Alain Aspect bestätigte in einem Experiment, daß die Spins zweier Photonen-Zwillinge, die sich in entgegengesetzten Richtungen voneinander entfernen, tatsächlich eine (von der Quantenmechanik geforderte) Korrelation (Verschränkung) zwischen den Meßergebnissen besteht[4]. Nach der Relativitätstheorie erfolgt aber jeder Informationsaustausch nicht instantan sondern höchstens mit Lichtgeschwindigkeit. Das Experiment zeigt, daß die verschränkten Photonen-Zwillinge auch ohne Kommunikation miteinander zu tun haben[5]; nicht die Photonen werden mit definierten Zuständen beschrieben, sondern allein das Gesamtsystem.

Notgedrungen muß der Physiker in seinen Experimenten die zu testenden Parameter selektieren, d.h. einen aus dem Ganzen gerissenen Auszug der Realität auswählen. Damit entsteht die Frage, was von den isolierten Systemen der Quantenmechanik auf die ganze Welt übertragen werden darf. Dazu Dieter Schuh:

Wenn uns die Physik sagt, daß Zeitrichtung und Altern nur eine Illusion auf einer zu engen Zeitskala sind, [...] bietet sich als Alternative an, [...] daß die etablierte Theorie im Wesentlichen nur streng gültig für isolierte Systeme ist, wir aber in einer Welt miteinander wechselwirkender Komponenten leben, wobei die idealisierten isolierten Systeme nur ein Grenzfall sind[6].

[3]Vgl. [Boltzmann, 1905], *Die Grundprinzipien und Grundgleichungen der Mechanik*, S. 257.

[4]Vgl. Alain Aspect, Philippe Grangier, Gérard Roger (1982), *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*, Phys. Rev. Lett. 49 (2).

[5]Eine erste praktische Anwendung der Nicht-Lokalität ist die Quantenkryptographie.

[6]Vgl. Vortrag vom 4. Juli 2010 vor der Waldhof Akademie für Weiterbildung von Prof. Dieter Schuch vom Institut für Theoretische Physik an der Frankfurter Goethe-Universität.

Die Problematik der isolierten Systeme im Mikrokosmos bezeichnet Lee Smolin auch im Makrokosmos der Relativitätstheorie als „Newtonian paradigm“: das Newtonsche Modell setzt voraus, daß Anfangsbedingungen (Standort und Geschwindigkeit) und Bewegungsgesetze alle künftigen Zustände eines mechanischen Systems voll bestimmen. „The lesson here is as simple as it is terrifying“, wendet Smolin in [Smolin, 2013] ein, „to the extent that assumptions underlying the Newtonian paradigm are realized in nature, *time is inessential and can be removed from the description of the world*.“ Wir kennen vom Universum nur einen Auszug[7], das wir von innen und über eine begrenzte Zeitspanne betrachten. Wir können mit dem Universum nicht experimentieren[8] und wir müssen *annehmen*, daß die erschlossenen Naturgesetze sich im Lauf der Zeit nicht verändern.

Smolin schägt eine neue Lektüre der Relativitätstheorie vor. Anstatt die Zeit zu schrumpfen oder zu dehnen, macht sich Smolin für eine „reale“ Zeit zusammen mit einem elastischen Raum stark:

> In a word, in general relativity size is universal and time is relative, whereas in shape dynamics time is universal and size is relative. Remarkably, though, these two theories are equivalent to each other, because you can - by a clever mathematical trick that isn't necessary to go into here - trade the relativity of time for the relativity of size. [...] The physical content of the two descriptions will be the same, and any question about an observable quantity will have the same answer[9].

Smolin arbeitet in *Time reborn*, [Smolin, 2013], die nachfolgend besprochene These einer realen Zeit aus, die es auch ohne den zeitzählenden Menschen noch gäbe. Er baut notwendigerweise auf metaphysischen Postulaten auf, denen nicht jeder zustimmen muß. Wir halten fest, daß sich die These der Realität der Zeit rational vertreten läßt, da Smolins Fachkompetenz über alle Zweifel erhaben ist. Nach unserer Rekonstruktion ist das Argument gültig; ob es auch schlüssig ist, hängt von der Relevanz unserer philosophischen Einwände gegen die Prämissen ab. Auf jeden Fall zeigt Smolins Suche nach dem Wesen der Zeit, daß die intensive Beschäftigung mit der Zeit bei den Fachleuten eine große Perplexität hervorruft. Es mutet nachdenklich an, daß auch Einstein zwei Jahre vor seinem Ableben gegenüber Carnap seine Besorgnis um das „Problem des Jetzt“ äußerte, dem die Wissenschaft keine unserer Vernunft gemäße Antwort zu bringen vermag:

> Once Einstein said that the problem of the Now worried him seriously. He explained that the experience of the Now means something special for man, something essentially different from the past and the future, but that the important difference does not and cannot occur within physics. That this experience cannot be grasped

[7]„It remains a great temptation to take a law or principle [...] and apply it to the universe as a whole. To do so is to commit a fallacy I will call the cosmological fallacy.“

[8]„But there is only one universe, and one case does not yield sufficient evidence to justify the claim that a particular law of nature applies. This might be called the cosmological dilemma.“

[9]Vgl. [Smolin, 2013].

> by science seemed to him a matter of painful but inevitable resignation [...] But Einstein thought that the scientific descriptions cannot satisfy human needs; that there is something essential about the Now which ist just outside the realm of science[10].

C. F. v. Weizäcker führt eine Aussage von Einstein vier Wochen vor dessen Tod an: „Für uns gläubige Physiker hat der Unterschied von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft nur den Charakter einer, wenngleich hartnäckigen, Illusion[11].“ Der Erfinder und eine Kapazität der Relativitätstheorie, Einstein und Smolin, vertreten über den Status der Zeit konvergierende Meinungen, die der Laie kaum nachvollziehen kann. Haftet vielleicht die Illusion der Trennung zwischen Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft dem physikalischen Zeitbegriff an? Henri Poincaré löst für sein Teil die Illusion auf, indem er die Zeit der Physik kurzerhand zu einer Konvention deklariert.

Lee Smolin: Realität der Zeit

Der wohlbekannte Physiker Lee Smolin vertritt in seinem *Eternalismus* eine ontologische Variante des Blockuniversums. Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft sind gleichermaßen real: wie etwa der räumliche Abstand entfernter Orte deren Realität nicht tangiert, so auch nicht der zeitliche Abstand. Diese Auffassung steht im Lot der Relativitätstheorie. Zeit ist eine Dimension, die zu jedem Zeitpunkt auch die Zukunft abdeckt. Die Zeit fließt nicht, sie gehört zum „Block“ der vier Dimensionen. Die Zeitpfeile werden vom Menschen konstruiert, da er sich nur an Vergangenes erinnert, wenn er vor zeitirreversiblen Prozessen steht. Für die christlich-jüdischen Religionen stand Gott in ähnlicher Weise außerhalb der Zeit, sonst wäre er der Chronologie unterworfen.

Ohne jegliche metaphysischen Hinweise leitet Smolin seine reale Zeit direkt von der Relativitätstheorie ab. Jedes kosmische Objekt trägt bei sich sein eigenes Raum-Zeit-Koordinatensystem[12]. Wenn zwei nicht kausal verbundene Ereignisse im Koordinatensystem eines Beobachters zeitgleich erfolgen, d.h. der Zeitparameter verschwindet, so kann der Raum-Zeit-Abstand für jeden anderen Beobachter mit anderen Raumparametern nur erhalten werden, wenn der Zeitparameter $\neq 0$ ist: Simultaneität der Ereignisse

[10] Vgl. *The Philosophy of Rudolf Carnap*, zitiert in [Klein, 2007], S. 93, Original in [Carnap, 1963].

[11] Vgl. [Weizäcker, 1992], S. 82-83.

[12] Ein Ereignis wird durch einen Vierervektor (t, x, y, z) beschrieben. Den Übergang von der Beschreibung (t_i, x_i, y_i, z_i) eines Beobachters X_i zu der Beschreibung (t_j, x_j, y_j, z_j) eines Beobachters X_j liefert eine lineare Lorentz-Transformation (d.h. eine 4×4-Matrix). Wird die Lichtgeschwindigkeit mit $c = 1$ normiert, gilt für den Raum-Zeit-Abstand: $d^2 = t_i^2 - (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = t_j^2 - (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)$, anstelle des räumlichen Abstands $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ bzw. $x_j^2 + y_j^2 + z_j^2$ (Lorentz-Kontraktion). Falls ein Ereignis A das Ereignis B bedingt, muß die Kausalität in allen Koordinatensystemen gelten.

kann nur für einen einzigen Beobachter gelten[13]. Wir geben jetzt in extenso Smolins Argument zur Realität der Zeit, das wir anschließend rekonstruieren.

> The argument depends only on the relativity of simultaneity. Let's begin by agreeing that the present is real [...] we have no doubt that the present is real [...] So we assert that *two events are equally real if they're seen by some observer to be simultaneous.* We also will assume that being equally real is what is called a transitive property; that is, if A and B are equally real, and B and C are equally real, then so are A and C [...] Pick any two events in the history of the universe, one which is the cause of the other. Let's call them A and B. Now there will always be some other event X that has the following property: There is an observer, Maria, who sees A to be simultaneous with X. And there is an observer, Freddy, who sees X to be simultaneous with B [...]
> To understand why X must exist, you need to know not only that simultaneity is relative but that it is as relative as possible, in the following sense: One consequence of Einstein's postulate is that if two events take place simultaneously for some observer, all other observers will judge them to be not causally related. It's also true that if two events aren't causally related, there will be some observer who sees them as simultaneous, thus simultaneity is as relative as it possibly could be, while respecting causality [...]
> Now we can reason as follows: By the criterion I gave, A is as real as X is. But B is also as real as X is. So A and B are equally real. But A and B are any two causally related events in the history of the universe. So if there is any sense in which an event in the universe is real, that reality is shared by every other event. There is there no difference between present, past and future. What is real is all the events of the universe, taken together. So we conclude that the reality of the world consists in his history taken as one. There is no reality to moments of time or their flow [...] then the present has no special claim to reality, and all that's real is the whole history of the universe[14].

Rekonstruktion:

1. Implizite Prämisse: real ist das, was keine Theorie hinzudenkt (z.B. die Sphären von Ptolomäus, die Schwarze Materie, Scheinkräfte, usw. sind nicht real). Stichwort: Poppers conventional twist S. 166.
2. Postulat der Realität: Die Gegenwart ist real.
3. Postulat der Transitivität: Realität (= das Real-Sein) ist transitiv: Sind Ereignisse E_1 und E_2 gleichermaßen real und E_2 und E_3 auch gleichermaßen real, so sind E_1 und E_3 gleichermaßen real.
4. Wähle ein beliebiges Ereignis A. Sei Ereignis B eine Folge von A. Somit liegt B in der Zukunft von A.
5. Relativität der Zeit: für zwei nicht kausal verbundene Ereignisse E_1, E_2 existiert genau ein Betrachter, für den E_1 und E_2 simultan erfolgen.
6. Es existiert Maria, für die es ein Ereignis X gibt, das simultan aber nicht kausal verbunden mit A ist. Ebenso existiert Freddy, für den dasselbe Ereignis

[13] Über die Illusion der Simultaneität gehen wir auf S. 250 ein.
[14] Vgl. [Smolin, 2013], S. 61-63.

X simultan aber nicht kausal verbunden mit B ist.

7. Wegen der gegenwärtigen Simultaneität (2) sind A und X für Maria real. Ebenso sind für Freddy X und B real.

8. Wegen der Transitivität (3) qua X sind die kausal verbundenen A und B beide real.

9. Implizite Prämisse: Es existieren keine isolierten Systeme von Ereignissen.

10. Da A beliebig gewählt wurde, sind wegen (9) alle Ereignisse real.

11. Da alle Ereignisse real sind, ist die Geschichte des Block-Universums real: es gibt keinen Unterschied zwischen Gegenwart, Vergangenheit und Zukunft.

Anmerkungen:

i) Das Postulat (2) ist naheliegend und unschädlich, da am Ende die Identität von Gegenwart, Vergangenheit und Zukunft gezeigt wird.
ii) Da B eine Folge von A ist (4), ist B zwar nicht eindeutig aber sicher nicht beliebig. Daher ist die implizite Prämisse (9) für die Verallgemeinerung in (10) notwendig.
iii) Es wird nicht berücksichtigt, daß in einem Folgeereignis mehrere Ursachen zusammenwirken. Es können isolierte Zyklen entstehen.
iv) Es werden diskrete Ereignisse vernetzt, während wir die Realität als ein lochfreies Kontinuum empfinden.
v) Schwerwiegender Einwand: Da die Zukunft miteinbezogen wird, herrscht ein zumindest fragwürdiger totaler Determinismus.
vi) Das Prädikat Realität wird erst auf die Gegenwart, d.h. ein mentales Bild der Zeit, angewandt, dann auf extramentale Ereignisse.
vii) Da Simultaneität bei einem einzigen Beobachter S auftritt, werden aus Sicht von S zeitlich getrennte Ereignisse von je einem Beobachter T simultan wahrgenommen.

Die letzte Anmerkung wird bei folgendem Gedankenexperiment aporetisch:
Ereignis A: < Cäsar wurde am 15. März 44 v. Chr. ermordet >
Ereignis B: <Cäsars Leiche wurde am 20. März auf dem Marsfeld öffentlich verbrannt>.
Ereignis X (fiktiv): <Am 15. März hat es auf dem Marsfeld zeitgleich mit Cäsars Mord in Strömen geregnet>.

Für die damals anwesende Römerin Maria waren der Mord an Cäsar (A) und der Regenguß (X) zeitgleich aber kausal nicht verbunden.
Da der Regenguß vom 15. März (X) und die Leichenverbrennung am 20. März (B) nicht kausal verbunden sind, muß es in der Raum-Zeit genau einen Freddy geben, vielleicht auf einem Exoplaneten des Sirius, für den beide Ereignisse simultan stattfinden.

Sind aber aus Freddys Sicht der Regenguß (X) und die Leichenverbrennung (B) zeitgleich erfolgt, so hätte der Regen das Feuer löschen und die Leichenverbrennung verhindern müssen!

Lee Smolin, eine Koryphäe der modernen Physik, baut sein Argument so exzellent auf, daß die Grenze zwischen dem Modell seiner alternativen Relativitätstheorie[15] und der Metaphysik des Eternalismus verwischt. Am bedenklichsten erscheint uns der Determinismus, der aus seinem Argument zwangsläufig resultiert.

Die Zeit bei Poincaré

Die Willkür des physikalischen Zeitmaßes

Im selben Maße wie die Zeitmessung präziser wird, stößt die Physik stets auf neue experimentelle Unstimmigkeiten. Nach Poincarés nüchterner These sieht man sich vor eine Alternative gestellt: entweder werden die Naturgesetze durch viel kompliziertere ersetzt, oder es wird der Bequemlichkeit wegen die Zeit neu definiert. Daß die Zeit der Physik eine Konvention ist, zeigt Poincaré anhand der damaligen Uhreneichung nach astronomischen Beobachtungen. Obwohl uns die Kompetenz fehlt, die Auffassung Poincarés unseren Atomuhren gegenüberzustellen, ist das Argument derart von Ewigkeit geprägt, daß es heute noch zum Nachzudenken anregt.

Es ist nicht lange her, daß die Zeitdefinition davon ausging, daß die Schwingungen eines Pendels von gleicher Dauer sind. Doch wußte man, daß z.B. die Temperatur bzw. der Luftwiderstand Schwankungen des Pendelganges verursachen. Bekommt man diese Störungen in den Griff, so muß man immer noch damit rechnen, daß neue bisher unbeachtete Ursachen die Präzision limitieren. Daher wurde der Pendel aufgegeben und die Zeit astronomisch neu definiert. Da beobachtet werden kann, wann der gleiche Stern einen Meridian passiert, „wird angenommen, daß zwei vollständige Umdrehungen der Erde um ihre Achse die gleiche Dauer haben", [Poincaré, 1905b]. Als später festgestellt wurde, daß der Mond schneller kreiste, als ihm die Theorie gönnte, hatte man gute Gründe, die Ursache der scheinbaren Beschleunigung einer Abbremsung der Erde durch die Gezeitenreibung zuzuschreiben, und die Zeit entsprechend neuzudefinieren.

[15] Smolin nennt sie *Shape dynamics*, sie ist nur lokal äquivalent zur allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins.

Gleichgültig wie die Definition verfeinert wird, kommt man nicht umhin, so Poincaré, immer dasselbe Postulat zugrundezulegen: „Dieselben Ursachen brauchen die gleiche Zeit, um die gleichen Wirkungen hervorzubringen." Um das zu verifizieren bzw. falsifizieren, müßte man Ursachen experimentell isolieren können. In der realen Welt resultiert aber manche Wirkung aus einer großen Anzahl von Ursachen. Die Bewegung eines Pendels wird vereinfachend auf die Anziehungskraft der Erde zurückgeführt, während rein theoretisch selbst die Attraktion des Sirius mitwirkt. Wie begründen die Astronomen die Verlangsamung der Erdrotation? Poincarés Antwort klingt häretisch: an den Naturgesetzen wird ungern gerüttelt.

Da die Reibung der Gezeiten Wärme erzeugt, nimmt der Impuls nach dem Erhaltungsprinzip ab. Erfolgen keine Korrekturen bezüglich der Verlangsamung der Erdumdrehung, ist nach dem Newtonschen Gesetz die Beschleunigung des Mondes nach hundert Jahren kleiner als sich aus den Beobachtungen ergibt. Vor die Wahl gestellt, auf kompliziertere Gesetze umzusteigen, oder die Zeitdefinition an die bisherigen Gesetze anzupassen, entschied man sich für letzteres: „Die Zeit muß so definiert werden, daß das Newtonsche Gesetz und der Impulserhaltungssatz verifiziert sind." Da beide Gesetze empirisch sind, bleibt die Definition nach wie vor approximativ; außerdem muß sie mit den früheren die Gesetze begründenden experimentellen Beobachtungen kompatibel sein:

> Angenommen jetzt, daß wir uns für eine andere Zeitmessung entscheiden, dann wären die Experimente, die zum Newtonschen Gesetz führten, nicht tangiert. Nur der Wortlaut des Gesetzes wäre ein anderer, weil er in eine andere Sprache übersetzt worden wäre. Der neue Wortlaut wäre viel weniger einfach. Mit anderen Worten, es ist keine Zeitmessung richtiger als eine andere; diejenige, auf die man sich allgemein einigt, ist nur die *bequemere* [...] Wir sind nicht berechtigt, von zwei Uhren zu sagen, daß die eine richtig gehe und die andere falsch; wir dürfen nur sagen, daß es vorteilhafter ist, sich nach den Angaben der ersteren zu richten[16].

Der letzte Satz könnte, aus dem Kontext gerissen, mißverstanden werden. Auf keinen Fall meint Poincaré, daß wir zwischen beiden Uhren blindlings wählen dürfen. Wir wären frei, das Newtonsche Gesetz nach Vorgabe einer Uhr zu „übersetzen". Analog könnte auf dem Computer das Ptolomäische Modell den Lauf der Planeten genau berechnen (man braucht nur entsprechend viele Epizykeln einzubauen); es wäre aber nicht „vorteilhaft". Im Vorwort von [Poincaré, 1902] und an vielen anderen Stellen beteuert Poincaré: „Freiheit ist nicht gleich Willkür". *Vorteilhaft* ist im Sinne des Rasiermessers von Ockham zu verstehen. Wenn eine Theorie (die Relativitätstheorie) die Welt besser (als die Newtonsche Mechanik) modelliert, d.h. an weniger Unstimmigkeiten krankt, ist sie vorteilhafter, und wir nehmen selbstverständlich die schwierigere Sprache in Kauf.

[16][Poincaré, 1905b], S. 46-47. Übersetzung CF.

Wir dürfen uns nicht einbilden, daß es beim Messen der Lichtgeschwindigkeit ein Nonplusultra mit beliebig vielen Dezimalstellen gäbe, als würden wir etwa eine transzendente Zahl berechnen. Poincaré zitiert [Calinon, 1987]: „[A]nzunehmen, daß die Rotationsgeschwindigkeit [der Erde] gleich bleibt, heißt annehmen, daß man die Zeit messen kann."

Wie sieht die Sachlage heute aus? Wie früher die Zeit mit einem Längenmaßstab gemessen wurde, so heute der Raum mit einer Uhr, sic transit gloria mundi! Die inzwischen erreichte schwindelerregende Präzision der Messungen darf uns nicht auf eine Überwindung der Empirie schließen lassen. Der Meter als Längenmaß wird definiert als die Strecke, die das Licht im Vakuum inerhalb von 1/299 792 458 Sekunde durchläuft. Im Klartext heißt es, daß der Meter dem Umkehrwert der Lichtgeschwindigkeit entspricht. Die Sekunde als Zeitmaß wird über die Vibrationen des Caesiums ^{133}Cs definiert. Die Festlegung des Meters lieferte keine brauchbare Maßeinheit, wenn die Lichtgeschwindigkeit im Bruch variieren würde. Daher mußte 1983 die Generalkonferenz für Maße und Gewichte den Zahlenwert der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum *für konstant erklären.*

Anstelle der von Poincaré monierten Zirkularität, hat man sich also für den dogmatischen Abbruch eines Münchhausen-Trilemmas[17] entschieden. Die Definitionen bauen auf einem neuen aber nach wie vor empirischen Fundament. Es fließt einerseits das kosmische Postulat (das Weltall ist homogen und isotrop) ein, andererseits die mit der maximal möglichen Geschwindigkeit identifizierte Lichtgeschwindigkeit der Relativitätstheorie. Die Frage bleibt zudem offen, warum die Naturkonstanten, zu denen die Lichtgeschwindigkeit zählt, gerade die Werte haben, die mit größter Genauigkeit gemessen werden; die Multiversum-Theorien schreiben diese Werte der Kontingenz zu, aber sie sind unverifizierbare mathematische Modelle. Hätten die Naturgesetze, wie es Smolin für möglich hält, einen Zeitindex, so wären eventuelle Variationen der Lichtgeschwindigkeit durch die automatische definitorische Anpassung unauffällig kaschiert!

Absolute und relationale Zeit

Poincaré macht uns also darauf aufmerksam, daß wir die Zeit in Abhängigkeit der jeweils vorherrschenden physikalischen Modelle definieren. *Er geht weiter und bestreitet, daß wir Simultaneität bei räumlich bzw. zeitlich entfernten Ereignissen zu erkennen vermögen.* Die physikalischen Ereignisse leben in der Welt draußen, während die relationale Zeit ein

[17] Jeder Versuch einer Letztbegründung führt: zu einem Zirkelschluß, oder zu einem infiniten Regreß, oder zu einem dogmatischen Abbruch.

Konstrukt unserer mentalen Welt ist. Zwischen beiden Welten führt keine Brücke, wie Poincaré an einem Beispiel klar macht. Tycho Brahe sah im November 1572 einen neuen Stern am Himmel aufhellen. Kolombus sah im Oktober 1492 die Insel San Salvador in der Ferne auftauchen. Welchen epistemologischen Sinn hat es, die nicht kausal verbundenen Erlebnisse von Tycho Brahe und Kolombus chronologisch zu ordnen?

Newtons absolute physikalische Zeit läßt jeden Zeitvergleich zu. Poincaré faßt aber die Zeit relational auf. Der Physiker kann wohl dem Bericht von Tycho Brahe die Explosion der Supernova vor ca. 10000 Jahren sinnhaltig gegenüberstellen, da ein kausaler Link besteht. Daraus hingegen, daß die Zeugnisse von Kolombus und Tycho Brahe um achzig Jahre auseinanderliegen, läßt sich nichts physikalisch Interessantes gewinnen.

Sehr zu Recht unterscheidet Kant, zwischen Ordnung und Ablauf der Zeit. Wenn die Zeit ein anthropisches Medium der chronologischen mentalen Bilder ist, können aber Chronologie und Kausalität zirkulär aufeinander bezogen werden. Dazu Poincaré:

> Dies ist also die Regel, die wir befolgen, und die einzige, der wir folgen können; wenn uns ein Ereignis als die Ursache eines anderen erscheint, so betrachten wir es als vorher geschehen.
> Durch die Ursache definieren wir also die Zeit; wenn uns aber wie meistens zwei Ereignisse durch eine konstante Beziehung verbunden erscheinen, wie erkennen wir, welches die Ursache und welches die Wirkung ist? Wir lassen gelten, daß das Antecedens die Ursache des Consequens ist. Damit definieren wir nun die Ursache durch die Zeit. Wie befreien wir uns von dieser Petitio Principii?
> Wir sagen das eine Mal post hoc, ergo propter hoc, das andere Mal propter hoc, ergo post hoc; können wir diesem Zirkelschluß entkommen[18]?

In der Tat läßt sich die Zeit so wenig von der Kausalität trennen, wie die Welle vom Teilchen in der Quantenphysik. Der Zirkel verschwindet erst durch Aufgabe der absoluten Zeit. Wäre die Zeit absolut, dann könnten simultane Ereignisse bis auf die minimale Gangungenauigkeit unserer Uhren ermittelt und mithin Zeitabstände zwischen nicht zeitgleichen Ereignissen gemessen werden. Um der Petitio principii Zeit vs. Kausalität zu entkommen, vertritt Poincaré eine relationale Zeitauffassung, bei der er Simultaneität nicht kausal verbundener Ereignisse eine „bequeme" Konvention nennt. Zur Begründung bietet Poincaré ein Beispiel an. Er möchte zeigen, wie aus nicht kausaler Anteriorität, wenn es einem beliebt, Simultaneität konstruiert werden kann:

> [D]enken wir uns drei Sterne, zum Beispiel die Sonne, den Jupiter und den Saturn [...] auf materielle Punkte beschränkt und vom übrigen Weltall abgeschieden [...] Ihre Stellung im Augenblick t bestimmt ihre Stellung im Augenblicke $t + h$ ebenso gut wie ihre Stellung im Augenblick $t - h$. Noch mehr: die Stellung des Jupiter im Augenblick t, verbunden mit der Stellung des Saturn im Augenblick $t+a$, bestimmt sowohl die Stellung des Jupiter, als die des Saturn in jedem beliebigen Augenblick. Die Gesamtheit der Stellungen, die Jupiter im Augenblick $t + \epsilon$ einnimmt und

[18][Poincaré, 1905b], S. 49-50. Übersetzung CF.

> Saturn im Augenblick $t+a+\epsilon$, ist mit der Gesamtheit der Stellungen, die Jupiter im Augenblick t und Saturn im Augenblick $t+a$ einnimmt, durch Gesetze verbunden, die ebenso genau sind als die Newtonschen, wenngleich komplizierter.
> Alsdann, warum sollte man die eine dieser Positionen nicht als die Ursache der anderen ansehen, was dazu führen würde, den Augenblick t des Jupiter und den Augenblick $t+a$ des Saturn als gleichzeitig anzusehen ?
> Es kann hierfür nur Gründe der Bequemlichkeit und Einfachheit geben, allerdings sehr gewichtige[19].

Der letzte Satz beruhigt uns. Poincaré möchte nur das Totem der absoluten Zeit entgotten, das uns durch den gewohnten Blick auf die Uhr in Fleisch und Blut übergegangen ist. Es ist begrüßenswert, daß Poincaré die Illusion der Simultaneität aufzeigt, ohne auf den beklemmenden, wenn nicht gar suspekten, Minkowski-Raum zurückzugreifen.

Wenn es auch eine kontraintuitive Überwindung kostet, die Relativität der Zeit nachzuvollziehen, ist es im Hinblick auf unsere Recherche von großer Bedeutung, daß Kant und Poincaré beide zu dem Schluß kommen, daß die Zeit eine apriorische Anschauungsform ist. Aus der Übereinstimmung schließen wir, daß die Apriorität nicht von dem Bekenntnis zur absoluten bzw. relationalen Zeit abhängt. Wie wird dann der nicht chronologisch geordnete Zeitablauf erklärt, wenn Kant sein paradigmatisches Haus anschaut? Unsere Antwort postuliert, einerseits daß es Bewegungslosigkeit nicht gibt, andererseits daß sich extramentale von intramentaler Kausalität grundsätzlich unterscheidet.

Der Aphorismus „Alles fließt, nichts besteht[20]“ warnt uns vor den Konsequenzen, bei Zeitschnitten die Dynamik einzufrieren. Beim Festhalten eines Pfeils[21] brachte Zeno mit der Bewegung zugleich die Zeit zum Stillstand. Der Pfeil bewegt sich in der Welt gemäß einer Kausalität, die auf die gespiegelte Bewegung der mentalen Abbilder des Pfeilfluges einwirkt. Wer das mentale Bild des ihn anspringenden Hundes festhält, spürt den Unterschied: er wird trotzdem gebissen.

Wir bewegen neben Abbildern auch imaginierte Bilder, die kein Urbild in der Welt haben; dann konstruieren wir selbst im Verstand die Kausalität der Bilderbewegung. Wir können unsere mentalen Bilder fixieren, die deswegen nicht starr sind. Wenn Bilder am Bildschirm analog feststehen, werden elektrische Impulse weiterhin ausgesendet. Ein Mathematiker würde sagen, daß das Bild die Identität ist. Ebenso arbeiten unsere Gehirnzellen weiter, sonst würde uns ein EKG für gehirntot erklären.

[19] [Poincaré, 1905b], S. 51-52. Übersetzung CF.

[20] *Panta rhei* bei Heraklit, *Pánta chorei kaì oudèn ménei* bei Plato.

[21] Zeno: Der an einem Ort gedanklich festgehaltene Pfeil befindet sich in Ruhe, da er sich an einem Ort nicht bewegen kann, ohne den Ort zu verlassen. Da nun der Pfeil in jedem Moment ruht, muß er sich insgesamt in Ruhe befinden.

Wir machen uns Peter Eisenhardts Definition zu eigen: „Die Zeit ist etwas an der Bewegung und nicht mit ihr identisch[22].“ Wo sich nichts bewegt, gibts es demnach keine Zeit. Das von Kant betrachtete Haus bewegt sich draußen nicht. Anders als bei dem Schiff, dessen Kinematik uns eine Chronologie aufdrängt, formen wir dasselbe Bild des Hauses, unabhängig davon, in welcher Reihenfolge und wie oft wir die einzelnen Hausteile anschauen. Auch bei einem Puzzle oder einem Kreuzworträtsel fangen wir ohne zwingenden Grund irgendwo an und fahren im Zickzack ungezwungen fort: die Sukzession ist nicht ausschließlich kausal bedingt. Der Ursache steht die Anteriorität nicht auf der Stirn geschrieben. Daß Simultaneität kein Sachverhalt der Außenwelt sondern eine auf das Geschehen projizierte Form unserer reflektierten Anschauung ist, machte Poincaré durch die provokante Aussage deutlich, daß uns nur „Gründe der Bequemlichkeit und Einfachheit, allerdings sehr gewichtige“ daran hindern, „den Augenblick t des Jupiter und den Augenblick $t + a$ des Saturn als gleichzeitig anzusehen.“

Ein Mangel fällt auf: Kant und Poincaré versäumen beide, die Außenwelt gegenüber der mentalen Welt bezüglich der Bewegung und der Kausalität abzugrenzen. In der Außenwelt bewegen sich Dinge ohne unser Zutun, in unserem Geist bewegen *wir* Abbilder der Dinge und imaginierte Bilder. Kant halten wir entgegen: Das Haus bewegt sich nicht, aber das mentale Bild des Hauses verändert (= bewegt) sich, wie etwa ein Puzzle oder ein Kreuzworträtsel nach und nach ergänzt wird. Poincaré halten wir entgegen: neben der externen Kausalität der Dinge der Außenwelt genießen wir eine weitgehende Freiheit beim Aufbau der Kausalität unserer imaginierten Bilder.

Poincaré unterstreicht selbst immer wieder, daß jede Wirkung aus unzählig vielen Ursachen folgt[23]. In nichtlinearen dynamischen Systemen ist inzwischen der Schmetterlingseffekt zum Paradigma geworden. Wenn wir uns den Verlauf Ursache $\rightarrow$ Wirkung als eine Zeitgerade vorstellen, dann entspricht das Ereignis dem Schnittpunkt, in dem alle Ursachen synchron zusammenwirken. Wird eine der Geraden verschoben, entsteht dieses bestimmte Ereignis nicht. Dazu ein Beispiel. Peter ist auf seinem Weg zur Arbeit, als ein durch eine Windböe von einem Dach ausgelöster Ziegel direkt vor seinen Füßen aufprallt. Es können nur wenige der vielen Ursachen genannt werden: der Ziegel war schon lange locker, ohne den Wind wäre er nicht gefallen, Peter hätte einen anderen Weg und eine andere Zeit wählen können, usw. Wenn Peter nicht abergläubisch ist, wird er nicht fürchten, daß die Absicht eines Gottes seinen Beinaheunfall geleitet habe. In der Welt draußen sind Bewegung und Kausalität *nicht teleologisch* geprägt.

[22] Vgl. [Eisenhardt, 2006], S. 63.
[23] Selbst der Sirius, so Poincaré, beeinflußt die Bahn des Mondes, allerdings kaum merklich.

Genau das Gegenteil ist in der mentalen Welt der Fall. „Alles Wirkende wirkt wegen eines Zwecks", betonte Thomas. Unser freier Wille bestimmt unsere Handlungen; er erzeugt diachrone zweckorientierte Kausalitäten, sonst wäre unsere Wahl nicht frei. Es führt nicht nur ein Weg zum anvisierten Ziel: wenn ich ein Buch lesen möchte, kann ich entweder erst das Buch aufschlagen und dann meine Brille aufsetzen oder umgekehrt.

Bei der externen Kausalität schreiben uns die kausalen Ketten der Welt die Chronologie vor. Das flußabwärts fahrende Schiff lebt draußen. Bei dem Haus, dem Puzzle, dem Kreuzworträtsel, konstruiert unser Verstand Stück für Stück ein mentales Bild: die Bewegung steckt im allmählichen Aufbau des Bildes. In den Denkpausen, wo das mentale Bild kurzweilig stehenzubleiben scheint, gehen uns alternative Ergänzungsmöglichkeiten durch den Kopf. In unserem Bewußtsein bewegen sich immer Bilder. Sowohl die vorgegebene Sukzession der bewegten externen Dinge der Welt als auch die frei gewählte Sukzession der sich verändernden mentalen Bilder benötigen beide einen Träger, wie auch unsere Gedanken in der Sprache kristallisieren. Dieser Träger, die relationale Zeit, lebt in uns; er bedingt eine apriorische Anschauungsform. Selbst Newton konnte in den *Principia* seine absolute Zeit nicht begründen, sondern er verwies auf den Weltenschöpfer: „[...] er [Gott] währt stets fort und ist überall gegenwärtig, er existiert stets und überall, *er macht den Raum und die Dauer aus*[24]."

Poincaré, der für aufgeklärte Laien schreibt, ging es überhaupt nicht darum, die Physik in Diskredit zu bringen, sondern nie aus den Augen zu verlieren, daß der gigantische Bau der Wissenschaft ein Menschenwerk ist, und die Zeit der Physik ist gegenüber der subjektiven Zeit sauber abzugrenzen. Poincaré macht zu Recht keine Zäsur zwischen objektiver und subjektiver Zeit, denn es sind Anschauungsformen einer und derselben Zeit. Wir beschreiben jetzt seine Auffassung der psychologischen Zeit.

Die subjektive Zeit bei Poincaré

Daß die subjektive Dauer nicht meßbar sei, klingt wie eine Banalität. Es macht kaum Sinn, das jeweilige Zeitempfinden in dem Bewußtsein zweier Personen zu vergleichen. Die subjektbezogene Chronologie drängt sich uns auf. Vorbeigegangene Empfindungen werden zu einem Erinnerungsstrang kombiniert, wobei Komplexität und Lebhaftigkeit des einzelnen Ereignisses verloren gehen, sonst wäre es uns noch gegenwärtig: „Erst wenn

[24] Vg. [Newton, 1686], S. 509. Hervorhebung CF.

sie alles Leben verloren haben, können wir unsere Erinnerungen in die Zeit einordnen, wie ein Botaniker seine getrockneten Blumen in sein Herbarium einreiht[25].“

Der Vergleich der abgespeicherten Erinnerungen mit einem Album wird Sigmund Freud 20 Jahre später in seiner Metapher des „Wunderblocks“ neu aufleben lassen:

> [Der Wunderblock] will nicht mehr sein als eine Schreibtafel, von der man die Aufzeichnungen mit einer bequemen Hantierung entfernen kann [...] Der Block liefert also nicht nur eine immer von neuem verwendbare Aufnahmsfläche wie die Schiefertafel, sondern auch Dauerspuren der Aufschreibung wie der gewöhnliche Papierblock; [...] Denkt man sich, daß während eine Hand die Oberfläche des Wunderblocks beschreibt, eine andere periodisch das Deckblatt desselben von der Wachstafel abhebt, so wäre das eine Versinnlichung der Art, wie ich mir die Funktion unseres seelischen Wahrnehmungsapparats vorstellen wollte[26].

Während bei Poincaré die Blumen ins Herbarium eingelegt werden, macht Freud deutlich, daß nicht der Gegenstand bzw. das Ereignis selbst sondern ein Protokoll abgespeichert wird. Freuds Zettel sind aber in der Zeit *diskret* verteilt, während für das Herbarium manche Blumen noch zu pflücken sind. Die klaffenden Lücken sind Poincaré wichtig:

> Aber von den Aufklebern gibt es nur eine begrenzte Anzahl. Demnach müßte der psychologische Zeitbegriff die Vorstellung von Lücken in sich schließen. Woher kommt das Gefühl, daß zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten andere Zeitpunkte liegen? Wir ordnen unsere Erinnerungen in die Zeit ein, aber wir wissen, daß Felder leer bleiben. Wie ginge das zu, wäre die Zeit keine in unserem Geist *präexistierende Anschauungsform*? Wie könnten wir wissen, daß es leere Felder gibt, wenn sich uns diese Felder nur durch ihren Inhalt offenbarten[27]?

Nach unserer Meinung lassen sich die beiden komplementären Auffassungen auf einen Nenner bringen. Zum Zeitpunkt t entspringen unsere mentalen Bilder der Zeit vor und nach t. Die nachfolgenden mentalen Bilder zum Zeitpunkt $t + a$ zeigen zwar auf dieselben Ereignisse und Sachverhalte, aber die Protokollzettel wurden neugeschrieben[28]. Poincarés Leerstellen weisen darauf hin, daß wir diskrete Stützstellen abspeichern, um die Dynamik der Welt immer wieder zu „erfinden“. Der Professor, der in einer langen mathematischen Vorlesung, einen Beweis durchführt, hat sich vorher Stützstellen zurechtgelegt. Sei beispielshalber Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen vorzuführen. Dazu memorisieren wir die Formel $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ einer endlichen Menge von Primzahlen und das außerhalb der Menge liegende Produkt $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$; mehr ist nicht nötig, um die Lücken jederzeit neuzuerfinden. Poincaré hat Recht: die Anschauungsform der Zeit ist a priori, sie zeigt auf die Ordnung der Zeit, aber die Dynamik der Zeit, d.h. der Übergang von den diskreten Bildern zum Kontinuum der Erkenntnis

[25] Vgl. [Poincaré, 1905b], S. 24.Übersetzung CF.

[26] Vgl. Notiz über den *Wunderblock*, [Freud, 1924].

[27] Vgl. [Poincaré, 1905b], S. 42. Übersetzung und Hervorhebung CF.

[28] Wir werden sehen, daß für Augustinus nicht Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft mental vorgestellt werden, sondern die momentane Vergegenwärtigung derselben.

bedarf zusätzlich eines Kantischen Schemas, um die Lücken zwischen den endlich vielen Erinnerungszetteln wegzuglätten.

Wir möchten abschließend unsere Ergebnisse im Hinblick auf die quantifizierte Zeit zusammenfassen:
i) Die verblüffende Präzision der Zeitmessung, darf nicht kaschieren, daß sie auf empirischen Konventionen aufbaut: kosmisches Prinzip und zirkulärer Einbau der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in die Definition der Zeit von 1983 durch die Generalkonferenz für Maße und Gewichte.
ii) Bis auf das Entropiegesetz erlauben die meisten Naturgesetze eine Umkehr des Zeitparameters. Die Formeln sind zeitindifferent.
iii) Das Kausalitätsgesetz kennt nur die Ausnahme der *isolierten* Systeme der Quantenmechanik. Solche Systeme selektieren aus dem Netz von Ursachen theorierelevante Parameter und vertrauen darauf, daß die in der Streuung der Meßergebnisse wirkenden nicht beachteten Parameter das theoretische Modell nicht beeinträchtigen. In der Welt gibt es aber keine streng isolierten Systeme.
iv) Newtons These der absoluten Zeit, die der Zeit eine vom Menschen unabhängige Realität verleiht, ist nicht haltbar.

D. Rezeption des Benacerrafschen Dilemmas

Bob Hale und Crispin Wright haben in *Benacerraf's Dilemma Revisited*[1] die Implikationen des Benacerrafschen Dilemmas sehr detailliert analysiert. Anders als manche Autoren vertreten sie - u.E. zu Recht - die Meinung, daß der Vortrag von Benacerraf nicht primär den Platonismus angreifen will. Vielmehr stellt sich das Dilemma als ein ernsthaftes Problem heraus, nicht nur für die Platonisten sondern überhaupt für alle, die reine Mathematik für einen bedeutenden Teil unseres Wissens halten:

> Of course, Benacerraf's argument does raise a problem for platonists [...] But the general issue of reconciling semantics and epistemology for mathematics is not just a challenge for would-be platonists - it faces all philosophical positions which allow that pure mathematics presents, as it is normally taken to do, a substantial proper part of human knowledge[2].

Es werden von Hale & Wright zwei Lager ausgemacht: die konservativen und die nicht-konservativen Repliken auf das Dilemma. Konservativ werden mathematische Aussagen genannt, soweit

i) sie wörtlich entsprechend der Syntax zu nehmen sind, *und*

ii) darüberhinaus einen Korpus apriorischen Wissens bilden[3].

Nichtkonservativ bedeutet dann, daß auf eine der Bedingungen i) oder ii) verzichtet wird. Für eine detaillierte Auseinandersetzung wichtiger Positionen nominalistischer bzw. empirischer Prägung verweisen wir auf [Panza & Sereni, 2013]: Nominalismus von Field, Fiktionalismus von Field vs. Yablo, modaler eliminativer Strukturalismus von Hellmann, kognitiver Platonismus von Maddy.

Die neueren Varianten des Platonismus sind konservativ. Hale & Wright splitten das konservative Lager nach Intellektualisten und Intuitionisten auf:

---

[1] Vgl. [Hale & Wright, 2002].

[2] Vgl. [Hale & Wright, 2002], § 1.

[3] Vgl. [Hale & Wright, 2002], § 2: die konservative Replik „takes the Dilemma head-on, unrepentently maintaining both that pure mathematics is correctly construed at syntactic face-value and that, so construed, it represents, at least for the greater part, a body of a priori knowledge."

i) Die Intellektualisten vertrauen auf den menschlichen Intellekt[4].
ii) Die Intuitionisten hingegen auf die Intuition[5].

Hale & Wright stellen den Intuitionalismus von Parson vor sowie zwei intellektualistische Theorien: den Strukturalismus *ante rem* von Shapiro und den Neo-Logizismus (in der Nachfolge von Frege). [Panza & Sereni, 2013] setzt sich mit allen diesen Theorien detailliert auseinander.

Das Spektrum der breitgefächerten aktuellen Literatur bestätigt, daß das Benacerrafsche Dilemma die Polemik um den Platonismus mit neuen Argumenten angefacht hat. Bisher wurde keine mehrheitliche Meinungsbildung zugunsten der einen oder anderen Theorie erreicht. Nachdenkenswert ist das Schlußwort von Hale & Wright:

> And of course whilst there is less than universal consensus - even among the classically minded - about the full extent of our mathematical knowledge, no one supposes it stops short at elementary arithmetic! A viable epistemology for mathematics ought to encompass, at a minimum, the foundations of the theory of real numbers, the various branches of analysis, and, arguably, at least a significant portion of set theory, even if not the whole of it [...] *[E]xtending the abstractionist programme*, and its answer to Benacerraf's Dilemma, *beyond arithmetic will*, so far as we can see, *raise no new epistemological issues*[6].

Es sollte u.E. nicht vorschnell angenommen werden, daß die Arithmetik allein - auch nicht die Mengentheorie - die semantische und epistemologische Debatte in der Mathematik bereits abdecke.

Ein Extremfall, der nicht auf Arithmetik umgeformt werden kann, ist die auf S. 232 behandelte Wahrscheinlichkeitstheorie. Das mächtige Gebäude ruht auf dem „empirischen Gesetz der großen Zahlen". Da empirisch geht das „Gesetz" trotz seiner immensen Tragweite nicht unmittelbar in die Axiomatik ein; es unterspannt aber axiomwertig die ganze Theorie. Gemäß dem Indispensability-Argument ist dieses Naturgesetz nicht wegzudenken und auf die Stochastik wird niemand verzichten wollen. Wenn sich ein Empirist autorisiert fühlt, dem Kausalitätsgesetz als Gewohnheit mistrauisch gegenüberzustehen, wird er sich um so mehr eine mögliche Welt vorstellen können, wo sich Kopf und Zahl erratisch verteilen, ohne durch eine mysteriöse Kraft gezwungen zu werden, gegen 50/50 zu streben. Was bewirkt, daß aus dem Chaos der Einzelziehung die deterministische Ordnung einer Ziehungsreihe entsteht?

[4] Vgl. [Hale & Wright, 2002], § 2: „[I]t may be proposed that access to the objects of pure mathematics is afforded by our general abilities of reason and understanding."

[5] Vgl. [Hale & Wright, 2002], § 2: „[A]n epistemology of mathematics should reckon with a special faculty - traditionally *intuition* - which enables an awareness of systems of abstract, and especially mathematical objects and of their characteristic properties, broadly as ordinary sense perception makes us aware of ordinary concrete objects and their properties."

[6] Vgl. [Hale & Wright, 2002], S. 32. Hervorhebung CF.

Selbst wenn sich keine andere Sparte der Mathematik auf ein Naturgesetz beruft, sondern nach Möglichkeit auf apriorische Evidenzen, ist das Gewicht der Anschauung in der Arithmetik dubios. Kant dürfte sich mit seinem $5 + 7 = 12$ ein mehr fragwürdiges denn erhellendes Beispiel der Notwendigkeit der Anschauung ausgesucht haben. Doch hat er darin recht, daß die Anschauung einen Satz (oft) synthetisch macht, d.h. unser Wissen erweitert. Daher haben wir uns zum Ziel gesetzt, in unserer Arbeit Beispiele aus der Geometrie und Topologie zu privilegieren. Die Intuitionisten wie Gödel, die Intuition als Quasi-Anschauung auffassen, gehen in diese Richtung. Der „normale" Philosoph mag Gödels Anschauungstalent nicht nachvollziehen können, er wird dennoch zugeben müssen, daß unsere simplen Beweise durch Anschauung des Pythagoräischen Lehrsatzes oder der Winkelsumme im Dreieck nicht weniger apodiktisch sind, als würden die Beweise in der Sprache der Arithmetik umständlich formuliert werden.

Daß z.B. nach dem Umrühren einer Tasse Kaffee ein Punkt sich wieder an der Stelle befindet, wo er vor dem Rühren stand, ist eine Behauptung, wo keine Zahlen auftauchen und wo uns die Anschauung zunächst eher das Gegenteil vermuten läßt. Ein Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer wird allerdings Zahlen und Mengen ins Spiel bringen. Analog mögen wir die Bewegung eines Pendels gemäß einer Gleichung modellieren, die den Sinus der Auslenkung enthält. Der Pendel an sich, das Noumenon des Pendels im Kantischen Vokabular, bleibt eine unbeschreibbare Realität.

Die Divergenz der Wissenstheorien läßt nicht hoffen, das Platonische Problem mit den Mitteln der Logik lösen zu können. Vielmehr sollten Rationalismus und Nominalismus als metaphysische Positionen behandelt werden. Mit seinem Dilemma hat Benacerraf eine Lawine von Rezeptionen ausgelöst, die wir nicht einmal ausführlich aufgelistet haben. Wir wollten vielmehr die Profusion der Standpunkte vor Augen führen, die einerseits keinen Konsens erhoffen läßt, andererseits die philosophische Tragweite der Frage um die Vereinbarkeit zwischen logischem Beweisen und intuitionistischem Erfinden unterstreicht.

E. Platonismus als beste Erklärung der Widerspruchsfreiheit

(1) Prämisse: Abstrakte mathematische Objekte und systemische Relationen werden von weitgehend unabhängigen Axiomensystemen abgeleitet.
(2) Prämisse: Die Peer-Review liefert die bestmögliche Gewähr dafür, daß nur nichtkollidierende Axiomensysteme verwendet werden.
(3) Prämisse: Die logische Deduktion der mathematischen Schlüsse liefert eine Kette von Tautologien.
(4) Zwischenkonklusion: Wird ein logisch gültiger Schluß beanstandet, so muß wegen (3) die Problematik im Axiomensystem liegen.
(5) Prämisse: Die Axiomensysteme werden zugleich empirisch und konsensual festgesetzt; sie gelten apodiktisch.
(6) Prämisse: Der Mathematiker läßt keine Widersprüche zu den ihm bekannten Axiomensystemen zu. Wegen der zunehmenden Spezialisierung kann der Erfinder nicht dafür garantieren, daß aus seinem Axiomensystem abgeleitete Schlüsse mit Schlüssen aus anderen Axiomensystemen nicht kollidieren.
(7) Zwischenkonklusion: Wegen (2) begründet allein die bestandene Peer-Review unsere Überzeugung, daß mathematische Schlüsse nie miteinander kollidieren.
(8) Prämisse: Die Wahrscheinlichkeit, daß mathematische Schlüsse kollidieren, steigt mit der Flut der tagtäglich ermittelten neuen Schlüsse an, falls keine extramentale Ordnung Kollisionen verhindert.
(9) Prämisse: Keine derzeitigen mathematischen Schlüsse kollidieren miteinander.
(10) Prämisse: Das Hilbertprogramm und mit ihm jeder künftige Versuch mit dem Ziel, durch finite Methoden die Widerspruchsfreiheit der Axiomensysteme der Mathematik nachzuweisen, erweisen sich wegen der Gödelschen Unvollständigkeitssätze als undurchführbar.
(11) Prämisse: Die Platonistische Hypothese setzt eine extramentale Welt voraus, in der zwischen den Ideen eine widerspruchsfreie Ordnung herrscht.

(12) Prämisse: Die mathematischen Modelle sind Abbilder der Ideen. Die widerspruchsfreie Ordnung der urbildlichen Ideen verhindert, daß die Abbilder kollidieren.

(13) Konklusion: Da wegen (10) keine andere Hypothese begründen kann, warum Axiomensysteme und mathematische Schlüsse nie kollidieren, liefert, solange (9) gilt, der Platonismus die beste Erklärung der Widerspruchsfreiheit in der Mathematik.

Diskussion:

Prämisse (12) behauptet, daß die mathematischen Modelle Abbilder Platonischer Ideen sind. Was befähigt den Menschen, ihm nicht zugängliche transzendente Ideen abzubilden? Es ist genau das Ziel unserer Arbeit, durch Reflexion über das mathematische Erfinden die Möglichkeit der Übertragung rational zu begründen: das eingeborene Vermögen, eine Harmonie zu erkennen, bildet die Brücke zwischen extramentaler und mentaler Welt.

Nach Prämisse (8) führen immer komplexer werdende Konstrukte unweigerlich zu Kollisionen, falls sich die menschliche Imagination an keiner extramentalen Ordnung orientiert. Prämisse (11) ist unbedenklich, da sie lediglich die Ausformulierung von Prämisse (8) als platonistisches Postulat darstellt.

Dreh- und Angelpunkt ist also Prämisse (8). Um sie anzugreifen, müßte ein Gegenbeispiel eines widerspruchsfreien Systems genannt werden; dann wäre glaubhaft zu machen, daß auch dann keine Widersprüche entstünden, wenn das System in eine größeres Übersystem integriert wird.

Die Widerspruchsfreiheit der Mathematik ist die tragende Säule unseres Arguments. Die Mathematiker, die um die Russellsche Falle wissen, achten penibel auf Widerspruchsfreiheit innerhalb einer Theorie. Bei der zunehmenden Spezialisierung innerhalb der reinen Mathematik könnten Kollisionen unerwartet auftreten. Erstaunlicherweise gibt es bislang keine potentiell interessante mathematische Theorie, die mit anderen anerkannten Theorien im Konflikt stünde. Zwar gibt es z.B. den Streit um die Kontinuumshypothese; wir argumentieren auf S. 141 dafür, daß hier keine Widersprüche vorliegen, sondern die Theorie ZFC ist noch unvollständig. Der Grundlagenstreit der Mathematik hat gezeigt, daß die Widerspruchsfreiheit unverzichtbar ist. Erfreulicherweise erhält die behauptete Widerspruchsfreiheit eine empirische Unterstützung durch das Unentbehrlichkeitsargument, mit dem wir uns in dieser Arbeit auseinandersetzen: die hohe Effizienz der mathematisierten Theorien der Anwendungswissenschaften bürgt für die Widerspruchsfreiheit der Mathematik.

F. Brouwer zur Dirichlet-Funktion

Der von Brouwer anhand seiner unkonventionellen nachfolgend skizzierten Definition des Kontinuums bewiesene Stetigkeitssatz besagt (der traditionellen Analysis entgegen): *Jede Funktion auf dem reellen Intervall* $[0,1]$ *ist gleichmäßig stetig*[1]. Mit diesem Satz wird Dedekinds Konstruktion der Schnitte durch die reellen Zahlen widerprochen, nach der eine Zahl, gemäß dem Tertium-non-datur, entweder rational oder irrational ist. Das vertiefen wir kurz.

Angenommen es gäbe durch die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen einen Schnitt, d.h. $\mathbb{R}$ kann in zwei Mengen A und B so aufgeteilt werden, daß $\mathbb{R} = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$. Dann ist nach dem vorerwähnten Stetigkeitssatz die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in A \\ 1 & \text{, falls } x \in B \end{cases}$$

eine stetige Funktion. Somit muß f konstant sein, d.h. $\mathbb{R} = A$ oder $\mathbb{R} = B$. Betrachte jetzt die Dirichlet-Funktion:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls x rational} \\ 1 & \text{, falls x irrational} \end{cases}$$

g muß konstant sein, d.h. es gibt entweder nur rationale oder nur irrationale Zahlen.

Demnach gilt das Tertium-non-datur $\forall x \in \mathbb{R}(Px \vee \neg Px)$ nicht[2]. Dabei lassen sich sehr wohl nach dem von Brouwer anerkannten Nichtwiderspruchsprinzip die durch einen

[1]Vgl. Brouwer, *On the Significance of the Principle of Excluded Middle in Mathematics, especially in Function Theory*, 1923, in [van Heijenoort, 1967], S. 334-45.

[2]In der Stanford Encyclopedia of Philosophy [van Atten, 2011] erwähnt Van Atten zwei weitere Gegenbeispiele von Brouwer: sei $\mathfrak{R}$ das intuitionistische Kontinuum, dann
$\neg\forall x \in \mathfrak{R}(\neg\neg x < 0 \to x < 0)$
$\neg\forall x \in \mathfrak{R}(x \neq 0 \to x < 0 \vee x > 0)$.
Es sind keine „Gegenbeispiele" im üblichen Sinne, sondern Beispiele, die intuitionistisch zeigen, daß durch deren Widerlegung z.B. das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten abgeleitet werden kann.

endlichen Bruch darstellbaren rationalen Zahlen von den irrationalen abgrenzen; es geht nicht um das kontradiktorische Verhältnis dieser Zahlen, sondern um das Kontinuitätsverhältnis zwischen ihnen. Für Brouwer sind nämlich Kontinuum und Diskretes nicht voneinander trennbar sondern komplementär; so ist die Basis jeder mathematischen Konstruktion die Auflösung der Vielheit in einer Einheit:

> [...] the basic intuition of mathematics (and of any intellectual activity) as the substratum, divested of all quality, of any perception of change, a unity of continuity and discreteness, a possibility of thinking together several entities, connected by a „between", which is nether exhausted by the insertions of new entities [...]
> Having recognized, that the intuition of continuity, of *fluidity*, is as primitive, as that of several things forming together a unit, the latter being at the basis of every mathematical construction, we are able to state properties of the continuum as a *matrix of points to be thought of as a whole*[3].

Brouwer verwirft in seiner Dissertation die Kantische apriorische Anschauungsform des Raums; er geht stattdessen von einer angeborenen Intuition des Kontinuums aus. Daß die Intuition des Kontinuums a priori sei, steht u.E. im Widerspruch zu der Schwierigkeit den Kontinuumsbegriff zu definieren. Brouwer selbst definiert das Kontinuum anders als die klassische Mathematik, wie das Beispiel der Dirichlet-Funktion dokumentiert. Nach unserer Auffassung läßt uns kein angeborenes Vermögen ein Kontinuum erkennen, sondern wir besitzen u.E. ein Schema des algorithmischen Denkens[4], das im Infiniten Fehlschlüsse verursachen kann, wie uns inzwischen die fraktale Welt gelehrt hat.

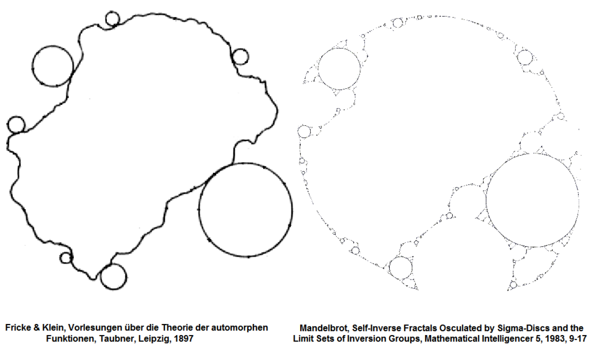

Abbildung F.1.: Klein-Mandelbrot-Fraktal

Wir können uns von dem zerfransten fraktalen Rand eines Gebiets keine anschaulich richtige Vorstellung bilden; das wäre nicht der Fall, wenn das Erkennen eines Kontinuums ein angeborenes Schema wäre. Z.B. haben in [Fricke & Klein, 1897] die großen Mathematiker Fricke und Klein die durch eine Gruppe von Kreisspiegelungen erzeugte vermeintlich glatte Grenzkurve von Abb. F.1 gezeichnet. Daneben liefert Benoit Mandelbrot das exakte filigrane Geflecht von Grenzkurven.

[3]Vgl. [Brouwer, 1907], S. 17. Hervorhebung im Original.

[4]In unserer Bachelorarbeit [Fabre, 2012] vertreten wir die These, daß Anselm von Canterbury in seinem ontologischen Gottesbeweis aus dem Algorithmus des potentiellen Unendlichen auf ein aktuelles Unendliches schließt. Anselm meint: „Etwas, über das hinaus nichts Größeres gedacht werden kann, existiert im Verstand." Nicht das Etwas existiert im Verstand, sondern allein der Algorithmus des Addierens der Vollkommenheiten.

G. Erfinden bei Mozart

http://www.zeno.org/Musik/M/Jahn,+Otto/W.A.+Mozart/3.+Theil/4.+Buch/11.

Otto Jahns Einleitung lautet: *Ein wichtiges Actenstück ist Mozarts Brief an einen nicht bekannten Baron v. P., in welchem uns, so wie er gedruckt ist, wenn auch vielleicht nicht ganz seine Worte, doch wohl im Wesentlichen seine Meinung mitgetheilt ist. Dieser oft gedruckte Brief ist zuerst von Rochlitz mitgetheilt (A. M. Z. XVII S. 561ff.). Da unabweisbare Gründe darthun, daß Rochlitz dabei Zusätze und Aenderungen gemacht haben müsse, so habe ich den ganzen Brief mit den nöthigen kritischen Erörterungen Beil. XXI abdrucken lassen. Allerdings werden dadurch auch Zweifel an der Authenticität des hier mitgetheilten Abschnittes rege, und vermuthlich wird der Leser an manchen Stellen einen Abstich gegen die aus so vielen unzweifelhaften Briefen Mozarts ihm bekannte Ausdrucksweise desselben empfinden; aber da es nicht erwiesen ist, daß der Brief ganz untergeschoben sei, er vielmehr nur eine Redaction erfahren zu haben scheint, so durfte dies Document hier nicht übergangen werden.*

„‚Nun komme ich auf den allerschwersten Punkt in Ihrem Briefe‘, heißt es und den ich lieber gar fallen ließ, weil mir die Feder für so was nicht zu Willen ist. Aber ich will es doch versuchen, und sollten Sie nur was zu lachen darin finden. Wie nämlich meine Art ist beim Schreiben und Ausarbeiten, von großen und derben Sachen nämlich. Ich kann darüber wahrlich nicht mehr sagen als das; denn ich weiß selbst nicht mehr und kann auf weiter nichts kommen. Wenn ich recht für mich bin und guter Dinge, etwa auf Reisen im Wagen, oder nach guter Mahlzeit beim Spazieren, und in der Nacht, wenn ich nicht schlafen kann: da kommen mir die Gedanken stromweis und am besten. Woher und wie das weiß ich nicht, kann auch nichts dazu. Die mir nun gefallen, die behalte ich im Kopfe, und summe sie auch wohl vor mich hin, wie mir Andere wenigstens gesagt haben. Halt ich das nun fest, so kommt mir bald eins nach dem andern bey, wozu so ein Brocken zu brauchen wäre, um eine Pastete daraus zu machen, nach Contrapunkt, nach Klang der verschiedenen Instrumente et caetera, et caetera, et caetera! Das erhitzt mir nun die Seele, wenn ich nämlich nicht gestört werde; da wird es immer größer; und ich breite es immer weiter und heller aus; und das Ding wird im Kopfe wahrlich fast fertig, wenn es auch lang ist, so daß ichs hernach mit einem Blick, gleichsam wie ein schönes Bild oder einen hübschen Menschen im Geiste übersehe, und es auch gar nicht mehr nach einander, wie es hernach kommen muß, in der Einbildung höre, sondern wie gleich alles zusammen. Das ist nun ein Schmauß. Alles das Finden und Machen gehet in mir nur wie in einem schönstarken Traum vor: aber das Ueberhören, so alles zusammen, ist doch das Beste. Was nun so geworden ist, das vergesse ich nicht leicht wieder; und das ist vielleicht die beste Gabe, die mir unser Herregott geschenkt hat. Wenn ich nun hernach einmal zum Schreiben komme, so nehme ich aus dem Sack meines Gehirns, was vorher, wie gesagt, hineingesammelt ist. Darum kommt es hernach auch ziemlich schnell aufs Papier, denn es ist, wie gesagt, eigentlich schon fertig, und wird auch selten viel anders als es vorher im Kopfe gewesen ist. Darum kann ich mich auch beym Schreiben stören lassen; und mag um mich herum mancherley vorgehen: ich schreibe doch; kann auch dabey plaudern, nämlich von Hühnern und Gänsen, oder von Gretel und Bärbel u. dgl. Wie nun aber über dem Arbeiten meine Sachen überhaupt eben die Gestalt oder Manier annehmen daß sie mozartisch sind und nicht in der Manier irgend eines Anderen: das wird halt ebenso zugehen wie daß meine Nase ebenso groß und herausgebogen, daß sie mozartisch und nicht wie bey anderen Leuten geworden ist! Denn ich lege es nicht auf Besonderheit an, wüßte die meine auch nicht einmal näher zu beschreiben; es ist ja aber wohl bloß natürlich, daß die Leute, die wirklich ein Aussehen haben, auch verschieden von einander aussehen, wie von außen

so von innen. Wenigstens weiß ich, daß ich mir das eine so wenig als das andere selbst gegeben habe.
Damit lassen Sie mich aus für immer und ewig, bester Freund, und glauben Sie ja nicht, daß ich aus anderen Ursachen abbreche, als weil ich nichts weiter weiß. Sie, ein Gelehrter, bilden sich nicht ein, wie sauer mir schon das geworden ist! Anderen Leuten würde ich gar nicht geantwortet haben, sondern gedacht: Mutschi buochi quittle? Etsche Malappe Mumming.“

H. Einstein an Hadamard

Aus [Hadamard, 1945]

MY DEAR COLLEAGUE

In the following, I am trying to answer in brief your questions as well as I am able. I am not satisfied myself with those answers and I am willing to answer more questions if you believe this could be of any advantage for the very interesting and difficult work you have undertaken.

(A) The words or the language, as they are written or spoken, do not seem to play any role in my mechanism of thought. The psychical entities which seem to serve as elements in thought are certain signs and more or less clear images which can be „voluntarily" reproduced and combined. There is, of course, a certain connection between those elements and relevant logical concepts. It is also clear that the desire to arrive finally at logically connected concepts is the emotional basis of this rather vague play with the above-mentioned elements. But taken from a psychological viewpoint, this combinatory play seems to be the essential feature in productive thought - before there is any connection with logical construction in words or other kinds of signs which can be communicated to others.

(B) The above-mentioned elements are, in my case, of visual and some of muscular type. Conventional words or other signs have to be sought for laboriously only in a secondary stage, when the mentioned associative play is sufficiently established and can be reproduced at will.

(C) According to what has been said, the play with the mentioned elements is aimed to be analogous to certain logical connections one is searching for.

(D) *Question: What kind of internal words do mathematicians make use of; are they motor, auditory, visual?*
Visual and motor. In a stage when words intervene at all, they are, in my case, purely auditive, but they interfere only in a secondary stage, as already mentioned.

(E) It seems to me that what you call full consciousness is a limit case which can never be fully accomplished. This seems to me connected with the fact called the narrowness of consciousness (Enge des Bewußtseins)

I. Indispensability Argument

[Panza & Sereni, 2013b]

Realism, epistemic [RE]	Platonism, epistemic [PE]	Realism, non-epistemic [RnE]	Platonism, non-epistemic [PnE]
RE1 We are justified in believing some scientific theories to be true.	PE1=RE1	RnE1 There are true scientific theories.	PnE1= RnE1
RE2 Among them, some are such that some mathematical theories are indispensable to them.	PE2=RE2	RnE2=PE2=RE2	PnE2=RnE2=PE2=RE2
RE3 We are justified in believing true these scientific theories only if we are justified in believing true the mathematical theories that are indispensable to them.	PR3=RE3	RnE3 These scientific theories are true only if their indispensable mathematical theories are themselves true.	PnE3=RnE3
	PE4 We are justified in believing true a mathematical theory only if we are justified in believing the objects it is about to exist.		PnE4 A mathematical theory is true only if the objects it is about exist.
Konklusion RE We are justified in believing true the mathematical theories indispensable to these scientific theories.	Konklusion PE We are justified in believing the objects which the indispensable mathematical theories are about to exist.	Konkusion RnE The mathematical theories indispensable to these scientific theories are true.	Konklusion PnE The objects which the indispensable mathematical theories are about exist.

J. Freges Kritik an der neuzeitlichen Mathematik

Die Grundlagen der Arithmetik, [Frege, 1884], § 14, S. 18.:

> „Die Erfahrungssätze gelten für die physische oder psychologische Wirklichkeit, die geometrischen Wahrheiten beherrschen das Gebiet des räumlich Anschaulichen, mag es nun Wirklichkeit oder Erzeugniß der Einbildungskraft sein. Die tollsten Fieberphantasien, die kühnsten Erfindungen der Sage und der Dichter, welche Thiere reden, Gestirne stille stehen lassen, aus Steinen Menschen und aus Menschen Bäume machen, und lehren, wie man sich am eignen Schopfe aus dem Sumpfe zieht, sie sind doch, sofern sie anschaulich bleiben, an die Axiome der Geometrie gebunden. Von diesen kann nur das begriffliche Denken in gewisser Weise loskommen, wenn es etwa einen Raum von vier Dimensionen oder von positivem Krümmungsmaaße annimmt. Solche Betrachtungen sind durchaus nicht unnütz; aber sie verlassen ganz den Boden der Anschauung. Wenn man diese auch dabei zu Hilfe nimmt, so ist es doch immer die Anschauung des euklidischen Raumes, des einzigen, von dessen Gebilden wir eine haben. Sie wird dann nur nicht so, wie sie ist, sondern symbolisch für etwas anderes genommen; man nennt z. B. gerade oder eben, was man doch als Krummes anschaut. Für das begriffliche Denken kann man immerhin von diesem oder jenem geometrischen Axiome das Gegentheil annehmen, ohne dass man in Widersprüche mit sich selbst verwickelt wird, wenn man Schlußfolgerungen aus solchen der Anschauung widerstreitenden Annahmen zieht. Diese Möglichkeit zeigt, dass die geometrischen Axiome von einander und von den logischen Urgesetzen unabhängig, also synthetisch sind. Kann man dasselbe von den Grundsätzen der Zahlenwissenschaft sagen? Stürzt nicht alles in Verwirrung, wenn man einen von diesen leugnen wollte? Wäre dann noch Denken möglich? Liegt nicht der Grund der Arithmetik tiefer als der alles Erfahrungswissens, tiefer selbst als der der Geometrie? Die arithmetischen Wahrheiten beherrschen das Gebiet des Zählbaren. Dies ist das umfassendste; denn nicht nur das Wirkliche, nicht nur das Anschauliche gehört ihm an, sondern alles Denkbare. Sollten also nicht die Gesetze der Zahlen mit denen des Denkens in der innigsten Verbindung stehen?“

K. Platonismus und Grundgesetz V

Frege ist nach eigenem Bekunden mit seinem Grundgesetz V an die Russellschen Antinomie gestoßen - Stichwort: Klasse der Klassen, die sich nicht selbst enthalten[1]. Wäre Grundgesetz V allein an dieser Aporie gescheitert, trüge der Logizismus nur eine Wunde davon. Laut [Gandon, 2013], S. 242-280, macht Richard G. Heck Jr. die wichtige Feststellung, daß Frege sein Grundgesetz V lediglich zum Beweis des Hume-Prinzips einsetzt. Würde das Hume-Prinzip, das anders als Grundgesetz V gegen die Russellsche Antinomie immun ist, zum extralogischen Axiom erklärt werden, so könnte Freges Konstruktion der Zahlen gerettet werden.

Während es Heck um den Versuch geht, die logizistische Auffassung der Mathematik zu reparieren, interessieren wir uns für Grundgesetz V, weniger in bezug auf den Logizismus denn als die tragende Säule von Freges ausgefeilter platonistischer Theorie der Mathematik. Es ist aus dieser Sicht bedeutsam, ob Grundgesetz V trotz der Russellschen Antinomie eine solide platonistische Theorie legitimiert.

Wertverlauf statt Funktion

Frege unterscheidet grundsätzlich zwischen Funktionen und Gegenständen[2]. Zu den üblichen Gegenständen zählt er noch die beiden Wahrheitswerte: das Wahre und das Falsche[3], sowie den *Wertverlauf*, den er in den *Grundgesetzen*, [Frege, 1893, 1903] §3, folgendermaßen definiert:

> Ich brauche die Worte „die Function $\Phi(\xi)$ hat denselben Werthverlauf wie die Function $\Psi(\xi)$“ allgemein als gleichbedeutend mit den Worten „die Functionen $\Phi(\xi)$ und

[1] Die Antinomie bezieht sich auf Mengen, während Frege Zahlen konstruiert. [Panza & Sereni, 2013], S. 139-140, gibt eine Umformulierung der Mengenantinomie in die Sprache Freges, an der Grundgesetz V scheitert.

[2] Vgl. [Frege, 1893, 1903] §2: „Gegenstände stehen den Functionen gegenüber. Zu den Gegenständen rechne ich demnach Alles, was nicht Function ist, z. B. Zahlen,Wahrheitswerthe und die [. . .] Werthverläufe.“

[3] Vgl. [Frege, 1893, 1903], Band I, Vorwort, S. X: „Ich unterscheide nämlich zwei Wahrheitswerthe: das Wahre und das Falsche. “

$\Psi(\xi)$ haben für dasselbe Argument immer denselben Werth.“ Wir haben diesen Fall bei den Functionen $\xi^2 = 4$ und $3 \cdot \xi^2 = 12$, wenigstens wenn als Argumente Zahlen genommen werden. Wir können uns aber die Zeichen der Quadrirung und Multiplication auch so definirt denken, dass die Function $(\xi^2 = 4) = (3 \cdot \xi^2 = 12)$ für jedes beliebige Argument als Werth das Wahre hat. Hier kann nun auch ein Ausdruck der Logik gebraucht werden: „der Begriff Quadratwurzel aus 4 hat denselben Umfang wie der Begriff etwas, dessen dreifaches Quadrat 12 ist.“

Während eine Funktion willkürliche Zeichen verwendet, liegt dem Wertverlauf die ursprüngliche Relation zugrunde, die in der Gegenüberstellung von Argumenten vs. Werten *materialisiert* wird: der Wertverlauf ist ein Gegenstand.

Sind die Argumente ganze Zahlen, dann „vergegenständlicht“ der Wertverlauf die Funktion $x \mapsto x^2$ als Menge der Paare $\{\ldots\{-1,1\},\{0,0\},\{1,1\},\{2,4\},\ldots\}$, d.h. als zweispaltige Tabelle (bei Funktionen einer Variablen). Bei ganzen Zahlen können wir noch erraten, daß die Werte die Quadrate der Argumente sind. Sonst können Argumente nur noch auszugsweise tabelliert werden, und der Sinn der Werte kann nur erschwert erkannt werden. Bei reellen Zahlen können wir uns einen Punkt denken, der die Gerade der Argumente durchläuft, und einen anderen Punkt, der sich auf der Geraden der Werte erst nach unten dann nach oben bewegt; dabei erhalten wir nur eine diffuse Vorstellung der Funktion $x \mapsto x^2$. Erst wenn wir den Graphen zeichnen, offenbart uns die Parabel den „Sinn“ der Funktion. Der große Nachteil der Darstellung als Wertverlauf ist u.E. ein epistemischer. Es fehlt der Graph der Funktion; wir sehen nur synchrone Bewegungen auf der Abszisse und auf der Ordinate. Zwar könnte der Wertverlauf als Graph der Funktion aufgefaßt werden; der Graph stellt aber nur eine Visualisierung der Funktion dar, während Freges Wertverlauf ursprünglicher als die Funktion sein soll. Ferner gibt es Graphen bei Funktionen von höchstens drei Variablen und nicht bei allen.

In dem Zitat dehnt Frege den Funktionsbegriff auf etwa die „Funktion“$x \mapsto x^2 = 4$ aus, die für die Argumente -2 und 2 den Wahrheitswert „wahr“ erhält, bzw. „falsch“ sonst. Das Ziel ist dann erreicht, den „Umfang“ der Begriffe aus den Funktionen $x \mapsto x^2 = 4$ und $x \mapsto 3x^2 = 12$ in einem logischen Satz anzugleichen.

Die Definition von *Umfang* als eine die Merkmale eines Begriffes begrenzende Sphäre übernimmt Frege von Kant, der den Umfang als gedachten Radius dieser Sphäre interpretiert:

> Die Menge der Dinge aber, die ich mir unter dem Conceptu Communi dencken kann, machen die Sphaeram Conceptus aus. Je mehreren Dingen ein Merckmal zu kömt, je größer ein Begrif nach seinem Umfange d.i. nach seiner Capacitaet ist, destoweniger enthält er dagegen in sich[4].

[4]Vgl. *Logik Blomberg* § 204

In Grundgesetz V stellt der Wertverlauf eine Erweiterung des Umfangsbegriffs dar:

$$\vdash \acute{\varepsilon}f(\varepsilon) = \acute{\alpha}g(\alpha) \equiv \forall x[f(x) = g(x)].$$

Das Zeichen $\vdash$ kennzeichnet eine Assertion; es heitß etwa: „Es gilt: ...“. Auf der linken Seite stehen die Symbole $\acute{\varepsilon}f(\varepsilon)$ bzw. $\acute{\alpha}g(\alpha)$ für die jeweiligen Wertverläufe der Funktionen f bzw. g. Beide Seiten der Identität beziehen sich auf denselben Gegenstand: das Wahre bzw. das Falsche.

Dummetts vermeintlicher Inkonsistenzeinwand

Allerdings hat Frege ein triviales Beispiel gewählt, in dem er lediglich beide Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl $\neq 0$ multipliziert. Ist Grundgesetz V außerhalb der elementarsten Arithmetik anwendbar, wie es Frege auch anstrebt[5]?

Panza & Sereni meinen, daß ein schlichtes Argument Dummetts genügt, um die Inkonsistenz von Grundgesetz V bloßzustellen: „Es ist nicht notwendig auf die ausgeklügelte Argumentation Russells zuzugreifen, um festzustellen, daß Grundgesetz V problematisch ist[6].“ Der vermeintliche Einwand Michael Dummetts steht u.a. in [Dummett, 1991]:

> Frege fails to pay due attention to the fact that the introduction oft the abstraction operator[7] brings with it, not only new singular terms, but an extension of the domain [...] [I]t may be seen as making an inconsistent demand on the size of the domain D, namely that, where D comprises n objects, we should have $n^n \leq n$, which holds only for $n = 1$, whereas we must have $n \geq 2$, since the two truth values are distinct: for there must be n^n extensionally non-equivalent functions of one argument and hence n^n distinct value ranges. But this assumes that the function-variables range over the entire classical totality of functions from D into D, and there is meager evidence for attributing such a conception to Frege. His formulations make it more likely that he thought of his function-variables as ranging over only those functions that could be referred to by functional expressions of his symbolism (and thus over a denumerable totality of functions) and of the domain D of objects as comprising value-ranges of such functions[8].

[5]Vgl. [Frege, 1893, 1903] §2: „Als funktionsbildend hat man zu den Grundrechnungsarten noch den Grenzübergang in seinen verschiedenen Arten als unendliche Reihe, Differentialquotienten, Integral gefügt und zuletzt das Wort ‚Function‘ so allgemein verstanden, dass der Zusammenhang zwischen Functionswerth und Argument unter Umständen gar nicht mehr durch die Zeichen der Analysis, sondern nur noch durch Worte bezeichnet werden konnte. Eine andere Erweiterung bestand darin, dass man als Argumente und demzufolge auch als Functionswerthe complexe Zahlen zuließ.“

[6][Panza & Sereni, 2013], S. 138. Übersetzung CF.

[7]Im λ-Kalkül wandelt der Abstraktionsoperator einen beliebiger Ausdruck in eine Funktion um. Es heißt dann z.B. $\lambda x.x^2$, wo wir $x \mapsto x^2$ schreiben.

[8]Vgl. [Dummett, 1991], SS. 219-220.

Sei zur Verdeutlichung D ein Gebiet mit $n = 3$ Gegenständen 1, 2, 3, für sowohl die Argumente als auch die Funktionswerte. Dann sind es $3^3 = 27$ Wertverläufe:

$\{\{1,1,1\},\{1,1,2\}, \{1,1,3\},\{1,2,1\}, \{1,2,2\},\{1,2,3\},$
$\{1,3,1\},\{1,3,2\}, \{1,3,3\},\{2,1,1\}, \{2,1,2\},\{2,1,3\},$
$\{2,2,1\},\{2,2,2\},\{2,2,3\}, \{2,3,1\},\{2,3,2\},\{3,3,3\},$
$\{3,1,1\},\{3,1,2\},\{3,1,3\}, \{3,2,1\},\{3,2,2\},\{3,2,3\},$
$\{3,3,1\},\{3,3,2\},\{3,3,3\}\}$

Allgemein entstehen bei n Gegenständen n^n Wertverläufe. Während $n^n \leq n$ nur für $n = 1$ gilt, verlangt die Fregesche Konstruktion $n \geq 2$, da das Wahre und das Falsche Gegenstände sind. Dummett hat Recht, wenn er meint, daß Frege nicht die Gesamtheit der Funktionen $D \to D$ im Auge hat, sondern nur funktionelle Ausdrücke seiner Symbolik, denn Frege erklärt:

> In manchen Wendungen der üblichen mathematischen Ausdrucksweise entspricht das Wort „Funktion" dem, was ich hier Wertverlauf einer Funktion genannt habe. Aber Funktion in dem hier gebrauchten Sinne des Wortes ist das logisch Frühere[9].

Wenn Frege den Wertverlauf, das Wahre und das Falsche zu Gegenständen erklärt, gehören sie deswegen nicht in die Klasse der Gegenstände des Definitionsgebiets. Betrachten wir das alltägliche Beispiel der Permutationsfunktion. Es wird eine Menge von n Gegenständen in sich selbst abbildet; es wird z.B. ein Hand Spielkarten umgeordnet:

$\sigma: \ \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \to \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \mapsto \{\sigma(x_1), \sigma(x_2), \cdots, \sigma(x_n)\}.$

Die einstellige Funktion 1. Stufe $\sigma(\xi)$ bildet die n Gegenstände des Definitionsgebiets nach demselben Gebiet ab. Um alle Permutationen zu erhalten, wenden wir die Funktion 2. Stufe $f(\xi, \sigma(\xi))$ an, die offenbar $n!$ Wertverläufe aufweist. Es gilt zwar $n! \leq n$ nur für $n = 1$. Da aber Funktionen bei Frege keine Gegenstände sind, erzeugt $f(\xi, \sigma(\xi))$, ohne die Anzahl der ξ zu erhöhen, einen die $n!$ Wertverläufe der $\sigma(\xi)$ abbildenden Wertverlauf, d.i. für $n = 3$:

$\{\{1,2,3\},\{1,3,2\}, \{2,3,1\},\{2,1,3\}, \{3,2,1\},\{3,1,2\}\}$

Allgemein kann eine Funktion, wie Dummett meint, das Gebiet erweitern; die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ erweitert die positiven reellen Zahlen um die negativen reellen Zahlen, da jede Zahl eine positive und eine negative Wurzel besitzt. Es ist bei Permutationen nicht der Fall, da, wie bei Dummett, die Argumente und die Werte derselben Menge

[9] Vgl. [Frege, 1891], S. 11.

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ angehören. Die Reihenfolge der Spielkarten in der Hand, d.h. der Wertverlauf, ist bei Frege zwar ein Gegenstand, aber keine Spielkarte; das Wahre und das Falsche sind Gegenstände, aber weder Spielkarten noch ein Verlauf von Karten.

Folglich mögen Funktionen das Gebiet erweitern - was Dummetts Vermutung entgegen dem hohen Scharfsinn von Frege kaum entgangen sein dürfte -, sie müssen es aber nicht. Jedenfalls gehören die Wertverläufe in eine andere Klasse von Gegenständen als die Argumente. Die Gesamtheit der Funktionen schließt zwar solche ein, die keine funktionellen Ausdrücke im Sinne Freges sind. Dummett meint zu Recht, daß Grundgesetz V, wenn auf diese Gesamtheit angewendet, nicht konsistent wäre. Dennoch hat Frege ausdrücklich den Wertverlauf als die Entität erklärt, aus der mathematische Funktionen abtrahiert werden, womit kein Anlaß besteht, die Konsistenz von Grundgesetz V anzuzweifeln. Nur betrachtet Dummett ein breiteres Spektrum von Funktionen als Frege.

Dennoch entsteht u.E. bei der Substitution der Funktionen durch die primitivere Vorstufe des Wertverlaufs ein verarmter Begriff, der zwar vergegenständlicht werden kann, aber den Sinngehalt der Funktion ignoriert, somit zu Inkonsistenzen im Grundgesetz V führt, was wir jetzt besprechen möchten.

Inkonsistenz bei periodischen Funktionen

Der Einwand Dummetts entfällt, wenn das Gebiet D unendlich viele Gegenstände umfaßt, z.B. Zahlen. Dann gibt es „Funktionen $\Phi(\xi)$ und $\Psi(\xi)$, [die] für dasselbe Argument immer denselben Wert [haben].“ Nichts verbietet uns, die zweispaltige Tabelle der Wertverläufe von rechts nach links zu lesen, bzw. den Graphen um $\pi/2$ zu drehen und gegen die Ordinatenachse zu spiegeln, um die Umkehrfunktion zu erhalten.

Bei periodischen Funktionen entstehen aber problematische mehrwertige Umkehrfunktionen. Wenn T für die Periode steht, dann gilt für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ die Gleichheit $\Phi(\xi + kT) = \Psi(\xi + lT)$, so daß die geforderte eineindeutige Zuordnung der Werte zu den Argumenten nicht möglich ist. Da bei Frege die Wertverläufe keine geordneten Mengen sind, ist Grundgesetz V beim Vertauschen der Spalten auf die Umkehrfunktionen Φ^{-1} und Ψ^{-1} nicht anwendbar. Falls ξ eine reelle Zahl ist, stellt allerdings die Abszisse eine implizite Ordnung dar; für periodische Funktionen auf $\mathbb{C}$ gibt es aber keine „natürliche“ Ordnung, wie das Beispiel der komplexen Exponentialfunktion deutlich macht.

Die komplexe Exponentialfunktion hat die Periode $2\pi i$, d.h. $\exp(z + 2\pi k\mathrm{i}) = \exp(z)$, mit $k \in \mathbb{Z}$. Abb. K.1 stellt die Argumente auf der linken Seite den Werten rechts

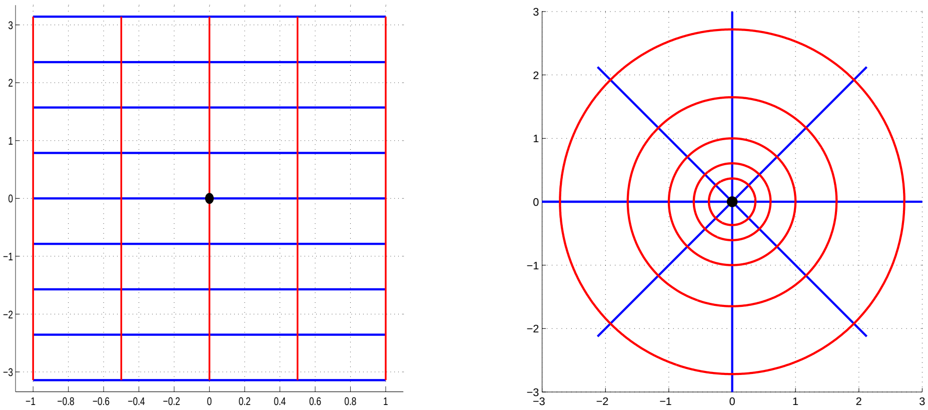

Abbildung K.1.: Komplexe Exponentialfunktion: $z \mapsto exp(z)$

gegenüber. Um die Umkehrfuntion, den komplexen Logarithmus, wohl zu definieren, müssen wir aus dem Definitionsbereich einen Streifen $\{z \in \mathbb{C} \,|\, a < \mathrm{Im}(z) < a + 2\pi\}$, mit $a \in \mathbb{R}$, herausschneiden. Nur auf diesem Streifen haben die Funktionen $Id(z)$ und $z \mapsto exp(Ln(z))$ gemäß Grundgesetz V denselben Umfang[10]. Den Wertverlauf laut Frege dürfen wir ungehindert von rechts nach links betrachten, womit die Bedingung nicht erfüllt ist, nach der $Id(z)$ und $z \mapsto exp(Ln(z))$ „für dasselbe Argument immer denselben Wert“ haben sollen.

Wir lassen gelten, daß der Vergleich einer zweimal umgekehrten Funktion mit der Identität kein ganz fairer Trick ist. Schließlich könnten dem Umkehren der Wertverläufe Restriktionen auferlegt werden. Es existieren jedoch sinnunabhängige Funktionen, die im Grenzfall die Argumente auf exakt dieselben Werte abbilden. Dann taucht die Frage der Gültigkeit von Grundgesetz V in einer kleinen Umgebung des Grenzfalls auf.

Umfang von Approximationen

Allgemein lassen sich periodische (auch reelle) Funktionen als Fourrier-Reihen, d.h. eine Entwicklung in Sinus und Cosinus, darstellen. In Abb. K.2 ist[11] der Graph der Sägezahn-Funktion $s(x + 2\pi k) = s(x)$, $k \in \mathbb{Z}$ auch der Graph von $s(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$. Die Wertverläufe sind identisch, der Sinn der Funktionen ist hingegen ein anderer.

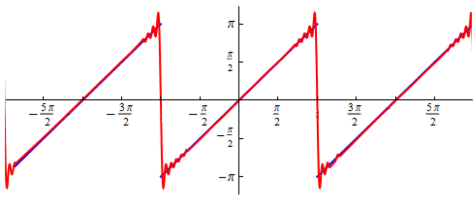

Abbildung K.2.: Sägezahngraph

[10] In den reellen Zahlen sind die Umfänge von $\xi \mapsto Id(\xi)$ und $\xi \mapsto e^{\log \xi}$ gleich.
[11] Bis auf eine harmlose Singularität bei $x = (2k + 1)\pi$.

Gleiche Werteverläufe entstehen auch bei nicht periodischen Funktionen. Betrachten wir z.B. die Anwendung auf eine natürliche Zahl s der riemannschen Zeta-Funktion: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$
Euler hat bewiesen: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \displaystyle\prod_{p\ prim} \frac{1}{1-p^{-s}}$.

Die Wertverläufe der unendlichen Summe bzw. des unendlichen Produkts über alle Primzahlen sind identisch[12]. Im Vokabular Freges heißt es dann, daß die Funktionen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ und $\displaystyle\prod_{p\ prim} \frac{1}{1-p^{-s}}$ dieselbe Bedeutung (heute: Extension), die den Namen $\zeta(s)$ erhält, aber nicht denselben Sinn (heute: Intension) haben:

> Es liegt nun nahe, mit einem Zeichen (Namen, Wortverbindung, Schriftzeichen) außer dem Bezeichneten, was die Bedeutung des Zeichens heißen möge, noch das verbunden zu denken, was ich den Sinn des Zeichens nennen möchte, worin die Art des Gegebenseins enthalten ist. [...] Es würde die Bedeutung von *Abendstern* und *Morgenstern* dieselbe sein, aber nicht der Sinn[13].

Nach Grundgesetz V heißt es:

$$\vdash \acute{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \acute{\alpha} \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-p^{-s}} \equiv \forall s[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\ prim} \frac{1}{1-p^{-s}}]$$

Es gibt Formeln für den exakten Wert der Funktionen (wie $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$) nur für gerades s. Bei ungeraden s kann auch der Computer nicht bis ∞ rechnen. Daher wird man die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s})_{N\in\mathbb{N}}$ (analog: der Partialprodukte) betrachten. Diese Folge ist auch eine Funktion, deren „Umfang" wir uns als eine kleine Sphäre um den Grenzwert bei $N \to \infty$ vorstellen können. Gelten die Wertverläufe als Gegenstände, dann könnte eine Umfangssphäre von Approximationen definiert werden, d.h. die Familie der fast identischen Gegenstände[14]. Bei der Sägezahnfunktion der Abb. K.2 gehört die Schlangenlinie einer solchen Familie an.

In der numerischen Mathematik wird ein Graph anhand einer geschickt gewählten Stückelung der Argumente durch (meistens: kubische) „Splines" approximiert. Selbst bei Funktionen, für die keine Formel existiert, wie z.B. die Glockenkurve von Gauß $\int e^{-\frac{1}{2}t^2} \mathrm{d}t$, wird ein beliebig feiner Graph erstellt. Da der Computer zwangsläufig mit endlichen Zahlen rechnet, liefern Approximationen die *Bedeutung* des *Gegenstandes* Wertverlauf. Während aber eine Formel den *Sinn* der Funktion ausdrückt, bleibt der Sinn der Splines

[12] Falls s eine gerade Zahl ist, d.h. $s = 2k$, wurden von Euler die Werte berechnet:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \displaystyle\prod_{p\ prim} \frac{1}{1-p^{-2k}} = r\pi^{2k}$ für die geeignete rationale Zahl r.
Die gemeinsamen Werte durchlaufen, bis auf auf eine Skalierung, Potenzen von π.

[13] Vgl. [Frege, 1892], S26.

[14] Bei dem Beispiel Freges würde statt $3x^2 = 12$ die Familie $3x^2 = 12 + \epsilon$ der Funktion $x^2 = 4$ gegenübergestellt werden.

verborgen. Wie ein technischer Zeichner mit einem Kurvenlineal (englisch: spline) den Sinn seiner Kurven nicht kennen muß, so hat das Aneinanderreihen von Splines keinen intrensischen Sinn; es soll lediglich den Wertverlauf einer Funktion approximieren.

Es können aber, auch in der reinen Mathematik, approximierende Funktionen im Grenzfall fusionieren. 1977 wurde der merkwürdige Universalitätssatz von Woronin bewiesen, nach dem, ins Unreine formuliert, fast sämtliche[15] analytische Funktionen durch die riemannsche Funktion $\zeta(s)$ gleichmäßig approximiert werden können. Schlampig gesprochen: die große Masse der komplexen Funktionen haben *lokal* denselben „Sinn“ wie die ζ-Funktion. Dann sind die Wertverläufe in den Umfangssphären der sinnungleichen Funktionen nach Grundgesetz V alle gleich.

Fazit

Grundgesetz V bietet den Vorteil, den Funktionen ihre als Gegenstände aufgefaßten Wertverläufe zu substituieren, und dadurch eine Verbalisierung in der Sprache der Logik zu ermöglichen. Die Inkonsistenz von Grundgesetz V macht es für die gängigen Funktionen nicht unbrauchbar; allerdings könnte das Hume-Prinzip nur über ein konsistentes Theorem bewiesen werden.

Die Substitution des Funktionsbegriffs durch den ursprünglicheren Gegenstand Wertverlauf würde, falls Grundgesetz V konsistent wäre, dem logizistischen Anspruch förderlich sein, aber einen Rückschritt in der Entwickelung der Mathematik bedeuten. Die Vergegenständlichung einer Funktion auf die primitivere Vorstufe des Wertverlaufs beraubt den Funktionsbegriff seines Sinngehalts, der das Erfinden der Mathematik überhaupt möglich macht. Grundgesetz V liefert keine Erkenntnisse, wenn statt $\forall x[f(x) = g(x)]$ die Approximation $\forall x[f(x) \approx g(x)]$ steht. Ein Wertverlauf schafft zwar einen Gegenstand im Sinne des Platonismus; was bei einer Funktion hinzugedacht wird, geht dabei verloren.

[15] Die Einschränkungen sind minimal. Genauer heißt es: Stetige, auf einfach zusammenhängenden und kompakten Gebieten D (wobei D im Streifen $\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < 1$ liegt) nicht verschwindende und dort analytische Funktionen $f(s)$ können durch Translationen der Riemannschen ζ-Funktion längs der imaginären Achse $\zeta(s + i\tau)$ beliebig genau gleichmäßig in D approximiert werden. Die berühmte Riemannsche Vermutung ist äquivalent zu dem Satz, laut dem auch dieζ-Funktion sich selbst gleichmäßig im Sinne des Universalitätssatzes von Woronin approximieren läßt.

Literaturverzeichnis

[Abbott, 1884] Abbott, Edwin A.: *Flatland: A romance of many dimensions*, Seeley, London, 1884.

[Aigner, Ziegler, 2002] Aigner Martin & Ziegler Günter M.: *Das BUCH der Beweise*, Springer-Verlag, Heidelberg Berlin, 2002.

[Alain, 1920] Alain (Emile Auguste Chartier): *Système des Beaux-Arts*, Nouvelle Revue Française, 1920.
http://classiques.uqac.ca/classiques/Alain/systeme_beaux_arts/alain_systeme_BA.pdf

[Aristoteles, Physik] Aristoteles: *Physik*, 4. Buch,
http://www.zeno.org/Philosophie/M/Aristoteles/Physik/4.+Buch/12.+Capitel

[Aristoteles, Metaphysik] Aristoteles: *Metaphysik*,
http://www.linke-buecher.de/texte/romane-etc/Aristoteles–Metaphysik.pdf

[van Atten, 2011] van Atten, Mark: *Luitzen Egbertus Jan Brouwer*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2011 Edition), Edward N. Zalta (ed.),
http://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/brouwer/

[Augustinus, ca. 400] Augustinus, Aurelius: *Die Bekenntnisse des heiligen Augustinus*, Leipzig, Reclam, 1888 [u.ö.] (Reclams Universal-Bibliothek ;2791/94a).
http://www.ub.unifreiburg.de/leadmin/ub/referate/04/augustinus/

[Bachelard, 1934] Bachelard, Gaston: *Le nouvel esprit scientifique*
http://bibliotheque.uqac.ca/

[Bailey & Borwein, 2005] Bailey, David H. & Borwein Jonathan M.: *Experimental Mathematics: Examples, Methods and Implications*, Notices of the American Mathematical Society, vol. 52, no. 5, pp. 502-514, May 2005.
http://www.ams.org/notices/200505/fea-borwein.pdf

[Bailey & Borwein, 2006] Bailey, David H. & Borwein Jonathan M. & al.:*Experimental Mathematics In Action*, AK Peters, 2006.
https://math.dartmouth.edu/ m56s13/BaileyBorweinetal2006book_Experimental_Mathematics_in_Action.pdf

[Bailey & Borwein, 2011] Bailey, David H. & Borwein Jonathan M.: *Exploratory Experimentation and Computation* Notices of the American Mathematical Society, vol. 58, no. 10, pp. 1410-149, November 2011.
http://www.ams.org/notices/201110/rtx111001410p.pdf

[Baker, 2005] Baker, Alan: *Are There Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena?*, Mind, 114: 223¡V38.

[Baker, 2009] Baker, Alan: *Mathematical Explanation in Science*, ritish Journal for the Philosophy of Science, 60, 2009, p. 611-633.

[Balaguer, 1998] Balaguer, Mark: Platonism and Anti-Platonism in Mathematic, Oxford University Press, 1998.

[Balaguer, 2011] Balaguer, Mark: *Fictionalism in the Philosophy of mathematics*, in Stanford Encyclopedia of Philosophy, substantive revision Fri Sep 16, 2011.

[Benacerraf, 1965] Benacerraf, Paul: *What numbers could not be*, Philosophical Review 74:47-73, 1965.

[Benacerraf, 1973] Benacerraf, Paul: *Mathematical Truth*, The Journal of Philosophy, Vol. 70, No. 19, Seventieth Annual Meeting of the American Philosophical Association Eastern Division. (Nov. 8, 1973), pp. 661-679.

[Berger, 2010] Berger, Marcel: *Geometry revealed. A Jacob's ladder to modern higher geometry*, Springer Verlag, 2010.

[Bergson, 1896] Bergson, Henri: *Matière et mémoire - Essai sur la relation du corps à l'esprit* Les Presses universitaires de France, Paris, 72e édition, Bibliothèque de philosophie contemporaine, 1965.
http://classiques.uqac.ca/classiques/bergson_henri/
matiere_et_memoire/matiere_et_memoire.pdf

[Bergson, 1908] Bergson, Henri: *L'évolution créatrice*, Félix Alcan Editeur, Paris, 1908.
https://ia600402.us.archive.org/30/items/
levolutioncreatr00berguoft/levolutioncreatr00berguoft.pdf

[Bergson, 1919] Bergson, Henri: *L'énergie spirituelle, essais et conférences*, Les Presses universitaires de France, 1967.
http://www.psychaanalyse.com/pdf/philo_biblioO_bergson_energie
_spitituelle_essais_et_conferences_114pages.pdf

[Bergson, 1922] Bergson, Henri: *Durée et simultanéité - A propos de la théorie d'Einstein*, Les Presses universitaires de France, Paris, 7e édition, Bibliothèque de philosophie contemporaine, 1968.
http://classiques.uqac.ca/classiques/bergson_henri/
duree_simultaneite/duree_et_simultaneite.pdf

[Boltzmann, 1905] Boltzmann, Ludwig: *Populäre Schriften*, Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1905
https://archive.org/stream/populreschrifte00boltgoog#page/n5/mode/1up

[Boniface, 2004] Boniface, Jacqueline: *Poincaré et le principe d'induction*, Philosophiques, vol. 31, n° 1, 2004, p. 131-149.
http://id.erudit.org/iderudit/008937ar

[Borelli & al., 2012] Borelli, Vincent & al.: *Flat tori in three-dimensional space and convex integration*, Edited by Yakov Eliashberg, Stanford University, Stanford, CA, 2012.
http://www.pnas.org/content/109/19/7218.full.pdf+html

[Brouwer, 1907] Brouwer, Luitzen E. J.: *On the foundations of Mathematics*, Thesis, Amsterdam, Brouwer: Collected Works, vol. I, ed. A. Heyting, North-Holland Publishing Co., 1975.

[Brouwer, 1908] Brouwer, Luitzen E. J.: *The Unreliability of the Logical Principles*, Brouwer: Collected Works, vol. I, ed. A. Heyting, North-Holland Publishing Co., 1975.

[Brouwer, 1912] Brouwer, Luitzen E. J.: *Intuitionism and Formalism* Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Volume 37, Number 1, Pages 55-64, S 0273-0979(99)00802-2.

[Brouwer, 1948] Brouwer, Luitzen E. J.: *Consciousness, Philosophy, and Mathematics*, Brouwer: Collected Works, vol. I, ed. A. Heyting, North-Holland Publishing Co., 1975.

[Brouwer, 1951] Brouwer, Luitzen E. J.: *Cambridge Lectures on Intuitionism*, D. van Dalen, Cambridge University Press, 1951.

[Burgess, 2008] Burgess, John P.: Mathematics, Models and Reality, Selected Philosophical Essays, Cambridge University Press, 2008.

[Butterworth, 2008] : Butterworth, R. et al.: *Numerical thought with and without words: Evidence from indigenous Australian children.*, Proceedings of the National Academy of Sciences 10.1073/pnas.0806045105, 2008.
http://www.pnas.org/content/105/35/13179.full.pdf+html?with-ds=yes

[Calinon, 1987] Calinon, Auguste: *Etude sur les diverses grandeurs en mathématiques*, Neuauflage: Kessinger Publishing, 10. September 2010.

[Cantor, 1895] Cantor, Georg: *Briefe*, Hrsg. von Herbert Meschkowski u. Winfried Nilson, Berlin, Springer, 1991.

[Carnap, 1931] Carnap, Rudolf: *Die logizistische Grundlegung der Mathematik*, Erkenntnis, 2, 1931, S. 91-105.

[Carnap, 1931a] Carnap, Rudolf: *Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache*, in Zs. Erkenntnis, 2. Berlin 1931/32, S. 219-241.

[Carnap, 1963] Carnap, Rudolf: *Intellectual Autobiography*, The Library of Living Philosophers vol. XI, Hg. Arthur Schilpp, Northwestern University, La Salle, Illinois, 1963.

[Chaitin, 2004] Chaitin, Gregory: *Irreducible Complexity in Pure Mathematics*, 2004.
http://arXiv.org > math > arXiv:math/0411091v1

[Colyvan, 2015] Colyvan, Mark: *Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2015 Edition), Edward N. Zalta (ed.)
http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/mathphil-indis/>.

[Condillac, 1754] de Condillac,Etienne Bonnot, *Traité des sensations*, Librairie Arthème Fayard, Paris, 1984.

[Connes, Changeux 1989] : Connes, Alain & Changeux, Jean-Pierre: *Matière à penser*, Odile Jacob, 1989, reprint 2008.
Conversations on Mind, Matter, and Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[Couturat, 1905] Couturat, Louis (1868-1914): *Les principes des mathématiques*, gallica, Bibliothèque nationale de France.
ftp://ftp.bnf.fr/000/N0003843 PDF 1-1DM.pdf

[Dedekind, 1888] Dedekind, Richard: *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, 1888.

[Deleuze, 1983] Deleuze, Gilles: *Image Mouvement Image Temps*, Les cours de Gilles Deleuze, 07/06/1983, www.webdeleuze.com

[Descartes, 1628] Descartes, René: *Regulae ad directionem ingenii*, Règles pour la direction de l'esprit, Édition Victor Cousin, 1824. https://fr.wikisource.org/wiki/R

[Descartes, 1637] Descartes, René: Discours de la méthode, éd. Victor Cousin, 1637.

[Descartes, 1641] Descartes, René: *Untersuchungen über die Grundlagen der Philosophie*, Edition Holzinger, Taschenbuch, Berliner Ausgabe, 2. Auflage, 2014.
http://www.zeno.org/Philosophie/M/Descartes,+René

[Detlefsen, 1990] Detlefsen, Michael: *Brouwerian Intuitionism*, Oxford University Press, Mind, New Series, Vol. 99, No. 396. (Oct., 1990), pp. 501-534.
http://links.jstor.org/sici?sici=0026-4423
%28199010%292%3A99%3A396%3C501%3ABI%3E2.0.CO%3B2-K

[Dieudonné, 1966] Dieudonné, Jean: *Les travaux d'Alexandre Grothendieck*, Festschrift, Cartier et al.,1990, p. 21-24.
http://www.mathunion.org/ICM/ICM1966.1/Main/icm1966.1.0021.0024.ocr.pdf

[Dummett, 1991] Dummett, Michael: *Frege, Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, 1991.
http://www.spiritual-minds.com/philosophy/assorted/Michael
%20Dummett%20-%20Frege,%20Philosophy%20of%20Language
%5BHarper&Row,%20719p%5D.pdf

[Einstein, 1921] Einstein, Albert: *Geometrie und Erfahrung*, Festvortrag gehalten an der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin
am 27. Januar 1921, J. Springer, l921.
http://www.philoscience.unibe.ch/documents/kursarchiv/WS99/Geometrie.pdf

[Einstein, 1936] Einstein, Albert: *Physik und Realität*, Journal of The Franklin Institute, Vol. 221 march, 1936 No. 3.

[Eisenhardt, 2006] Eisenhardt Peter: *Der Webstuhl der Zeit, Warum es die Welt gibt*, Rowohlt Taschenbuch, Reinbek, 2006.

[Eisler, 1930] Eisler, Rudolf: *Kant-Lexikon, Nachschlagewerk zu Immanuel Kant*,
http://www.textlog.de/rudolf-eisler.

[L'Enseignement mathématique, 1902] : *Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens*, vol. IV, S. 208 ff., 1902, ETH-Bibliothek, Zürich,
http://retro.seals.ch/digbib/view?pid=ensmat-001:1902:4::403

[L'Enseignement mathématique, 1904] : *Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens, Addition au questionnaire publié en 1902*, vol. VI, S. 376 ff., 1904, ETH-Bibliothek, Zürich,
http://retro.seals.ch/digbib/voltoc?pid=ensmat-001:1904:6

[Fabre, 2009] Fabre, Claude: *Möbius structures on surfaces*, Berlin, Techn. Univ., Diss., 2009 . http://opus.kobv.de/tuberlin/volltexte/2009/2482/

[Fabre, 2010] Fabre, Claude: *Phyllotaxis Explained - Angles And Nature*, in Wolfram Demonstrations Project
http://demonstrations.wolfram.com/PhyllotaxisExplained/
http://demonstrations.wolfram.com/AnglesAndNature/

[Fabre, 2012] Fabre, Claude: *Ontologische Gottesbeweise: der Algorithmus*, Berlin, Freie Univ., Bachelorarbeit, 2012.

[Fabre, 2014] Fabre, Claude: *Das Bild als Grenze der Welt*, Berlin, Freie Univ., Masterarbeit, 2014.

[Field, 1980] Field, Hartry: *Science Without Numbers: A Defence of Nominalism*, Oxford: Basil Blackwell, 1980.

[Field, 1982] Field, Hartry: *Realism and Anti-Realism about Mathematics* , Philosophical Topics, 13:1, University of Arkansas Press, 1982.

[Field, 1989] Field, Hartry: *Realism, Mathematics and Modality*, Oxford UK and Cambridge USA: Blackwell, 1989.

[Foucault, 1978] Foucault, Michel: *Dispositive der Macht*, Michel Foucault über Sexualität, Wissen und Wahrheit, Merve Verlag Berlin, 1978.

[Frege, 1884] Frege, Gottlob: *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Wilhelm Koebner, Breslau 1884, Alain.Blachair@ac-nancy-metz.fr

[Frege, 1891] Frege, Gottlob: *Funktion, Begriff, Bedeutung*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1891.

[Frege, 1892] Frege, Gottlob: *Über Sinn und Bedeutung*, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, NF 100, 1892, S. 25-50.
http://amor.cms.hu-berlin.de/ h2816i3x/Lehre/2006_UE_Klassiker _Semantik/01_Frege_Sinn&Bedeutung.pdf

[Frege, 1893, 1903] Frege, Gottlob: *Grundgesetze der Arithmetik*, Hermann Pohle, Jena 1893 (Band I) 1903 (Band II).
http://www.korpora.org/Frege/PDF/gga1_o_corr.pdf

[Freud, 1924] Freud, Sigmund: *Notiz über den „Wunderblock“*, Internationale Zeitschrift für Psychoanalyse, Bd. 10 (1), 1924, S. 1-5, Gesammelte Werke, Bd. 13, S. 387-91.
http://www.textlog.de/freud-psychoanalyse-notiz-wunderblock.html

[Fricke & Klein, 1897] Fricke, Robert & Klein, Felix: *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, Teubner, Leipzig, 1965.

[Fritsch, 1994] Fritsch, Rudolf: *Der Vierfarbensatz: Geschichte, topologische Grundlagen und Beweisidee*
http://epub.ub.uni-muenchen.de/4494/1/4494.pdf

[Gabriel, 1976] Gabriel, G. et al. (eds.: *Gottlob Frege - Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hamburg, Felix Meiner, 1976.

[Galton, 1907] Galton, Francis: *Inquiries into Human Faculty and Its Development*, J.M. Dent, Londone, E.P. Dutton, New York, 1908.
http://www.gutenberg.org/files/11562/11562-h/11562-h.htm

[Gandon, 2013] Gandon S. & Smadja I.: *Textes clés de philosophie des mathématiques*, Volume 1 : Ontologie, vérité et fondements, Librairie Philosophique J. Vrin, 2013.

[Gauß, 1804] Olbers, Wilhelm: *Briefwechsel zwischen Olbers und Gauß*, Hg. Dr. C. Schilling, 2. Band, Julius Springer, Berlin, 1900.
http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/pdf/

[Gauß, 1805] Gauß, Carl Friedrich: *Brief an Wilhelm Olbers. Göttingen, 3. September 1805*,
SUB Göttingen: Cod. Ms. Gauß Briefe B: Olbers, Nr. 62.

[Gauß, 1829] Gauß, Carl Friedrich: *Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel*, Hrg. Auwers, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1880.

[Gauß, 1831] Gauß, Carl Friedrich: *Anzeige von „Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda“*, in: Göttingische gelehrte Anzeigen, 23. April 1831.

[Gauß, 1832] Gauß, Carl Friedrich: *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauß und Wolfgang Bolyai*, Hrsg Stäckel und Franz Schmidt, Teubner 1899.

[Genette, 1998] Genette, Gérard: *Die Erzählung*, Fink Verlag, München, 1998.

[Gödel, 1931] Gödel, Kurt: *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, in: Monatshefte für Mathematik und Physik, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 3.8.1931, S. 173-198.

[Gödel, 1944] Gödel Kurt, 1944, *Russell's Mathematical Logic*, Collected Works, volume II: Publications 1938-1974, New York, Oxford University Press, edited by Solomon Feferman et al., 1990.

[Gödel, 1947] Godel, Kurt: *What Is Cantor's Continuum Problem?*, The American Mathematical Monthly 54.9 (1947): 515-525.

[Gödel, 1951] Gödel, Kurt: *Some basic theorems on the foundations*, Collected Works, Vol. III. Unpublished essays and lectures, Oxford University Press, New-York, 1995.

[Gonthier, 2005] Gonthier, Georges: *A computer-checked proof of the Four Colour Theorem*
http://research.microsoft.com/en-us/um/people/gonthier/4colproof.pdf

[Gonthier, 2008] Gonthier, Georges: *Formal Proof The Four-Color Theorem*, Notices of the American Mathematical Society, Volume 55, Number 11, S 1382-1393, Dez. 2008.

[Grazhdankin, 2014] Grazhdankin, Dimitry: *Patterns of Evolution of the Ediacaran soft-bodied Biota*. Journal of Paleontology 88(2): 269-283, 2014.

[Hadamard, 1945] Hadamard, Jacques: *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*,
Princeton University Press, 1945, reprints, Dover, 1954, 1990.
http://ia700506.us.archive.org/17/items/eassayon
thepsych006281mbp/eassayonthepsych006281mbp.pdf

[Hale & Wright, 2002] Hale Bob& Wright Crispin, *Benacerraf's Dilemma Revisited*, European Journal of Philosophy, Vol 10, No. 1, 2002.
http://www.st-andrews.ac.uk/arche/papers/Benacerraf%27s%20Dilemma.pdf

[Hardy, 1941] : Hardy, Godfrey-H.: *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, Canto edition 1992.

[Hegel, 1837] ,Hegel, G. W. F.: *Vorlesungen über die Philosophie der Geschichte*, Theorie Werkausgabe Bd. 12, Frankfurt am Main 1986.
http://gutenberg.spiegel.de/buch/vorlesungen–1657/1

[Heidegger, 1927] Heidegger, Martin: *Sein und Zeit*, Gesamtausgabe Band 2, Vittorio Klostermann, Frankfurt, 1977.
http://gesamtausgabe.files.wordpress.com/2012/06/
er-ga-02-sein-und-zeit-1927.pdf

[van Heijenoort, 1967] van Heijenoort, Jean: *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, Harvard University Press, 1967.

[Heraklit] Heraklit: *Die Vorsokratiker I*, Reclam, Stuttgart, 1983.

[Hermite, 1905] Hermite, Charles & Stieltjes, Thomas Joannes:
Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Hrg. B. Baillaud et H. Bouget, Gauthier-Villars, Paris, 1905.

[Hilbert, 1900] Hilbert, David: *Mathematische Probleme*, Vortrag auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900, html Version © 2000 by Ina Kersten kersten@mathematik.uni-bielefeld.de
http://wikilivres.ca/wiki/Mathematische_Probleme?uselang=de

[Hilbert, 1928] Hilbert, David: *Die Grundlagen der Mathematik, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, Hg. E. Artin, W. Blaschke, und E. Hecke, Band VI, Leipzig, 1928.

[Lo Jacomo, 2002] Lo Jacomo, François: *Visualiser la quatrième dimension*, Vuibert, 2002.

[Jänich, 1999] : Jänich, Klaus: *Funktionentheorie*, Springer-Lehrbuch, 5. Aufl., 1999.

[Johnson-Laird, 1994] Johnson-Laird, Philip N.: *A model theory of induction*, International Studies in the Philosophy of Science, 8: 1, 5-29, 1994.

[Kanamori, 2009] Kanamori, Akihiro: *Set Theory from Cantor to Cohen*, in A.D. Irvine (ed.), Philosophy of Mathematics, Amsterdam: Elsevier/North Holland, 395-459.

[Kanigel, 1991] : Kanigel, Robert: *The Man Who Knew Infinity: a Life of the Genius Ramanujan*, Charles Scribner's Sons, New-York, 1991.

[Kant, 1755] Kant, Immanuel: *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie Des Himmels*, 1755. http://gutenberg.spiegel.de/buch/allgemeine-naturgeschichte -und-theorie-des-himmels-6344/5

[Kant, 1768] Kant, Immanuel: *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raum*, in *Vorkritische Schriften bis 1768*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1983, S. 993-1000.

[Kant, 1783] Kant, Immanuel: *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können*, 6. Auflage, Hrsg. Karl Vorländer, Verlag von Felix Meiner, Leipzig, 1920.

[Kant, 1787] Kant, Immanuel: *Kritik der reinen Vernunft*, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 2. Auflage, 1990.
http://www.sapientia.ch/E-Buecher/Philosophie/Kant%20-%20Kritik%20der%20reinen%20Vernunft.pdf

[Kant, 1788] Kant, Immanuel: *Kritik der Urtheilskraft*, Akademieausgabe, 1788.
http://korpora.zim.uni-duisburg-essen.de/kant/aa05/Inhalt5.html

[Kant, 1788b] Kant, Immanuel: *Kritik der praktischen Vernunft* 1788.
http://gutenberg.spiegel.de/buch/kritik-der-praktischen-vernunft-3512/5

[Kant, 1790] Kant, Immanuel: *Über eine Entdeckung, nach der alle neue Kritik der reinen Vernunft durch eine ältere entbehrlich gemacht werden soll*, Königsberg, Nicolovius, 1790, AA VIII
http://korpora.zim.uni-duisburg-essen.de/kant/aa08/212.html

[Klein, 2007] Klein, Etienne: *Le facteur temps ne sonne jamais deux fois*, Editions Flammarion, Paris, 2009.

[Krämer, 1992] Krämer, Sybille: *Symbolische Erkenntnis bei Leibniz*, in Zeitschrift für philosophische Forschung, Bd. 46, 2/1992, pp. 224-237. http://userpage.fu-berlin.de/ sybkram/media/downloads/Aufsaetze/Symbolische

[Kripke, 1970] Kripke, Saul A.: *Naming and Necessity*,
Lecture 1: January 20, 1970, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
http://thatmarcusfamily.org/philosophy/Course _Websites/Readings/Kripke%20-%20Naming%20and%20Necessity.pdf

[Kühnel, 1999] Kühnel, Wolfgang: *Differentialgeometrie*, Fried. Vieweg & Sohn, vieweg studium, 1999.

[Lagarias, 1985] Lagarias, Jeffrey C.: *The 3x+1 problem and its generalizations*, The American Mathematical Monthly 92, Januar 1985, S. 3-23.
http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/ Jeff Lagarias AT&T Bell Laboratories

[Leibniz, 1676] Leibniz, Gottfried W.: *De natura numerorum primorum et in genere multiplorum*, LSB VII,1, 594-598. LSB = Gottfried Wilhelm Leibniz, Sämtliche Schriften und Briefe, herausgegeben von der Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1676.

[Leibniz, 1686] : Leibniz, Gottfried W.: *Metaphysische Abhandlung*, Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie, Band II, Verlag von Felix Meiner, Hamburg, 1966.
http://www.uni-erfurt.de/fileadmin/public-docs/Philosophie/

[Leibniz, 1714] : Leibniz, Gottfried W.: *Die philosophischen Schriften* , ed. Carl I. Gerhardt, Meidmannische Buchhandlung, Berlin, 1875-1890.

[Leibniz, 1886] : Leibniz, Gottfried W.: *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, Librairie hachette, Paris, 1886
Gallica Bibliothèque Nationale: ftp://ftp.bnf.fr/566/N5667240_PDF_1_-1DM.pdf

[Mandelbrot, 1983] Mandelbrot, Benoit: *Self-Inverse Fractals Osculated by Sigma-Discs and the Limit Sets of Inverversion Groups*, The Mathematical Intelligencer Vol 5, NO.2, Springer-Verlag, New York, 1983.

[Mansion, 1908] : Mansion, Paul: *Gauss contre Kant sur la géométrie non euclidienne*, in *Revue néo-scolastique*, 15° année, N°60, 1908. pp. 441-453.
URL: http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/
article/phlou_0776-5541_1908_num_15_60_2180

[J. S. Mill, 1843] Mill, John, Stuart: *A System of Logic*, Harper & Brothers, New York, 8th Edition, 1882. https://www.gutenberg.org/files/27942/27942-h/27942-h.html#toc13

[Mumford, 2002] Mumford, David; Series, Caroline; Wright, David: *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein*, Cambridge Unniversity Press, 2002.
http://www.maths.ed.ac.uk/ aar/papers/indra.pdf

[Needham, 1996] Needham, Tristan: *Anschauliche Funktionentheorie*, Oldenbourg Verlag, Wien, 2001.

[Newton, 1686] Newton, Isaac: *Mathematische Prinzipien der Naturlehre*, übersetzt und erläutert von J. Ph. Wolfers, Berlin 1872. S. 509. Der Zusatz findet sich im Scholium zu Buch III in ab der 2. Auflage von 1713. Englische Übersetzung Jammer Concepts of Space, S. 113

[Nicolle, 1932] Nicolle, Charles: *Biologie de l'invention*, F. Alcan, Paris, 1932.

[Norton, 2007] : Norton John, *How Did Einstein Think?*, cityLIVE! „everything einstein", November 15, 2007.
http://www.pitt.edu/ jdnorton/Goodies

[Panza, 2012] : Panza, Marco *The Varieties of Indispensability Arguments*, Colloquium of Institut d'histoire des Sciences et des techniques, Paris, conference on 20/11/2012.

[Panza & Sereni, 2013] : Panza, Marco & Sereni, Andrea: *Introduction à la philosophie des mathématiques*, Flammarion Champs essais, 2013.

[Panza & Sereni, 2013b] : Panza, Marco & Sereni, Andrea:
On the Indispensable Premises of the Indispensability Argument.
www.academia.edu/501608/Panza_M._Sereni_A._On_the
_Indispensable_Premises_of_the_Indispensability_Argument

[Poincaré, 1898] Poincaré, Henri: *Des fondements de la géométrie*,
Etienne Chiron, Paris. Rückübersetzung von The Monist, Januar 1898.
https://ia600408.us.archive.org/10/items/
desfondementsdel00poin/desfondementsdel00poin.pdf

[Poincaré, 1899] Poincaré, Henri: *Des fondements de la géométrie: à propos d'un livre de M. Russell*, Revue de métaphysique et de morale, 7, 1899, S. 251-279.
https://www.univ-nancy2.fr/poincare/bhp/pdf/hp1899rm.pdf

[Poincaré, 1902] Poincaré, Henri: *La science et l'hypothèse*, Flammarion Champs essais, 2009.

[Poincaré, 1904] Poincaré, Henri: *Wissenschaft und Hypothese*,
Hrg. F. & L. Lindemann, Teubner, Leipzig, 1904.
https://ia700308.us.archive.org/6/items/wissenschaftund
h00poin/wissenschaftundh00poin.pdf

[Poincaré, 1905] Poincaré, Henri: *La veleur de la science*, Flammarion, 1970. http://henri-poincare.ahp-numerique.fr/items/show/166

[Poincaré, 1905b] Poincaré, Henri: *Der Wert der Wissenschaft*, Hrsg. Gabriele Dörflinger, Universitätsbibliothek Heidelberg, 2013, http://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/15331/1/wert.pdf

[Poincaré, 1908a] Poincaré, Henri: *Science et Méthode*, Dunod, Paris, 2013.

[Poincaré, 1908b] Poincaré, Henri: *L'Invention Mathématique*, Vortrag vor dem Institut Général Psychologique, Bulletin 5, 8e année, 1908. http://www.archive.org/stream/linventionmath00poin_djvu.txt

[Poincaré, 1913] Poincaré, Henri: *Dernières Pensées*, Flammarion, 1913. http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/philo/textesph/Dernierespensees.pdf

[Polya, 1945] :Pólya, George: *How To Solve It*, Princeton University Press, 1945. https://notendur.hi.is/hei2/teaching/Polya_HowToSolveIt.pdf

[Popper, 1935] Popper, Karl: *Logik der Forschung*, Hg. Herbert Keuth, Akademie-Verlag, Berlin 2004.

[Popper, 1963] Popper, Karl: *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge*, Routledge, 1963. http://worthylab.tamu.edu/Courses_files/Popper_ConjecturesandRefutations

[Putnam, 1975] Putnam, Hilary: *Philosophical Papers* Volume 1, Cambridge University Press, 1975.

[Putnam, 1975a] Putnam, Hilary: *Von einem realistischen Standpunkt. Schriften zur Sprache und Wirklichkeit.* Übersetzt und eingeleitet von Vincent C. Müller, Rowohlt, Reinbek, 1993.

[Putnam, 1983] Putnam, Hilary: *Philosophical Papers* Volume 3 , Realism and Reason, Philosophy of Logic, S. 323-349, Cambridge University Press, 1983.

[Quine, 1980] Quine, Willard: *Two Dogmas of Empiricism*, Harvard University Press, Cambridge, 1980.

[Reichenbach, 1938] Reichenbach, Hans: *Experience and Prediction, An Analysis of the Foundations and the Structure of Knowledge*, Phoenix Books The University of Chicago Press, 1938.

[Resnik, 1990] Resnik, Michael D.: *Between Mathematics and Physics*, PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, Vol. 1990, Volume Two: Symposia and Invited Papers (1990), pp. 369-378.

[Rochot, 1962] Rochot, Bernard: *Gassendi, Disquisitio metaphysica seu dubitationes et instantiae adversus Renati Cartesii metaphysicam et responsa*, Vrin, Paris, 1962.

[Ruelle, 2007] : *Wie Mathematiker ticken*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[Russell, 1897] Russell, Bertrand: *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge Unversity Press, 1897.

[Russell, 1902] Russell, Bertrand:*Russells Brief an Frege vom 16. Juni 1902.* In: Gottlob Frege: Briefwechsel mit D.Hilbert, E. Husserl, B. Russell, ed. G. Gabriel, F. Kambartel, C.Thiel, Hamburg 1980, S. 59f.

[Russell, 1911] Russell, Bertrand: *The Philosophical Importance of Mathematical Logic*, Collected Papers of Bertrand Russell (1972), Routledge. http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/en/russell.htm

[Russell, 1919] Russell, Bertrand: *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen & Unwin, Ltd., London, May 1919. http://people.umass.edu/klement/imp/imp-a4x2.pdf

[Schopenhauer, 1819] Schopenhauer, Arthur: *Die Welt als Wille und Vorstellung*, Bibliographisches Institut F.A. Brockhaus Leipzig, 1819. http://www.zeno.org/Philosophie/M/Schopenhauer,+Arthur/Die+Welt+als+Wille+und+Vorstellung/

[Smolin, 2013] Smolin, Lee: *Time Reborn : From the Crisis in Physics to the Future of the Universe*, Houghton Mifflin Harcourt, 2013.

[Stachowiak, 1973] Stachowiak, Herbert: *Allgemeine Modelltheorie*, Springer Verlag, Wien/New York, 1973.

[Steck, 1941] Steck Max: Briefwechsel zwischen Frege Hilbert, in Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften (mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse), Jahrgang 1941.

[Stillwell, 1980] Stillwell, John: *Classical Topology and combinatorial group theory*, Springer Graduate Texts in Mathematics, 1980.

[Tarski, 1935] Tarski, Alfred: *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, in: K. Berka/L. Kreiser: Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik. 4. Aufl., Akademie Verlag, Berlin 1986, S. 445-546.

[Tetens, 2006] Tetens, Holm: *Kants „Kritik der reinen Vernunft“ : ein systematischer Kommentar*, Reclam Nr. 18434, 2006.

[Thomas, 2000] : Thomas, Robert: *Mathematics and Fiction I: Identification*, Logique et Analyse, 43: 301-40, 2000.

[Thomas, 2002] : Thomas, Robert: *Mathematics and Fiction II: Analogy*, Logique et Analyse, 45: 185-228, 2002.

[Thurston, 1997] Thurston, William P., *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Hgs. Silvio Levy, Princeton University Press, 1997.

[Weil, 1960] Weil, André: *De la métaphysique aux mathématiques*, http://dream.inf.ed.ac.uk/projects/coinvent/weil60.pdf

[Weizäcker, 1992] v. Weizsäcker, Carl Friedrich: *Zeit und Wissen*, Hanser, München, 1992.

[Wente, 1986] Wente, Henry C.: *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pacific J. Math. 121 (1986), no. 1, 193–243. http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102702809.

[Weyl, 1918] Weyl, Hermann: *Das Kontinuum - kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Leipzig, von Veit und Comp., 1918.

[Wittgenstein, 1922] Wittgenstein, Ludwig: *Tractatus logico-philosophicus*, Wittgensteins Werkausgabe Band 1, suhrkamp taschenbuch wissenschaft 501, 2003.

[Wittgenstein, 1951] Wittgenstein, Ludwig: *Über Gewißheit* in Werkausgabe Band 8, Suhrkamp, 1984, S. 113-257.

[Wittgenstein, 1953] Wittgenstein, Ludwig: *Philosophische Untersuchungen* in Tractatus logico- philosophicus, Werkausgabe Band 1, suhrkamp taschenbuch wissenschaft 501, 2003.

Sachbegriffe, Personennamen