

3 Einstufige Supply Chain (integriertes Unternehmen)

In diesem Kapitel wird eine Kette bestehend aus einem integrierten Unternehmen ($l := L = 1$) betrachtet, das seine Produkte direkt an den Konsumenten ($L + 1$) verkauft. In Abb. 3.1 ist dies schematisch in Anlehnung an Tab. 2.2 dargestellt.⁸⁵

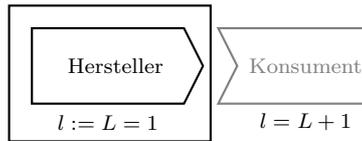


Abb. 3.1: Supply Chain für $L = 1$

Ziel ist es, für ein integriertes Unternehmen jeweils für eine lineare und eine multiplikative Nachfragefunktion den maximalen Deckungsbeitrag bei einer deterministischen Marktnachfrage sowie bei einer stochastischen Marktnachfrage durch eine optimale Preis- und/oder Mengenkombination zu bestimmen.

Dazu wird zunächst das entsprechende Modell formuliert. Sodann wird eine algebraische Lösung des jeweiligen Modells angegeben, sofern dies möglich ist.

Nachfolgend werden die Modelle anhand von Zahlenbeispielen illustriert, wobei für die stochastischen Modellformulierungen mehrere Zahlenbeispiele gegeben werden, um deren Ergebnisse abschließend vergleichen zu können.⁸⁶

In einer abschließenden Betrachtung werden die Ergebnisse der linearen und multiplikativen Nachfragefunktion verglichen.

3.1 Lineare Nachfragefunktion

3.1.1 Deterministische Marktnachfrage

3.1.1.1 Modellformulierung und -lösung

Bei der deterministischen Marktnachfrage sieht sich der Hersteller⁸⁷ einer linearen Nachfragefunktion gegenüber:

$$d(p_M) = a - bp_M, \quad \text{mit } a, b > 0. \quad (3.1)$$

⁸⁵ Siehe S. 18. Obgleich dem integrierten Unternehmen bei einer einstufigen Supply Chain sowohl die Funktion des Herstellers als auch des Händlers zukommt, wird dieses in Abb. 3.1 und auch nachfolgend in diesem Kapitel nur als Hersteller bezeichnet, um die Einheitlichkeit mit den nachfolgenden Kapiteln zu gewährleisten. Auch dort wird das erste Glied der Kette stets als Hersteller bezeichnet.

⁸⁶ In dieser Arbeit wurde zur Berechnung der algebraischen Lösungen und der beispielhaften Illustrationen das Programm „Mathematica 4“ verwendet.

⁸⁷ Alle Parameter und Variablen, die in dieser Arbeit dem Hersteller zugeordnet sind, werden mit M gekennzeichnet.

(3.1) stellt die spezifische Marktreaktionsfunktion zwischen der Aktionsvariablen Preis (p_M) und der Reaktionsvariablen Absatz (q_M) dar,⁸⁸ mit a und b als beschreibende Funktionsparameter. Diese Funktion ist in Abb. 3.2 grafisch dargestellt.

Der Deckungsbeitrag des Herstellers (Π_M) hängt von seinem Umsatz und seinen variablen Kosten ab.⁸⁹ Der Umsatz ergibt sich aus dem Verkaufspreis p_M und der verkauften Menge q_M . Die variablen Kosten entsprechen den Produktionskosten c_M , die durch die hergestellte Menge entstehen.⁹⁰ Da durch die Nachfragefunktion eindeutig festgelegt ist, welche Mengen bei einem bestimmten Preis p_M nachgefragt werden, kann der Hersteller somit auch bestimmen, wieviel er bei einem gewählten Preis produzieren muss:

$$q_M := d(p_M) = a - bp_M.$$

Die Deckungsbeitragsfunktion des Herstellers lautet in Abhängigkeit vom gewählten Preis p_M :

$$\begin{aligned}\Pi_M &:= \Pi_M(p_M) = p_M(a - bp_M) - c_M q_M \\ &= (p_M - c_M)(a - bp_M).\end{aligned}$$

Die Deckungsbeitragsfunktion ist in Abb. 3.3 dargestellt.

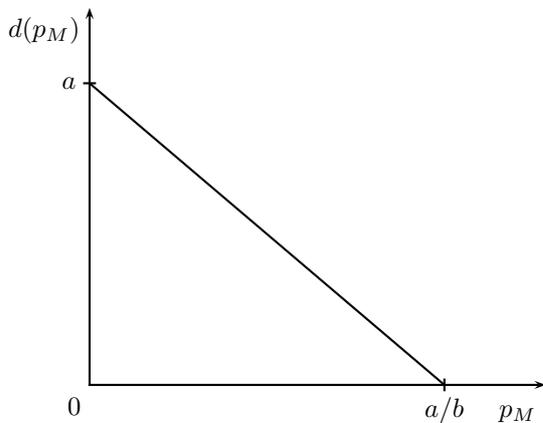


Abb. 3.2: Lineare Nachfragefunktion

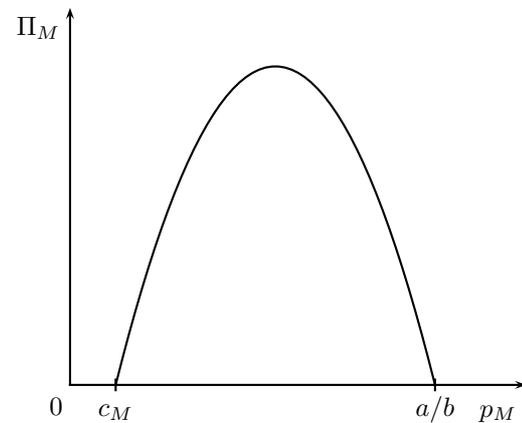


Abb. 3.3: Deckungsbeitragsfunktion

⁸⁸ Siehe DILLER (2000), S. 80.

⁸⁹ Da in dieser Arbeit der Deckungsbeitrag betrachtet wird, werden anfallende fixe Kosten ignoriert.

⁹⁰ Es wird unterstellt, dass die variablen Kosten einer linearen Kostenstruktur unterliegen.

Der Hersteller wird das Preis- und Mengenniveau wählen, welches seinen Gesamtdeckungsbeitrag maximiert.⁹¹ Der optimale Preis (3.3) ergibt sich aus der Ableitung von (3.2) und anschließender Auflösung nach p_M :

$$\Pi_M = \max_{p_M} ((p_M - c_M)(a - bp_M)) \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_M}{\partial p_M} &= a + bc_M - 2bp_M \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow p_M^* &= \frac{a + bc_M}{2b}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wegen $q_M^* := d(p_M^*)$ und $\Pi_M^* := \Pi_M(p_M^*)$ kann die optimal zu produzierende Menge (3.4) sowie der optimale Deckungsbeitrag (3.5) wie folgt bestimmt werden:

$$q_M^* = \frac{a - bc_M}{2} \quad \text{und} \quad (3.4)$$

$$\Pi_M^* = \frac{(a - bc_M)^2}{4b}. \quad (3.5)$$

3.1.1.2 Beispielhafte Illustration

Die unter 3.1.1.1 algebraisch ermittelten Ergebnisse werden nun beispielhaft illustriert. Dazu werden folgende Werte als Parameter verwendet:⁹³

	Parameter
Preis-Absatz-Funktion	$a = 200$ $b = 25$
Hersteller	$c_M = 3$

Tab. 3.1: Parameterwahl für das Beispiel 3.1.1-1

Die Nachfragefunktion bzw. die herzustellende Menge des Herstellers lautet demnach

$$q_M := d(p_M) = 200 - 25p_M. \quad (3.6)$$

Daraus ergibt sich die Deckungsbeitragsfunktion des Herstellers

$$\Pi_M = (p_M - 3)(200 - 25p_M). \quad (3.7)$$

⁹¹ Siehe z. B. VARIAN (1995), S. 387 ff.

⁹² An der Stelle p_M^* liegt wegen $\frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial p_M^2} = -2b < 0$ ein Maximum vor.

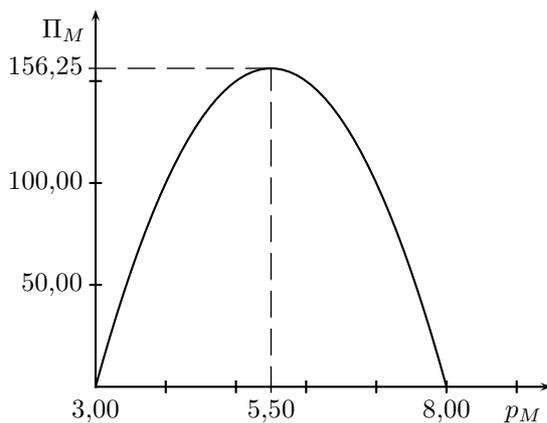
⁹³ Die Werte für die Parameter sind willkürlich gewählt und dienen hier ebenso wie in den folgenden Kapiteln lediglich der Veranschaulichung der jeweiligen algebraischen Ergebnisse.

Durch Einsetzen der in Tab. 3.1 genannten Parameterwerte in (3.3) bis (3.5) können die optimalen Ergebnisse berechnet werden:

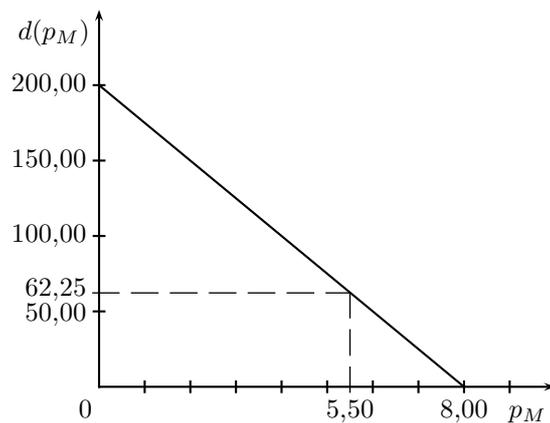
$$\begin{aligned}
 p_M^* &= \frac{a + bc_M}{2b} = \frac{200 + 25 \cdot 3}{2 \cdot 25} & p_M^* &= 5,50 \\
 q_M^* &= \frac{a - bc_M}{2} = \frac{200 - 25 \cdot 3}{2} & q_M^* &= 62,50 \\
 \Pi_M^* &= \frac{(a - bc_M)^2}{4b} = \frac{(200 - 25 \cdot 3)^2}{4 \cdot 25} & \Pi_M^* &= 156,25.
 \end{aligned}$$

Der Hersteller muss demnach den Preis $p_M^* = 5,50$ wählen, da dieser seinen Deckungsbeitrag maximiert ($\Pi_M^* = 156,25$). Er stellt zudem die Menge $q_M^* = 62,50$ her, da genau diese Menge von den Konsumenten nachgefragt wird.

Aber auch grafisch können die optimalen Ergebnisse ermittelt werden. So ist zunächst die Deckungsbeitragsfunktion des Herstellers (3.7) in Abb. 3.4(a) dargestellt.



(a) Deckungsbeitragsfunktion des Herstellers bei gegebener Nachfragefunktion



(b) Nachfragefunktion mit $p_M^* = 5,50$ und dazugehöriger Menge

Abb. 3.4: Darstellung des Beispiels 3.1.1-1

Aus Abb. 3.4(a) ist ersichtlich, dass der Deckungsbeitrag bei einem Preis von $p_M^* = 5,50$ maximal ist. Die bei diesem Preis nachgefragte Menge kann dann von der in Abb. 3.4(b) eingezeichneten Nachfragefunktion (3.6) abgelesen werden. Das heißt, bei einem Preis von $p_M^* = 5,50$ wird genau eine Menge von $d(p_M^*) = 62,50$ nachgefragt, die der Hersteller wegen $q_M^* = d(p_M^*)$ produzieren wird.

3.1.2 Stochastische Marktnachfrage

Unter 3.1.1⁹⁴ wurde von einer deterministischen Nachfrage ausgegangen. Das bedeutet, dass für jeden Preis die nachgefragte Menge eindeutig bekannt war. In der Realität kommt es

⁹⁴ Siehe S. 19 ff.

selten vor, dass genau eine vorherbestimmte Menge nachgefragt wird. Es ist vielmehr so, dass das Produkt zu einem bestimmten Preis unterschiedlich stark von den Konsumenten nachgefragt wird. Aus diesem Grund wird in diesem Kapitel das deterministische Modell aus Abschnitt 3.1.1 um diese Unsicherheit durch sogenannte Nachfrageschocks⁹⁵ erweitert. Es wird anhand der folgenden Berechnungsmöglichkeiten⁹⁶ untersucht, wie der Hersteller trotz der auftretenden Nachfrageunsicherheit Preis und/oder Menge festlegen kann, um seinen Deckungsbeitrag zu steigern:⁹⁷

- Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$: Berechnung von optimalem Preis und optimaler Menge unter Vernachlässigung der Unsicherheit;
- Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$: Berechnung der optimalen Menge bei einem exogen gegebenen Preis;
- Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{nK}$: Berechnung des optimalen Preises und der optimalen Menge.

Anschließend werden die drei Berechnungsmöglichkeiten mit Hilfe numerischer Beispiele illustriert.

3.1.2.1 Modellerweiterung durch Nachfrageschocks

Zum besseren Verständnis der nachfolgenden Untersuchungen soll zunächst kurz umrissen werden, wie bei einer stochastischen Nachfrage eine Nachfragefunktion abgeleitet werden kann und wie diese interpretiert werden muss.⁹⁸

Eine Nachfragekurve kann bestimmt werden, wenn auf Erfahrungswerte oder gesammelte Daten aus der Vergangenheit in Bezug auf Preis und nachgefragter Menge zurückgegriffen werden kann. Solche Daten lassen sich z. B. in einem Koordinatensystem abtragen. Es wird häufig vorkommen, dass zu einem bestimmten Preis nicht nur eine bestimmte, sondern verschiedene Mengen nachgefragt werden. Eine Nachfragekurve lässt sich z. B. mit Hilfe einer Regressionsanalyse schätzen. Eine solche Kurve ist in Abb. 3.5 auf der nächsten Seite eingezeichnet. Es handelt es sich dabei um eine lineare Nachfragekurve.

⁹⁵ Wird von einer vorherbestimmten Nachfragemenge abgewichen, die durch die Kernnachfragefunktion beschrieben ist, so handelt es sich um einen Nachfrageschock. Dieser wird in dieser Arbeit mit ϵ symbolisiert.

⁹⁶ Das Wort „Berechnungsmöglichkeiten“ soll nicht suggerieren, dass der Hersteller oder der Händler die Möglichkeit hat, aus den in dieser Arbeit vorgestellten Berechnungsmöglichkeiten eine auszuwählen, um so ihre optimale Preis-/Mengenkombination festzulegen.

⁹⁷ Diese Berechnungsmöglichkeiten wurden gewählt, um aufbauend auf dem Modell der deterministischen Marktnachfrage (optimale Preis- und Mengenfestsetzung) sukzessive zur Modellformulierung bei stochastischer Marktnachfrage (ebenso optimale Preis- und Mengenfestsetzung) zu gelangen. Diese Vorgehensweise hat zudem den Vorteil, dass die jeweiligen Ergebnisse verglichen werden können. Damit können Rückschlüsse im Hinblick auf die Anwendbarkeit der einzelnen Berechnungsmöglichkeiten gezogen werden. Die einzelnen Berechnungsmöglichkeiten werden ab Abschnitt 3.1.2.1, S. 26 ff., näher vorgestellt. Die Bezeichnung der verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten folgt dem folgenden Muster: „Berechnungsmöglichkeit $a_{c,d}^b$ “, wobei „a“ für die Nummer der Berechnungsmöglichkeit, „b“ für die Unterscheidung zwischen Nicht-Kooperation (nK) und Kooperation (K), „c“ für die Art der Marktnachfrage ($s \hat{=}$ stochastisch bzw. $d \hat{=}$ deterministisch) und „d“ für die jeweils betrachtete Länge der Kette ($1 \hat{=}$ $L = 1$, $2 \hat{=}$ $L = 2$ bzw. $3 \hat{=}$ $L \geq 2$) steht.

⁹⁸ Dazu eingehend FAHRMEIR et al. (2007), S. 109 ff., sowie GUJARATI (1995), S. 32 ff.

Im Mittel (in einem gewissen Zeitrahmen) wird also zu einem bestimmten Preis eine bestimmte Menge nachgefragt. Bei kurzfristiger Betrachtung ist es aber nach wie vor möglich, dass mehr oder weniger nachgefragt wird als die Nachfragekurve kennzeichnet.

An dem zuvor genannten Koordinatensystem kann ferner abgelesen werden, wie stark von der ermittelten Nachfragekurve hinsichtlich der nachgefragten Menge maximal abgewichen wird. Diese maximale Abweichung kennzeichnet den Bereich $\epsilon \in [A, B]$, über den hinaus nicht nachgefragt wird.

Die Häufigkeit des Auftretens einer bestimmten Nachfrage ist aus diesem Koordinatensystem nicht abzulesen. Hier muss wieder auf Erfahrungswerte oder explizite Vergangenheitsdaten zurückgegriffen werden. In der Praxis wird es so sein, dass kleine Abweichungen, gesehen von der Nachfragekurve, häufiger auftreten als große Abweichungen. Solche Häufigkeiten kann man durch eine Verteilungsfunktion beschreiben. In Abb. 3.6⁹⁹ ist z. B. eine Normalverteilung angedeutet.

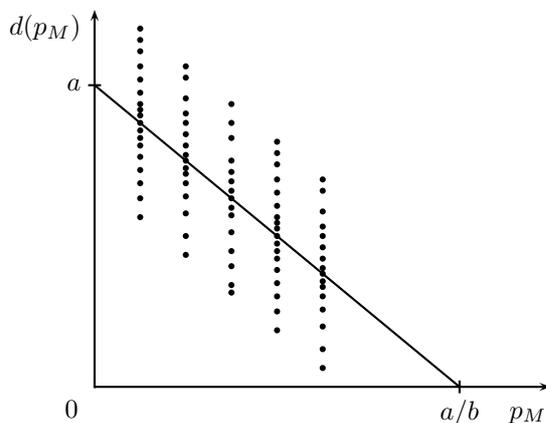


Abb. 3.5: Geschätzte Nachfragekurve

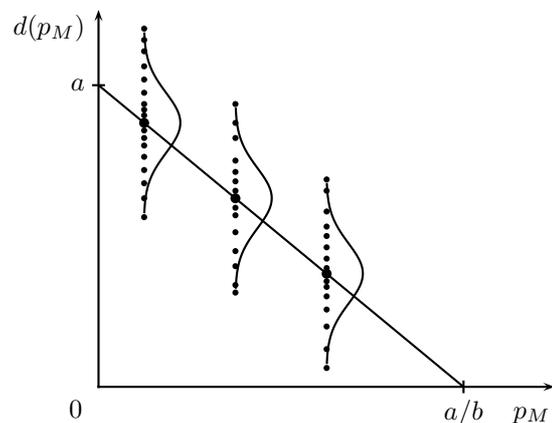


Abb. 3.6: Verteilung des Nachfrageschocks ϵ

Im deterministischen Fall konnte der Hersteller eindeutig antizipieren, wieviel die Konsumenten zu einem bestimmten Preis nachfragen werden, da per Definition kein Nachfrageschock auftritt ($\epsilon = 0$). Die Berücksichtigung von Kosten etwa zum Ausgleich von Fehlmengen oder zur Beseitigung von Restposten war nicht erforderlich.

Anders ist dies im stochastischen Fall. Aufgrund der Unvorhersehbarkeit der tatsächlich nachgefragten Menge

$$D(p_M, \epsilon) = d(p_M) + \epsilon$$

kann der Hersteller auf seinen Produkten „sitzenbleiben“ oder es wird mehr nachgefragt, als der Hersteller verkaufen kann.

Im ersteren Fall fallen Kosten c_o an, die zur Beseitigung der Restposten dienen. Das können z. B. Vernichtungskosten sein, falls es sich um verderbliche Produkte handelt, die nicht wieder verkauft werden kann bzw. darf oder aber auch Kosten für die Beseitigung von Gefahrgütern wie Chemikalien (Sondermüll). Da in dieser Arbeit nur einperiodige Güter

⁹⁹ In Anlehnung an GUJARATI (1995), S. 61.

betrachtet werden, wird ein Verkauf von überschüssigen Produkten in der nächsten Periode nicht berücksichtigt.

Werden weniger Produkte für die Konsumenten bereitgehalten als diese nachfragen, fallen Kosten für den Ausgleich von Fehlmengen (c_u) an.

Der Deckungsbeitrag des Herstellers ergibt sich wie im deterministischen Fall aus der Differenz von Erlösen und Kosten. Allerdings muss im stochastischen Fall zwischen tatsächlich nachgefragter und angebotener Menge unterschieden werden.¹⁰⁰

$$\Pi_M(p_M, q_M) = p_M \cdot \min[D(p_M, \epsilon), q_M] \quad (3.8a)$$

$$- c_M \cdot q_M \quad (3.8b)$$

$$- c_o \cdot \max[q_M - D(p_M, \epsilon), 0] \quad (3.8c)$$

$$- c_u \cdot \max[D(p_M, \epsilon) - q_M, 0]. \quad (3.8d)$$

Der Erlös ist in (3.8a) angegeben: die verkaufte Menge entspricht der vom Konsumenten nachgefragten Menge bzw. falls weniger produziert wurde, nur der hergestellten Menge. Die Produktionskosten sind identisch mit denen des deterministischen Falls (3.8b). Wurde weniger nachgefragt als produziert (Differenz von produzierter und nachgefragter Menge ist positiv), fallen Kosten c_o für die Beseitigung von Restposten an (3.8c). Kosten für den Ausgleich von Fehlmengen (c_u) fallen hingegen an, falls die Differenz von produzierter und nachgefragter Menge negativ ist, die Nachfrage also nicht bedient werden konnte (3.8d).

Somit ergibt sich folgende Deckungsbeitragsfunktion des Herstellers in Abhängigkeit der nachgefragten und produzierten Menge:¹⁰¹

$$\Pi_M(p_M, q_M) = \begin{cases} p_M D(p_M, \epsilon) - c_M q_M - c_o(q_M - D(p_M, \epsilon)), & D(p_M, \epsilon) \leq q_M, \\ p_M q_M - c_M q_M - c_u(D(p_M, \epsilon) - q_M), & D(p_M, \epsilon) > q_M. \end{cases} \quad (3.9)$$

Die Deckungsbeitragsfunktion (3.9) lässt sich nicht nur in Abhängigkeit von nachgefragter und produzierter Menge, sondern auch in Abhängigkeit des Nachfrageschocks und des vom Hersteller antizipierten Nachfrageschocks darstellen. Dazu wird der Term der unsicheren Nachfrage $D(p_M, \epsilon)$ durch die Kernnachfragefunktion $d(p_M)$ und den Nachfrageschock ϵ ersetzt und eine Variable z_M definiert, welche die Differenz von produzierter Menge und der laut Kernnachfragefunktion nachgefragten Menge angibt ($z_M = q_M - d(p_M)$):

$$\Pi_M(p_M, z_M) = \begin{cases} p_M(d(p_M) + \epsilon) - c_M(d(p_M) + z_M) - c_o(z_M - \epsilon), & \epsilon \leq z_M, \\ p_M(d(p_M) + z_M) - c_M(d(p_M) + z_M) - c_u(\epsilon - z_M), & \epsilon > z_M. \end{cases} \quad (3.10)$$

Die Interpretation von (3.10) lautet nun folgendermaßen: Wurde der Nachfrageschock gleich bzw. höher eingeschätzt als er tatsächlich aufgetreten ist ($\epsilon \leq z_M$), so fallen Kosten für

¹⁰⁰ Aufgrund des Nachfrageschocks kann die angebotene Menge von der nachgefragten Menge abweichen.

¹⁰¹ Diese Darstellung erfolgt in Anlehnung an PETRUZZI und DADA (1999), S. 184 ff.

die Beseitigung von Restposten an. Wurde der Schock aber unterschätzt ($\epsilon > z_M$), müssen Mittel zum Ausgleich von Fehlmengen aufgebracht werden.

Ziel des Herstellers muss es also sein, die Realisation des externen Schocks ϵ durch das z_M so gut zu antizipieren, dass in Verbindung mit der Wahl eines geeigneten Preises p_M der erwartete Deckungsbeitrag des Herstellers maximiert wird.

Da der Deckungsbeitrag abhängig vom Nachfrageschock ϵ ist,¹⁰² muss der erwartete Deckungsbeitrag wie folgt berechnet werden:

$$E[\Pi_M(p_M, z_M)] = \int_A^{z_M} (p_M [d(p_M) + \bar{\epsilon}] - c_o [z_M - \bar{\epsilon}]) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} \quad (3.11a)$$

$$+ \int_{z_M}^B (p_M [d(p_M) + z_M] - c_u [\bar{\epsilon} - z_M]) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} \quad (3.11b)$$

$$- c_M [d(p_M) + z_M]. \quad (3.11c)$$

Der Erwartungswert für die Überschätzung der Nachfrage ist in (3.11a), der für die Unterschätzung in (3.11b) abgebildet. (3.11c) repräsentiert die Produktionskosten, die unabhängig von der tatsächlichen Nachfrage anfallen.

Weil die maximale Abweichung des Nachfrageschocks von der Kernnachfragefunktion durch $\epsilon \in [A, B]$ gekennzeichnet ist, kann (3.11) wie folgt zu (3.12) umformuliert werden:¹⁰³

$$E[\Pi_M(p_M, z_M)] = \Psi(p_M) - V(p_M, z_M) \quad (3.12)$$

mit

$$\Psi(p_M) = (p_M - c_M)(d(p_M) + \mu) \quad \text{und}$$

$$V(p_M, z_M) = (c_M + c_o) \int_A^{z_M} (z_M - \bar{\epsilon}) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} + (p_M + c_u - c_M) \int_{z_M}^B (\bar{\epsilon} - z_M) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon}.$$

Der erwartete Deckungsbeitrag entspricht dem risikolosen Deckungsbeitrag Ψ abzüglich des Verlustes V , der aus der Unsicherheit resultiert.

Allgemein verteilter Nachfrageschock

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, welchen Deckungsbeitrag der Hersteller bei einem Preis p_M und einem antizipierten Schock z_M erwartet. Der Hersteller ist aber an der Maximierung seines erwarteten Deckungsbeitrags interessiert. Ziel dieses Abschnitts soll es daher sein, für eine lineare Nachfragefunktion mit einem allgemein verteilten Nachfrageschock eine algebraische Lösung für die optimal zu wählende Preis-/Mengenkombination zu ermitteln, die den erwarteten Deckungsbeitrag des Herstellers maximiert. Dies soll unter Zuhilfenahme der in Abschnitt 3.1.2¹⁰⁴ angesprochenen drei Berechnungsmöglichkeiten geschehen.

¹⁰² ϵ ist eine Zufallsvariable mit der gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\bar{\epsilon})$.

¹⁰³ Die detaillierten Rechenschritte von (3.11) nach (3.12) finden sich unter A.1.1, S. 381 ff.

¹⁰⁴ Siehe S. 22 f.

Zunächst wird von einem Hersteller ausgegangen, der den Nachfrageschock ignoriert und lediglich durch Einbeziehung des Mittelwertes der Verteilung der stochastischen Nachfrage Rechnung trägt. Bei dieser Berechnung (Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$) wird ähnlich der deterministischen Nachfrage der optimale Preis und die optimale Menge ermittelt.¹⁰⁵ Bei der Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$ wird dem Hersteller ein Preis vorgegeben, so dass dieser bei einer stochastischen Nachfrage die optimale Menge berechnen muss. Als Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{nK}$ wird letztendlich der optimale Preis und die optimale Menge bei stochastischer Nachfrage berechnet.

Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$: Berechnung von optimalem Preis und optimaler Menge unter Vernachlässigung der Unsicherheit

Der Hersteller besitzt im Fall von Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ lediglich Kenntnis über die Kernnachfragefunktion. Obwohl die Kernnachfragefunktion aussagt, dass der Mittelwert μ gleich null ist, soll eine zusätzliche Annahme getroffen werden, bei der der Hersteller auch einen anderen Mittelwert annehmen kann. Dies erlaubt die Berücksichtigung einer plötzlich auftretenden Steigerung oder Verringerung der Nachfrage in der zu betrachtenden Periode. Die tatsächliche Herstellmenge ergibt sich damit aus:

$$q_M = d(p_M) + \mu.$$

Weil μ eine Konstante ist, verschiebt sich die Nachfragefunktion jeweils parallel nach rechts für $\mu > 0$, Abb. 3.7(a), oder links für $\mu < 0$, Abb. 3.7(c). Für $\mu = 0$ bleibt die Lage der Nachfragefunktion unverändert, wie in Abb. 3.7(b) zu sehen ist.

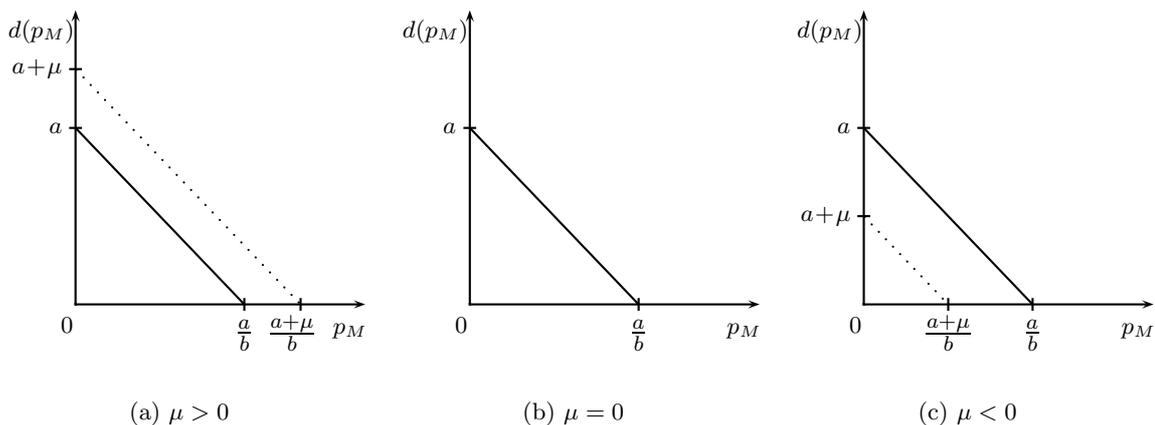


Abb. 3.7: Verschiebung der Nachfragefunktion in Abhängigkeit von μ

¹⁰⁵ Diese Berechnungsmöglichkeit soll dem Vergleich der Ergebnisse von quasi-deterministischer zu stochastischer Nachfrage dienen (siehe dazu S. 36 ff.).

Da der Hersteller davon ausgeht, dass der Nachfrageschock ϵ auf die Kernnachfragefunktion μ beträgt, kann Gleichung (3.8)¹⁰⁶ als erwarteter Deckungsbeitrag herangezogen werden. Der erwartete Deckungsbeitrag wird, wegen $\epsilon := z_M = \mu$, zu:

$$\begin{aligned} E[\Pi_M(p_M, q_M)] &= p_M \cdot \min[d(p_M) + \mu, q_M] \\ &\quad - c_M \cdot q_M \\ &\quad - c_o \cdot \max[q_M - (d(p_M) + \mu), 0] \\ &\quad - c_u \cdot \max[d(p_M) + \mu - q_M, 0] \\ &= (p_M - c_M)(d(p_M) + \mu) \\ &= \Psi(p_M). \end{aligned}$$

Der erwartete Deckungsbeitrag entspricht also dem risikolosen Deckungsbeitrag $\Psi(p_M)$, der in (3.12) vorgestellt wurde. Aufgrund der Annahme des Herstellers, dass seine prognostizierte Produktionsmenge der nachgefragten Menge entspricht, entsteht aus seiner Sicht kein Verlust $V(p_M, z_M)$.

Analog zum deterministischen Fall¹⁰⁷ wird nun der erwartete Deckungsbeitrag maximiert:

$$\begin{aligned} E[\Pi_M(p_M, q_M)] &= \max_{p_M} ((p_M - c_M)(d(p_M) + \mu)) \\ &= \max_{p_M} ((p_M - c_M)(a - bp_M + \mu)) \\ \frac{\partial E[\Pi_M(p_M, q_M)]}{\partial p_M} &= a + bc_M - 2bp_M + \mu \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow p_M^* &= \frac{a + bc_M + \mu}{2b}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Aus dem optimalen Preis p_M^* ergeben sich die optimale Herstellmenge und der erwartete Deckungsbeitrag:

$$q_M^* = d(p_M^*) + \mu = \frac{a - bc_M + \mu}{2} \tag{3.14}$$

$$E[\Pi_M(p_M^*, q_M^*)] = \frac{(a - bc_M + \mu)^2}{4b}. \tag{3.15}$$

Für $\mu = 0$ erhält man somit die gleichen Ergebnisse wie in Abschnitt 3.1.1.1¹⁰⁹. Der erwartete Deckungsbeitrag entspricht dann dem Deckungsbeitrag im deterministischen Fall.

Bei einer stochastischen Nachfrage wird aber der erwartete Deckungsbeitrag ungleich dem simuliertem Deckungsbeitrag sein. Das liegt daran, dass die Kosten für Fehlentscheidungen bei dieser Berechnungsmöglichkeit in die Berechnung des erwarteten Deckungsbeitrags (absichtlich) nicht mit einfließen.

¹⁰⁶ Bestehend aus den Termen (3.8a) bis (3.8d), S. 25.

¹⁰⁷ Siehe Abschnitt 3.1.1.1, S. 19 ff.

¹⁰⁸ An der Stelle p_M^* liegt wegen $\frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial p_M^2} = -2b < 0$ ein Maximum vor.

¹⁰⁹ Siehe S. 19 ff., insbesondere (3.4) und (3.5).

Berechnungsmöglichkeit 2_{s,1}^{nK}: Berechnung der optimalen Menge bei einem exogen gegebenen Preis Bei dieser Berechnungsmöglichkeit wird dem Hersteller vorgeschrieben, zu welchem Preis \bar{p}_M er seine Produkte zu verkaufen hat.¹¹⁰ Das heißt, dass für einen fest vorgegebenen Preis \bar{p}_M die optimale Herstellmenge berechnet werden muss.¹¹¹

In Abb. 3.8 ist eine lineare Kernnachfragefunktion dargestellt (durchgezogene Linie). Weiter ist der fest vorgegebene Preis \bar{p}_M und die zugehörige Nachfrage $d(\bar{p}_M)$ eingezeichnet, welche nur dann gilt, falls es keine Abweichungen seitens der Nachfrager gibt ($\epsilon_1 = 0$). In Abhängigkeit vom Nachfrageschock fragen die Konsumenten allerdings zum Preis \bar{p}_M entweder die Menge $d(\bar{p}_M)^-$ für $\epsilon_2 < 0$ oder $d(\bar{p}_M)^+$ für $\epsilon_3 > 0$ nach.

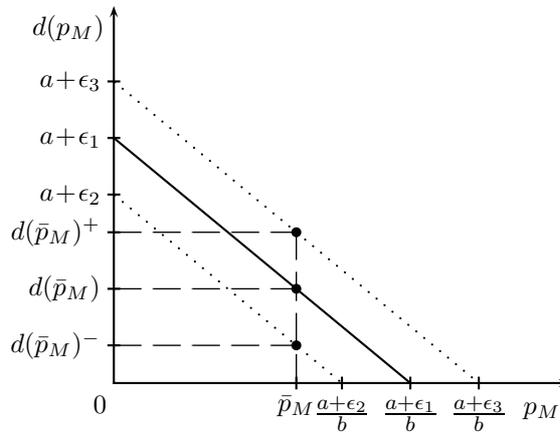


Abb. 3.8: Nachgefragte Mengen für einen vorgegebenen Preis mit $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 < 0$ und $\epsilon_3 > 0$

Bei der Maximierung des erwarteten Deckungsbeitrags stellt sich dem Hersteller folgendes Problem: Da der Verkaufspreis fest vorgegeben ist, kann er selbst den erwarteten risikolosen Deckungsbeitrag nicht beeinflussen (3.16a), weil die nachgefragte Menge zu dem vorgegebenen Preis \bar{p}_M ist bekannt und fest durch Parameter vorgegeben ist:

$$E[\Pi_M(z_M)] = \underbrace{(\bar{p}_M - c_M) \cdot (d(\bar{p}_M) + \mu)}_{\text{bekannt, fest}} \quad (3.16a)$$

$$- \underbrace{(c_M + c_o)}_{\text{bekannt, fest}} \cdot \int_A^{z_M} (z_M - \bar{\epsilon}) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} \quad (3.16b)$$

$$- \underbrace{(\bar{p}_M - c_M + c_u)}_{\text{bekannt, fest}} \cdot \int_{z_M}^B (\bar{\epsilon} - z_M) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon}. \quad (3.16c)$$

Ferner sind die Kosten der Vernichtung¹¹² bei zu hoher Antizipation (3.16b) und der entgangene Deckungsbeitrag sowie die Kosten durch unbefriedigte Nachfrage bei zu niedriger Antizipation des Schocks (3.16c) bekannt. Insgesamt kann der Hersteller somit lediglich die

¹¹⁰ Als Beispiel kann hier die Preisbindung von Verlagserzeugnissen genannt werden.

¹¹¹ Diese Situation ist in der Literatur unter verschiedenen Namen wie „Newsboyproblem“ oder auch „Rosenverkäuferproblem“ bekannt.

¹¹² Unter „Kosten der Vernichtung“ werden im Folgenden die Produktionskosten und die Kosten der eigentlichen Beseitigung zusammengefasst.

erwarteten Kosten durch eine geeignete Wahl von z_M minimieren, um den maximalen Deckungsbeitrag zu erhalten.

Ist der Kostenfaktor $(c_M + c_o)$ kleiner als $(\bar{p}_M - c_M + c_u)$, so wird der Hersteller tendenziell mehr als die Kernnachfrage $d(\bar{p}_M)$ herstellen, da die Kosten für jede zusätzliche Einheit im Vergleich zu den Kosten der unbefriedigten Nachfrage gering sind. Je höher die Kosten der Vernichtung im Vergleich zur unbefriedigten Nachfrage werden, desto mehr wird der eigentlich herzustellende Bestand reduziert, da die Kosten der unbefriedigten Nachfrage weniger stark ins Gewicht fallen.

Da der Hersteller seinen erwarteten Deckungsbeitrag lediglich durch die optimale Antizipation des Nachfrageschocks maximieren kann, muss (3.16) bezüglich z_M maximiert werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E[\Pi_M(z_M)]}{\partial z_M} &= -(c_M + c_o) + (\bar{p}_M + c_u + c_o)[1 - F(z_M)] \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial^2 E[\Pi_M(z_M)]}{\partial z_M^2} &= -(\bar{p}_M + c_u + c_o)f(z_M) \stackrel{!}{<} 0\end{aligned}\quad (3.17)$$

Weil eine Dichtefunktion $f(\cdot)$ nur positive Werte annehmen kann,¹¹³ ist die zweite Ableitung (3.17) immer negativ. Damit existiert ein Maximum für $z_M \in [A, B]$. Abhängig von der Verteilungsfunktion und den gewählten Parametern kann das Maximum im Inneren oder am Rand des Intervalls liegen. Für einen gegebenen Preis \bar{p}_M kann deshalb nur folgende allgemeine Aussage für ein optimales z_M^* und damit auch für die optimale Herstellmenge q_M^* gegeben werden:

$$\begin{aligned}z_M^* &\mapsto [1 - F(z_M^*)] = \frac{(c_M + c_o)}{(\bar{p}_M + c_u + c_o)} \\ q_M^* &= d(\bar{p}_M) + z_M^*.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Berechnungsmöglichkeit 3_{s,1}^{nk}: Berechnung des optimalen Preises und der optimalen Menge Kann der Hersteller letztlich den Preis p_M sowie die herzustellende Menge q_M festlegen, steht er vor dem Problem, seinen erwarteten Deckungsbeitrag unter den zwei Entscheidungsvariablen p_M und z_M maximieren zu müssen.

Dieses Problem lässt sich mit Hilfe einer partiellen Differentiation¹¹⁴ lösen. Die partiellen Ableitungen des erwarteten Deckungsbeitrags (3.11)¹¹⁵ lauten:

$$\frac{\partial E[\Pi_M(p_M, z_M)]}{\partial p_M} = 2b \left(\frac{a + bc_M + \mu}{2b} - p_M \right) - \int_{z_M}^B (\bar{e} - z_M)f(\bar{e}) d\bar{e} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.19a)$$

¹¹³ Siehe KÖNIG et al. (1999), S. 718.

¹¹⁴ Die partielle Differentiation wird bei differenzierbaren Funktionen mit wenigstens zwei unabhängigen Variablen angewendet, siehe OPITZ (1995), S. 552.

¹¹⁵ Siehe S. 26.

sowie

$$\frac{\partial E[\Pi_M(p_M, z_M)]}{\partial z_M} = -(c_M + c_o) + (p_M + c_u + c_o)[1 - F(z_M)] \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.19b)$$

Gleichung (3.19a) ist erfüllt, wenn gilt:

$$p_M^* := p_M(z_M) = \frac{a + bc_M + \mu}{2b} - \frac{\int_{z_M}^B (\bar{e} - z_M) f(\bar{e}) d\bar{e}}{2b}. \quad (3.20)$$

Für (3.19b) kann, wie schon bei Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{\text{nk}}$ gezeigt, nur die Lösung

$$z_M^* \mapsto [1 - F(z_M^*)] = \frac{(c_M + c_o)}{(p_M^* + c_u + c_o)} \quad (3.21)$$

angegeben werden.

Der erwartete Deckungsbeitrag ist allerdings nur dann maximal, wenn am Punkt (p_M^*, z_M^*) eine Maximalstelle vorliegt. Ob dies der Fall ist, lässt sich mit Hilfe der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung überprüfen, die hierfür in einer Hessematrix H angeordnet werden. Mit Hilfe der Definitheitseigenschaft dieser Hessematrix kann dann auf die Art des Optimums (lokales Minimum oder Maximum) geschlossen werden.¹¹⁶

Die Hessematrix lautet:

$$H(p_M, z_M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E[\Pi_M]}{\partial p_M^2} & \frac{\partial E[\Pi_M]}{\partial p_M z_M} \\ \frac{\partial E[\Pi_M]}{\partial z_M p_M} & \frac{\partial^2 E[\Pi_M]}{\partial z_M^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b & 1 - F(z_M) \\ 1 - F(z_M) & -(p_M + c_u + c_o)f(z_M) \end{pmatrix}.$$

Ist die Hessematrix $H(p_M, z_M)$ negativ definit, d. h. die erste Hauptunterdeterminante ist negativ und die zweite positiv im Punkt $H(p_M^*, z_M^*)$, liegt ein lokales Maximum vor.

Für die Hessematrix gilt:

$$\begin{aligned} \det H_1(p_M^*(z_M^*), z_M^*) &= -2b < 0 \\ \det H_2(p_M^*(z_M^*), z_M^*) &= 2b(c_u + p_M^*(z_M^*) + c_o)f(z_M^*) - (1 - F(z_M^*))^2 > 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ohne Kenntnis der Verteilungsfunktion und der Ausprägung von z_M kann allerdings nicht ermittelt werden, ob es sich um ein lokales Maximum handelt. Dieses muss dann am konkreten Beispiel geprüft werden.

3.1.2.2 Beispielhafte Illustration

Die im letzten Abschnitt für einen allgemein verteilten Nachfrageschock besprochenen drei Berechnungsmöglichkeiten¹¹⁷ sollen nun für einen normalverteilten Nachfrageschock spezifiziert werden. Da für die Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{\text{nk}}$ die Verteilung des Nachfrageschocks keine

¹¹⁶ Siehe OPITZ (1995), S. 579, Satz 10.29.

¹¹⁷ Siehe S. 26 ff.

Rolle spielt,¹¹⁸ kann direkt auf die Ergebnisse (3.13) bis (3.15) zurückgegriffen werden.¹¹⁹ Für die Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$ ist die Angabe einer algebraischen Lösung möglich,¹²⁰ nicht aber für die Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{nK}$, da hier die zu berechnenden Terme zu komplex werden, wie sich aus dem unter B.2.1 dargestellten Lösungsversuch ergibt.¹²¹

Es werden daher die einzelnen Berechnungsmöglichkeiten unter Verwendung konkreter Parameter betrachtet und numerisch illustriert. Die für die Parameter gewählten Werte sind in Tab. 3.2 genannt.

	Parameter	Zugewiesene Werte für Beispiel 1
Nachfragefunktion	a	200
	b	25
Kosten	c_M	3
	c_u	3
	c_o	1
Normalverteilung	μ	0
	σ	4,97
	A	-25
	B	+25

Tab. 3.2: Parameterwahl für das Beispiel 3.1.2-1

Beispielhafte Illustration für Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$

Da der Hersteller bei dieser Berechnungsmöglichkeit von einer deterministischen Nachfrage mit dem Mittelwert μ ausgeht, die Verteilung des Nachfrageschocks also irrelevant ist, können die Ergebnisse (3.13) bis (3.15) von Seite 28 übernommen werden:

$$\begin{aligned}
 p_M^* &= \frac{a + bc_M + \mu}{2b} = \frac{200 + 25 \cdot 3 + 0}{2 \cdot 25} & p_M^* &= 5,50 \\
 q_M^* &= \frac{a - bc_M + \mu}{2} = \frac{200 - 25 \cdot 3 + 0}{2} & q_M^* &= 62,50 \\
 E[\Pi_M^*] &= \frac{(a - bc_M + \mu)^2}{4b} = \frac{(200 - 25 \cdot 3 + 0)^2}{4 \cdot 25} & E[\Pi_M^*] &= 156,25.
 \end{aligned}$$

Der Hersteller bietet also 62,50 Produkte zu jeweils einem Preis von 5,50 an. Er erwartet am Ende der Periode einen Deckungsbeitrag von 156,25.

¹¹⁸ Laut getroffener Annahme besitzt der Hersteller lediglich Kenntnis von der Kernnachfragefunktion, siehe S. 27, Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$.

¹¹⁹ Siehe S. 28.

¹²⁰ Diese wird der Vollständigkeit halber unter A.1.2, S. 383, angegeben.

¹²¹ Siehe S. 486 f.

Beispielhafte Illustration für Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$

Für Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$ soll zunächst das optimale z_M durch (3.12)¹²² berechnet werden. Anschließend wird mit Hilfe von (3.18)¹²³ das Ergebnis verifiziert.

Es wird angenommen, dass ein externer Preis von $\bar{p}_M = 5,50$ vorgeschrieben ist. Nach dem Einsetzen der Parameter vereinfacht sich (3.12) zu:¹²⁴

$$E[\Pi_M(5,50, z_M)] = 156,25 - 18,8367 e^{-0,02z_M^2} + 0,75 z_M - 4,75 z_M \text{Erf}(0,14227z_M).$$

Der erwartete Deckungsbeitrag ist für den Definitionsbereich von z_M , $z_M \in [-25, 25]$, in Abb. 3.9 dargestellt.

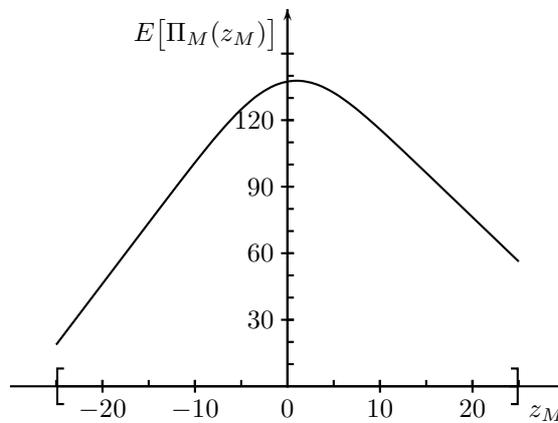


Abb. 3.9: Erwarteter Deckungsbeitrag des Herstellers

Wie man an Abb. 3.9 erkennt, erwartet der Hersteller für jedes z_M des Definitionsbereiches einen positiven Deckungsbeitrag. Den maximal erwarteten Deckungsbeitrag erhält man durch Ableiten und Nullsetzen der Funktion $E[\Pi_M(z_M)]$:

$$\frac{\partial E[\Pi_M(z_M)]}{\partial z_M} = \frac{1}{4} \left(3 \text{Erf} \left(\frac{503}{100\sqrt{2}} \right) - 19 \text{Erf} \left(\frac{625\sqrt{2}z_M}{6213} \right) \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow z_M^* = 0,99. \text{ }^{125}$$

Wegen

$$\frac{\partial^2 E[\Pi_M(z_M)]}{\partial z_M^2} = -0,7625 e^{-0,02z_M^2} < 0 \text{ für } z_M \in [-25, 25]$$

¹²² Siehe S. 26.

¹²³ Siehe S. 30.

¹²⁴ Siehe B.2.2, „Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$ “, S. 487, Out[7]. $\text{Erf}(x)$ entspricht der Fehlerfunktion, auch als Gaußsches Wahrscheinlichkeits-Integral oder Errorfunktion bezeichnet. Mit dieser Funktion wird die Fläche unter der Glockenkurve zwischen den variablen Grenzen $-x\sqrt{2}$ und $+x\sqrt{2}$ mit

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

beschrieben, siehe auch KÖNIG et al. (1999), S. 729 ff.

handelt es sich bei $z_M^* = 0,99$ um ein globales Maximum.

Durch Einsetzen der Parameter in (3.18) erhält man das gleiche Ergebnis:

$$\begin{aligned} z_M^* &\mapsto [1 - F(z_M^*)] = \frac{(c_M + c_o)}{(\bar{p}_M + c_u + c_o)} \\ z_M^* &\mapsto \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{625\sqrt{2}z_M^*}{6213} \right) \right) \right] = \frac{(3 + 1)}{(5,50 + 3 + 1)} \\ z_M^* &= 0,99. \end{aligned}$$

Der Hersteller wird also 0,99 Einheiten mehr produzieren als die Kernnachfragefunktion angibt.

Die optimal zu produzierende Menge ist demnach

$$\begin{aligned} q_M^* &= a - b\bar{p}_M + z_M^* = 200 - 25 \cdot 5,50 + 0,99 \\ q_M^* &= 63,49 \end{aligned}$$

und der erwartete Deckungsbeitrag des Herstellers beträgt

$$E[\Pi_M(z_M^*)] = 137,78.$$

Beispielhafte Illustration für Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{\text{nk}}$

Auch für Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{\text{nk}}$ soll der optimale Deckungsbeitrag zuerst durch Ableitung von (3.12)¹²⁶ berechnet werden. Danach werden p_M^* und z_M^* direkt durch (3.20) und (3.21)¹²⁷ ermittelt.¹²⁸

Aus (3.12) folgt

$$\begin{aligned} E[\Pi_M(p_M, z_M)] &= (p_M - c_M)(d(p_M) + \mu) \\ &\quad - (c_M + c_o) \int_A^{z_M} (z_M - \bar{\epsilon}) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} + (p_M + c_u - c_M) \int_{z_M}^B (\bar{\epsilon} - z_M) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} \\ &= -7,93126 e^{-0,02z_M^2} - 25p_M^2 + p_M(275 - 1,98281 e^{-0,02z_M^2} + 0,5 z_M) \\ &\quad - 600 - 2 z_M - 0,5(4 + p_M) z_M \operatorname{Erf}(0,1427 z_M). \end{aligned}$$

Der erwartete Deckungsbeitrag ist für den Definitionsbereich

$$p_M \in \left[c_M, \frac{a}{b} \right] \quad \text{und} \quad z_M \in [A, B]$$

in Abb. 3.10 auf der nächsten Seite dargestellt. Weiter veranschaulicht eine graue Fläche in dieser Abbildung alle (p_M, z_M) -Kombinationen, bei denen der erwartete Deckungsbeitrag

¹²⁵ Sofern nicht anders angegeben, werden alle Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

¹²⁶ Siehe S. 26.

¹²⁷ Siehe S. 31.

¹²⁸ Die detaillierte Rechenweg ist unter B.2.2, „Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{\text{nk}}$ “, S. 488 f., angegeben.

Null ist. Dies lässt erkennen, dass an den Rändern ein niedriger bzw. negativer und in der Mitte des Definitionsbereiches ein hoher Deckungsbeitrag zu erwarten ist.

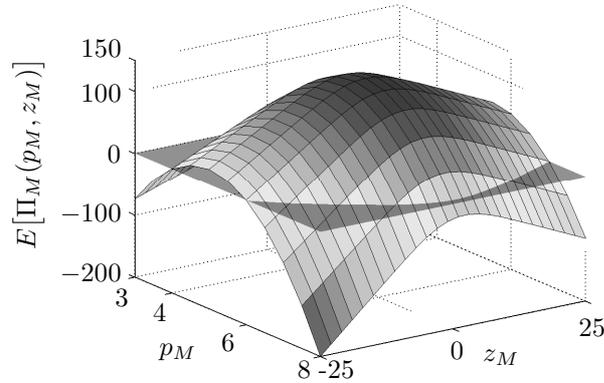


Abb. 3.10: Erwarteter Deckungsbeitrag des Herstellers

Um das Maximum des erwarteten Deckungsbeitrags zu berechnen, wird folgender Weg gewählt: zuerst wird z_M als Konstante gehalten und $E[\Pi_M(p_M, z_M)]$ nur nach p_M abgeleitet und gleich null gesetzt:

$$\begin{aligned} & \max_{p_M} (E[\Pi_M(p_M, z_M)]) \\ & \frac{\partial E[\Pi_M(p_M, z_M)]}{\partial p_M} \stackrel{!}{=} 0 \\ & \Leftrightarrow p_M^*(z_M) = 5,5 - 0,0396563 e^{0,02z_M^2} + \frac{z_M}{100} (1 - \text{Erf}(0,14227 z_M)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Das Ergebnis wird dann in den erwarteten Deckungsbeitrag $E[\Pi_M(p_M^*(z_M), z_M)]$ eingesetzt. z_M wird nun wieder als Variable betrachtet. Es erfolgt die gleiche Vorgehensweise wie mit p_M :

$$\begin{aligned} & \max_{z_M} (E[\Pi_M(p_M^*(z_M), z_M)]) \\ & \frac{\partial E[\Pi_M(p_M^*(z_M), z_M)]}{\partial z_M} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow z_M^* = 0,97273. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Durch das Einsetzen von (3.24) in (3.23) folgt

$$p_M^*(z_M^*) = 5,47.$$

Dass es sich bei p_M^* und z_M^* tatsächlich um ein Maximum handelt, kann mit Hilfe der Hessematrix verifiziert werden.¹²⁹

¹²⁹ Dazu oben unter 3.1.2.1, S. 31.

Nach (3.22)¹³⁰ gilt:

$$\begin{aligned}\det H_1(p_M^*, z_M^*) &= -50 < 0 \\ \det H_2(p_M^*, z_M^*) &= 37,1044 > 0.\end{aligned}$$

Damit handelt es sich um ein lokales Maximum.

Aber auch durch Heranziehen von (3.20)¹³¹ mit

$$\begin{aligned}p_M^* := p_M(z_M) &= \frac{a + bc_M + \mu}{2b} - \frac{\int_{z_M}^B (\bar{\epsilon} - z_M) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon}}{2b} \\ &= \frac{200 + 25 \cdot 3 + 0}{2 \cdot 25} - \frac{\int_{z_M}^{25} (\bar{\epsilon} - z_M) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon}}{2 \cdot 25} \\ p_M^*(z_M) &= 5,5 - 0,0396563 e^{0,02z_M^2} + \frac{z_M}{100} (1 - \text{Erf}(0,14227 z_M))\end{aligned}$$

und (3.21)¹³² mit

$$\begin{aligned}z_M^* \mapsto [1 - F(z_M^*)] &= \frac{(c_M + c_o)}{(p_M^*(z_M) + c_u + c_o)} \\ z_M^* \mapsto [1 - 0,5(1 + \text{Erf}(0,14227 z_M))] &= \frac{(3 + 1)}{(p_M^*(z_M) + 3 + 1)} \\ z_M^* &= 0,97273\end{aligned}$$

erhält man das gleiche Ergebnis für p_M^* und z_M^* .

Aus z_M^* folgt

$$p_M^* := p_M^*(0,97273) = 5,47$$

und daraus

$$q_M^* = 64,24.$$

Der erwartete Deckungsbeitrag beträgt somit für beide Rechenwege dieses Zahlenbeispiels

$$E[\Pi_M(p_M^*, z_M^*)] = 137,81.$$

Zusammenfassung und weiterführende Betrachtung

In Abschnitt 3.1.2.2¹³³ wurden anhand eines Zahlenbeispiels mit den unter Abschnitt 3.1.2¹³⁴ vorgestellten Berechnungsmöglichkeiten $1_{s,1}^{\text{nk}}$ bis $3_{s,1}^{\text{nk}}$ der optimale Preis, die optimale Menge und der optimale erwartete Deckungsbeitrag des Herstellers rechnerisch ermittelt und zum Teil grafisch illustriert.

¹³⁰ Siehe S. 31.

¹³¹ Ebenda.

¹³² Ebenda.

¹³³ Siehe S. 31 ff.

¹³⁴ Siehe S. 22 f.

Die Ergebnisse der drei vorgestellten Berechnungsmöglichkeiten sind in Tab. 3.3 zusammengefasst.¹³⁵ In den ersten drei Reihen der Tabelle sind der Preis, die Herstellmenge und der erwartete Deckungsbeitrag aufgeführt, wobei der Preis der Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$ mit $\bar{p}_M = 5,50$ extern vorgegeben war.¹³⁶ In Zeile 4 steht der simulierte Deckungsbeitrag, der bei dem jeweiligen Preis und der hergestellten Menge auf einem Markt entstehen würde.¹³⁷ Zeile 5 zeigt die Abweichung des simulierten vom erwarteten Deckungsbeitrag für die jeweilige Berechnungsmöglichkeit, wohingegen in Zeile 6 die Abweichung des Deckungsbeitrags der Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{nK}$ und $3_{s,1}^{nK}$ von Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ eingetragen wurde.

		Berechnungsmöglichkeit			
		$1_{s,1}^{nK}$	$2_{s,1}^{nK}$	$3_{s,1}^{nK}$	
Beispiel 1	Preis	5,50	5,50	5,47	
	Herstellmenge	62,50	63,49	64,24	
	Deckungsbeitrag	erwartet	156,25	137,78	137,81
		simuliert	137,47	137,86	137,88
	Abweichung [[%]]	sim./erw.	-12,02	0,05	0,05
		sim./sim. ^(BM $1_{s,1}^{nK}$)	0,00	0,28	0,30

Tab. 3.3: Ergebnisse der drei Berechnungsmöglichkeiten für Beispiel 3.1.2-1

Vergleicht man Preis, Menge und Deckungsbeitrag der drei Berechnungsmöglichkeiten, so fällt auf, dass die Preise und Mengen dicht beieinander liegen, der erwartete Deckungsbeitrag für die Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ aber ca. 12 % höher ist als bei den Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{nK}$ und $3_{s,1}^{nK}$. Dies lässt sich dadurch erklären, dass bei der Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ aufgrund der getroffenen Annahme keine Kosten für Fehlmengen in den erwarteten Deckungsbeitrag einfließen.

Betrachtet man hingegen die simulierten Deckungsbeiträge, so liegen diese dicht beieinander. Wird der optimale Preis der Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ als Verkaufspreis festgelegt und der Hersteller legt die optimale Menge gemäß des antizipierten Nachfrageschocks fest (Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$), so ist festzustellen, dass der Hersteller mehr herstellt als die Kernnachfragefunktion angibt. Der Grund dafür ist, dass die Kosten für den entgangenen Deckungsbeitrag und für den Ausgleich der Fehlmengen höher sind als die Kosten der Vernichtung ($p_M - c_M + c_u = 5,50$ zu $c_M + c_o = 4$, so dass sich ein Verhältnis von 1 zu 0,73 ergibt)¹³⁸.

¹³⁵ Die entsprechenden Parameterwerte finden sich in Tab. 3.2, S. 32.

¹³⁶ Der extern vorgegebene Preis entspricht für alle Beispiele dem jeweiligen optimalen Preis der Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$. Somit können die Ergebnisse von Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ und $2_{s,1}^{nK}$ besser verglichen werden.

¹³⁷ Dazu wurden 5000 Nachfrageschocks simuliert, die einer Normalverteilung mit den genannten Parametern unterlagen. Für jeden Nachfrageschock wurde der entsprechende Deckungsbeitrag berechnet und anschließend der Durchschnitt gebildet.

¹³⁸ Im Folgenden werden die Kosten für den entgangenen Deckungsbeitrag und den Ausgleich der Fehlmengen zu 1 normiert, um die Kostenverhältnisse besser darstellen zu können. Da es im Text nur darauf ankommt, welche Kosten höher sind, wird vom Kostenfaktor der Berechnungsmöglichkeiten $1_{s,1}^{nK}$ und $2_{s,1}^{nK}$ gesprochen. Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{nK}$ weist einen ähnlichen Faktor auf und wird der Übersichtlichkeit halber nicht genannt.

Trotz einer Antizipation des Nachfrageschocks ist lediglich eine Deckungsbeitragssteigerung um 0,28 % möglich.

Für Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{nK}$ ist der simulierte Deckungsbeitrag insgesamt 0,30 % höher als der für Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$. Der Grund dafür, dass der Deckungsbeitrag bei der Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ ähnlich gut ist wie bei den Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{nK}$ und $3_{s,1}^{nK}$, obwohl bei der Berechnung der optimalen Preis-/Mengenkombination weder Strafkosten noch die Art der Verteilungsfunktion eingeflossen sind, liegt in der Wahl der Parameterwerte.

Um zu untersuchen, wie sich die Wahl der Parameter auf die einzelnen Berechnungsmöglichkeiten auswirkt, werden nachfolgend fünf weitere Beispiele betrachtet, bei denen jeweils der Fokus auf eine bestimmte Änderung der Parameter gelegt wird.

Zunächst soll die Auswirkung der Änderung der Strafkosten (Parameter c_u und c_o) betrachtet werden. Dazu werden die folgenden zwei Beispiele gewählt.¹³⁹ In Tab. 3.4 sind die Parameterwerte angegeben.

	Parameter	Zugewiesene Werte für Beispiel	
		2	3
Nachfragefunktion	a	200	200
	b	25	25
Kosten	c_M	5	5
	c_u	0,5	5
	c_o	5	0,5
Normalverteilung	μ	0	0
	σ	2	2
	A	-10,06	-10,06
	B	+10,06	+10,06

Tab. 3.4: Parameterwahl für das Beispiel 3.1.2-2 und 3

Die sich aus den Parameterwerten ergebenden Ergebnisse sind in Tab. 3.5 auf der nächsten Seite zusammengefasst.¹⁴⁰

¹³⁹ Für Beispiele, die dieselben Werte für die Parameter der Verteilungsfunktion (μ und σ) besitzen, werden die gleichen Zufallszahlen für den simulierten Nachfrageschock genutzt.

¹⁴⁰ Der extern vorgegebene Preis für Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$ entspricht immer dem optimalen Preis der Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$.

		Berechnungsmöglichkeit			
		$1_{s,1}^{nK}$	$2_{s,1}^{nK}$	$3_{s,1}^{nK}$	
Beispiel 2	Preis	6,50	6,50	6,46	
	Herstellmenge	37,50	35,57	36,61	
	Deckungsbeitrag	erwartet	56,25	50,25	50,30
		simuliert	46,73	50,22	50,27
	Abweichung [[%]]	sim./erw.	-16,93	-0,06	-0,06
		sim./sim. ^(BM $1_{s,1}^{nK}$)	0,00	7,48	7,58
Beispiel 3	Preis	6,50	6,50	6,49	
	Herstellmenge	37,50	37,71	38,06	
	Deckungsbeitrag	erwartet	56,25	46,73	46,73
		simuliert	46,73	46,79	46,80
	Abweichung [[%]]	sim./erw.	-16,92	0,14	0,14
		sim./sim. ^(BM $1_{s,1}^{nK}$)	0,00	0,13	0,14

Tab. 3.5: Ergebnisse der drei Berechnungsmöglichkeiten für Beispiel 3.1.2-2 und 3

Da die Parameter des Beispiels 2 sich von denen in Beispiel 3 bezüglich der Höhe der Strafkosten unterscheiden, ändert sich auch das Verhältnis der Kosten für den entgangenen Deckungsbeitrag sowie für den Ausgleich von Fehlmengen zu den Kosten der Vernichtung. Einerseits beträgt dieses Verhältnis 1 zu 5 (Beispiel 2) und andererseits 1 zu 0,85 (Beispiel 3). Dementsprechend wird in Beispiel 2 weniger, in Beispiel 3 mehr hergestellt als die Kernnachfrage angibt. Dabei fällt das unterschiedliche Potenzial der Deckungsbeitragssteigerung auf, welches durch die Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{nK}$ und $3_{s,1}^{nK}$ erreicht werden kann. Bei den gegebenen Parametern ist bei Beispiel 2 eine Deckungsbeitragsverbesserung um bis zu 7,58 %, bei Beispiel 3 hingegen nur um 0,14 % möglich. Aufgrund des größeren Kostenverhältnisses in Beispiel 2 wirkt sich eine gute Antizipation des Nachfrageschocks auf den Deckungsbeitrag stärker aus als wenn sich die Kostenverhältnisse nahezu aufheben.

Die nächsten beiden Beispiele sollen zeigen, welche Auswirkungen die Variation des Parameters b auf die Ergebnisse hat. In Tab. 3.6 auf der nächsten Seite sind die gewählten Parameterwerte für die Beispiele 4 und 5 aufgeführt.¹⁴¹

¹⁴¹ Die Strafkosten wurden so gewählt, dass das Verhältnis der Kosten für den entgangenen Deckungsbeitrag sowie für den Ausgleich von Fehlmengen zu den Kosten der Vernichtung für beide Beispiele identisch ist.

	Parameter	Zugewiesene Werte für Beispiel	
		4	5
Nachfragefunktion	a	200	200
	b	15	30
Kosten	c_M	4	4
	c_u	0,5	3,84
	c_o	5	5
Normalverteilung	μ	0	0
	σ	3	3
	A	-15,09	-15,09
	B	+15,09	+15,09

Tab. 3.6: Parameterwahl für das Beispiel 3.1.2-4 und 5

Auch die Variation des Parameters b hat einen entscheidenden Einfluss auf die Ergebnisse, wie Tab. 3.7 zeigt.

		Berechnungsmöglichkeit			
		$1_{s,1}^{nK}$	$2_{s,1}^{nK}$	$3_{s,1}^{nK}$	
Beispiel 4	Preis	8,67	8,67	8,61	
	Herstellmenge	70,00	68,96	69,84	
	Deckungsbeitrag	erwartet	326,67	310,70	310,75
		simuliert	309,78	310,70	310,76
	Abweichung [[%]]	sim./erw.	-5,17	0,00	0,00
sim./sim. ^(BM $1_{s,1}^{nK}$)		0,00	0,30	0,32	
Beispiel 5	Preis	5,33	5,33	5,30	
	Herstellmenge	40,00	38,96	39,85	
	Deckungsbeitrag	erwartet	53,33	37,35	37,38
		simuliert	36,42	37,34	37,37
	Abweichung [[%]]	sim./erw.	-31,72	-0,03	-0,03
		sim./sim. ^(BM $1_{s,1}^{nK}$)	0,00	2,53	2,60

Tab. 3.7: Ergebnisse der drei Berechnungsmöglichkeiten für Beispiel 3.1.2-4 und 5

Die Verdopplung des Parameters b bewirkt in diesen beiden Beispielen eine Reduktion des Preises und der Herstellmenge um ca. 40% und eine Reduktion des Deckungsbeitrags um mehr als 80%.

Ein erheblicher Unterschied zeigt sich ferner auch bei der Abweichung des simulierten vom erwarteten Deckungsbeitrag, der bei Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ in Beispiel 4 ca. -5%

und in Beispiel 5 etwa -32% beträgt, obwohl die Kostenverhältnisse im Gegensatz zu den Beispielen 2 und 3 identisch sind (jeweils 1 zu 1,74). Ausschlaggebend ist hier die Varianz des Nachfrageschocks. Auch wenn das Intervall, in dem die Nachfrageschocks auftreten, an sich gleich ist ($\pm 15,09$), so ist dieses in Bezug zur hergestellten Menge unterschiedlich: in Beispiel 4 beträgt es ca. $\pm 22\%$ und in Beispiel 5 ca. $\pm 38\%$ der Kernnachfragefunktion. Somit wirken sich Fehlentscheidungen (Über- oder Unterproduktion) gravierender bei einer großen Varianz aus, was auch bei der Abweichung des simulierten Deckungsbeitrags der Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ in Beispiel 5 zu sehen ist.

Letztlich wird in Beispiel 6 untersucht, welche Auswirkung eine niedrige Varianz des Nachfrageschocks auf die Ergebnisse der einzelnen Berechnungsmöglichkeiten hat. Die gewählten Parameter für dieses Beispiel gibt Tab. 3.8 wieder.

	Parameter	Zugewiesene Werte für Beispiel 6
Nachfragefunktion	a	200
	b	25
Kosten	c_M	4
	c_u	1
	c_o	6
Normalverteilung	μ	0
	σ	0,7
	A	-3,52
	B	3,52

Tab. 3.8: Parameterwahl für das Beispiel 3.1.2-6

Der Nachfrageschock ist demnach so gewählt worden, dass er nur um $\pm 3,52$ Einheiten von der Kernnachfragefunktion abweicht, was in diesem Beispiel etwa $\pm 7\%$ entspricht. Der simulierte Deckungsbeitrag liegt demnach nahe am erwarteten Deckungsbeitrag von Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$, wie anhand der Tab. 3.9 abzulesen ist.

		Berechnungsmöglichkeit			
		$1_{s,1}^{nK}$	$2_{s,1}^{nK}$	$3_{s,1}^{nK}$	
Beispiel 6	Preis	6,00	6,00	5,99	
	Herstellmenge	50,00	49,48	49,79	
	Deckungsbeitrag	erwartet	100,00	97,23	97,24
		simuliert	96,40	97,21	97,22
	Abweichung [[%]]	sim./erw.	-3,60	-0,02	-0,02
		sim./sim. ^(BM $1_{s,1}^{nK}$)	0,00	0,84	0,85

Tab. 3.9: Ergebnisse der drei Berechnungsmöglichkeiten für Beispiel 3.1.2-6

Anders als in Beispiel 4, wo für diese Berechnungsmöglichkeit eine ähnlich niedrige Abweichung erzielt werden konnte, kann hier durch die Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{nK}$ und $3_{s,1}^{nK}$ eine Deckungsbeitragssteigerung von 0,85 % (in Beispiel 4 ca. 0,30 %) erreicht werden. Auch hier spielt wieder der Kostenfaktor eine Rolle. Betrag in Beispiel 4 das Kostenverhältnis 1 zu 1,74, so beträgt es in Beispiel 6 sogar 1 zu 3,33. Hier macht sich ebenfalls eine gute Antizipation des Nachfrageschocks im Hinblick auf die Deckungsbeitragssteigerung von Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ zu Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$ bzw. $3_{s,1}^{nK}$ bemerkbar.

Abb. 3.11 stellt abschließend die Abweichungen der simulierten Deckungsbeiträge der Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{nK}$ und $3_{s,1}^{nK}$ von Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ bezogen auf das unter Abschnitt 3.1.2.2¹⁴² detailliert betrachtete Beispiel 1 sowie die zuvor darüber hinaus betrachteten Beispiele 2 bis 6 grafisch dar. Hieran kann man erkennen, dass für einige Parameterkonstellationen der Deckungsbeitrag durch die Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{nK}$ und $3_{s,1}^{nK}$ gesteigert, für andere hingegen kaum eine nennenswerte Verbesserung durch die Antizipation des Nachfrageschocks erreicht wurde. Die Abbildung zeigt allerdings auch, dass die Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$ wenigstens genauso gute Ergebnisse erzielt wie Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{nK}$.

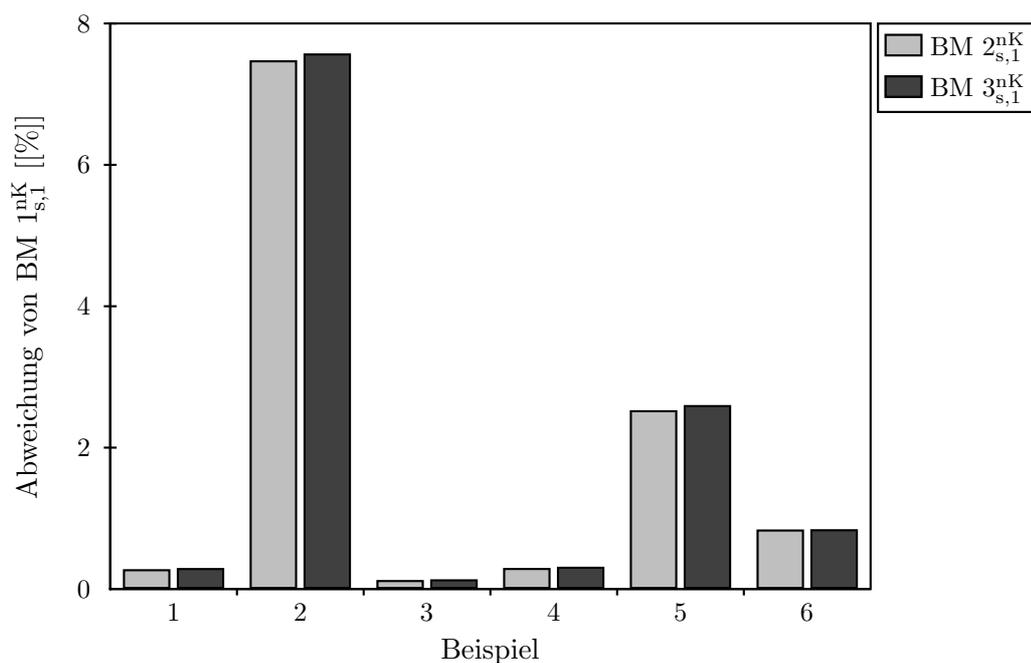


Abb. 3.11: Abweichung der simulierten Deckungsbeiträge der Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{nK}$ und $3_{s,1}^{nK}$ im Vergleich zu Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ für die Beispiele 3.1.2-1 bis 6

Vergleicht man die Berechnungsmöglichkeiten, bei denen der Hersteller nicht durch externe Vorgaben in seiner Wahl des Preises und der Menge beschränkt wird (Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ und $3_{s,1}^{nK}$), lässt sich feststellen, dass durch die Antizipation des Nachfrageschocks eine Deckungsbeitragssteigerung um 0,01 bis 7,58 % erreicht wurde.

¹⁴² Siehe S. 31 ff.

3.2 Multiplikative Nachfragefunktion

3.2.1 Deterministische Marktnachfrage

3.2.1.1 Modellformulierung und -lösung

In diesem Abschnitt wird die gleiche Situation wie in Abschnitt 3.1.1.1¹⁴³ betrachtet, mit dem Unterschied, dass sich der Hersteller einer multiplikativen Nachfragefunktion mit

$$d(p_M) = ap_M^{(-b)}, \quad \text{mit } a, b > 0$$

gegenübersieht.

Die multiplikative Nachfragefunktion¹⁴⁴ und die daraus resultierende Deckungsbeitragsfunktion des Herstellers sind in Abb. 3.12 und Abb. 3.13 dargestellt.

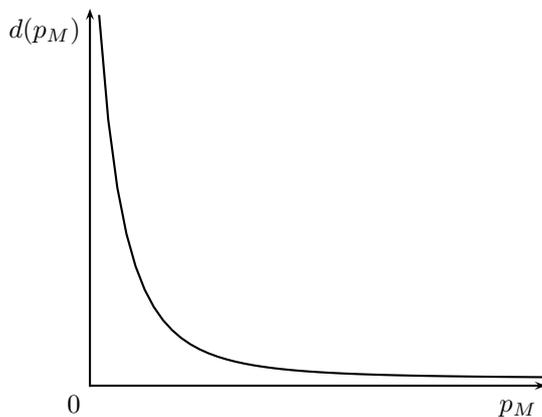


Abb. 3.12: Nachfragefunktion

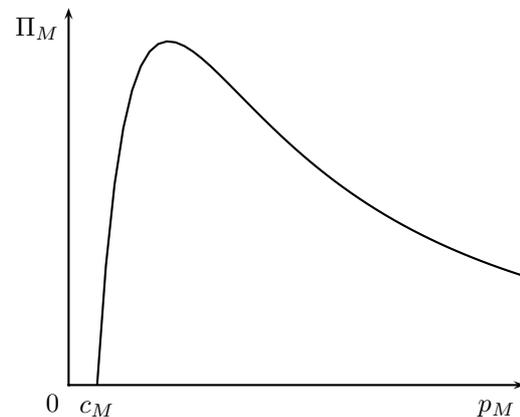


Abb. 3.13: Deckungsbeitragsfunktion

Die Deckungsbeitragsfunktion des Herstellers, die nun maximiert werden muss, lautet

$$\Pi_M = \max_{p_M} \left((p_M - c_M) ap_M^{(-b)} \right).$$

Nach Ableitung dieser Funktion

$$\frac{\partial \Pi_M}{\partial p_M} = ap_M^{-b} - abp_M^{-(1+b)}(p_M - c_M) \stackrel{!}{=} 0$$

ergibt sich als einzige Lösung

$$p_M^* = \frac{bc_M}{b-1}, \quad b \neq 1.^{145}$$

¹⁴³ Siehe S. 19 ff.

¹⁴⁴ Typisch für eine multiplikative Nachfragefunktion ist, dass diese wegen $a, b > 0$ und $p_M > 0$ (es darf nicht durch null dividiert werden) nie die Abszisse und Ordinate schneidet.

Für die Lösung p_M^* gilt die Einschränkung, dass der Parameter b nur für $b > 1$ definiert ist, da im Bereich $b \in]0, 1[$ wegen $c_M \geq 0$ der Preis p_M^* negativ wird und eine Division für $b = 1$ nicht definiert ist.¹⁴⁶

Die optimalen Lösungen lauten demnach:

$$p_M^* = \frac{bc_M}{b-1}, \quad b > 1 \quad (3.25)$$

$$q_M^* = a(p_M^*)^{-b} = a \left(\frac{bc_M}{b-1} \right)^{-b} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \Pi_M^* &= (p_M^* - c_M)q_M^* \\ &= \frac{a}{b} \left(\frac{bc_M}{b-1} \right)^{1-b} \end{aligned}$$

$$\Pi_M^* = \frac{p_M^* q_M^*}{b}. \quad (3.27)$$

3.2.1.2 Beispielhafte Illustration

Die algebraischen Lösungen des vorherigen Abschnitts lassen sich folgendermaßen beispielhaft illustrieren, wobei für die Parameter folgende Werte gewählt worden sind:

	Parameter
Nachfragefunktion	$a = 10\,000$ $b = 3$
Hersteller	$c_M = 3$

Tab. 3.10: Parameterwahl für das Beispiel 3.2.1-1

Die Nachfragefunktion bzw. die herzustellende Menge des Herstellers lautet

$$q_M := d(p_M) = ap_M^{(-b)} = 10\,000p_M^{-3}$$

und die Deckungsbeitragsfunktion

$$\Pi_M = (p_M - 3)10\,000p_M^{-3}.$$

¹⁴⁵ An der Stelle p_M^* liegt ein Maximum vor, da

$$\frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial p_M^2} = -abp_M^{-(2+b)} (c_M(b+1) - p_M(b-1)) < 0 \Leftrightarrow p_M < \frac{(b+1)c_M}{b-1} \text{ gilt.}$$

¹⁴⁶ In der weiteren Analyse wird deshalb stets von $b > 1$ ausgegangen.

Die optimalen Werte ergeben sich durch Einsetzen der Parameter in (3.25) bis (3.27):

$$p_M^* = \frac{bc_M}{b-1} = \frac{3 \cdot 3}{3-1} \qquad p_M^* = 4,50$$

$$q_M^* = a(p_M^*)^{-b} = 10\,000 \cdot 4,50^{-3} \qquad q_M^* = 109,74$$

$$\Pi_M^* = \frac{p_M^* q_M^*}{b} = \frac{4,50 \cdot 109,74}{3} \qquad \Pi_M^* = 164,61.$$

Den maximalen Deckungsbeitrag von $\Pi_M^* = 164,61$ erhält der Hersteller somit, wenn er die Menge $q_M^* = 109,74$ herstellt und diese zu einem Preis von $p_M^* = 4,50$ verkauft. Diese Ergebnisse werden auch noch einmal in Abb. 3.14 aufgezeigt.

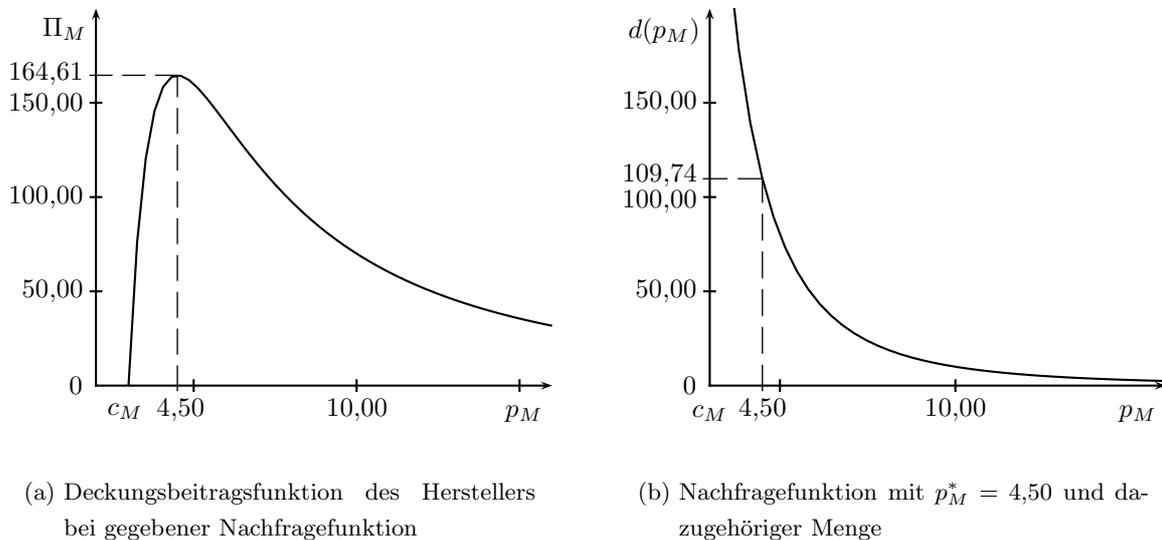


Abb. 3.14: Darstellung des Beispiels 3.2.1-1

Aus Abb. 3.14(a) ist ersichtlich, dass der Deckungsbeitrag bei einem Preis von $p_M^* = 4,50$ maximal ist. Die bei diesem Preis nachgefragte Menge kann dann von der in Abb. 3.14(b) eingezeichneten Nachfragefunktion abgelesen werden. Bei einem Preis von $p_M^* = 4,50$ wird somit genau eine Menge von $d(p_M^*) = 109,74$ nachgefragt, die der Hersteller produzieren wird.

3.2.2 Stochastische Marktnachfrage

3.2.2.1 Modellerweiterung durch Nachfrageschocks

Die Herleitung des erwarteten Deckungsbeitrags bei multiplikativer Nachfragefunktion baut auf die Gleichungen (3.8) und (3.9)¹⁴⁷ auf. Da es sich hier um eine multiplikative Nachfragefunktion handelt, muss der Term der unsicheren Nachfrage statt

$$D(p_M, \epsilon) = d(p_M) + \epsilon$$

¹⁴⁷ Siehe S. 25.

(bei linearer Nachfragefunktion) durch

$$D(p_M, \epsilon) = d(p_M) \epsilon$$

ersetzt werden.¹⁴⁸

Da negative Nachfragen nicht existieren, muss der Schock insofern eingeschränkt werden, als dass hier nur $\epsilon > 0$ gelten darf. In Abb. 3.15 wird die multiplikative Nachfragefunktion dargestellt, wobei die durchgezogene Linie die Nachfragefunktion ohne Schock, die gepunktete Linie diejenige mit Nachfrageschock kennzeichnet.

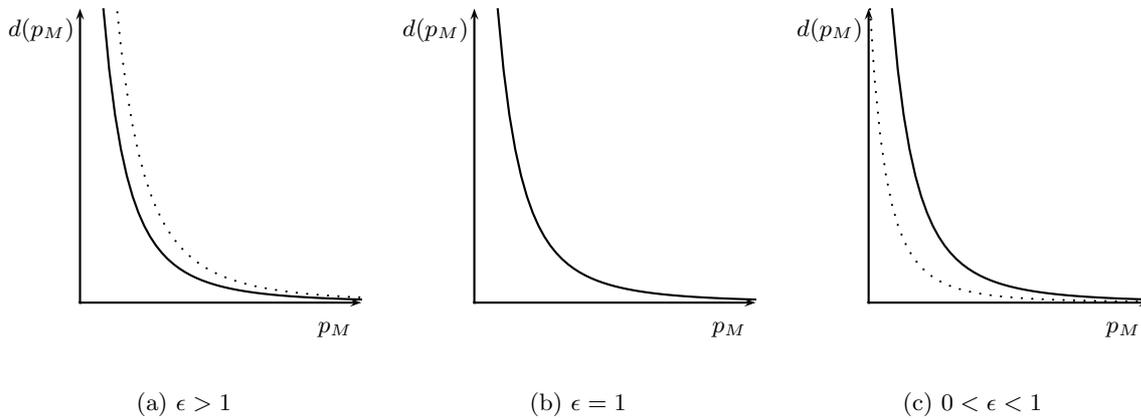


Abb. 3.15: Verschiebung der Nachfragefunktion in Abhängigkeit von ϵ

Auch für den antizipierten Schock z_M gilt demnach $z_M > 0$. Dieser wird aus dem Quotienten aus produzierter Menge und laut der Kernnachfragefunktion nachgefragten Menge,

$$z_M = \frac{q_M}{d(p_M)},$$

gebildet.

In Abhängigkeit vom antizipierten Schock lautet der Deckungsbeitrag des Herstellers:

$$\Pi_M(p_M, z_M) = \begin{cases} p_M d(p_M) \epsilon - c_M d(p_M) z_M - c_o d(p_M) (z_M - \epsilon), & \epsilon \leq z_M, \\ p_M d(p_M) z_M - c_M d(p_M) z_M - c_u d(p_M) (\epsilon - z_M), & \epsilon > z_M. \end{cases} \quad (3.28)$$

Die Interpretation von (3.28) ist identisch mit der Interpretation von (3.10) auf Seite 25.

Aus (3.28) wird der erwartete Deckungsbeitrag abgeleitet, der auch hier durch die erwarteten Kosten bei Überschätzung (3.29a) sowie bei Unterschätzung (3.29b) der Nachfrage und den von der tatsächlichen Nachfrage unabhängigen Produktionskosten (3.29c) beschrieben wird:

$$E[\Pi_M(p_M, z_M)] = \int_A^{z_M} (p_M d(p_M) \bar{\epsilon} - c_o d(p_M) [z_M - \bar{\epsilon}]) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} \quad (3.29a)$$

$$+ \int_{z_M}^B (p_M d(p_M) z_M - c_u d(p_M) [\bar{\epsilon} - z_M]) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} \quad (3.29b)$$

$$- c_M d(p_M) z_M. \quad (3.29c)$$

¹⁴⁸ In Anlehnung an PETRUZZI und DADA (1999), S. 185.

Der erwartete Deckungsbeitrag entspricht hier ebenfalls dem risikolosen Deckungsbeitrag Ψ abzüglich des Verlustes V , der aus der Unsicherheit resultiert:¹⁴⁹

$$E[\Pi_M(p_M, z_M)] = \Psi(p_M) - V(p_M, z_M) \quad (3.30)$$

mit

$$\begin{aligned} \Psi(p_M) &= (p_M - c_M)d(p_M)\mu \\ V(p_M, z_M) &= d(p_M) \left[(c_M + c_o) \int_A^{z_M} (z_M - \bar{\epsilon})f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} + (p_M - c_M + c_u) \int_{z_M}^B (\bar{\epsilon} - z_M)f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} \right]. \end{aligned}$$

Allgemein verteilter Nachfrageschock

Analog zum gleichnamigen Abschnitt bei einer linearen Nachfragefunktion¹⁵⁰ werden nachfolgend für allgemein verteilte Nachfrageschocks bei einer multiplikativen Nachfragefunktion die drei Berechnungsmöglichkeiten vorgestellt. Da die Argumentation jeweils dieselbe ist, wird hier nur kurz das entsprechende Ergebnis aufgezeigt.¹⁵¹

Berechnungsmöglichkeit 1_{s,1}^{nK}: Berechnung von optimalem Preis und optimaler Menge unter Vernachlässigung der Unsicherheit

Vernachlässigt der Hersteller die Unsicherheit, so entspricht der erwartete Deckungsbeitrag des Herstellers dem risikolosen Deckungsbeitrag $\Psi(p_M)$ aus (3.30). Durch die Maximierung des Deckungsbeitrags bezüglich des Preises ergibt sich:

$$\begin{aligned} E[\Pi_M(p_M, q_M)] &= \max_{p_M} \left((p_M - c_M) a p_M^{(-b)} \mu \right) \\ \frac{\partial E[\Pi_M(p_M, q_M)]}{\partial p_M} &= a \mu p_M^{-(b+1)} (b(c_M - p_M) + p_M) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow p_M^* &= \frac{bc_M}{b-1}, \quad b > 1. \end{aligned} \quad 152$$

Aus dem optimalen Preis p_M^* ergeben sich die optimale Herstellmenge und der erwartete Deckungsbeitrag:

$$\begin{aligned} q_M^* &= d(p_M^*)\mu = a \left(\frac{bc_M}{b-1} \right)^{-b} \mu \\ E[\Pi_M(p_M^*, q_M^*)] &= \frac{p_M^* q_M^*}{b} \mu. \end{aligned}$$

Die Berechnungsmöglichkeit 1_{s,1}^{nK} unterscheidet sich somit von der Berechnungsmöglichkeit 1_{d,1}^{nK} nur dann nicht, wenn $\mu = 1$ gilt.¹⁵³

¹⁴⁹ Die detaillierten Rechenschritte von (3.29) nach (3.30) finden sich unter A.1.3, S. 383 f.

¹⁵⁰ Siehe S. 26.

¹⁵¹ Für Einzelheiten siehe oben unter 3.1.2.1, S. 27 ff.

¹⁵² An der Stelle p_M^* liegt ein Maximum vor, da

$$\frac{\partial^2 \Pi_M}{\partial p_M^2} = ab \mu p_M^{-(2+b)} ((b-1)p_M - (b+1)c_M) < 0 \Leftrightarrow p_M < \frac{(b+1)c_M}{b-1} \text{ gilt.}$$

¹⁵³ Siehe (3.25) bis (3.27), S. 44, für die Ergebnisse der Berechnungsmöglichkeit 1_{d,1}^{nK}.

Berechnungsmöglichkeit 2_{s,1}^{nK}: Berechnung der optimalen Menge bei einem exogen gegebenen Preis Wird dem Hersteller der Preis \bar{p}_M vorgegeben, kann er den erwarteten Deckungsbeitrag (3.30) auch hier lediglich durch die optimale Antizipation des externen Schocks maximieren:

$$\begin{aligned} & \max_{z_M} (E[\Pi_M(z_M)]) \\ & \Leftrightarrow \frac{\partial E[\Pi_M(z_M)]}{\partial z_M} = a\bar{p}_M^{(-b)} (-(c_M + c_o) + (\bar{p}_M + c_u + c_o)[1 - F(z_M)]) \stackrel{!}{=} 0 \\ & \frac{\partial^2 E[\Pi_M(z_M)]}{\partial z_M^2} = -a\bar{p}_M^{(-b)} (\bar{p}_M + c_u + c_o) f(z_M) \stackrel{!}{<} 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Die zweite Ableitung (3.31) ist immer negativ, so dass ein Maximum für $z_M \in [A, B]$ existiert.¹⁵⁴

Wie schon im Abschnitt 3.1.2.1 zur linearen Nachfragefunktion beschrieben,¹⁵⁵ kann auch hier wiederum nur eine allgemeine Aussage für das optimale z_M^* gegeben werden:

$$z_M^* \mapsto [1 - F(z_M^*)] = \frac{(c_M + c_o)}{(\bar{p}_M + c_u + c_o)}.$$

Die optimale Herstellmenge beträgt somit

$$q_M^* = d(\bar{p}_M) z_M^*.$$

Berechnungsmöglichkeit 3_{s,1}^{nK}: Berechnung des optimalen Preises und der optimalen Menge Bei Berechnungsmöglichkeit 3_{s,1}^{nK} folgt die Herleitung des optimalen Preises und der optimalen Antizipation des Nachfrageschocks unter Anwendung der gleichen Vorgehensweise wie bei der linearen Nachfragefunktion¹⁵⁶. Es wird deshalb nur kurz das Ergebnis genannt:¹⁵⁷

Der erwartete Deckungsbeitrag ist dann optimal, wenn

$$p_M^* := p_M(z_M^*) = \frac{b}{b-1} \frac{\Theta(z_M^*)(c_M - c_u) - \Omega(z_M^*)(c_M + c_o) - \mu}{\Theta(z_M^*) - \mu} \quad (3.32)$$

mit $\Omega(z_M^*) := \int_A^{z_M^*} (z_M^* - \bar{\epsilon}) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon}$ und $\Theta(z_M^*) := \int_{z_M^*}^B (\bar{\epsilon} - z_M^*) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon}$ sowie

$$z_M^* \mapsto [1 - F(z_M^*)] = \frac{(c_M + c_o)}{(p_M^* + c_u + c_o)} \quad (3.33)$$

gilt und am Punkt (p_M^*, z_M^*) eine Maximalstelle vorliegt.

¹⁵⁴ Ob das Maximum im Inneren oder am Rand des Intervalls liegt, ist abhängig von der Verteilungsfunktion und den gewählten Parametern.

¹⁵⁵ Siehe S. 29 f.

¹⁵⁶ Siehe S. 30.

¹⁵⁷ Die genaue Herleitung findet sich unter A.1.4, S. 385 f.

3.2.2.2 Beispielhafte Illustration

Bei dem Versuch, für die Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{\text{nk}}$ und $3_{s,1}^{\text{nk}}$ die optimalen Ergebnisse algebraisch für einen normalverteilten Nachfrageschock darzustellen, treten die gleichen Probleme auf, wie sie schon oben¹⁵⁸ bei der linearen Nachfragefunktion beschrieben worden sind. Darum sollen auch hier anhand von konkreten Zahlenbeispielen die Lösungswege der Berechnungsmöglichkeiten für einen normalverteilten Nachfrageschock aufgezeigt werden.

Für die numerische Illustration werden beispielhaft folgende Werte für die Parameter gewählt:

	Parameter	Zugewiesene Werte für Beispiel 1
Nachfragefunktion	a	10 000
	b	3
Kosten	c_M	3
	c_u	3
	c_o	1
Normalverteilung	μ	1,1
	σ	0,2
	A	0,094
	B	2,106

Tab. 3.11: Parameterwahl für das Beispiel 3.2.2-1

Beispielhafte Illustration für Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{\text{nk}}$

Der Hersteller geht von einer deterministischen Nachfrage mit dem Mittelwert μ aus. Wie schon im linearen Fall der Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{\text{nk}}$ spielen die Verteilung des Nachfrageschocks sowie anfallende Strafkosten keine Rolle.¹⁵⁹ Somit können der Preis, die Menge und der erwartete Deckungsbeitrag analog zu Abschnitt 3.2.1.1¹⁶⁰ berechnet werden:

$$p_M^* = \frac{bc_M}{b-1} = \frac{3 \cdot 3}{3-1} \qquad p_M^* = 4,50$$

$$q_M^* = a \left(\frac{bc_M}{b-1} \right)^{-b} \mu = 10\,000 \cdot \left(\frac{3 \cdot 3}{3-1} \right)^{-3} \cdot 1,1 \qquad q_M^* = 120,71$$

$$E[\Pi_M(p_M^*, q_M^*)] = \frac{p_M^* q_M^*}{b} \mu = \frac{4,50 \cdot 120,71}{3} \cdot 1,1 \qquad E[\Pi_M(p_M^*, q_M^*)] = 181,07.$$

¹⁵⁸ Siehe dazu unter 3.1.2.2, S. 31 ff.

¹⁵⁹ Siehe Abschnitt 3.1.2.2, S. 32.

¹⁶⁰ Siehe S. 43 ff.

Beispielhafte Illustration für Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$

Der erwartete Deckungsbeitrag für Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$ lautet für die in Tab. 3.11 gewählten Werte:¹⁶¹

$$\begin{aligned} E[\Pi_M(4,5, z_M)] &= 181,07 - 109,739 \left[4 \int_{0,094}^{z_M} (z_M - \bar{\epsilon}) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} + 4,5 \int_{z_M}^{2,106} (\bar{\epsilon} - z_M) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} \right] \\ &= 150,892 - 74,4254 e^{-12,5(-1,1+z_M)^2} + 27,4348 z_M \\ &\quad + (513,032 - 466,392 z_M) \text{Erf}(3,53553(-1,1 + z_M)). \end{aligned}$$

Der erwartete Deckungsbeitrag ist in Abb. 3.16 eingezeichnet. Man kann erkennen, dass der Hersteller nur einen positiven Deckungsbeitrag erwarten kann, wenn er einen Nachfrageschock ungefähr zwischen 0,7 und 1,5 antizipiert.

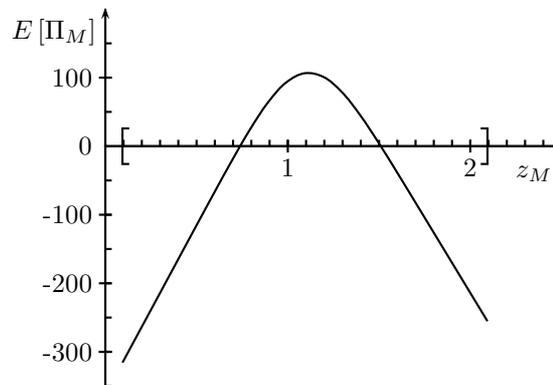


Abb. 3.16: Erwarteter Deckungsbeitrag des Herstellers für $\bar{p}_M = 4,5$

Der maximal erwartete Deckungsbeitrag ergibt sich durch Ableiten und Nullsetzen der Funktion $E[\Pi_M(\bar{p}_M, z_M)]$:

$$\frac{\partial E[\Pi_M(\bar{p}_M, z_M)]}{\partial z_M} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow z_M^* = 1,11.$$

Wegen

$$\frac{\partial^2 E[\Pi_M(\bar{p}_M, z_M)]}{\partial z_M^2} < 0 \quad \text{für } z_M \in [0,094, 2,106]$$

handelt es sich bei $z_M^* = 1,11$ um ein globales Maximum.

Damit ergibt sich eine vom Hersteller zu produzierende Menge von

$$\begin{aligned} q_M^* &= a\bar{p}^{(-b)} z_M^* = 10\,000 \cdot 4,5^{-3} \cdot 1,11 \\ q_M^* &= 122,33. \end{aligned}$$

¹⁶¹ Für diese Berechnungsmöglichkeit ist der detaillierte Rechenweg unter B.2.3, S. 489, angegeben.

Der erwartete Deckungsbeitrag des Herstellers beträgt somit

$$E[\Pi_M(z_M^*)] = 106,85.$$

Beispielhafte Illustration für Berechnungsmöglichkeit 3_{s,1}^{nK}

Bei Berechnungsmöglichkeit 3_{s,1}^{nK} lautet der erwartete Deckungsbeitrag des Herstellers in Abhängigkeit von p_M und z_M

$$E[\Pi_M(p_M, z_M)] = \frac{1000}{p_M^2} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{4}{p_M} + 1 \right) \left(e^{-\frac{253009}{20000}} - e^{-\frac{25}{2} \left(-\frac{11}{10} + z_M \right)^2} \right) + 11 - \frac{33}{p_M} \right. \\ \left. + \frac{22 - 20z_M}{4p_M} \left((4 - p_M) \operatorname{Erf} \left(\frac{503}{100\sqrt{2}} \right) (4 + p_M) \operatorname{Erf} \left(\frac{5 \left(-\frac{11}{10} + z_M \right)}{\sqrt{2}} \right) \right) \right].$$

Dieser ist in Abb. 3.17 dargestellt.¹⁶²

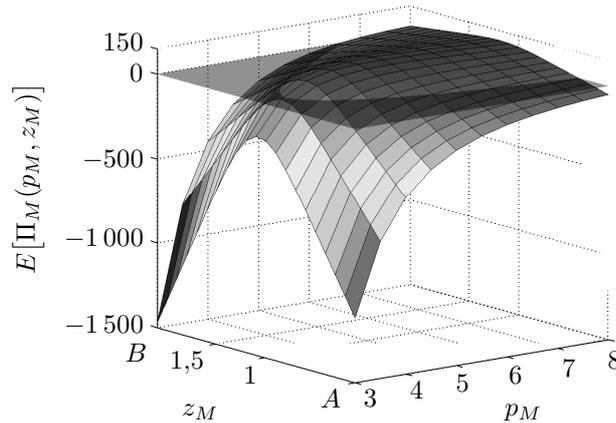


Abb. 3.17: Erwarteter Deckungsbeitrag des Herstellers

Der optimale Preis des Herstellers ergibt sich in Abhängigkeit von z_M^* aus (3.32)¹⁶³:

$$p_M^*(z_M^*) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{4 \int_{0,094}^{z_M^*} (z_M^* - \bar{\epsilon}) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} + 1,1}{\int_{z_M^*}^{2,106} (\bar{\epsilon} - z_M^*) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} - 1,1}.$$

Mit Hilfe von (3.33) kann nun z_M^* berechnet werden:

$$z_M^* \mapsto [1 - F(z_M^*)] = \frac{4}{p_M^*(z_M^*) + 4} \\ \Leftrightarrow z_M^* = 1,13.$$

Der optimale Preis p_M^* des Herstellers beträgt damit

$$p_M^* = p_M(1,13) = 5,36$$

¹⁶² Zur Veranschaulichung wurde der Preis aus dem Bereich $p_M \in [c_M, 8]$ gewählt.

¹⁶³ Siehe S. 48.

und der optimale Deckungsbeitrag

$$E[\Pi_M(p_M^*, q_M^*)] = 120,89.^{164}$$

Zusammenfassung und weiterführende Betrachtung

In Abschnitt 3.2.2.¹⁶⁵ wurden anhand eines Zahlenbeispiels mit den unter Abschnitt 3.1.¹⁶⁶ vorgestellten Berechnungsmöglichkeiten $1_{s,1}^{nK}$ bis $3_{s,1}^{nK}$ der optimale Preis, die optimale Menge und der optimale erwartete Deckungsbeitrag des Herstellers rechnerisch ermittelt und zum Teil grafisch illustriert.

In Tab. 3.12 sind die Ergebnisse der drei Berechnungsmöglichkeiten dieses Abschnitts zusammengestellt.¹⁶⁷

		Berechnungsmöglichkeit			
		$1_{s,1}^{nK}$	$2_{s,1}^{nK}$	$3_{s,1}^{nK}$	
Beispiel 1	Preis	4,50	4,50	5,36	
	Herstellmenge	120,71	122,33	74,72	
	Deckungsbeitrag	erwartet	181,07	106,85	120,89
		simuliert	106,08	106,38	120,69
	Abweichung [[%]]	sim./erw.	-41,41	-0,44	-0,16
		sim./sim. ^(BM $1_{s,1}^{nK}$)	0,00	0,28	13,78

Tab. 3.12: Ergebnisse der drei Berechnungsmöglichkeiten für Beispiel 3.2.2-1

Wie schon bei der linearen Nachfragefunktion wird auch bei der multiplikativen Nachfragefunktion der erwartete Deckungsbeitrag bei der Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ überschätzt, bei den beiden anderen Berechnungsmöglichkeiten entspricht der erwartete nahezu dem simulierten Deckungsbeitrag. Ausgehend von Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ konnte der simulierte Deckungsbeitrag des Herstellers durch die Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{nK}$ und $3_{s,1}^{nK}$ sukzessive gesteigert werden. Da der Kostenfaktor für dieses Beispiel 1 zu 0,89 (Kosten des entgangenen Deckungsbeitrags und des Ausgleichs für Fehlmengen zu Kosten der Vernichtung) beträgt, wird die zu produzierende Menge bei Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$ erhöht. Damit kann eine Deckungsbeitragssteigerung von 0,28 % erreicht werden. Im Hinblick auf den zu erreichenden Deckungsbeitrag macht sich die Festlegung des optimalen Preises und der optimalen Menge unter Einbeziehung der Unsicherheit (Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{nK}$) bemerkbar. Hier konnte der simulierte Deckungsbeitrag im Vergleich zu Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ um

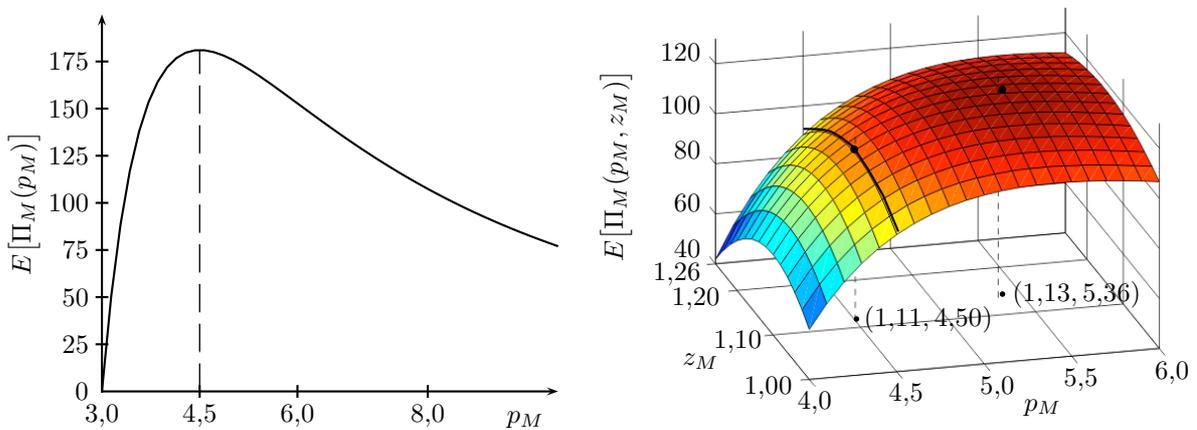
¹⁶⁴ Die detaillierte Berechnung findet sich unter B.2.3, „Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{nK}$ “, S. 489 f.

¹⁶⁵ Siehe S. 49 ff.

¹⁶⁶ Siehe S. 22 f.

¹⁶⁷ Die simulierten Deckungsbeiträge ergeben sich aus dem Durchschnitt der für 5 000 Nachfrageschocks berechneten Deckungsbeiträge. Die Nachfrageschocks unterlagen einer Normalverteilung mit den in Tab. 3.11, S. 49, genannten Parametern.

13,78 % gesteigert werden. Grund der deutlichen Steigerung ist die verwendete Funktion für den erwarteten Deckungsbeitrag. Geht der Hersteller davon aus, dass keine Strafkosten anfallen, so zieht er Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{\text{nK}}$ für die Bestimmung seines maximal erwarteten Deckungsbeitrags heran, so dass der optimal zu wählende Preis $p_M^* = 4,50$ beträgt. Die erwartete Deckungsbeitragsfunktion ist in Abb. 3.18(a) eingezeichnet. Wird dem Hersteller der Preis aus Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{\text{nK}}$ als Verkaufspreis vorgegeben, so kann er nur durch die Antizipation des Nachfrageschocks den maximalen Deckungsbeitrag erhalten (verstärkte Linie in Abb. 3.18(b)). Der erwartete Deckungsbeitrag steigt aber ausgehend vom Preis $p_M = 4,50$ weiterhin, so dass der maximal erwartete Deckungsbeitrag am Punkt $(p_M^* = 5,36, z_M^* = 1,13)$ liegt. Die deutliche Deckungsbeitragssteigerung in Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{\text{nK}}$ resultiert also aus dem zu niedrig bestimmten Preis in Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{\text{nK}}$.



(a) Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{\text{nK}}$: $p_M \geq c_M = 3$

(b) Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{\text{nK}}$ und $3_{s,1}^{\text{nK}}$:
 $z_M \in [1,00, 1,26]$ und $p_M \in [4,0, 6,0]$

Abb. 3.18: Erwartete Deckungsbeiträge des Herstellers für die Berechnungsmöglichkeiten $1_{s,1}^{\text{nK}}$ sowie $2_{s,1}^{\text{nK}}$ und $3_{s,1}^{\text{nK}}$

Auch bei einer multiplikativen Nachfragefunktion soll untersucht werden, inwiefern die Wahl der Parameter Einfluss auf die Lösung der einzelnen Berechnungsmöglichkeiten hat. Dazu werden nachfolgend fünf weitere Beispiele betrachtet, bei denen jeweils der Fokus auf eine bestimmte Änderung der Parameterwerte gelegt wurde.¹⁶⁸

Zunächst soll die Auswirkung der Änderung der Strafkosten (Parameter c_u und c_o) betrachtet werden. Dazu werden die folgenden zwei Beispiele gewählt.¹⁶⁹ In Tab. 3.13 auf der nächsten Seite sind die Parameterwerte angegeben.

¹⁶⁸ Die Wahl der Parameterwerte der folgenden fünf Beispiele erfolgt in Anlehnung an die Untersuchung einer linearen Nachfragefunktion, um so nachfolgend im Abschnitt 3.3 eventuelle Unterschiede zwischen den Ergebnissen bei linearer und multiplikativer Nachfrage darstellen zu können.

¹⁶⁹ Für Beispiele, die dieselben Werte für die Parameter der Verteilungsfunktion (μ und σ) besitzen, werden die gleichen Zufallszahlen für den simulierten Nachfrageschock genutzt.

	Parameter	Zugewiesene Werte für Beispiel	
		2	3
Nachfragefunktion	a	20 000	20 000
	b	3	3
Kosten	c_M	5	5
	c_u	0,5	5
	c_o	5	0,5
Normalverteilung	μ	1,1	1,1
	σ	0,1	0,1
	A	0,597	0,597
	B	1,603	1,603

Tab. 3.13: Parameterwahl für das Beispiel 3.2.2-2 und 3

Die Parameter des Beispiels 2 unterscheiden sich von den Parametern des Beispiels 3 nur hinsichtlich der Höhe der Strafkosten. In Beispiel 2 beträgt das Kostenverhältnis¹⁷⁰ 1 zu 3,33, was bedeutet, dass weniger hergestellt wird als die Kernnachfragefunktion aussagt, da die Vernichtungskosten mehr als dreimal so hoch sind wie die Kosten des entgangenen Deckungsbeitrags und des Ausgleichs der Fehlmengen. Das Kostenverhältnis in Beispiel 3 ist nicht so hoch wie im vorigen Beispiel (nun 1,36 zu 1). Es wird daher nur geringfügig mehr hergestellt. Die für diese beiden Beispiele entsprechenden Ergebnisse sind in Tab. 3.14 auf der nächsten Seite zusammengefasst.¹⁷¹

¹⁷⁰ Bestimmt durch: Kosten des entgangenen Gewinns und des Ausgleichs für Fehlmengen zu Kosten der Vernichtung.

¹⁷¹ Der extern vorgegebene Preis für die Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$ entspricht immer dem optimalen Preis der Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$.

		Berechnungsmöglichkeit			
		$1_{s,1}^{nK}$	$2_{s,1}^{nK}$	$3_{s,1}^{nK}$	
Beispiel 2	Preis	7,50	7,50	7,91	
	Herstellmenge	52,15	48,66	41,82	
	Deckungsbeitrag	erwartet	130,37	111,62	111,98
		simuliert	105,79	111,68	112,03
	Abweichung [[%]]	sim./erw.	-18,86	0,05	0,04
		sim./sim. ^(BM $1_{s,1}^{nK}$)	0,00	5,57	5,90
Beispiel 3	Preis	7,50	7,50	8,13	
	Herstellmenge	52,15	53,07	41,84	
	Deckungsbeitrag	erwartet	130,37	106,24	108,50
		simuliert	105,85	106,29	108,53
	Abweichung [[%]]	sim./erw.	-18,80	0,04	0,03
		sim./sim. ^(BM $1_{s,1}^{nK}$)	0,00	0,41	2,53

Tab. 3.14: Ergebnisse der drei Berechnungsmöglichkeiten für Beispiel 3.2.2-2 und 3

Der Vergleich von Beispiel 2 und 3 zeigt auch hier, dass eine Antizipation des Nachfrageschocks bei einem größeren Kostenverhältnis sich auf den zu erzielenden Deckungsbeitrag stärker auswirkt als wenn sich die Kostenverhältnisse nahezu aufheben.

Die nächsten beiden Beispiele illustrieren die Auswirkungen der Variation des Parameters b auf die Ergebnisse. Dazu wurden folgende Parameterwerte gewählt:

		Parameter	Zugewiesene Werte	
			für Beispiel	
			4	5
Nachfragefunktion	a		20 000	20 000
	b		3	3,5
Kosten	c_M		3	3
	c_u		1,7	2
	c_o		3	3
Normalverteilung	μ		0,8	0,8
	σ		0,15	0,15
	A		0,046	0,046
	B		1,555	1,555

Tab. 3.15: Parameterwahl für das Beispiel 3.2.2-4 und 5

In Beispiel 4 und 5 wurden die Parameterwerte für die Kosten c_u so gewählt, dass sie in diesen zwei Beispielen zu einem identischen Kostenverhältnis führen (jeweils 1 zu 1,88). Der

Wert des Parameters b wurde in Beispiel 5 um 16,67 % höher gewählt als in Beispiel 4. Dies bewirkt für alle drei Berechnungsmöglichkeiten des Beispiels 5 eine Reduzierung der Menge um ungefähr 40 %, die wiederum eine jeweilige Verringerung des simulierten Deckungsbeitrags um ca. 60 % zur Folge hat, wie der Tab. 3.16 zu entnehmen ist.

		Berechnungsmöglichkeit			
		$1^{nK}_{s,1}$	$2^{nK}_{s,1}$	$3^{nK}_{s,1}$	
Beispiel 4	Preis	4,50	4,50	5,35	
	Herstellmenge	175,58	162,70	99,42	
	Deckungsbeitrag	erwartet	263,37	151,44	169,32
		simuliert	142,35	151,45	169,25
	Abweichung [[%]]	sim./erw.	-45,95	0,00	-0,05
sim./sim. ^(BM $1^{nK}_{s,1}$)		0,00	6,39	18,89	
Beispiel 5	Preis	4,20	4,20	5,01	
	Herstellmenge	105,38	97,65	54,01	
	Deckungsbeitrag	erwartet	126,45	59,28	73,02
		simuliert	53,86	59,32	73,01
	Abweichung [[%]]	sim./erw.	-57,40	0,08	-0,02
sim./sim. ^(BM $1^{nK}_{s,1}$)		0,00	10,14	35,54	

Tab. 3.16: Ergebnisse der drei Berechnungsmöglichkeiten für Beispiel 3.2.2-4 und 5

Letztlich wird in Beispiel 6 untersucht, welche Auswirkung eine niedrige Varianz des Nachfrageschocks auf die Ergebnisse der einzelnen Berechnungsmöglichkeiten hat. Die gewählten Parameter für dieses Beispiel gibt Tab. 3.17 wieder.

	Parameter	Zugewiesene Werte für Beispiel 6
Nachfragefunktion	a	20 000
	b	3
Kosten	c_M	3
	c_u	2
	c_o	3
Normalverteilung	μ	1,0
	σ	0,005
	A	0,975
	B	1,025

Tab. 3.17: Parameterwahl für das Beispiel 3.2.2-6

Wurde in den vorherigen Beispielen 1 bis 5 eine hohe Varianz des Nachfrageschocks gewählt (bis zu $-95,4\%$ bzw. $+210,6\%$ von der Kernnachfragefunktion), beträgt in Beispiel 6 die Varianz von der Kernnachfrage $\pm 2,5\%$.

		Berechnungsmöglichkeit			
		$1_{s,1}^{nK}$	$2_{s,1}^{nK}$	$3_{s,1}^{nK}$	
Beispiel 6	Preis	4,50	4,50	4,51	
	Herstellmenge	219,48	218,78	216,70	
	Deckungsbeitrag	erwartet	329,22	325,82	325,83
		simuliert	325,00	325,78	325,79
	Abweichung [[%]]	sim./erw.	-1,28	-0,01	-0,01
		sim./sim. ^(BM $1_{s,1}^{nK}$)	0,00	0,24	0,24

Tab. 3.18: Ergebnisse der drei Berechnungsmöglichkeiten für Beispiel 3.2.2-6

Auch hier zeigt sich (siehe Tab. 3.18), dass aufgrund der geringen Varianz mögliche Strafkosten nicht sehr stark ins Gewicht fallen und deshalb auch bei Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ ein Deckungsbeitrag erzielt wird, der nahe am Optimum liegt. Bei den Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{nK}$ und $3_{s,1}^{nK}$ konnte selbst durch Einbeziehung der Strafkosten nur eine 0,24%ige Steigerung des erwarteten Deckungsbeitrags im Vergleich zu Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ erreicht werden.

Abschließend werden die Abweichungen der simulierten Deckungsbeiträge der Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{nK}$ und $3_{s,1}^{nK}$ von Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ grafisch für das unter Abschnitt 3.2.2.2¹⁷² detailliert betrachtete Beispiel sowie die zuvor weitergehend betrachteten Beispiele 2 bis 6 in Abb. 3.19 auf der nächsten Seite dargestellt.

¹⁷² Siehe S. 49 ff.

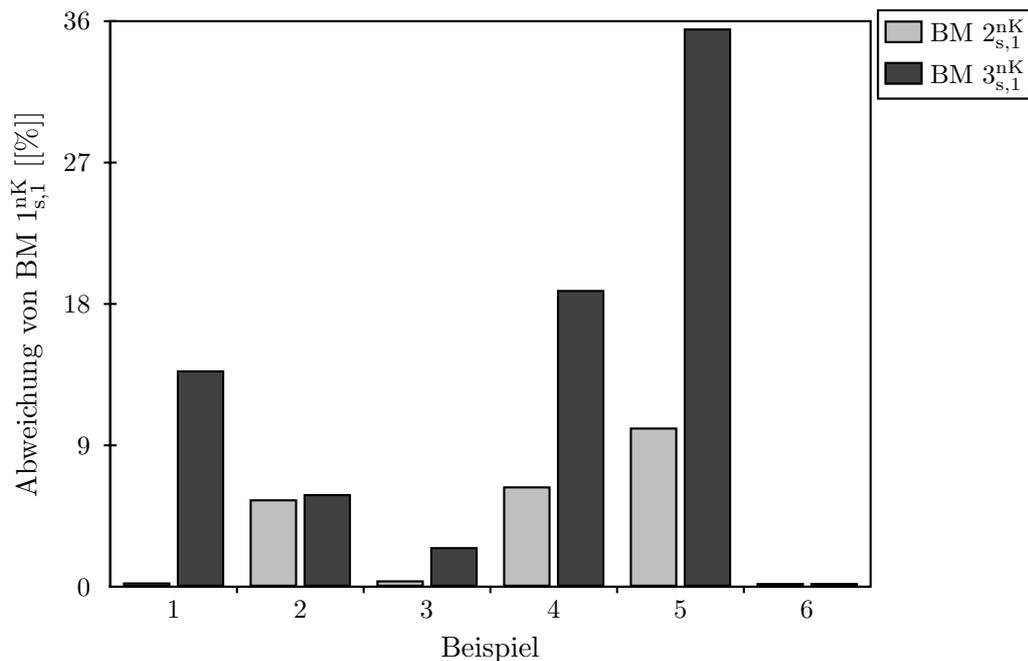


Abb. 3.19: Abweichung der simulierten Deckungsbeiträge der Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{nK}$ und $3_{s,1}^{nK}$ im Vergleich zu Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ für die Beispiele 3.2.2-1 bis 6

Für jedes Beispiel konnte der simulierte Deckungsbeitrag verglichen mit Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ mit Hilfe der Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{nK}$ und $3_{s,1}^{nK}$ gesteigert werden. Anders als bei der linearen Nachfragefunktion¹⁷³ konnte in den meisten Beispielen jeweils durch die Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{nK}$ eine Preis-/Mengenkombination berechnet werden, die nochmals eine deutliche Steigerung des Deckungsbeitrags bewirkt als die der Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$.

3.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden für eine deterministische und eine stochastische Marktnachfrage Preis- und/oder Mengenkombinationen berechnet, die den (erwarteten) Deckungsbeitrag des Herstellers maximieren, wobei den Berechnungen zum einen eine lineare und zum anderen eine multiplikative Nachfragefunktion zugrunde gelegt wurde.

Die algebraischen Ergebnisse für die lineare Nachfragefunktion $d(p_M) = a - bp_M$ und die multiplikative Nachfragefunktion $d(p_M) = ap_M^{-b}$ sind für eine deterministische Marktnachfrage in Tab. 3.19 auf der nächsten Seite zusammengefasst.

¹⁷³ Oben unter Abschnitt 3.1.2.2, Abb. 3.11, S. 42.

	Nachfragefunktion	
	linear	multiplikativ
optimaler Preis p_M^*	$\frac{a+bc_M}{2b}$	$\frac{bc_M}{b-1}$
optimale Menge q_M^*	$\frac{a-bc_M}{2}$	$a \left(\frac{bc_M}{b-1}\right)^{-b}$
maximaler Deckungsbeitrag Π_M^*	$\frac{(a-bc_M)^2}{4b}$	$\frac{p_M^* q_M^*}{b}$

Tab. 3.19: Ergebnisse für eine deterministische Marktnachfrage

Für die stochastische Marktnachfrage wurde das Modell der deterministischen Marktnachfrage um Nachfrageschocks ϵ , $\epsilon \in [A, B]$ erweitert.¹⁷⁴ Zusätzlich wurden zwei Arten von Strafkosten eingeführt. Zum einen Kosten c_o , die bei Überproduktion zur Beseitigung von Restposten dienen, zum anderen Kosten c_u , die beim Ausgleich von Fehlmengen bei Unterproduktion auftreten.

Für die Bestimmung optimaler Preis- und/oder Mengenkombinationen unter der Berücksichtigung einer stochastischen Marktnachfrage wurden drei Berechnungsmöglichkeiten vorgestellt:

- Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$: Berechnung von optimalem Preis und optimaler Menge unter Vernachlässigung der Unsicherheit;
- Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{nK}$: Berechnung der optimalen Menge bei einem exogen gegebenen Preis;
- Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{nK}$: Berechnung des optimalen Preises und der optimalen Menge.

Bei der Modellformulierung für die Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$ wurde dem Hersteller unterstellt, dass dieser die auftretende Unsicherheit durch Nachfrageschocks vernachlässigt. Lediglich den Mittelwert μ der Verteilungsfunktion antizipiert er als Abweichung von der Kernnachfrage. Die Art der Verteilungsfunktion ist deshalb in dieser Berechnungsmöglichkeit irrelevant. Die optimalen Ergebnisse sind in Tab. 3.20 zusammengefasst.

	Nachfragefunktion	
	linear	multiplikativ
optimaler Preis p_M^*	$\frac{a+bc_M+\mu}{2b}$	$\frac{bc_M}{b-1}$
optimale Menge q_M^*	$\frac{a-bc_M+\mu}{2}$	$a \left(\frac{bc_M}{b-1}\right)^{-b} \mu$
erwarteter Deckungsbeitrag $E[\Pi_M^*]$	$\frac{(a-bc_M+\mu)^2}{4b}$	$\frac{p_M^* q_M^*}{b} \mu$

 Tab. 3.20: Ergebnisse der Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{nK}$

¹⁷⁴ Die lineare Nachfragefunktion wird nun durch $D(p_M, \epsilon) = a - bp_M + \epsilon$ und die multiplikative Nachfragefunktion durch $D(p_M, \epsilon) = ap_M^{-b} \cdot \epsilon$ beschrieben.

Der simulierte Deckungsbeitrag wird allerdings vom erwarteten Deckungsbeitrag abweichen, da bei der Maximierung des erwarteten Deckungsbeitrags keine Strafkosten berücksichtigt worden sind.

Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{\text{nk}}$ geht davon aus, dass dem Hersteller ein Verkaufspreis \bar{p}_M vorgeschrieben wird. Der Hersteller kann also nur durch die Antizipation des Nachfrageschocks seinen erwarteten Deckungsbeitrag maximieren. Weil die Bestimmung des maximal erwarteten Deckungsbeitrags bei einem allgemein verteiltem Nachfrageschock nicht möglich ist,¹⁷⁵ kann nur eine allgemeine Lösung angegeben werden (Tab. 3.21).

	Nachfragefunktion	
	linear	multiplikativ
vorgegebener Preis \bar{p}_M	\bar{p}_M	\bar{p}_M
optimale Antizipation von ϵ , z_M^*	$z_M^* \mapsto [1 - F(z_M^*)] = \frac{(c_M + c_o)}{(\bar{p}_M + c_u + c_o)}$	
optimale Menge q_M^*	$d(\bar{p}_M) + z_M^*$	$d(\bar{p}_M)z_M^*$

Tab. 3.21: Ergebnisse der Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{\text{nk}}$

Der maximal erwartete Deckungsbeitrag für eine lineare Nachfragefunktion lautet:

$$E[\Pi_M(z_M^*)] = (\bar{p}_M - c_M) \cdot (d(\bar{p}_M) + \mu) - (c_M + c_o) \int_A^{z_M^*} (z_M^* - \bar{\epsilon}) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} - (\bar{p}_M - c_M + c_u) \int_{z_M^*}^B (\bar{\epsilon} - z_M^*) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon}$$

und der erwartete Deckungsbeitrag für eine multiplikative Nachfrage

$$E[\Pi_M(z_M^*)] = (\bar{p}_M - c_M) d(\bar{p}_M) \mu - d(\bar{p}_M) \left((c_M + c_o) \int_A^{z_M^*} (z_M^* - \bar{\epsilon}) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} - (\bar{p}_M - c_M + c_u) \int_{z_M^*}^B (\bar{\epsilon} - z_M^*) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} \right).$$

Für beide Nachfragefunktionen wird bei gleichem \bar{p}_M der gleiche Nachfrageschock antizipiert. Nur bei der herzustellenden Menge und dem erwarteten Deckungsbeitrag unterscheidet sich die lineare von der multiplikativen Nachfragefunktion.

Wie schon bei Berechnungsmöglichkeit $2_{s,1}^{\text{nk}}$ kann eine algebraische Lösung für die Berechnungsmöglichkeit $3_{s,1}^{\text{nk}}$ für einen allgemein verteilten Nachfrageschock nicht angegeben werden, da auch hier eine Antizipation des Nachfrageschocks nicht möglich ist und deshalb nicht der

¹⁷⁵ Der Nachfrageschock ϵ kann nur dann gut durch z_M antizipiert werden, wenn die Verteilungsfunktion des Nachfrageschocks bekannt ist.

optimale Preis bestimmt werden kann. Je nach Verteilungsfunktion ergibt sich der optimale Preis in Abhängigkeit von z_M^* durch

$$p_M^* := p_M(z_M^*) = \begin{cases} \frac{a+bc_M+\mu}{2b} - \frac{\Theta(z_M^*)}{2b} & \text{für eine lineare und} \\ \frac{b}{b-1} \frac{\Theta(z_M^*)(c_M-c_u)-\Omega(z_M^*)(c_M+c_o)-\mu}{\Theta(z_M^*)-\mu} & \text{für eine multiplikative} \end{cases}$$

Nachfragefunktion mit $\Omega(z_M^*) := \int_A^{z_M^*} (z_M^* - \bar{\epsilon}) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon}$ und $\Theta(z_M^*) := \int_{z_M^*}^B (\bar{\epsilon} - z_M^*) f(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon}$.

Die Antizipation des Nachfrageschocks wird für beide Nachfragefunktionen mit Hilfe von

$$z_M^* \mapsto [1 - F(z_M^*)] = \frac{(c_M + c_o)}{(p_M(z_M^*) + c_u + c_o)}$$

berechnet.

Die genannten Berechnungsmöglichkeiten wurden mit Hilfe von sechs Zahlenbeispielen illustriert. Der Nachfrageschock unterlag in diesen Beispielen einer Normalverteilung. Bei beiden Nachfragefunktionen konnten im Vergleich zu Berechnungsmöglichkeit $1_{s,1}^{\text{nk}}$ die simulierten Deckungsbeiträge durch Verwendung der Berechnungsmöglichkeiten $2_{s,1}^{\text{nk}}$ und $3_{s,1}^{\text{nk}}$ sukzessiv gesteigert werden, wobei das Steigerungspotenzial abhängig von den gewählten Parameterwerten war. Eine solche Steigerung kann insbesondere dann erzielt werden, wenn das Verhältnis der Kosten von entgangenem Deckungsbeitrag und dem Ausgleich von Fehlmengen zu den Kosten der Vernichtung hoch ist und der Nachfrageschock stark von der Kernnachfrage abweicht.