

4 Ein adaptives Multilevelverfahren

Bedingt durch den Regularitätsverlust durch die Koeffizientensprünge weist die Lösung des kontinuierlichen Problems (2.20) nicht in allen Bereichen des Rechengebietes Ω gleiche Regularität auf. Wird global eine Schrittweite gewählt, die sich an den Anforderungen von Regionen mit nicht glatter Lösung orientiert, so wird in Regionen mit glatter Lösung die Diskretisierung unnötig fein sein, und der Rechenaufwand zur Lösung des Gleichungssystems (3.8) wird größer als von der Regularität des Problems erzwungen.

Gerade bei Kluft-Matrix-Systemen mit ihrer im allgemeinen stark heterogenen Struktur werden bei uniformer Verfeinerung oft in den ausgedehnten homogenen Bereichen in der Gesteinsmatrix unnötig viele Freiheitsgrade eingefügt.

Ziel jeden adaptiven Verfahrens ist die Berechnung einer Lösung von geforderter Genauigkeit mit möglichst geringem Rechenaufwand. Dazu kann das Gitter oder die Ordnung des Lösungsverfahrens angepaßt werden. Wir haben ein spezielles Verfahren zur Berechnung einer Lösung der partiellen Differentialgleichung für die stationäre Strömung (2.17) unter den besonderen geometrischen Gegebenheiten in geklüftet porösen Medien mit Finiten Elementen 1. Ordnung vorgestellt. Hier wird also das Gitter adaptiv den Genauigkeitsanforderungen angepaßt.

Die Finite-Elemente-Methode berechnet eine Approximation der kontinuierlichen Lösung in einem endlich dimensionalen Funktionenraum. Dieser Funktionenraum S_{jk} wird von „lokalen“ Funktionenräumen gebildet, welche üblicherweise aus Polynomen von niedriger Ordnung bestehen, auf Elementen einer Zerlegung $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$ des Gebietes Ω . Die Zerlegung in Drei- und Vierecke wird im folgenden auch als Gitter bezeichnet.

Ausgehend von einer approximativen Lösung p_{jk} in einem Finite-Elemente-Raum S_{jk} der diskretisierten schwachen Formulierung (3.4) auf einem groben Gitter, werden wir im allgemeinen beobachten, daß der Fehler $e_{jk} = p - p_{jk}$ in der Energienorm in einigen Regionen des Rechengebietes groß sein wird und in anderen klein. Bei elliptischen Differentialgleichungen führt die Eigenschaft des Differentialoperators, lokal auf lokale Störungen zu reagieren, dazu, daß ein lokal feineres Gitter auch eine lokal genauere Approximation nach sich zieht. Dies ist eine direkte Folge aus dem Abklingverhalten der Greenschen Funktion der klassischen Lösung der Randwertaufgabe (2.17) (siehe z.B. Hackbusch [33][S. 33ff], Strauß [61][S. 193ff]). Der Genauigkeitsgewinn bei Verfeinerung wird dabei in Regionen, wo der Fehler schon auf dem groben Gitter klein war, gering sein, während er in Regionen mit großem lokalen Fehler auf dem groben Gitter groß sein wird. Adaptive Verfeinerung bedeutet in Regionen mit kleinem Fehler, nicht unnötig viele Freiheitsgrade einzufügen. Das Gitter soll also nur in Regionen mit großem Fehler verfeinert werden. Dazu muß eine Entscheidung getroffen werden, welches die Regionen mit großem lokalen Fehler sind und welche Regionen kleinen lokalen Fehler haben.

Da die exakte Lösung p der kontinuierlichen schwachen Formulierung (2.20) im allgemeinen nicht bekannt ist, besteht an dieser Stelle die Schwierigkeit darin, festzustellen, wo der Fehler

$\|e_{jk}\|$ groß ist und wo klein. Dazu kann nur Information über die approximative Lösung p_{jk} des diskretisierten Problems (3.4) auf dem zu verfeinernden groben Gitter herangezogen werden. Auf der Grundlage dieser Information schätzen a posteriori Fehlerschätzer den lokalen Fehler auf jedem einzelnen Element des aktuellen Gitters und ein Element wird zur Verfeinerung markiert, wenn der geschätzte Elementfehler zu groß ist.

Vorteile dieser Vorgehensweise sind, daß keine Vorabinformation über die Beschaffenheit der Lösung im Gebiet notwendig ist, die Finite-Elemente-Strukturen erhalten bleiben und der Rechenaufwand im allgemeinen reduziert werden kann.

An dieser Stelle stellt sich noch die Frage, nach welchen Kriterien ein Element zur Verfeinerung ausgesucht wird. Eine einfache Minimierung des Fehlers $\|e_{jk}\|_{H^1(\Omega)} = \|p - p_{jk}\|_{H^1(\Omega)}$ führt zu $h_T \rightarrow 0$ für alle Elemente T , daher wird im allgemeinen die Anzahl der Knoten beschränkt oder eine zu erreichende Genauigkeit vorgegeben. Unter allen Gittern mit höchstens dieser maximalen Anzahl von Knoten bezeichnet man dasjenige als optimal, daß den kleinsten Fehler $\|e_{jk}\|_{H^1(\Omega)}$ liefert.

Babuška und Rheinbold [6] und [7] argumentieren heuristisch, daß auf einem optimalen Gitter der Fehler gleichmäßig über das gesamte Gebiet verteilt ist, wenn also gilt:

$$\|p - p_{jk}\|_{H^1(\Omega),T} = \alpha = \text{const.} \quad \forall T \in \mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}.$$

Diese Aussage wurde auch in zahlreichen Anwendungsbeispielen experimentell bestätigt. Eine optimale adaptive Verfeinerung muß also dafür sorgen, daß am Ende der Berechnung der Fehler auf jedem Element der Zerlegung etwa gleich groß ist. Dies wird durch folgende Vorgehensweise angestrebt: kann der lokale Fehler auf jedem Element T geschätzt werden, so wird ein Element zur Verfeinerung markiert, wenn der lokale Fehler auf diesem Element von dem durchschnittlichen Fehler aller Elemente um einen vorgegebenen Faktor abweicht. Für ein adaptives Verfahren zeigt Dörfler die Konvergenz für die Poisson-Gleichung [27]. Barinka et al. [10] (siehe auch Cohen et al. [21]) zeigen Quasioptimalität eines adaptiven Wavelet-Algorithmus für elliptische Probleme, d.h. der Fehler einer adaptiven Wavelet-Approximationslösung verhält sich asymptotisch wie der kleinstmögliche Fehler der durch Linearkombination der entsprechenden Anzahl von Wavelets erreicht werden kann. Die Übertragung dieser Ergebnisse auf Finite Elemente ist in Arbeit (Stevenson).

Es existieren eine Reihe von unterschiedlichen Methoden, den lokalen Fehler auf den einzelnen Elementen zu schätzen. Sie sind in einer kurzen Übersicht zu Beginn des folgenden Abschnittes 4.1 über die gängigsten Fehlerschätzer angegeben. Die in dieser Arbeit verwendeten Residuenfehlerschätzer für isotrope und anisotrope Elemente stellen wir in den darauf folgenden Abschnitten 4.1.1 und 4.1.2 detaillierter vor.

Für ein stationäres Problem bildet dann folgende Basis-Iteration die Grundlage eines adaptiven Finite-Elemente-Programms:

1. Assembliere und löse das diskrete System auf einem vorgegebenen Gitter.
2. Berechne eine Fehler-Schätzung für jedes Element T der aktuellen Zerlegung $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$.
3. Passe wenn nötig das Gitter an, so daß der Fehler möglichst gleichmäßig über das Gebiet verteilt ist.
4. Wiederhole Schritt 1 – 4 solange bis das geforderte Abbruchkriterium erfüllt ist.

Die für Punkt 1 angewendeten Methoden wie Finite Elemente und Mehrgitterverfahren haben wir in Kapitel 3 beschrieben. Geeignete Methoden zum Schätzen des lokalen Fehlers auf jedem Element T der aktuellen Zerlegung $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$ in Punkt 2 werden in den folgenden Abschnitten vorgestellt. Wie die Anpassung des Gitters in Schritt 3 geschieht, so daß die für die hierarchische Gebietszerlegung notwendige Struktur des Gitters erhalten bleibt und die Elementgeometrie nicht degeneriert, wurde in Abschnitt 3.2 beschrieben. Die Entscheidungsfindung über einen Abbruch des adaptiven Algorithmus wird in Abschnitt 4.2 erläutert. Schließlich wird der vollständige adaptive Multilevel-Algorithmus in Abschnitt 4.4 zusammengefaßt.

4.1 A posteriori Fehlerschätzer

Für die a posteriori-Schätzung der lokalen Fehler stehen im wesentlichen die folgenden Ansätze zur Verfügung (vergleiche Braess [15][S. 154]):

1. *Residuale Schätzer*: Der Fehler wird über die Größe des Residuums im Funktionenraum und der Sprünge des Gradienten der diskreten Approximation p_{jk} über die Elementkanten abgeschätzt (Babuška und Rheinbold, 1978 [6] und [7]). Eine ausführlichere Beschreibung dieser Form der Fehlerschätzung folgt in den nächsten Abschnitten.
2. *Schätzung über ein lokales Neumann-Problem*: Löse auf jedem Element ein lokales Variationsproblem. Der Ansatzraum enthält Polynome, deren Grad um eins höher ist als im zugrundeliegenden Finite-Elemente-Raum. Die Energienorm liefert den Schätzer (Bank und Weiser, 1985 [9]).
3. *Schätzung über ein lokales Dirichlet-Problem*: Für jedes Element wird ein Variationsproblem auf der Umgebung des Elementes T gelöst, dies liefert die lokale Lösung z . Der Ansatzraum wird wieder im Vergleich zum eigentlichen Finite-Elemente-Problem durch Erhöhung des Polynomgrades vergrößert. Anschließend wird die Norm der Differenz $\|z - p_{jk}\|_{H^1(\omega_T)}$ als Schätzer benutzt (Babuška und Rheinbold, 1978 [7]).
4. *Schätzung durch Mittelung*: Konstruiere eine stetige Approximation σ_{jk} des (für lineare Finite Elemente im allgemeinen unstetigen) Gradienten σ_{jk} der Finite Elemente Lösung p_{jk} des diskreten Problems (3.4) durch Mittelung. Definiere σ_{jk} auf den Elementen durch Interpolation. Die Differenz von σ_{jk} und dem Gradienten von p_{jk} liefert einen Indikator (Zienkiewicz und Zhou, 1987 [72]).
5. *Hierarchische Schätzer*: Es wird die Differenz der approximativen Lösung zu einer Finite-Elemente-Approximation in einem erweiterten Ansatzraum unter Ausnutzung einer sogenannten verschärften Cauchy-Schwarz-Ungleichung geschätzt (Deuffhard, Leinen und Yserentant, 1990 [26]).

Wir verwenden in dieser Arbeit einen Residuen-Fehlerschätzer, da für diese Form der Fehlerschätzung der lokalen Element-Fehler keine Ansatzfunktionen höheren Polynomgrades benötigt werden und das in Kapitel 3.4.1 vorgestellte Verfahren auf Finite-Elemente-Ansatzfunktionen 1. Ordnung aufbaut.

Für isotrope Zerlegungen existiert eine gut ausgereifte Theorie über diese Art Fehlerschätzer (siehe z.B. Verfürth [64] und Ainsworth, Oden [3]). Für anisotrope Probleme haben G. Kunert [45] und K. Siebert [56] Residuen–Fehlerschätzer vorgestellt. In den folgenden Abschnitten werden wir also zunächst einen Fehlerschätzer für die isotropen Dreieckselemente in der Gesteinsmatrix (Abschnitt 4.1.1) und anschließend einen Residuen–Fehlerschätzer für die anisotropen Viereckselemente in den Klüften (Abschnitt 4.1.2) vorstellen.

4.1.1 Residuenfehlerschätzer für isotrope Dreieckselemente

Ausgangspunkt für die Schätzung der lokalen Fehler durch die geeignet gewichtete Energienorm des Residuums ist die Beobachtung, daß die Norm des Fehlers im Lösungsraum des kontinuierlichen Problems (2.20) gleich der Energienorm des Residuums im Dualraum des Lösungsraums ist (siehe Verfürth [64]).

Der Fehlerschätzer soll diese Eigenschaft reproduzieren, d.h. der tatsächliche Fehler $\|e_{jk}\|$ soll durch die Fehlerschätzung η von oben und unten bis auf eine multiplikative Konstante beschränkt sein. Die Beschränktheit nach oben

$$\|e_{jk}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\eta$$

bedeutet dabei die Zuverlässigkeit, die Beschränktheit nach unten

$$\|e_{jk}\|_{H^1(\Omega)} \geq c\eta$$

die Effizienz des Fehlerschätzers η . Erstrebenswert sind dabei Konstanten C und c nahe 1.

In Kapitel 3.2 haben wir mit \mathcal{N}_{jk} die Menge der Freiheitsgrade des Finite–Elemente–Raums S_{jk} bezeichnet. Im Fall von Finiten Elementen 1. Ordnung und einem skalaren Problem ist das gleichbedeutend mit der Menge der Knoten der Zerlegung $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$. Für ein Element T der Zerlegung $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$ führen wir nun zusätzlich die Bezeichnung $\mathcal{N}(T)$ für die Menge der Knoten des Elementes T ein.

Die Menge der Kanten des Elementes $T \in \mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{E}(T)$, und $\mathcal{E}_{jk} := \bigcup \mathcal{E}(T)$ sei die Menge aller Kanten der Zerlegung $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$. Die Teilmenge der Kanten, die mit dem Neumannrand Γ_N des Gebietes Ω zusammenfallen, bezeichnen wir mit $\mathcal{E}_{jk,N} := \{E \in \mathcal{E} \mid E \subset \Gamma_N\}$ und die Kanten auf dem Dirichletrand mit $\mathcal{E}_{jk,D} := \{E \in \mathcal{E} \mid E \subset \Gamma_D\}$. Also gilt $\mathcal{E}_{jk} = \mathcal{E}_{jk,D} \cup \mathcal{E}_{jk,N} \cup \mathcal{E}_{jk,\Omega}$. Mit jeder Kante $E \in \mathcal{E}_{jk}$ assoziieren wir einen zu E orthogonalen Einheitsvektor n_E . Ist $E \subset \partial\Omega$, so entspricht n_E dem äußeren Normalenvektor.

Es sei

$$\omega_E := \bigcup_{T \in \mathcal{E}(T)} T$$

das durch die an der Kante E anliegenden Elemente gegebene Gebiet.

Für jedes auf T stetige $u \in L^2(\omega_E)$ definieren wir den Sprung von u über die Elementkante E als

$$[u]_E(x) := \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x + tn_E) - \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x - tn_E) \quad \forall x \in E.$$

Da an dieser Stelle die Schrittweite h , also die maximale Kantenlänge der Elemente der Zerlegung nicht für alle Elemente $T \in \mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$ einer Zerlegung gleich ist, betrachten wir im folgenden die lokale Größe h_T in Abhängigkeit von dem Element T . Wir wählen für die

elementbezogene Größe h_T den Durchmesser eines Elementes T , h_E sei die Länge der Kante E und $|T|$ bezeichne das Volumen des Elementes T .

Aus der rechten Seite des Randwertproblems (2.17) erhalten wir mit $F = \rho g f$ die elementbezogene Größe

$$F_T := \frac{1}{|T|} \int_T f \, dx.$$

Der Neumannrand des Randwertproblems (2.17) liefert

$$b_E = \frac{1}{h_E} \int_E b v \, dx \quad \text{für } E \in \mathcal{E}_{j,k,N}.$$

Wir gehen in diesem Abschnitt davon aus, daß das betrachtete Gebiet Ω mit isotropen Dreieckselementen vernetzt ist. Diese Dreiecke bilden die Triangulierung \mathcal{T}_j .

Der Residuen-Fehlerschätzer für ein isotropes Element $T \in \mathcal{T}_j$ ist dann gegeben durch (Verföhrt [63], Babuška und Rheinbold [6] und [7], Verföhrt [64]):

$$\eta_{\Delta,T} := \left\{ h_T^2 \|F_T\|_{L^2(T)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_{j,k,\Omega}} h_E \| [n_E \nabla p_j]_E \|_{L^2(E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_{j,k,N}} h_E \| b_E - n_E \cdot \nabla p_j \|_{L^2(E)}^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.1)$$

Der Fehlerschätzer $\eta_{\Delta,T}$ wurde zuerst von Babuška und Rheinbold in [6] und [7] vorgeschlagen. Wie zuverlässig und effizient der durch (4.1) gegebene Fehlerschätzer ist, darüber gibt der folgende Satz Auskunft. Dabei bezeichnet

$$\omega_T := \bigcup_{\mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}(T') \neq \emptyset} T'$$

mit $T, T' \in \mathcal{T}_j$ das durch das Element T und allen an T anliegenden Elementen T' aufgespannte Teilgebiet von Ω .

Satz 10 *Es sei p Lösung des kontinuierlichen Problems (2.20) und p_j Lösung des diskreten Problems (3.4) auf einer Zerlegung \mathcal{T}_j von Ω in isotrope Dreiecke. Dann existieren zwei Konstanten C, c , die nur von dem kleinsten Innenwinkel der Triangulierung \mathcal{T}_j abhängen, so daß die Abschätzungen*

$$\|p - p_j\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_j} \eta_{\Delta,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_j} h_T^2 \|f - F_T\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{j,k,N}} h_E \|b - b_E\|_{L^2(\Gamma_N)}^2 \right\}^{1/2} \quad (4.2)$$

und

$$\eta_{\Delta,T} \leq c \left\{ \|p - p_j\|_{H^1(\omega_T)} + \sum_{T' \subset \omega_T} h_{T'}^2 \|f - F_{T'}\|_{L^2(T')}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_{j,k,N}} h_E \|b - b_E\|_{L^2(\Gamma_N)}^2 \right\}^{1/2} \quad (4.3)$$

gelten.

Für den Beweis siehe z.B. Verföhrt [64][S.11ff] oder Braess [15][Beweis zu Satz 7.1].

Bemerkung: Für den Fall linearer Finiter Elemente und stückweise konstante daten verschwinden in den Abschätzungen (4.2) und (4.3) von Satz 10 die letzten zwei Terme und der Satz liefert die Effizienz und Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers $\eta_{\Delta,T}$ (4.1) für lineare Finite Elemente.

4.1.2 Residuenfehlerschätzer für anisotrope Elemente

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Zerlegung eines Gebietes Ω in anisotrope Viereckselemente, diese bilden eine Zerlegung \mathcal{Q}_{jk} .

Für die anisotropen Viereckselemente in den Klüften kann der in Abschnitt 4.1.1 beschriebene Fehlerschätzer $\eta_{\Delta,T}$ nicht verwendet werden, da die Größen h_T und h_E für diesen Fall nicht gleichmäßig für alle Elemente $T \in \mathcal{Q}_{jk}$ von der Null weg beschränkt sind. Der hier für die anisotropen Elemente in der Kluft verwendete, von Siebert in [56] vorgestellte Residuen-Fehlerschätzer für anisotrope Gitter stellt eine Verallgemeinerung des Residuen-Fehlerschätzers $\eta_{\Delta,T}$ für isotrope Gitter (4.1) dar. Auch dieser Fehlerschätzer besteht aus einer gewichteten Kombination von Normen lokaler Residuen. Für das anisotrope Gitter müssen nun die Gewichte entsprechend der unterschiedlichen Kantenlängen der Elemente von \mathcal{Q}_{jk} in die verschiedenen Richtungen gewählt werden.

Für ein kantenparalleles Viereckselement $T \subset \mathbb{R}^2$ betrachten wir die zwei verschiedenen

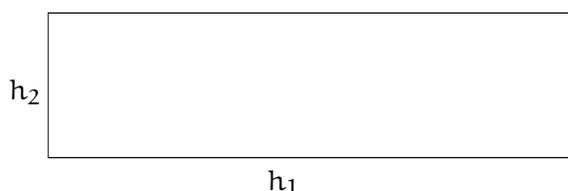


Abbildung 4.1: h_1 und h_2 bei einem anisotropen Rechteck

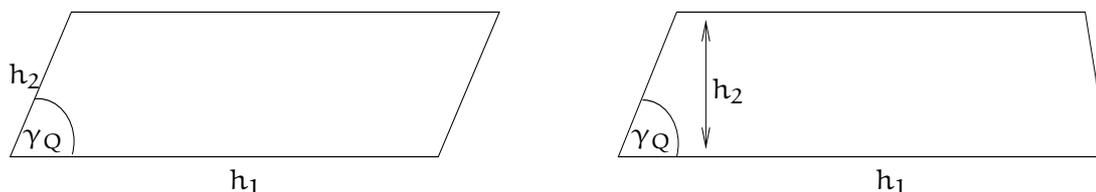


Abbildung 4.2: h_1 und h_2 bei einem anisotropen Parallelogramm bzw. Trapez

Kantenlängen $h_{i,T}$, $i = 1, 2$ (siehe Abbildung 4.1), wobei für anisotrope Elemente immer eine der beiden Kanten wesentlich kürzer als die andere ist. Wir bezeichnen die kürzere der beiden Kanten $h_{i,T}$ des Elementes T mit

$$h_{\min,T} := \min_{i=1,2} h_{i,T}.$$

Wir gehen davon aus, daß innerhalb der Klüfte keine, abgesehen von der Anisotropie, degenerierten Parallelelogramme oder Trapeze auftreten, und daher der Fehlerschätzer (4.4) auch für die Trapeze und Parallelelogramme der Klüfte eine ausreichend genaue Schätzung des Fehlers liefert. Für den Fall anisotroper Parallelelogramme und Trapeze bezeichnen wir mit h_1 bzw. h_2 die (längere) Grundseite und die Höhe des Elementes (siehe Abb. 4.2 rechts). Da wir in Kapitel 3 gefordert haben, daß der Winkel γ_Q der Elemente von \mathcal{Q}_{jk} von 0 und π weg beschränkt ist und in den Trapezen die kürzere der beiden parallelen Seite nicht sehr viel kürzer als die längere sein soll ($s_Q \approx 1$), liefert die Länge der kurzen Seite des Elementes eine

gute Approximation für die Höhe des Elementes (siehe Abb. 4.2 links). Wir fassen die beiden parallelen Kanten des Elementes $T \in \mathcal{Q}_{jk}$ mit der Kantenlänge $h_{i,T}$ in $\mathcal{E}_i(T)$ zusammen. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 4.1.1 erhalten wir einen Fehlerschätzer für die anisotropen Vierecke in der Kluft, der dem für isotrope Elemente bis auf die Gewichte der einzelnen Faktoren gleicht:

$$\eta_{\square,T} := \left\{ h_{\min,T}^2 \|F_T\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_i(T) \cap \mathcal{E}_{k,\Omega}} h_{i,T} \| [n_E \cdot \nabla u_h]_E \|_{L^2(E)}^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{E \in \mathcal{E}_i(T) \cap \mathcal{E}_{k,N}} h_{i,T} \| b_E - n_E \cdot \nabla u_h \|_{L^2(E)}^2 \right\}^{1/2} \quad (4.4)$$

Auch der Fehlerschätzer für anisotrope Viereckselemente ist effizient und zuverlässig:

Satz 11 *Es sei p Lösung des kontinuierlichen Problems (2.20) und p_{jk} Lösung des diskreten Problems (3.4) auf einer Zerlegung \mathcal{Q}_{jk} von Ω in anisotrope Vierecke und es gelte $\|p - p_{jk}\| \in H_0^1(\Omega)$. Dann gelten die a posteriori Abschätzungen:*

$$\|\nabla(p - p_{jk})\| \leq C \left\{ \sum_{T \in \mathcal{Q}_{jk}} \eta_{\square,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{Q}_{jk}} h_{\min,T}^2 \|f - F_T\|_T^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{j,k,N}} h_E \|b - b_E\|_{L^2(\Gamma_N)}^2 \right\}^{1/2} \quad (4.5)$$

$$\eta_{\square,T} \leq c \left\{ \|\nabla(p - p_{jk})\|_{\omega(T)}^2 + \sum_{T' \subset \omega(T)} h_{\min,T'}^2 \|f - F_{T'}\|_{L^2(T')}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_{j,k,N}} h_E \|b - b_E\|_{L^2(\Gamma_N)}^2 \right\}^{1/2} \quad (4.6)$$

Für eine detailliertere Beschreibung des Fehlerschätzers für anisotrope Elemente und den Beweis des Satzes 11 verweisen wir auf die Arbeit von Siebert [56]. Eine Verallgemeinerung des hier vorgestellten Fehlerschätzers für anisotrope Elemente in 3D findet sich bei G. Kunert [45].

4.1.3 Fehlerindikatoren für den Diskretisierungsfehler

Für unsere aus isotropen Dreiecken und anisotropen Vierecken bestehende Zerlegung $\mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}$ kombinieren wir nun die Fehlerschätzer für isotrope (4.1) und für anisotrope Elemente (4.4) der vorangegangenen Abschnitte.

Wir wählen als Fehlerindikator für das diskretisierte Problem (3.4) eine Zusammensetzung aus der lokalen Schätzung $\eta_{\Delta,T}$ aus (4.1) für $T \in \mathcal{T}_j$ und $\eta_{\square,T}$ aus (4.4) für $T \in \mathcal{Q}_{jk}$:

$$\eta_T = \begin{cases} \eta_{\Delta,T}, & T \in \mathcal{T}_j \\ \eta_{\square,T}, & T \in \mathcal{Q}_{jk} \end{cases} \quad (4.7)$$

Der Nachweis von den den Sätzen 10 und 11 entsprechenden Abschätzungen für die Effizienz und Zuverlässigkeit des Fehlerindikators η_T ist Gegenstand aktueller Forschung. An dem Kluft–Matrix–Übergang, wo lineare Dreiecke an anisotropen Vierecken liegen, ist er technisch aufwendig. Wir gehen aber davon aus, daß der Nachweis von Effizienz und Zuverlässigkeit von η_T mit ähnlichen (lokalen) Techniken, wie für die Residuen–Fehlerschätzer $\eta_{\Delta,T}$ und $\eta_{\square,T}$ zu führen ist (siehe Verfürth [64] und Siebert [56]).

4.2 Abbruchkriterium

Nach erfolgter Schätzung der lokalen Fehler auf den einzelnen Elementen muß eine Entscheidung getroffen werden, welche der Elemente nun verfeinert werden. Dabei ist das Ziel, den Gesamtfehler zu verkleinern und gleichzeitig die Anteile jedes einzelnen Elementes an dem Gesamtfehler ins Gleichgewicht zu bringen, d.h. die Fehleranteile der einzelnen Elemente sollen etwa gleich sein.

Die einfachste Möglichkeit zu entscheiden, ob ein Element verfeinert werden soll oder nicht, besteht nach erfolgter Schätzung der lokalen Elementfehler darin, eine Schranke γ vorzugeben und alle Elemente, deren Fehleranteil größer als γ ist, zu verfeinern. Der Algorithmus terminiert dann, wenn alle lokalen Elementfehler kleiner als γ sind. Mit dieser Vorgehensweise wird sichergestellt, daß der globale Fehler nach Abbruch des Algorithmus gleichmäßiger über das Rechengebiet verteilt ist. Das Problem bei dieser Vorgehensweise ist die Festlegung der Schranke γ . Wird γ zu groß gewählt, wird der globale Fehler nach Abbruch des Algorithmus zu groß sein, wählt man γ zu klein, wird unnötig verfeinert und der Rechenaufwand wird größer als nötig.

Wir verfolgen in dieser Arbeit daher eine dynamische Verfeinerungskontrolle. Die Entscheidung, ob ein einzelnes Element verfeinert werden soll, wird nach folgendem Kriterium getroffen.

Mittels der in den Abschnitten 4.1.1 und 4.1.2 vorgestellten Fehlerschätzer wurde für jedes Element T der Triangulierung \mathcal{T}_j eine Schätzung des lokalen Fehlers η_T in T berechnet. Setzen wir nun $\eta := \max_{T \in \mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}} \eta_T$, dann wird ein Element T verfeinert, wenn $\eta_T \geq \gamma \eta$, mit einer vorgegebenen Schranke $0 < \gamma < 1$ gilt.

Auf diese Weise werden immer die Elemente mit den größten lokalen Fehlern verfeinert. Als Abbruchkriterium dient in diesem Fall eine vorgegebene globale Toleranz (TOL) und das Gitter wird gerade so viel verfeinert, wie für diese relative Toleranz notwendig ist

$$\left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}} \eta_T^2 \right\}^{1/2} < \sigma \text{TOL} \|p\|.$$

Dabei ist σ ein Sicherheitsfaktor. Die Wahl von TOL erfolgt beispielabhängig nach experimentellen Ergebnissen. In der Praxis hat diese wenig rechenzeitaufwendige Strategie gute Ergebnisse gezeigt. Für lineare Finite-Elemente-Approximationen der Poissongleichung wird in Dörfler [27] gezeigt, daß diese Strategie mit dem Fehlerschätzer (4.1) den Fehler in jedem Verfeinerungsschritt um einen vorgegebenen Faktor reduzieren kann, wenn nur die Ausgangstriangulierung fein genug ist.

Es bleibt noch die Frage nach der Wahl von γ . Wird $\gamma = 0$ gesetzt, so ist das gleichbedeutend mit uniformer Verfeinerung. Wählen wir dagegen γ nahe 1, so werden eventuell in einem Verfeinerungsschritt nur sehr wenige Elemente verfeinert und der adaptive Algorithmus in Abschnitt 4.4 muß mehrfach durchgeführt werden, um die vorgegebene Genauigkeit zu erreichen. Die tatsächliche Wahl von γ erfolgt auf der Grundlage von experimentellen Ergebnissen.

4.3 Verfeinerungsstrategie

Wir haben unser diskretes Problem (3.6) hierarchisch in ein Kluft-, ein Interface- und ein Matrix-Problem zerlegt. In Abschnitt 4.1.3 haben wir einen Element-Fehlerindikator vorgestellt. Eine optimale Triangulierung soll für das Gesamtproblem gefunden werden. Der Fehler muß also nicht in den Einzelproblemen, sondern für das Gesamtproblem kontrolliert, verringert und gleichmäßig auf alle Elemente der Triangulierung \mathcal{T}_j verteilt werden. Dabei muß eine Struktur des Gitters erhalten bleiben, die die Klüfte mit Vierecken vernetzt und hängende Knoten vermeidet und so eine hierarchische Zerlegung auch auf den feineren Gittern möglich macht.

Wir gehen davon aus, daß die Strömungsverhältnisse über die Länge einer Kluft nicht stark variieren. Daher wird innerhalb der Kluft uniform verfeinert, wenn der Anteil am Gesamtfehler in der Kluft größer ist als der Anteil der Klüfte $|\Omega_K|$ am Gesamtrechengebiet $|\Omega|$, also wenn:

$$\sum_{T \in \mathcal{Q}_{jk}} \eta_T^2 > \psi \frac{|\Omega_K|}{|\Omega|} \sum_{T \in \mathcal{T}_j \cup \mathcal{Q}_{jk}} \eta_T^2.$$

Dabei ist ψ ein Sicherheitsfaktor mit $0 < \psi \leq 1$. Der Kluftanteil am Gesamtrechengebiet ist klein. Der Rechenzeitaufwand wird durch diese Vorgehensweise also nicht unkalkulierbar in die Höhe getrieben. Experimente haben zusätzlich gezeigt, daß die Regionen des Rechengebietes in der Umgebung der Klüfte im Matrixteil die Regionen mit nicht glatter Lösung sind.

Basierend auf den angegebenen Fehlerschätzern und Verfeinerungskriterien werden Elemente, die verfeinert werden sollen, markiert und nach der in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Gitterverfeinerung in feinere Elemente unterteilt. Wir erhalten so die Struktur des Gitters, die eine hierarchische Zerlegung des Rechengebietes in Kluft und Matrix erlaubt, und verfeinern in Regionen mit großem lokalen Fehler.

4.4 Der Algorithmus

Aus den vorhergehenden Überlegungen ergibt sich nun ein adaptiver Multilevel-Algorithmus. Die für die Kluftgenerierung (1.) und die Generierung des Grobgitters (2.) verwendeten Verfahren werden im Zusammenhang mit der verwendeten Software und der Implementierung in dem nachfolgenden Kapitel 5 vorgestellt. Zur Lösung des entstehenden Gleichungssystems wird die in Kapitel 3 vorgestellte hierarchische Gebietszerlegungsmethode eingesetzt. Nach erfolgreicher Schätzung der lokalen Elementfehler mit Residuen-Fehlerschätzern für isotrope (Abschnitt 4.1.1) und anisotrope (Abschnitt 4.1.2) Elemente wird das Gitter adaptiv verfeinert und dabei die Gitterstruktur erhalten (Abschnitt 4.3), bis der globale Gesamtfehler unter einer vorgegebenen Schranke TOL liegt (Abschnitt 4.2).

1. Kluftgenerierung (Abschnitt 5.1): auf der Grundlage von Messungen und statistischen Annahmen wird ein Kluftnetzwerk generiert.
2. Netzgenerierung (Abschnitt 5.2): ein Netzgenerator erzeugt auf dem Kluftnetzwerk eine Ausgangs-Triangulierung.

3. Assemblierung von Steifigkeitsmatrix und rechter Seite mit Finiten Elementen 1. Ordnung (Abschnitt 3.2) und hierarchischen Basisfunktionen (Abschnitt 3.4.1).
4. Lösung des entstandenen Gleichungssystems mit hierarchischem Teilraumkorrekturverfahren als Matrix-, Interface- und Kluft-Problem bis auf eine vorgegebene Genauigkeit oder fixe Anzahl von Iterationsschritten.
5. Schätzen der lokalen Elementfehler und des globalen Fehlers mit Residuen-Fehlerschätzern für isotrope (Abschnitt 4.1.1) und anisotrope (Abschnitt 4.1.2) Probleme.
6. Adaptive Gitterverfeinerung auf der Grundlage der in 5. ermittelten Elementfehlerschätzungen (Abschnitt 4.2 und Abschnitt 4.3)
7. Wiederhole Schritt 3. – 6., bis der globale Fehler die vorgegebene globale Toleranz unterschreitet.