

BOSE-EINSTEIN-KONDENSATION IN ENDLICHEN SYSTEMEN



Dissertation
eingereicht im Fachbereich Physik
der Freien Universität Berlin

Konstantin Glaum

Institut für Theoretische Physik
Freie Universität Berlin
Arnimallee 14, 14195 Berlin

Dezember 2007

Die in vorliegender Dissertation dargestellte Arbeit wurde in der Zeit zwischen April 2002 und Dezember 2007 im Fachbereich Physik an der Freien Universität Berlin unter Betreuung von Prof. Dr. Hagen Kleinert durchgeführt

Erstgutachter: Prof. Dr. Hagen Kleinert

Zweitgutachter: Prof. Dr. Jürgen Bosse

Tag der Disputation: 28. Januar 2008

Publikationsliste

- [1] A. Pelster and K. Glaum: *Recursive Graphical Construction of Tadpole-Free Feynman Diagrams and Their Weights in ϕ^4 -Theory* in W. Janke, A. Pelster, H.-J. Schmidt, and M. Bachmann (Herausgeber): *Fluctuating Paths and Fields – Dedicated to Hagen Kleinert on the Occasion of his 60th Birthday*, World Scientific, Singapore, 269–280 (2001)
- [2] A. Pelster and K. Glaum, *Many-Body Vacuum Diagrams and Their Recursive Graphical Construction*, Physica Status Solidi B **237**, 72–81 (2003)
- [3] A. Pelster and K. Glaum, *Recursive Graphical Solution of Closed Schwinger-Dyson Equations in ϕ^4 -Theory – Generation of Connected and One-Particle Irreducible Feynman Diagrams*, Physica A **335**, 455–485 (2004)
- [4] K. Glaum, A. Pelster, H. Kleinert, and T. Pfau, *Critical Temperature of Weakly Interacting Dipolar Condensates*, Physical Review Letters **98**, 080407 (2007)
- [5] K. Glaum and A. Pelster, *Bose-Einstein Condensation Temperature of Dipolar Gas in Anisotropic Harmonic Trap*, Physical Review A **76**, 023604 (2007)
- [6] K. Glaum, H. Kleinert, and A. Pelster, *Condensation of Ideal Bose Gas Confined in a Box within a Canonical Ensemble*, Physical Review A **76**, 063604 (2007)

Kurzzusammenfassung

In dieser Promotionsschrift werden Untersuchungen thermodynamischer und statistischer Eigenschaften von Bose-Einstein-Kondensaten in endlichen Systemen präsentiert. Grosskanonische Beschreibungen idealer Bose-Gase liefern analytische und numerische Ergebnisse für die Wärmekapazitäten und Grundzustand-Besetzungen in verschiedenen Potentialen. Verbesserte analytische Berechnungen der Kondensations-Temperatur führen zu akkuraten quantitativen Beschreibungen der Finite-Size-Effekte. Entgegen einer weit verbreiteten Meinung liefert die grosskanonische Bose-Einstein-Verteilung jedoch eine falsche Beschreibung der Teilchenzahl-Statistik im Kondensations-Bereich. Eine alternative Beschreibung der Bose-Einstein-Kondensation für Systeme im thermischen Gleichgewicht ist innerhalb der kanonischen Ensemble-Theorie möglich. Die Rechnungen dazu werden im Rahmen der Vielteilchen-Theorie mit Hilfe der Pfadintegral-Methode durchgeführt. Es ergeben sich dabei physikalisch sinnvolle Resultate für thermodynamische Grössen im gesamten Temperaturbereich. Insbesondere wird darin auch das von Feynman fehlerhaft behandelte Problem des homogenen Gases in einer geeigneten Weise korrigiert. Weiterhin wird bestätigt, dass die Teilchenzahl-Statistik innerhalb der kanonischen Ensemble-Theorie adäquat beschrieben wird. Ein weiteres Forschungsgebiet, das in dieser Schrift beleuchtet wird, beschäftigt sich mit thermodynamischen Eigenschaften der schwach kontakt- und dipolar wechselwirkenden Bose-Gasen. Hierbei wird der Einfluss der Wechselwirkungen auf die Kondensations-Temperatur der in harmonischen Fallen eingefangenen Bosonen studiert. Das besondere Augenmerk gilt dabei der charakteristischen Sensitivität der Dipol-Dipol-Wechselwirkung gegenüber der Fallen-Anisotropie.

Abstract

In this thesis, the investigations of thermodynamical and statistical properties of Bose-Einstein condensates in finite systems are presented. Descriptions of ideal Bose gases within grand-canonical ensemble yield analytical and numerical results for the specific heat and the ground-state occupancy in different potentials. Advanced analytical studies of the condensation temperature give accurate descriptions of finite-size effects. Contrary to common opinion, the grand-canonical Bose-Einstein distribution is shown to fail describing particle-number counting statistics in the condensate region. An alternative description of a Bose-Einstein condensation is given within the canonical ensemble theory of systems in thermal equilibrium. There, the suitable path-integral formulation is applied in the framework of many-body theory. This procedure leads to reasonable thermodynamic properties for all temperatures. The originally misleading treatment of a homogeneous Bose gas by Feynman is properly corrected here. Furthermore, it is corroborated that the particle counting statistics is adequately reproduced within the canonical ensemble. A different field of study illuminated here concerns thermodynamical properties of weakly contact and dipolar interacting Bose systems. The interaction influence of the condensation temperature of harmonically trapped bosons is investigated. In particular, our attention is turned to the characteristic sensitivity of the dipolar interaction with respect to the anisotropy of the trap.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Historisches	1
1.2	Experimentelle Realisierung der Bose-Einstein-Kondensation	7
1.3	Bose-Einstein-Kondensation in endlichen Systemen	11
1.4	Überblick der Promotionsschrift	15
2	Großkanonische Beschreibung idealer Bose-Gase	19
2.1	Feldtheoretische Beschreibung	20
2.1.1	Funktionalintegral-Darstellung der Zustandssumme	21
2.1.2	Wechselwirkungsfreie Zustandssumme	26
2.1.3	Freier Propagator	28
2.1.4	Wechselwirkungsfreies großkanonisches Potential	33
2.2	Spezialfall des homogenen Bose-Gases	35
2.2.1	Direkte Auswertung homogener Bose-Gase	36
2.2.2	Homogenes Bose-Gas mit Grundzustand	38
2.3	Bose-Gase in harmonischen Fallen	41
2.3.1	Semiklassische Näherung	43
2.3.2	Höhere semiklassische Korrekturen	49
2.3.3	Exakte Behandlung harmonischer Fallen	53
2.4	Bose-Gase im Kastenpotential	58
2.4.1	Semiklassische Näherungen	60
2.4.2	Exakte Behandlung der Bose-Gase im Kastenpotential	66
2.5	Propagatoren	70
2.6	Probleme der großkanonischen Beschreibung	78

3	Ideale Bose-Gase im kanonischen Ensemble	83
3.1	Kanonische Beschreibung	84
3.1.1	Pfadintegral-Darstellung der Imaginärzeit-Amplitude	86
3.1.2	Kanonische Zustandssumme	91
3.1.3	Großkanonische Zustandssumme und kanonische Rekursion	95
3.1.4	Kondensationseffekte in kanonischen Ensembles	97
3.1.5	Propagator im kanonischen N -Teilchen-Ensemble	101
3.2	Kanonische Untersuchungen für spezielle Potentiale	106
3.2.1	Spezialfall des homogenen Bose-Gases	107
3.2.2	Bose-Gas im Kastenpotential	114
3.2.3	Bose-Gase in harmonischen Fallen	120
3.3	Sattelpunkts-Näherung kanonischer Zustandssummen	123
3.4	Fluktuationen und Teilchenzahl-Statistik	126
4	Schwach wechselwirkende Bose-Gase	135
4.1	Vielteilchentheorie mit schwacher Wechselwirkung	136
4.1.1	Feldtheoretische Begriffe	136
4.1.2	Selbstenergie	139
4.1.3	Einführung in die Diagrammtechnik	141
4.1.4	Rekursion für Selbstenergie	143
4.1.5	Molekularfeld-Näherung	149
4.2	Modell der Wechselwirkung	152
4.2.1	Kontakt-Wechselwirkung	152
4.2.2	Dipolare Wechselwirkung	156
4.3	Kritische Temperatur in dipolaren Bose-Gasen	158
4.3.1	Semiklassische Näherung	160
4.3.2	Selbstenergie- und Vakuum-Diagramme führender Ordnung	163
4.3.3	Berechnung der kritischen Temperatur	168
4.3.4	Diskussion der Resultate	172
5	Zusammenfassung	177

A Poissonsche Summen-Formel	181
B Robinsonsche Entwicklungs-Formeln	183
C Numerische Auswertung der kanonischen Rekursion	187
Literaturverzeichnis	192
Danksagung	205

