

Abbildungsverzeichnis

1.1	Niederdimensionale und äquidimensionale Diskretisierung von Kluft und Matrix (nach Neunhäuserer [48]). Links oben: Kluft als 1-D Stabelemente, links unten: mögliche Gradienten bei niederdimensionaler Kluft-Diskretisierung, keine reinen Kluftknoten, rechts oben: Kluft als 2-D Vierecke, rechts unten: mögliche Gradienten bei äquidimensionaler Diskretisierung, reine Kluftknoten	12
2.1	Mittlere (---) und tatsächliche (—) Bahnlinien eines Flüssigkeitsteilchens in einem porösen Medium	14
3.1	Einzelkluft	26
3.2	Kluftnetzwerk	27
3.3	Kluftkreuzung	28
3.4	Ausgangszерlegung $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$	29
3.5	Gitter nach zweimaliger anisotroper Verfeinerung in der Kluft $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_{02}$	30
3.6	Anisotrope Verfeinerung eines Vierecks	31
3.7	Rote Verfeinerung eines Dreiecks (links) und eines Vierecks (rechts)	31
3.8	Grüne Verfeinerung eines Dreiecks	32
3.9	Gitter nach zweimaliger anisotroper Verfeinerung in der Kluft und einmaliger uniformer Verfeinerung in der Matrix $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{Q}_{12}$	32
3.10	Adaptive Verfeinerung am Kluft-Matrix-Übergang, ein markiertes Matrix-Element	33
3.11	Skalierung	33
3.12	Bilineare Transformation eines Referenzrechtecks auf ein Trapez	34
3.13	Vom Trapez zum Finiten Element	37
3.14	Makroelemente $Q \in \mathcal{Q}_{j0}$ und $Q_c \in \mathcal{Q}_{j0}$	42
3.15	Hierarchische Gebietszerlegung	44
3.16	Abspaltung des Interfaceraums	48
3.17	Referenzrechteck	49
3.18	Referenzdreieck	51
3.19	Hierarchische Zerlegung	63
3.20	Grobgittersuchrichtung / zusätzlicher Glättungsschritt	65
4.1	h_1 und h_2 bei einem anisotropen Rechteck	72
4.2	h_1 und h_2 bei einem anisotropen Parallelogramm bzw. Trapez	72
5.1	Vernetzung mit ART. Links: Vernetzung mit konstanter Dichtefunktion. Rechts: feinere Vernetzung entlang der Klüfte (nach Neunhäuserer [48])	80

5.2	Vernetzung der Klüfte. Links: niederdimensional mit 1D-Elementen. Mitte, Rechts: äquidimensional mit Viereckselementen (nach Neunhäuserer [48])	81
5.3	Struktur des Programmsystems MUFTE-UG, nach Neunhäuserer [48]	82
5.4	Gitter des Interface- und Matrixproblems	85
5.5	Das Gitter in der Kluft	85
5.6	Verkettete Liste der Kanten quer zur Kluftichtung	86
5.7	Struktur eines Eintrags in der Kantenliste	87
5.8	Basisfunktion des Interfaceproblems an der Kluft (\cdots), Basisfunktion des Interfaceproblems auf einem Kluftelement ($-$), Beispiel in 1-D	87
5.9	Knoten eines Matrixelementes in einer Kluftkreuzung	88
5.10	Liste der Eckknoten einer Kluftkreuzung (links) und der gegenüberliegenden Knoten an der Einzelkluft (rechts) für die Assemblierung der Einträge in der Steifigkeitsmatrix des Matrixproblems	88
5.11	Links: \times Interpolationswerte, \bullet Matrixwerte, rechts: \times Matrix- und Interpolationswerte, \circ Gesamtlösung	89
5.12	Übersicht der Listen-Funktionen	89
5.13	Datenstrukturen für Kanten, Knoten	90
5.14	Datenstrukturen für Kreuzungblöcke und Linien	91
5.15	Teilraumkorrektur-Algorithmus	93
5.16	Knoten eines Matrixelementes in einem Kluftende	94
5.17	Verschiedene Möglichkeiten eines Kluftendes: langes Dreieck (links) kurzes Dreieck (rechts)	94
6.1	Modellaufbau für Strömungsberechnung mit hierarchischer Gebietszerlegung . .	96
6.2	Trianguliertes Gebiet mit zwei sich schneidenden Klüften (Grobgrid des Matrixproblems (links) und Lösung für $K(x) = k_0 = 1$ (rechts)	98
6.3	Konvergenzraten in Abhängigkeit von der Kluftbreite ε (links) für $K(x) = k_0 = 1.0$ und $n_{jk} = 60893$, der hydraulischen Leitfähigkeit in der Kluft k_0 (Mitte) für $\varepsilon = 10^{-5}$ und $n_{jk} = 60893$ und der Verfeinerungstiefe in der Gesteinsmatrix j (rechts) für $\varepsilon = 10^{-5}(\cdots)$ bzw. $\varepsilon = 10^{-1}(-)$ und $K(x_M) = 1.0, k_0 = 10^6$	98
6.4	Grobgrid mit Trapezen in einer Kluft und Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von der Abweichung von einem Parallelogramm (s_Q) für verschiedene Kluftweiten mit $n_{jk} = 60893$ und $K(x_M) = k_0 = 1.0$	100
6.5	Konvergenzraten in Abhängigkeit von der Kluftbreite ε (links) für $K(x) = k_0 = 1.0$ und $n_{jk} = 60893$, der hydraulischen Leitfähigkeit in der Kluft k_0 (Mitte) für $\varepsilon = 10^{-5}$ und $n_{jk} = 60893$ und der Verfeinerungstiefe in der Gesteinsmatrix j (rechts) für $\varepsilon = 10^{-5}(\cdots)$ bzw. $\varepsilon = 10^{-1}(-)$ und $K(x_M) = 1.0, k_0 = 10^6$	100
6.6	Konvergenzvergleiche verschiedener Mehrgitterverfahren für $n_{jk} = 24357$ und $K(x_M) = k_0 = 1.0$ (links) und Konvergenzverhalten des algebraischen Mehrgitterverfahrens in Abhängigkeit von der Abweichung von einem Parallelogramm (s_Q) für verschiedene Kluftweiten mit $n_{jk} = 23841$ und $K(x_M) = k_0 = 1.0$ (rechts)	101
6.7	Trianguliertes Gebiet mit sechs sich schneidenden Klüften :ART-Grobgrid des Matrixproblems(links) und Lösung für $K(x) = 10^{-9}, k_0 = 10^{-2}$ und $\varepsilon = 10^{-6}$. . .	103

6.8	Trianguliertes Gebiet mit sechs sich schneidenden Klüften (Grob- gitter des Matrixproblems(links), Konvergenzraten für ein gröberes und ein feines grob- gitter in Abhängigkeit von der Kluftweite ε für $K(x_M) = k_0 = 10^9$ und $n_{jk} = 15077$ bzw. $n_{jk} = 28237$	103
6.9	Trianguliertes Gebiet mit sechs sich schneidenden Klüften nach einer uniformen und drei adaptiven Verfeinerungen	105
7.1	Kluftende	107
7.2	Mehrfachkreuzung	108

Tabellenverzeichnis

1.1 Einteilung von Gesteinen bezüglich Wasserdurchlässigkeit und Wasserspeicherfähigkeit	7
6.1 Ergebnisse der adaptiven Berechnungen für das Kluftnetzwerk	105

Literaturverzeichnis

- [1] C. Adam, W. Gläßer und B. Hölting. *Hydrogeologisches Wörterbuch*. Enke im Georg Thieme Verlag, 2000.
- [2] R.A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- [3] M. Ainsworth und J. Oden. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142(1–2):1–88, 1997.
- [4] H.W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer–Verlag, 1999.
- [5] T. Apel. A note on anisotropic interpolation error estimates for isoparametric quadrilateral elements. Forschungsbericht, Technische Universität Chemnitz–Zwickau, 1996. Sonderforschungsbereich 393.
- [6] I. Babuška und W.C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 15:736–754, (1978).
- [7] I. Babuška und W.C. Rheinboldt. A posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12:1597–1615, (1978).
- [8] R.E. Bank, T.F. Dupont und H. Yserentant. The Hierarchical Basis Multigrid Method. *Numerische Mathematik*, 52:427–458, 1988.
- [9] R.E. Bank und A. Weiser. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Math. Comp.*, 44:283–301, (1985).
- [10] A. Barinka, T. Barsch, P. Charton, A. Cohen, S. Dahlke und W. Dahmen. Adaptive wavelet schemes for elliptic problems — implementation and numerical experiments. *SIAM J. Sci. Comput.*, 23(3):910–939, 2001.
- [11] P. Bastian, K. Birken, K. Johannsen, S. Lang, K. Eckstein, N. Neuss, H. Rentz Reichert und C. Wieners. UG – A Flexible Software Toolbox for Solving Partial Differential Equations. *Computing and Visualization in Science*, 1(1):27 – 40, 1997.
- [12] P. Bastian, Z. Chen, R. Ewing, R. Helmig, H. Jakobs und V. Reichenberger. Numerical Simulation of Multiphase Flow in Fractured Porous Media. In Chen, Z. and R. Ewing and Shi, Hrsg., *Lecture Notes in Physics*. Springer Verlag, Tokyo, Berlin, New York, 2000.
- [13] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Elsevier, 1972.
- [14] D. Braess. Towards Algebraic Multigrid for Elliptic Problems of Second Order. *Computing*, 55:379 – 393, 1995.

- [15] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer, 1997.
- [16] J.H. Bramble und X. Zhang. Uniform convergence of the V-cycle for an anisotropic problem. *Mathematics of Computation*, 70(234):453–470, 2001.
- [17] T. Breiting, R. Hinkelmann und R. Helmig. Modeling of Hydrosystems with MUFTE-UG: Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface. In *Forth International Conference on Hydroinformatics*, Iowa, USA, 2000.
- [18] S.C. Brenner und L.R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 1994.
- [19] P.G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1978.
- [20] H. Class. *Numerische Modellierung nicht-isothermer Mehrphasenprozesse in NAPL-kontaminierten porösen Medien*. Mitteilungen Heft 105, Universität Stuttgart, Institut für Wasserbau, Eigenverlag, 2001.
- [21] A. Cohen, W. Dahmen und R. DeVore. Adaptive wavelet methods for elliptic operator equations: convergence rates. *Math. Comput.*, 70(233):27–75, 2001.
- [22] J. Croisé, H. Sheta und R. Helmig. Flow and transport processes in fractured porous media. In *In-Situ Subsurface Remediation Strategies*, Stuttgart, 1995. VEGAS-Symposium.
- [23] J. Croisé, H. Sheta und R. Helmig. Numerical Simulation of NAPL-infiltration and redistribution processes in unsaturated heterogeneous porous media. In Kovar, K. and J. Krásný, Hrsg., *Groundwater Quality: Remediation and Protection (GQ '95)*, 225. IAHS Publication, 1995.
- [24] R. Dautray und J.L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Band 2. Springer-Verlag, 2000.
- [25] P. Deuffhard und A. Hohmann. *Numerische Mathematik I*. W. de Gruyter, 1993.
- [26] P. Deuffhard, P. Leinen und H. Yserentant. Concepts of an adaptive hierarchical finite element code. *Impact Computing Sci. Engrg.*, 1989.
- [27] Dörfler. A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(3):1106–1124, 1996.
- [28] M. Emmert. *Numerische Modellierung nichtisothermer Gas-Wasser Systeme in porösen Medien*. Mitteilungen Heft 92, Universität Stuttgart, Institut für Wasserbau, Eigenverlag, 1996.
- [29] A. Fuchs. Almost Regular Delaunay-Triangulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:4595–4610, 1997.
- [30] A. Fuchs. *Optimierte Delaunay – Triangulierungen zur Vernetzung getrimmter NURBS – Körper*. Dissertation, Universität Stuttgart, Mathematisches Institut A, Shaker – Verlag, 1999.

- [31] S. Gebauer, L. Neunhäuserer, R. Kornhuber, S. Ochs, R. Hinkelmann und R. Helmig. Mehrgittermethoden und adaptive Euler-Lagrange-Verfahren zur Simulation von Strömungs- und Transportprozessen in Kluftaquifersystemen. Forschungsbericht, DFG-Arbeitsbericht, 2001.
- [32] P. Grisvard. *Singularities in boundary value problems*. Springer, 1992.
- [33] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 1996.
- [34] M. Heisig, R. Lieckfeldt, G. Mazurkevich, G. Wittum und G.W.J. Lee. Non steady state descriptions of drug permeation through human stratum corneum. I: The biphasic, brick-and-mortar model. *Pharm. Res.*, 13:421–426, 1996.
- [35] R. Helmig. *Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface*. Springer – Verlag, Heidelberg, 1997.
- [36] R. Helmig, P. Bastian, H. Class, J. Ewing, R. Hinkelmann, R. Huber, H. Jakobs und H. Sheta. Architecture of the modular program system MUFTE-UG for simulating multiphase flow and transport processes in heterogeneous porous media. In H. Thiergärtner, Hrsg., *Mathematische Grundwassermodellierung – unkonventionelle Lösungen und Randbedingungen*, Band 2 von *Mathematische Geologie*. CPress Verlag, Dresden, 1998.
- [37] R. Helmig, P. Bastian, H. Jakobs und V. Reichenberger. Multiphase Multicomponent Processes in Fractured Porous Media. Abschlussbericht des BMBF-Projektes "Weiterentwicklung eines numerischen Modells (MUFTE-UG) zur Simulation von Gas-Wasser-Prozessen in Kluftaquifersystemen", Universität Stuttgart, Institut für Wasserbau, Stuttgart, 2001. to appear.
- [38] A. Hemminger, H. Hötzl und K. Witthüser. 3-D Kluftgenerierung unter Einbeziehung geostatistischer Optimierungsverfahren: Datenerhebung und erste Ansätze. In C. König, Hrsg., *2. Workshop Kluft-Aquifere, September 1998*, S. 37 – 46, 1998.
- [39] R. Hinkelmann, H. Sheta, H. Class und R. Helmig. A comparison of different model concepts for salt water intrusion processes. In F. Stauffer, W. Kinzelbach, K. Kovar und E. Hoehn, Hrsg., *Calibration and Reliability in Groundwater Modelling: Coping with Uncertainty (ModelCARE '99)*, 265, Wallingford, Oxfordshire, UK, 2000. IAHS Publication.
- [40] R. Hinkelmann, H. Sheta, R. Helmig, E.H. Sauter und M. Schlüter. Numerical Simulation of Water-Gas Flow and Transport Processes in Coastal Aquifers. In K. Sato und Y. Iwasa, Hrsg., *Groundwater Updates*, Tokyo, Berlin, New York, 2000. International Symposium 2000 on Groundwater IAHR: New Science and Technology for Sustainable Groundwater Environment, Sonic City, Japan, Springer Verlag.
- [41] B. Hölting. *Hydrogeologie*. ENKE, 1995.
- [42] R. Huber. *Compositional Multiphase Flow and Transport in Heterogeneous Porous Media*. Mitteilungen heft 102, Universität Stuttgart, Institut für Wasserbau, Eigenverlag, 2000.

- [43] R. Huber und R. Helmig. Investigation and simulation of three-phase-flow in porous media. Bericht 2/97, Technische Universität Braunschweig, Institut für ComputerAnwendungen, 1997.
- [44] H. Kobus, B. Barszewski und H.-P. Koschitzky, Hrsg. *Groundwater and Subsurface Remediation*. Springer, 1996.
- [45] G. Kunert. An a posteriori residual error estimator for the finite element method on anisotropic tetrahedral meshes. *Numerische Mathematik*, 2000.
- [46] J.L. Lions und E. Magenes. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I*. Springer-Verlag, 1972.
- [47] C. Louis. *Strömungsvorgänge in klüftigen Medien und ihre Wirkung auf die Standsicherheit von Bauwerken und Böschungen im Fels*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1967.
- [48] L. Neunhäuserer. *Diskretisierungsansätze zur Modellierung von Strömungs- und Transportprozessen in geklüftet-porösen Medien*. Dissertation, Universität Stuttgart, Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen, 2002.
- [49] L. Neunhäuserer, A. Fuchs, A. Hemminger und R. Helmig. Flow and transport processes in fractured porous media. In *XII International Conference on Computational Methods in Water Resources*, Band 2, S. 101 – 108, Crete, Greece, June 1998.
- [50] L. Neunhäuserer, S. Gebauer, R. Hinkelmann, R. Kornhuber und R. Helmig. Mehrgittermethoden und adaptive Diskretisierungsverfahren zur Simulation von Strömungs- und Transportprozessen in Kluftaquiferen. In O. Kolditz, W. Zielke, P. Wriggers, H.-J. Dürbaum und M. Wallner, Hrsg., *3. Workshop Kluftaquifere "Gekoppelte Prozesse in Geosystemen"*, Bericht 60/2000, Universität Hannover, 2000.
- [51] L. Neunhäuserer, A. Hemminger und R. Helmig. Influence of Fracture – Matrix – Interaction on Flow and Transport Processes and the Resulting Effective Parameters in Fractured Porous Systems. In *Hydraulic Engineering for Sustainable Water Resources Management at the Turn of the Millennium*, Graz, Austria, August 1999. XXVIII IAHR congress. CD – Rom.
- [52] L. Neunhäuserer, A. Hemminger und R. Helmig. Festgestein-Aquiferanalog: Experimente und Modellierung, Teilprojekt 3: Einsatz von diskreten Modellansätzen. Arbeitsbericht 11/1997 – 03/2000, DFG – Projekt Nr. He2531/1 - - 2, He2531/1 – 3, Institut für ComputerAnwendungen im Bauingenieurwesen, Technische Universität Braunschweig, 2000.
- [53] M. Petzold. *Regularity and error estimators for elliptic problems with discontinuous coefficients*. Dissertation, Freie Universität Berlin, Mai 2001.
- [54] A. Quarteroni und A. Veneziani. Modeling and simulation of blood flow problems. In M.-O. Bristeau et al., Hrsg., *Computational science for the 21st century*, S. 369–379. Wiley & Sons, 1997.

- [55] R. Schneiders. *Remeshing-Algorithmen für dreidimensionale Finite-Element-Simulationen von Umformprozessen*. Dissertation, RWTH Aachen, 1993.
- [56] K. G. Siebert. An a posteriori error estimator for anisotropic refinement. *Numerische Mathematik*, 73(3):373–398, 1996.
- [57] A. Silberhorn-Hemminger. *Modellierung von Kluftaquifersystemen: Geostatistische Analyse und deterministisch – stochastische Kluftgenerierung*. Dissertation, Universität Stuttgart, Institut für Wasserbau, Eigenverlag, 2001.
- [58] B. Singhal und R. Gupta. *Applied Hydrogeology of Fractured Rocks*. Kluwer Academic Publisher, 1999.
- [59] G. Sreenivasa, J. Gellermann, B. Rau, J. Nadobny, P. Schlag, P. Deuffhard, R. Felix und P. Wust. Clinical Use of the Hyperthermia Treatment Planning System Hyperplan to Predict Effectiveness and Toxicity. *Int. J. Oncology Biol. Phys.*, 55(2):407–419, 2003.
- [60] J. Stoer und R. Bulirsch. *Einführung in die Numerische Mathematik II*. Springer-Verlag, 1978.
- [61] W.A. Strauss. *Partielle Differentialgleichungen*. Vieweg Verlag, 1992.
- [62] K. Stüben und J.W. Ruge. Algebraische Mehrgittermethoden. In S. McCormick, Hrsg., *Multigrid Methods*, Frontiers in Applied Mathematics. 3. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1987.
- [63] R. Verfürth. A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. *J. Comput. Appl. Math.*, 50:67–83, 1994.
- [64] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques*. Wiley-Teubner, (1996).
- [65] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer Verlag, 1997.
- [66] C. Wieners. The implementation of adaptive multigrid methods for finite elements. Preprint Nr. 97/12, Universität Stuttgart, Institut für Computeranwendungen, 1997.
- [67] K. Witthüser und T. Himmelsbach. Erhebungsmethoden von Kluftparametern für eine stochastische Kluftnetzgenerierung. In *Grundwasser*, Nummer 3 aus 3, S. 103–109. 1998.
- [68] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1982.
- [69] J. Xu. Iterative methods by space decomposition and subspace correction. *SIAM Review*, 34:581–613, 1992.
- [70] H. Yserentant. On the multi-level splitting of finite element spaces. *Numer. Math.*, 49:379–412, 1986.
- [71] H. Yserentant. Old and new convergence proofs for multigrid methods. *Acta Numerica*, 1993.
- [72] O.C. Zienkiewicz und J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987.

