7 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit ein hierarchisches Gebietszerlegungsverfahren zur Berechnung der Strömung in speziellen Geometrien mit Koeffizientensprüngen und großen Unterschieden in den Ausdehnung der Fließwege und des umgebenden Materials vorgestellt. Das Verfahren konvergiert unter gewissen Voraussetzungen unabhängig von der Verfeinerungstiefe, der Kluftbreite und dem Sprung in den Koeffizienten. Die Konvergenzraten hängen nur von der Ausgangszerlegung $\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{Q}_0$, der Abweichung des Trapeznetzes innerhalb der Klüfte von Parallelogrammen und einer Bedingung, daß die Anisotropie innerhalb der Klüfte nicht quer zur Kluftrichtung auftritt, ab. Algebraische Mehrgitterverfahren zeigen zwar ein vergleichbares Konvergenzverhalten, eine theoretische Absicherung gibt es für diese Verfahren aber nicht.

Anhand eines Modellproblems und eines Kluftnetzwerkes konnten wir die theoretischen Ergebnisse bestätigen. Es zeigt sich, daß für eine Vernetzung mit Fast–Parallelogrammen innerhalb der Klüfte das Konvergenzverhalten des neuen hierarchischen Gebietszerlegungsverfahrens auch für sehr schmale Klüfte robust ist. Das Verfahren konvergiert mit Konvergenzraten, die in der Größenordnung der Konvergenzraten von klassischen Mehrgitterverfahren für das reduzierte Problem (Kluftweite $\varepsilon = 0$) liegen. Wir haben damit für eine neue Klasse von vollständig überlappenden Gebietszerlegungsverfahren theoretisch und praktisch Mehrgittereffizienz für eine Klasse von Problemen gezeigt, für die es bislang kein vergleichbar theoretisch abgesichertes Verfahren gegeben hat.

Der Ansatz der hierarchischen Gebietszerlegung bietet eine Reihe von Möglichkeiten der Fortführung und Weiterentwicklung. So ist die Wahl von Diskretisierungsverfahren denkbar, die die Geschwindigkeit als Ableitung des Drucks besser approximieren, wie z.B. gemischt Hybride Verfahren oder Discontinuous Galerkin–Verfahren. Des weiteren bietet sich eine heterogene Modellierung in Kluft und Matrix an. So ist durch die großen Unterschieden in den Geschwindigkeiten in Kluft und Matrix die Wahl von voneinander unabhängigen Gittern, Diskretisierungen und sogar Modellgleichungen auf den verschiendenen Teilgebieten denkbar.

Eine Übertragung des Ansatzes auf den Transport in geklüftet porösen Medien verspricht den flexiblen Einsatz von speziellen, den besonderen Eigenschaften des Problems in den Teilproblemen angepaßten Verfahren.

Als mögliche Verallgemeinerungen der Kluftgeometrie für die hierarchische Gebietszerlegung werden wir im folgenden kurz auf Kluftenden und Kreuzungen von mehr als zwei Klüften eingehen.

Kluftenden Die in Abschnitt 3.5 vorgestellte und für das hierarchische Zweilevel–Verfahren implementierte Lösung für die Kluftenden birgt einige Schwierigkeiten bzw. Nachteile. So wird bei jeder Verfeinerung quer zur Kluftrichtung auch eine Verfeinerung in Kluftrichtung nötig, um hängende Knoten zu vermeiden (siehe Abschnitt 3.2.1). Da die Elemente innerhalb

der Klüfte stark anisotrop sind, d.h. sehr lang und schmal sind, die Hauptströmungsrichtung aber in Richtung der längeren Kanten der Elemente zeigt, wird eine Verfeinerung der längeren Kanten der Kluftelemente meist ausreichen (siehe Abschnitt 6.2). Bei der roten Verfeinerung der Dreiecke in den Kluftenden wird also eine nicht von der Regularität des Problems geforderte Verfeinerung parallel zur Kluftachse erzwungen. Dies hat eine Verfeinerung der gesamten Kluft zur Folge (siehe Abschnitt 3.2.1). Damit werden unnötig viele Freiheitsgrade eingefügt.
Abhilfe für dieses Problem könnte eine spezielle Verfeinerung der Kluftenden bringen, bei der die Verfeinerung in Bezug auf das gesamte Kluftende und nicht auf die einzelnen Elemente des Kluftendes betrachtet wird. Die Verfeinerung ist in Abbildung 7.1 dargestellt. Dabei wird die quer zur Kluftrichtung verlaufende Seite des Kluftendes bei Verfeinerung geteilt und mit der Spitze des Kluftendes verbunden und ähnlich wie bei der anisotropen Verfeinerung von Vierecken die gegenüberliegenden Abschnitte der beiden in Kluftrichtung gehenden Seiten halbiert und die neuen Knoten verbunden.

Eine solche speziell auf die hier betrachteten Kluft–Matrix–Systeme zugeschnittene

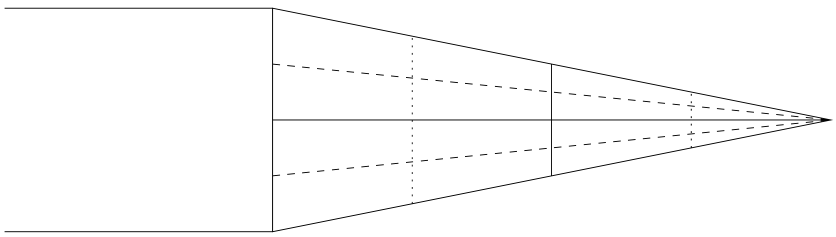

Abbildung 7.1: Kluftende

Verfeinerung von Dreieckeselementen in Drei– und Vierecke ist in UG nicht implementiert und müßte ergänzt werden. Auch die speziellen Datenstrukturen für die Assemblierung der hierarchischen Steifigkeitsmatrix und die hierarchische Zerlegung müßten entsprechend erweitert werden.
Der Netzgenerator ART ist für niederdimensionale Klüfte entwickelt worden. Das zieht insbesondere an den Kluftenden einige Nachteile nach sich. So lassen sich z.Z. lange spitze Dreiecke an den Kluftenden nicht vermeiden (siehe Abschnitt 5.3.3). Numerisch vorteilhaft wäre sicher eine Vermeidung von anisotropen Dreiecken durch eine Verdichtung der Elemente um die Kluftenden. Dazu muß der Netzgenerator entsprechend erweitert werden. Generell könnte erwägt werden, ob ein Netzgenerator für äquidimensionale Klüfte zu besseren Grobgittern führt.

Mehrfach–Kluftkreuzungen Wir haben in Abschnitt 3.1 vorausgesetzt, daß eine Kluftkreuzung von nicht mehr als zwei Klüften gebildet wird. In der Praxis werden auch Kreuzungen von mehr als zwei Klüften oder in andere Klüfte oder Kluftkreuzungen einmündende Klüfte auftreten (siehe z.B. Abb. 7.2). Die Vernetzung der Kreuzung stellt in diesen Fällen ein nicht–triviales Problem dar. Für solche Kreuzungen muß der für niederdimensionale Klüfte geschriebene Netzgenerator ART mit dem Erweiterungsmodul FRACMESH für äquidimensionale Klüfte um eine Optimierung der Vernetzung der Kreuzungen ergänzt werden.

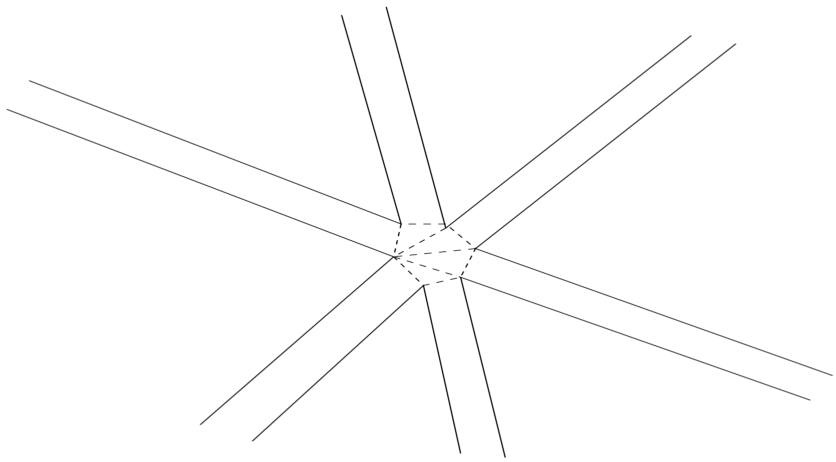

Abbildung 7.2: Mehrfachkreuzung