

# 1 Grundwasserströmung in geklüftet porösen Medien

## 1.1 Hydrogeologischer Hintergrund

Ein großer Teil der Erdoberfläche ist von Festgestein bedeckt. Dieser wird intensiv wirtschaftlich genutzt. Als Festgestein werden komplex miteinander verkittete, druckverfestigte oder gewachsene Minerale bzw. Gesteinsbruchstücke bezeichnet. Im Gegensatz dazu versteht man unter Lockergestein unverfestigte, lose Gemenge von Gesteins- und Mineralbestandteilen. Festgestein bietet sich aufgrund seines hohen natürlichen Widerstandes gegenüber der Durchdringung mit Schadstoffen als Standort für Deponien und Endlagerstätten von toxischen oder radioaktiven Substanzen an. Doch wie auch bei der Nutzung von geothermalen Ressourcen sowie Öl- und Gasreservoirien und landwirtschaftlichen Einträgen, muß berücksichtigt werden, daß im felsigen Untergrund eine Vielzahl unterschiedlicher Hohlraumstrukturen, wie z.B. Poren, Trennfugen, Lösungshohlräume, Klüfte und durch Bergbau entstandene Hohlräume auftreten können. Diese Hohlräume sind teilweise untereinander verbunden und ergeben so ein Netz von Regionen höherer Durchlässigkeit, das Strömung von Flüssigkeit und so auch den Transport von Schadstoffen über weite Strecken und mit relativ hoher Geschwindigkeit ermöglicht.

Während Qualität und Auswirkungen der Verunreinigung von Oberflächengewässern direkt gemessen werden können und deren Fließwege, z.B. Flüsse, sichtbar sind, sind die Vorgänge im Untergrund sehr viel schwerer zugänglich. Dabei wurde nach dem Bundesverband der deutschen Gas- und Wasserwirtschaft (BGW) im Jahr 2000 rund 64% der öffentlichen Wasserversorgung der Bundesrepublik Deutschland aus Grundwasser bestritten. Unter dem Begriff Grundwasser wird das unterirdische Wasser zusammengefaßt, das die Hohlräume der Erdkruste zusammenhängend ausfüllt. Der Qualität von Grundwasser und der Vermeidung von Verunreinigungen sollte also besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden.

Die Sicherheitstechnische Beurteilung von Deponiestandorten, die Planung und Dimensionierung von Sanierungs- und Sicherungsmaßnahmen für Altlasten erfordern die Kenntnis von Strömungs- und Transportvorgängen im Untergrund. Die unterschiedlichen Nutzungsarten des Untergrundes werfen eine Vielzahl von Fragestellungen auf, die vielfältige Untersuchungen für ein besseres Verständnis der Vorgänge im Untergrund notwendig machen.

Dabei sind gerade in den Festgesteinen die Fließgeschwindigkeiten und Widerstände sehr unterschiedlich und von außen schwer zu beurteilen. Gesteine können eine natürliche Barriere darstellen, sie können aber auch durch ihre Hohlraumstruktur eine verhältnismässig schnelle Strömung zulassen. Hinsichtlich der Durchlässigkeit und Speicherfähigkeit in Gesteinen wird folgende Einteilung vorgenommen:

Aquifer (Grundwasserleiter), wasserdurchlässig und wasserspeicherfähig

Aquitard (Grundwassergeringleiter), wenig wasserdurchlässig, wenig wasserspeicherfähig

Aquitude (Grundwassernichtleiter), sehr wenig wasserdurchlässig, aber wasserspeicherfähig

Aquifuge (Grundwassernichtleiter), weder wasserdurchlässig noch wasserspeicherfähig

Bezeichnung	Durchlässigkeit	Speicherfähigkeit
Aquifer	++	++
Aquitard	+-	+-
Aquitude	-	++
Aquifuge	--	--

Tabelle 1.1: Einteilung von Gesteinen bezüglich Wasserdurchlässigkeit und Wasserspeicherfähigkeit

Entsprechend dem Aufbau der Gesteinshohlräume werden Porengrundwasserleiter, Kluftgrundwasserleiter und Kartstgrundwasserleiter unterschieden. Wir werden uns in dieser Arbeit auf die besonderen Gegebenheiten in geklüfteten Aquiferen konzentrieren.

Im Kluftgrundwasserleiter treten Fließvorgänge mit starken Heterogenitäten auf verschiedenen Längenskalen auf. Welche Merkmale bei Untersuchungen und Modellierung zu berücksichtigen sind, hängt von der Art der Fragestellung, der Größe des zu untersuchenden Gebietes und von der Datenlage ab. Nach Silberhorn–Hemminger [57] und Kobus, Barczewski, Koschitzky [44] lassen sich Kluftsysteme in folgende charakteristische Längenskalen unterteilen. Dabei treten auf den unterschiedlichen Längenskalen unterschiedliche Heterogenitätsmerkmale in der Vordergrund:

Mikroskala: umfaßt einzelne Porenräume, Mikroklüfte und einzelne Fließkanäle in größeren Klüften.

Einzelkluft: Hohlraum zwischen zwei rauen Bruchflächen. Das Fließverhalten ist heterogen. Neben ausgeprägten Fließpfaden (Channels) existieren Todwasserzonen in der Kluft. Die maßgeblichen Fließprozesse finden in der Kluft statt. Durch Diffusion kommt es zum Austausch zwischen Kluft und Matrix.

Kluftnetzwerk: Ein System von mehreren Klüften. Eine detaillierte Auflösung der rauen Bruchflächen und des heterogenen Fließregimes in der Kluft ist nicht mehr möglich. Die Klüfte werden im Modell als parallele Platten mit konstanter Öffnungsweite approximiert. Die Interaktion zwischen Kluft und Matrix und die Größenordnungsunterschiede in den Materialeigenschaften zwischen den Klüften und der umgebenden Gesteinsmatrix steuern auf dieser Längenskala maßgeblich das Strömungs- und Transportverhalten des gesamten Systems. Charakterisiert werden die Klüfte durch ihre Richtung, Ausdehnung und ihre Leitfähigkeit/Durchlässigkeit.

Hydrogeologische Aquiferstruktur: Betrachtet werden großräumige hydrogeologische Aquiferstrukturen wie z.B. verschiedene geologische Schichten und einzelne Scherzonen,

dabei wird die kleinräumige Klüftung wie im Kluftsystem aufgegeben und durch ein poröses Kontinuum beschrieben. Einzelne dominante Scherzonen werden als diskrete Strukturelemente beibehalten.

Grundwasserreservoir: Die detaillierte Beschreibung der einzelnen Schichten wird aufgegeben, da sie für die Fragestellungen, die eine großräumige Betrachtung erfordert, nicht relevant ist.

Ein Kluftaquifer stellt also ein komplexes System aus den verschiedenen Komponenten Grobklüfte, Fein Klüfte und Gesteinsmatrix dar. Durch die starken Unterschiede in den Materialeigenschaften stellen Klüfte Diskontinuitäten im Felsgestein dar. Unter den Diskontinuitäten unterscheidet man Scherzonen, Sedimentationsgrenzen, Klüfte und Mikroklüfte, wobei diese in der Hydrogeologie unter dem Begriff Klüfte zusammengefaßt werden. Die umgebende Gesteinsmatrix wird im folgenden auch kurz als *Matrix* bezeichnet. Unter gesättigten Bedingungen werden Klüfte und Kluftzonen meist durch verhältnismäßig hohe Durchlässigkeit und geringe Speicherkapazität charakterisiert, wohingegen die umgebende Gesteinsmatrix eine sehr viel geringere Permeabilität und höhere Speicherkapazität aufweist. Klüfte stellen bevorzugte Fließwege dar und können eine schnelle Ausbreitung von Schadstoffen ermöglichen.

Zusätzlich ist die räumliche Ausdehnung der Gesteinsmatrix meist um einige Größenordnungen größer als die Öffnungsweite der Klüfte. Das Prozeßverhalten im Kluftgrundwasserleiter ist also von starken Heterogenitäten beeinflusst. Bei der Modellierung von Kluftsystemen (siehe Abschnitt 1.2) müssen die besonderen Gegebenheiten wie starke Diskontinuitäten in der Wasserleitfähigkeit und große Unterschiede in den räumlichen Ausdehnung zwischen Gestein und Klüften besonders berücksichtigt werden.

In dieser Arbeit wird nun speziell die Strömung durch in Kluftnetzwerken betrachtet, d.h. wir betrachten Systeme von Klüften mit parallelen Rändern und konstanter Öffnungsweite. Dabei bestimmt der Austausch zwischen den Klüften und der Gesteinsmatrix in großem Maße das Strömungsverhalten des Systems. Bei der Strömungsberechnung ergeben sich eine Reihe von Problemen, wie große Unterschiede in der räumlichen Ausdehnung von Klüften und umgebendem Gestein und starken Variationen in den Wasserdurchlässigkeiten von sehr gering in ungestörten Festgesteinen und sehr hoch in untereinander vernetzten Klüften.

Die Strömungsvorgängen im Kluftaquifer bilden die Grundlage für alle Transportberechnungen, wobei die Strömung für den Transport einen sensitiven Parameter darstellt und daher besonders genau berechnet werden sollte. Bei unseren Untersuchungen legen wir besonderes Augenmerk auf die Skalenunterschiede zwischen Kluft und Matrix und die Koeffizientensprünge am Kluft-Matrix-Interface.

## 1.2 Modellierung von Kluftsystemen

Für eine numerische Simulation von Vorgängen im Untergrund, die sich an den tatsächlichen Gegebenheiten orientiert, ist eine ausreichende Kenntnis der prozeßrelevanten Parameter und der Geometrie notwendig. Die Erhebung der für die Beschreibung eines Kluftsystems notwendigen Daten erfolgt durch Punktmessungen, Bohrlochaufnahmen,

Linienuntersuchungen, Flächenuntersuchungen, geophysikalische Untersuchungen und stereographische Untersuchungen (siehe z.B. Singhal und Gupta [58] und Witthüser und Himmelsbach [67]). So müssen ausreichende Informationen über Kluftgröße, Kluftabstände, Kluftdichte, Öffnungsweiten, Orientierung, Konnektivität und Terminationsverhalten der Klüfte gewonnen werden. In den seltensten Fällen liegen über diese Parameter ausreichende, direkt erfaßte Kenntnisse vor. Schon in die Bereitstellung dieser Eigenschaften gehen statistische Annahmen und Verallgemeinerungen ein. So wird z.B. die Kluftgröße über die Kluftspuren ermittelt, die an den, dem Auge des Betrachters zugänglichen Aufschlußwänden sichtbar sind. Anschließend erfolgt eine statistische Analyse. Kluftabstände sind abhängig von den elastischen Eigenschaften des Gesteins.

Der mathematischen Modellierung von Strömungsprozessen in geklüftet porösem Untergrund gehen also folgende Teilschritte voraus:

Messungen: an Ober- und Bruchflächen und Bohrkernen werden Messungen durchgeführt, Materialeigenschaften werden in Labor und Feldexperimenten bestimmt.

Geometriedaten werden bestimmt: deterministisch und stochastisch/geostatistisch (siehe Silberhorn-Hemminger [57])

Kluftgenerierung: die numerische Simulation von Strömungsvorgängen erfordert die Beschreibung der für das Kluftsystem ermittelten Daten in einem Modell. Auf der Grundlage des vorhandenen Datenmaterials werden die Klüfte in einem geometrischen Strukturmodell diskret erfaßt. Ein Kluftgenerator (siehe Abschnitt 5.1 und z.B. Silberhorn-Hemminger [57]) erstellt auf der Basis der zur Verfügung stehenden Daten eine Abbildung, die die strukturellen Eigenschaften des Systems beinhaltet.

Die Erfassung der geometrischen Strukturen, die Beschreibung der Klüfte in einem numerischen Modell, die Bereitstellung der Bodenparameter durch Feld- und Laborexperimente und die Verarbeitung der so gewonnenen Daten in einem Kluftgenerator sind Gegenstand aktueller Forschung (Hemminger et al. [38], Silberhorn-Hemminger [57]). Aufbauend auf die vom Kluftgenerator gelieferten Daten wird ein Netz generiert (siehe Abschnitt 5.2.1), erst anschliessend kann auf dieser Grundlage eine Diskretisierung durchgeführt und numerische Verfahren zur Lösung des entstehenden Gleichungssystems eingesetzt werden.

Das von uns betrachtete Kluftnetzwerk stellt ein komplexes System mit den Komponenten Grobklüfte, Fein Klüfte und Gesteinsmatrix dar. Die Betrachtung großer Systeme erlaubt im allgemeinen nicht die Einbeziehung kleinskaliger Information, einerseits weil eine Erfassung der notwendigen Daten in der erforderlichen Dichte nicht möglich ist und zum anderen, weil die benötigten Rechnerkapazitäten und Rechnerzeiten in keinem Verhältnis zu den Ergebnissen stünden.

Zur modelltechnischen Untersuchung von Strömungs- und auch Transportverhalten werden im Kluftaquifer eine Reihe von Modellansätzen verwendet, die sich in die folgenden Klassen gliedern lassen:

**Diskretes Modell:** bei diesem Modell werden einzelne, für das Strömungs- und Transportgeschehen relevante, geologische Strukturen direkt erfaßt und in das Modell

eingebunden. Sinnvoll ist dieses Modell bei Einzelkluft und Kluftnetzwerk-betrachtungen mit einigen wenigen dominanten Klüften, Scherzonen oder Kluftsystemen. Strömungs- und Transportprozesse werden in starker Anlehnung an die Natur beschrieben. Voraussetzung für dieses Konzept ist die ausreichende Kenntnis des Kluftinventars: Lage, Ausdehnung der Klüfte, Anordnung der Klüfte zueinander, Materialeigenschaften von Klüften und Matrix.

Aufgrund fehlender Detailkenntnisse ist man oft auf eine stochastische Generierung des Kluftsystems angewiesen. Dies ist nur möglich, wenn die an Aufschlußwänden, Tunnelwandungen und Bohrkernen ermittelten statischen Kenngrößen und Verteilungen für das gesamte Gebiet statistisch repräsentativ sind. Das diskrete Modell kann also nur angewendet werden, wenn die Charakterisierung des Kluftinventars entweder deterministisch oder statistisch möglich ist. Bei sehr großen Gebieten und Gebieten mit einer starken Variation der Kluftparameter stößt die Aussagekraft der diskreten Modellierung an ihre Grenzen.

Die explizite Erfassung aller Klüfte bedeutet meist auch einen erheblichen Rechen- und Speicheraufwand bei Berechnungen, die auf dieser Grundlage durchgeführt werden. Daher war es bislang nicht möglich, größere Kluftsysteme diskret zu berechnen. Erst die Entwicklung neuerer Computergenerationen mit mehr Speicher und Rechenkapazität erlaubt die diskrete Berechnung relevanter Kluft-Matrix-Systeme.

**Kontinuum-Modell:** Diese Modelle werden auch als äquivalente Ansätze bezeichnet. Hier werden Einkontinuum, Zwei-Kontinuum und Mehr-Kontinuum-Modelle zusammengefaßt. Für ein Einkontinuum-Modell werden die Eigenschaften des Kluft-Systems durch eine Homogenisierung in ein kontinuierliches System überführt, dieses setzt eine hinreichend gleichmässige Verteilung und Ausprägung der Klüfte voraus, dann erfolgt eine Mittelwertbildung.

Im Zwei- oder Mehr-Kontinuum-Modell wird das typische hierarchische System von Grobklüften, Fein Klüften und Matrix durch zwei bzw. mehrere sich überlagernde Kontinua beschrieben. Jedes einzelne Kontinuum stellt dabei ein äquivalentes poröses Medium mit äquivalenten Eigenschaften wie Durchlässigkeit und Porosität dar. Diese Vorgehensweise ist nur möglich, wenn die Klüfte im Gebiet von vergleichbarer Größenordnung sind und in ausreichender Dichte vorliegen.

Die verschiedenen Kontinua werde über einen Austauschterm miteinander gekoppelt, der den Fluß zwischen den Systemen kontrolliert.

Der Vorteil dieses Ansatzes ist, daß nicht mehr die Positionierung und die Ausdehnung einzelner Klüfte bzw. Kluftscharen für die Gebietsbeschreibung notwendig ist, sondern lediglich gemittelte äquivalente Eigenschaften.

Gesteine mit hoher Kluftdichte und starker Vernetzung zeigen meist ein Kontinuum-Verhalten. Gesteine mit geringer Kluftdichte, geringer Vernetzung und starker Anisotropie zeigen hingegen kaum Kontinuum-Verhalten. Dann kann die Heterogenität durch die Zusammenfassung sehr unterschiedlicher Komponenten in ein äquivalentes Ersatzsystem nur sehr unzureichend erfaßt werden.

Gegebenenfalls können die beiden beschriebenen Modelle kombiniert werden. Ein Netz aus feinen, gleichmäßig verteilten, in ihren Eigenschaften ähnlichen Klüften wird stückweise

homogenisiert und in einem Kontinuum mit der Gesteinsmatrix zusammengefaßt, einzelne dominante Klüfte werden diskret dargestellt. Dieser Ansatz wird oft als gemischtes oder auch als **Hybrid-Modell** bezeichnet.

In vielen Fällen bietet sich eine Kombination aus diskretem und Kontinuum-Modell, also ein Hybrid-Modell an, da die diskrete Erfassung aller feinen und groben Klüfte mit einem zu großen Zeit- und Speicheraufwand verbunden wäre. In dieser Arbeit wird ebenfalls ein gemischter Ansatz verfolgt. Einzelne Klüfte werden diskret betrachtet, die Gesteinsmatrix stellt ein äquivalentes Kontinuum eines Netzwerkes eines kleineren Maßstabes dar. Dabei gehen wir davon aus, daß die für die diskrete Modellierung einzelner dominanter Klüfte notwendigen Parameter in ausreichendem Umfang vorhanden sind.

### 1.3 Äquidimensionale Modellierung

Die Geometrie von diskret modellierten Kluft-Matrix-Systemen ist geprägt von großen Unterschieden in den Abmessungen. Die Öffnungsweite der Klüfte ist meist um einige Größenordnungen kleiner als die Ausdehnung der Gesteinsblöcke. Üblicherweise werden Kluft und Matrix daher durch Elemente unterschiedlicher Dimension modelliert, indem die Klüfte in 2-D Rechengebieten als Linien oder in 3-D als Linien und Flächen betrachtet werden. Im folgenden wird diese Vorgehensweise als niederdimensionale Modellierung bezeichnet.

Die niederdimensionale Modellierung scheint zunächst aufgrund der Skalenunterschiede zwischen Kluft und Matrix nahe zu liegen. Die Kopplung zwischen den verschiedenen Elementtypen von Kluft und Matrix erfolgt bei dieser Vorgehensweise und einer Diskretisierung mit Finiten Elementen durch eine Addition der passend gewichteten lokalen Elementsteifigkeitsmatrizen. Auf diese Weise kann jedoch die lokale Flußerhaltung am Kluft-Matrix-Übergang nicht gewährleistet werden und damit wird gegebenenfalls der zugrundeliegende physikalische Prozeß nicht richtig erfaßt.

Im Gegensatz zur niederdimensionalen Modellierung werden bei der äquidimensionalen Modellierung Kluft und Matrix mit Elementen gleicher Dimension vernetzt. Daraus resultieren entweder im Kluftbereich anisotrope, also sehr lange schmale Elemente, oder die Matrix muß in der Nähe der Klüfte sehr viel feiner vernetzt werden, als es die Dynamik des Systems in der Matrix fordert. Eine Vernetzung der Matrix mit Elementen mit einer Schrittweite in der Größenordnung der Kluftweite ist nicht praktikabel, da gerade bei größeren Kluft-Matrix-Systemen auf diese Weise der Speicheraufwand und die Rechenzeit unüberschaubar groß würden.

Bei einer Diskretisierung mit anisotropen Elementen in der Kluft scheitern klassische Lösungsverfahren wie z.B. Mehrgitterverfahren an der Lösung des bei der Diskretisierung entstandenen Gleichungssystems (siehe auch Kapitel 3), d.h. geht die Kluftbreite gegen Null, so geht die Konvergenzrate dieser Verfahren gegen 1, die Verfahren konvergieren also nicht.

Die äquidimensionale Modellierung bietet aber eine Reihe von Vorteilen gegenüber der niederdimensionalen Modellierung. Erlaubt die niederdimensionale Modellierung in der Kluft nur Gradienten (d.h. Geschwindigkeiten, siehe Kapitel 2) in Richtung der Kluftachse, können bei der äquidimensionalen Modellierung auch Geschwindigkeiten quer zur Kluftachse auftreten (siehe Abbildung 1.1). Dies ermöglicht die lokale Flußerhaltung am Kluft-Matrix-

Übergang.

Bei der niederdimensionalen Modellierung treten in der Kluft keine reinen Kluftknoten auf. Kluftknoten sind immer gleichzeitig auch Matrixknoten. Sich für die Kluft ergebende Werte der Zustandgrößen sind daher immer auch Matrixwerte. Im Gegensatz dazu treten bei der äquidimensionalen Modellierung in der Kluft Freiheitsgrade auf, die ausschließlich zur Kluft gehören. Auf diese Weise werden Flüsse zwischen Kluft und Matrix zuverlässiger abgebildet (siehe Neunhäuserer [48]). Die Vor- und Nachteile von niederdimensionalem

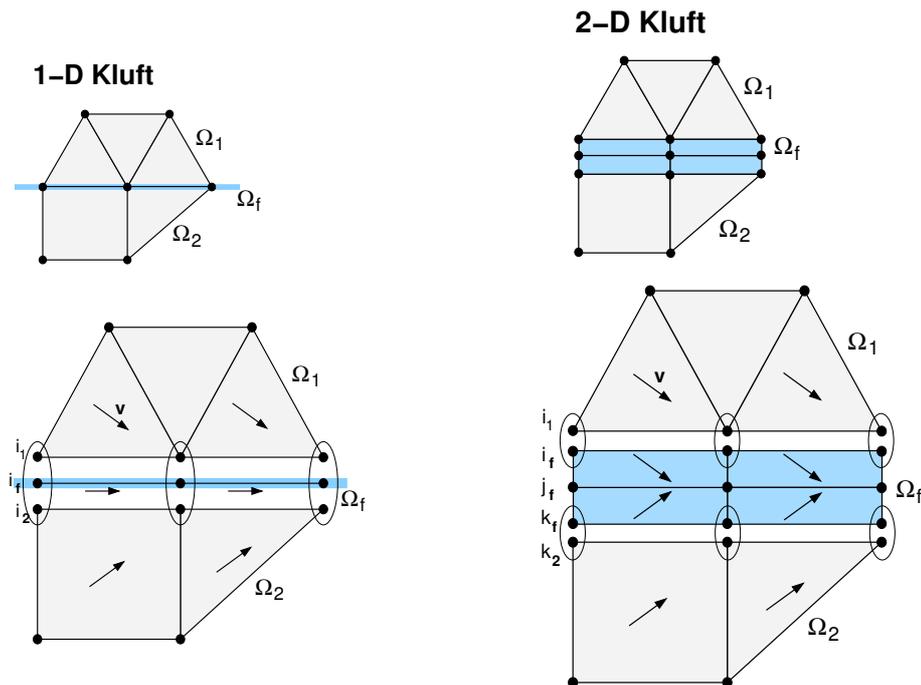


Abbildung 1.1: Niederdimensionale und äquidimensionale Diskretisierung von Kluft und Matrix (nach Neunhäuserer [48]). Links oben: Kluft als 1-D Stabelemente, links unten: mögliche Gradienten bei niederdimensionaler Kluft-Diskretisierung, keine reinen Kluftknoten, rechts oben: Kluft als 2-D Vierecke, rechts unten: mögliche Gradienten bei äquidimensionaler Diskretisierung, reine Kluftknoten

und äquidimensionalem Ansatz und ihre Anwendbarkeit auf verschiedene Modellprobleme hat Neunhäuserer [48] eingehender untersucht. Zusätzlich werden in dieser Arbeit die Eigenschaften der verschiedenen Diskretisierungsverfahren und ihre Anwendbarkeit auf die beiden Modellansätze betrachtet.

Daraus ergibt sich ein weiterer Vorteil der äquidimensionalen Modellierung: Dieser Ansatz erweist sich als flexibler, was die Wahl der Diskretisierung angeht. So kann bei der niederdimensionalen Modellierung kein gemischt-hybrides Finite Elemente Verfahren eingesetzt werden. Dieses Verfahren liefert gegenüber den linearen Finiten Elementen und dem Boxverfahren (einem Finite Volumen Verfahren zweiter Ordnung für die Strömung bei strukturierten Gittern) eine genauere Approximation der Geschwindigkeit. In der vorliegenden Arbeit werden wir nicht mit gemischt hybriden Finiten Elementen arbeiten sondern lineare Finite Elemente verwenden. Der Grund dafür liegt aber in der einfacheren Zugänglichkeit der linearen Finiten Elemente bei der mathematischen Analyse. Es sollte

zunächst der Nachweis erbracht werden, daß der hier verfolgte hierarchische Ansatz für ein Verfahren zur Lösung der Strömungsgleichung in der äquidimensionalen Formulierung zu einem robusten und effektiven Verfahren führt.

Thema dieser Arbeit ist die Entwicklung und Implementierung eines robusten Lösungsverfahrens für die Strömung in äquidimensional diskretisierten Kluft-Matrix-Systemen. Robust bedeutet in diesem Fall stabil gegenüber verschwindender Kluftbreite und den Koeffizientensprüngen am Kluft-Matrix-Übergang. Es wird auf der Grundlage einer hierarchischen Gebietszerlegung ein Mehrgitterverfahren entwickelt, das die Verwendung eines speziellen Löser für anisotrope Gitter für die Klüfte erlaubt und durch Aufspaltung des Matrixproblems in ein Matrix- und ein Interfaceproblem robust ist.

## 2 Mathematische Modellierung

In diesem Abschnitt wird das verwendete Modell für die Strömung in geklüftet porösen Medien für den gesättigten Fall motiviert und hergeleitet. Im wesentlichen erhalten wir unser mathematisches Modell für die Strömung in gesättigtem Grundwasser aus zwei Gesetzmäßigkeiten: der Kontinuitätsgleichung und dem Darcy-Gesetz. In den folgenden Abschnitten sollen diese beiden Gesetze und die in ihnen auftauchenden Parameter erklärt (siehe Abschnitte 2.1 und 2.2) und aus ihnen eine partielle Differentialgleichung für die gesättigte Strömung hergeleitet werden (siehe Abschnitt 2.3). Anschließend wird auf die Bedeutung der Randbedingungen (siehe Abschnitt 2.4) eingegangen und für die schwache Formulierung (Abschnitt 2.5) die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung gezeigt (Abschnitt 2.6).

### 2.1 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die zeitliche Änderung der Masse in einem bestimmten Volumen basierend auf dem Prinzip der Massenerhaltung. Sie besagt, daß die Summe aller Zu- und Abflüsse über die Grenzen eines Kontrollvolumens  $\Omega'$  gleich der Wasserspeicherung und der externen Flüsse (Quellen) in diesem Kontrollvolumen sein muß.

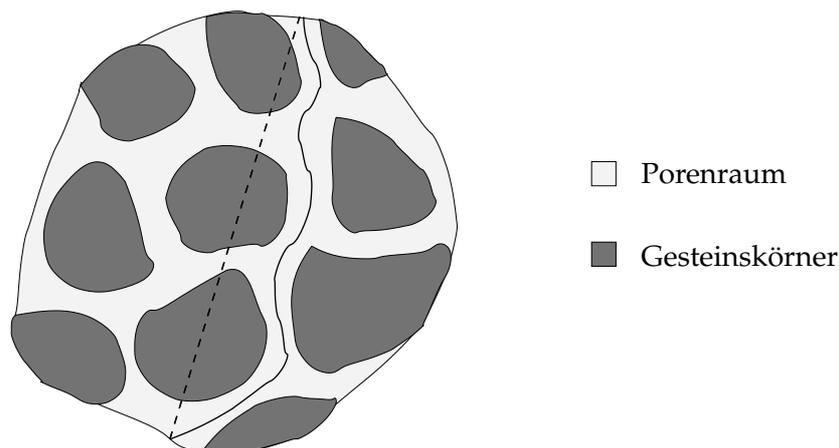


Abbildung 2.1: Mittlere (— — —) und tatsächliche (—) Bahnlinien eines Flüssigkeitsteilchens in einem porösen Medium

In porösen Medien wird nur ein Teil des Kontrollvolumens tatsächlich durchflossen, der durchflußwirksame Porenraum. Der Anteil dieses Porenraums am Kontrollvolumen wird

durch die durchflußwirksame Porosität  $n$  beschrieben, diese ist im allgemeinen abhängig von dem Druck. Mit der Fluidmassendichte  $\rho$ , der Quelledichte  $f$  und der mikroskopischen Abstandsgeschwindigkeit  $v_a$  erhalten wir die zeitliche Massenänderung:

$$\int_{\Omega'} n\rho(x, t + \Delta t) dx - \int_{\Omega'} n\rho(x, t) dx,$$

den Massenabfluß über den Rand des Kontrollvolumens  $\partial\Omega'$  in Richtung der äußeren Normalen  $\vec{N}$  mit der Abstandsgeschwindigkeit  $v_a$ :

$$\Delta t \int_{\partial\Omega'} \rho n v_a \vec{N} d\sigma$$

und für zeitkonstante Quelledichte  $f$  die Quelle oder Senke:

$$\int_{\Omega'} \rho f dx.$$

Die Quelledichte enthält die in einem bestimmten Gebiet im Mittel pro Volumeneinheit ein- und austretenden Quellen.

Daraus erhalten wir durch Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  die Gesamtbilanz der Massenänderung (siehe Helmig [35][S.95ff]):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega'} n\rho dx + \int_{\partial\Omega'} n\rho v_a \vec{N} d\sigma = \int_{\Omega'} \rho f dx. \quad (2.1)$$

Die mikroskopische Abstandsgeschwindigkeit  $v_a$  ist mit der tatsächlich gemessenen makroskopischen Filtergeschwindigkeit  $v_f$  über die Zustandsgleichung

$$v_f = n v_a \quad (2.2)$$

gekoppelt.

Mit der Abhängigkeit zwischen Filter- und Abstandsgeschwindigkeit (2.2) und unter Regularitätsvoraussetzungen an die Dichte  $\rho$ , die Geschwindigkeit  $v_f$  und die Quelledichte  $f$  erhalten wir aus der Gesamtbilanz der Massenänderung (2.1) mit dem Divergenzsatze die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho v_f) + \rho f. \quad (2.3)$$

Es wird davon ausgegangen, daß die Temperatur keine Rolle spielt und die Dichte des Fluids konstant ist:

$$\rho = \text{const.}$$

Die Porosität  $n$  ist eine Funktion des Druckes. Dann gilt:

$$\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = \frac{d(n\rho)}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{S_0}{g} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Dabei bezeichnet  $g$  die Erdbeschleunigung und  $S_0$  ist der spezifische Speicherkoeffizient. Der spezifische Speicherkoeffizient beinhaltet die Kompressibilitätskoeffizienten des Bodens und des Fluids:

$$S_0 = \rho g \left( \frac{\partial n}{\partial p} + \frac{n}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right), \quad (2.5)$$

er beschreibt die Änderung des gespeicherten Wasservolumens je Volumeneinheit des Grundwasserraumes bei Änderung der Standrohrspiegelhöhe um einen Meter. Dabei ist die Standrohrspiegelhöhe die Höhe des Grundwasserspiegels in einer Meßstelle oder einem Brunnen über einem Bezugssystem (z.B. Normal Null). Sie setzt sich aus der geodätischen Höhe  $z$  und der (Grundwasser-) Druckhöhe  $h_p$  zusammen. Die geodätische Höhe  $z$  ist der lotrechte Abstand eines Punktes von einem Bezugssystem, und unter der Druckhöhe  $h_p$  versteht man die aus dem Gesteinswasserdruck  $p$  abgeleitete Höhe  $h_p = p/(g\rho)$  mit der Erdbeschleunigung  $g$  und der Dichte des Gesteinswassers  $\rho$  (siehe z.B. Adam [1]). Zwischen dem Druck und der Standrohrspiegelhöhe besteht somit der folgende Zusammenhang:

$$h = \frac{p}{\rho g} + z. \quad (2.6)$$

Mit dem spezifischen Speicherkoeffizient (2.5) bzw. (2.4) kann Gleichung (2.3) umgeformt werden zu

$$\frac{S_0}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_f = f. \quad (2.7)$$

Man kann diese Gleichung auch mit (2.6) in Abhängigkeit von der Standrohrspiegelhöhe  $h$  betrachten.

Im folgenden werden wir bei der Druckformulierung bleiben, da in vielen experimentellen Messungen der Druck bestimmt wird und nicht die Standrohrspiegelhöhe.

Des weiteren betrachten wir eine stationäre Grundwasserströmung, z.B. konstanten Druck  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ , wodurch Gleichung (2.7) sich noch einmal vereinfacht:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_f = f.$$

## 2.2 Das Darcy–Gesetz

Einen Weg zur Bestimmung der Filtergeschwindigkeit  $v_f$  liefert das Darcy–Gesetz. Henry Darcy (1803–1858) untersuchte 1856 den Fluß von Wasser durch einen vertikalen homogenen Sandfilter in Zusammenhang mit den Fontänen von Dijon/Frankreich (siehe z.B. Bear [13]). Vorausgegangen waren Versuche von Hagen (1839) und Poiseuille (1841) über das laminare, also das wirbelfreie, glatt strömende Fließen (siehe z.B. Hölting [41]) in Röhren.

Ob eine Strömung laminar ist, darüber gibt die (dimensionslose) Reynoldszahl  $Re$  Auskunft. Sie drückt das Verhältnis der Trägheits- zu den Reibungskräften aus. Für die Reynoldszahl gibt es unterschiedliche Berechnungsmethoden, in alle gehen die Filtergeschwindigkeit  $v_f$ , eine charakteristische Länge  $l$ , z.B. der Korndurchmesser und die kinematische Viskosität (Zähigkeit)  $\nu$  der Flüssigkeit ein. Für laminare Strömungen gilt (siehe z. B. Hölting [41]):

$$Re = \frac{v_f \cdot l}{\nu}.$$

Eine niedrige Reynoldszahl ist charakteristisch für laminar schleichende Strömungen. Nach Bear [13][S.125f] geht bei etwa einer Reynoldszahl von 10 im Grundwasser die laminar schleichende in eine laminare Strömung über, dies bezeichnet die Grenze der Gültigkeit des Darcy–Gesetzes.

In Grundwasserleitern werden die strömungsmechanischen Verhältnisse weitgehend durch die Geschwindigkeiten der strömenden Flüssigkeit und durch die Geometrie des durchflußwirksamen Hohlraums bestimmt. In den für diese Arbeit relevanten Festgesteinen fließt die Flüssigkeit hauptsächlich in mehr oder weniger beengten Klüften und dort relativ schnell, daher kann hier nicht immer von einer laminar schleichenden Strömung ausgegangen werden und das Darcy–Gesetz verliert seine Gültigkeit. Es wird daher im Anschluß an die Vorstellung des Darcy–Gesetzes dessen Gültigkeit in geklüftet–porösen Medien untersucht. Nach Darcys Überlegungen für den eindimensionalen Fall ist der durch eine bestimmte Fläche  $F$  (Einheit  $[m^2]$ ) eines durchlässigen Materials pro Zeiteinheit hindurchfließende Volumenstrom  $Q$  (Einheit  $[m^3/s]$ ) proportional zu dem Druckhöhenunterschied  $\Delta h$  und umgekehrt proportional zur Fließlänge  $l$  mit einem filtergesteinsspezifischen Proportionalitätsfaktor  $k_f$

$$\frac{Q}{F} = -k_f \frac{\Delta h}{l}.$$

Dabei ist der Quotient  $\Delta h/l$  der hydraulische Gradient oder auch das Gefälle. Mit der Filtergeschwindigkeit  $v_f = \frac{Q}{F}$  senkrecht zur Fläche  $F$  erhalten wir nach Grenzübergang  $F, l \rightarrow 0$ :

$$v_f = -k_f \nabla h.$$

Aufgrund dieses Zusammenhangs der Filtergeschwindigkeit  $v_f$  mit dem Darcy–Gesetz wird die Filtergeschwindigkeit auch als Darcy–Geschwindigkeit bezeichnet.

**Allgemeines Darcy–Gesetz** Die hydraulische Durchlässigkeitsverteilung im Untergrund ist im allgemeinen anisotrop, ein Gradient in  $x$ –Richtung kann z.B. eine Strömungskomponente in  $z$ –Richtung verursachen. Daher muß bei der Verallgemeinerung des Darcyschen Gesetzes anstelle des Durchlässigkeitsbeiwertes  $k_f$  der Durchlässigkeitstensor  $\underline{\underline{K}}_f$  betrachtet werden. Der Tensor der hydraulischen Leitfähigkeit  $\underline{\underline{K}}_f$  (oder auch Durchlässigkeitsbeiwert) ist eine Meßgröße zur Quantifizierung der Durchlässigkeit eines Körpers/Gesteins, ausgedrückt als Durchflußmenge je Flächen– und Zeiteinheit in der wassergesättigten Zone.

Die Bestimmung des  $\underline{\underline{K}}_f$ –Wertes erfolgt durch Versuche im Labor, wobei die Proben dem Boden möglichst ungestört (ohne Verletzung des Gesteinsgefüges) durch einen Stechzylinder entnommen werden. In größeren geologischen Einheiten wird der mittlere  $\underline{\underline{K}}_f$ –Wert durch Pumpversuche ermittelt (siehe dazu Hölting [41]):

$$\underline{\underline{K}}_f = \begin{bmatrix} k_{f,xx} & k_{f,xy} & k_{f,xz} \\ k_{f,yx} & k_{f,yy} & k_{f,yz} \\ k_{f,zx} & k_{f,zy} & k_{f,zz} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \underline{\underline{K}}_f = \underline{\underline{K}}_f^T.$$

Dadurch erhalten wir die Filtergeschwindigkeitskomponenten:

$$v_x = -k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} - k_{xz} \frac{\partial h}{\partial z} \quad \text{etc.}$$

Wählen wir das Koordinatensystem so, daß die Hauptachsen des Durchlässigkeitstensors mit den Koordinatenachsen zusammentreffen, vereinfacht sich der Durchlässigkeitstensor, da nur noch die Elemente auf der Hauptdiagonalen von Null verschieden sind:

$$\underline{\underline{K}}_f = \begin{bmatrix} k_{f,xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{f,yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{f,zz} \end{bmatrix}.$$

In einem isotropen Medium, in dem jede Richtung Hauptströmungsrichtung ist, sind die Hauptdiagonalelemente gleich groß:  $k_{f,xx} = k_{f,yy} = k_{f,zz}$ . Für den in dieser Arbeit betrachteten 2-D Fall erhält man  $\underline{\underline{K}}_f$  analog.

Im allgemeinen zwei- oder dreidimensionalen Fall bekommt das Darcy-Gesetz damit folgende Form:

$$v_f = -\underline{\underline{K}}_f \cdot \nabla h. \quad (2.8)$$

Die hydraulische Leitfähigkeit  $\underline{\underline{K}}_f$  ist fluidabhängig:

$$\underline{\underline{K}}_f = \frac{\rho g}{\eta} \underline{\underline{K}}_0. \quad (2.9)$$

In Gleichung (2.9) ist  $\underline{\underline{K}}_0$  der Tensor der Permeabilität und  $\eta$  die dynamische Fluidviskosität. Sie ist temperaturabhängig und gibt an, wie leicht- oder zähflüssig ein Fluid ist. Die Permeabilität ist fluidunabhängig, sie beschreibt die Durchlässigkeit des Gesteins für Fluide.

Mit dem Zusammenhang zwischen Druck und Standrohrspiegelhöhe (2.6) erhalten wir nun das Darcy-Gesetz in der Druckformulierung

$$v_f = -\frac{1}{\eta} \underline{\underline{K}}_0 \nabla (p + \rho g z). \quad (2.10)$$

Bevor wir aus der Kontinuitätsgleichung und dem Darcy-Gesetz eine Gleichung für die Strömung in geklüftet porösen Medien herleiten, müssen wir uns noch einige Gedanken über die Gültigkeit des Darcy-Gesetzes in dem hier betrachteten Fall machen.

Für die Strömung in der Gesteinsmatrix, die im allgemeinen sehr langsam ist und bei der keine Wirbel auftreten, kann das Darcy-Gesetz ohne weiteres eingesetzt werden. In der Kluft müssen dazu noch einige Betrachtungen angestellt werden.

Grundsätzlich müssen in der Kluft zwei Fälle unterschieden werden; entweder die Klüfte werden als mit Sand oder Verwitterungsmaterial verfüllt betrachtet oder als unverfüllt. In verfüllten Klüften wird die Strömung im allgemeinen als laminar schleichend angesehen, damit ist für diesen Fall das Darcy-Gesetz gültig. Im einfachsten Fall unverfüllter Klüfte wird eine Kluft als offener Spalt zwischen zwei planparallelen Platten beschrieben. Für eine zweidimensionale, laminare Strömung in einem unendlich ausgedehnten Spalt mit konstanter Öffnungsweite und glatten Wänden kann das entsprechende Fließgesetz (das Hagen-Poiseuille-Gesetz) aus der Navier-Stokes-Gleichung abgeleitet werden (siehe dazu Louis [47]). Aus ihr erhalten wir durch einfache Umformungen die zur Darcygleichung (2.10) äquivalente Hagen-Poiseuille-Gleichung

$$v_f = -\frac{1}{\eta} \frac{\varepsilon^3}{12} \nabla (p + \rho g z) \quad (2.11)$$

mit der Kluftweite  $\varepsilon$ .

Wir betrachten in dieser Arbeit laminare Strömungen in verfüllten Klüften oder in Klüften, die sich als Spalt zwischen glatten Wänden darstellen lassen, und erhalten eine Zustandsgleichung der Form (2.10) (Darcy–Gesetz) oder (2.11) (Hagen–Poiseuille–Gesetz) ist gültig.

## 2.3 Strömungsgleichung

Da aus Labor- und Feldversuchen zur vorliegenden Problemklasse häufig der Druck anstatt der Standrohrspiegelhöhe als Meßgröße vorgegeben wird, wird im folgenden die Druckformulierung gewählt. Aus der Kombination der Kontinuitätsgleichung (2.3) und des Darcy–Gesetzes (2.10) bzw. dem Hagen–Poiseuille–Gesetz (2.11) erhält man eine lineare partielle Differentialgleichung für die Strömung einer nicht kompressiblen Flüssigkeit mit konstanter Dichte und Viskosität:

$$\frac{S_0}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\eta} \underline{K}_0 \nabla p \right) + \rho g \nabla \cdot \left( \frac{1}{\eta} \underline{K}_0 \nabla z \right) + f. \quad (2.12)$$

Für den stationären Fall, auf den wir uns in der vorliegenden Arbeit konzentrieren werden, erhalten wir daher als Gleichung für die stationäre Strömung:

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\eta} \underline{K}_0 \nabla p \right) + \rho g \nabla \cdot \left( \frac{1}{\eta} \underline{K}_0 \nabla z \right) + f = 0. \quad (2.13)$$

Wir wollen uns in dieser Arbeit auf den 2–D–Fall konzentrieren. Eine Reduzierung von räumlichen Problemen auf eine 2–D Betrachtung macht nur Sinn für entsprechend geartete Fälle, wie z.B. Gebiete mit in eine Richtung konstanter Geometrie. Wir betrachten hier die  $x, y$ –Ebene. Für diese Beispiele verschwindet der zweite Term der Strömungsgleichung (2.13) und die Strömungsgleichung vereinfacht sich noch einmal:

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\eta} \underline{K}_0 \nabla p \right) + f = 0. \quad (2.14)$$

## 2.4 Randbedingungen

Wir bezeichnen mit  $\Omega$  das betrachtete Rechengebiet und nehmen an,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  sei polygonal berandet. Der Rand des Rechengebietes  $\Omega$  sei  $\partial\Omega$  und es gelte

$$\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D, \quad \text{mit} \quad \Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset.$$

Wir betrachten zwei Formen von Randbedingungen: Neumann– und Dirichlet–Randbedingungen, jeweils vorgegeben auf einem Teil des Gebietsrandes  $\Gamma_N$  bzw.  $\Gamma_D$ . Weiterhin nehmen wir an, daß  $\text{meas}(\Gamma_D) > 0$  gilt, wobei  $\text{meas}$  das eindimensionale Lebesguemaß sei.

**Neumann–Randbedingungen:** Diese Art von Randbedingungen bedeutet die Vorgabe der Ableitung des Druckes in Normalenrichtung am Gebietsrand. Für die Grundwasserströmung bedeutet das die Vorgabe des Zu– bzw. Abstromes senkrecht über den Rand des Rechengebietes:

$$\frac{\partial p}{\partial \underline{N}} = b \quad \text{auf} \quad \Gamma_N. \quad (2.15)$$

**Dirichlet–Randbedingungen:** In diesem Fall wird der Druck auf dem Rand bzw. einem Teil des Randes ( $\Gamma_D$ ) des Rechengebietes vorgegeben:

$$p = d \quad \text{auf} \quad \Gamma_D. \quad (2.16)$$

Im homogenen Fall gilt  $d = 0$  auf ganz  $\Gamma_D$ .

Damit erhalten wir für die Strömung in geklüftet porösen Medien in 2–D die elliptische Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\eta} \underline{K} \nabla p \right) &= f \quad \text{auf} \quad \Omega, \\ p &= d \quad \text{auf} \quad \Gamma_D, \\ \frac{\partial p}{\partial \vec{N}} &= b \quad \text{auf} \quad \Gamma_N. \end{aligned} \quad (2.17)$$

## 2.5 Schwache Formulierung

Die Existenz klassischer Lösungen des Randwertproblems (2.17) also  $p \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  fordert sehr starke Voraussetzungen an die Daten und das Gebiet  $\Omega$ . Aus diesem Grund betrachten wir von nun an sogenannte schwache Lösungen, die sich aus der schwachen oder Variationsformulierung des Randwertproblems (2.17) ergeben.

Für die Lösung des Variationsproblems ist die geeignete Topologie des Lösungsraumes ausschlaggebend. Mit der richtigen Wahl der Räume und der Topologie ist der Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Variationsproblems mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln möglich (siehe Abschnitt 2.6). Die Sobolev–Räume mit der durch die jeweilige Norm induzierten Topologie haben sich hier als die richtige Wahl erwiesen. Sie fordern geringere Voraussetzungen an die Glattheit der Lösung, die schwache Lösung muß nur einmal schwach, nicht aber zweimal stark differenzierbar sein. Zusätzlich erlaubt die schwache Formulierung die Betrachtung allgemeinerer Gebiete.

Wir betrachten daher im folgenden die Sobolev–Räume, die auf dem Funktionenraum  $L^2(\Omega)$  aufbauen. Dabei besteht der Raum  $L^2(\Omega)$  aus den meßbaren und im Sinne von Lebesgue quadrat–integrierbaren Funktionen:

$$L^2(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ meßbar und } \|u\|_{L^2(\Omega)} < \infty\}$$

mit dem  $L^2(\Omega)$ –Skalarprodukt

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv \, dx$$

und der  $L^2$ –Norm

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{L^2(\Omega)}}.$$

Man kann zeigen, daß der Raum  $L^2(\Omega)$  mit dem Skalarprodukt  $(u, v)_{L^2(\Omega)}$  ein Hilbertraum ist (siehe z. B. Werner [65], Alt [4]).

Die Sobolev–Räume  $H^m(\Omega)$  der Ordnung  $m$  sind definiert als die Räume der Funktionen  $u$  des  $L^2(\Omega)$ , deren schwache Ableitungen  $D^\alpha u$  bis zur Ordnung  $m$  zu  $L^2(\Omega)$  gehören (siehe z. B. Werner [65], Alt [4], Wloka [68]). Dabei ist  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  ein Multiindex und

$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Für die folgenden Betrachtungen benötigen wir den Raum  $H^1(\Omega)$  der einmal schwach differenzierbaren Funktionen des  $L^2(\Omega)$ , deren erste (schwache) Ableitung ebenfalls eine  $L^2(\Omega)$ -Funktion ist

$$H^1(\Omega) = \{u \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ für } |\alpha| = 0, 1\},$$

mit dem  $H^1$ -Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left( uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx_1 dx_2$$

und der  $H^1$ -Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{H^1(\Omega)}}. \quad (2.18)$$

Zusätzlich benötigen wir auch noch den Raum  $H$ :

$$H := \overline{\{C^\infty(\overline{\Omega}) \mid v|_{\Gamma_D} = 0\}}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}$$

also den Abschluß des Raums der unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die auf dem Dirichletrand  $\Gamma_D$  verschwinden, wobei der Abschluß bezüglich der  $H^1$ -Norm gemeint ist.

Im folgenden sei  $\Omega$  hinreichend regulär, d.h. eine offene Menge des  $\mathbb{R}^2$ , der Rand  $\partial\Omega$  von  $\Omega$  sei eine  $(n-1)$ -dimensionale unendlich oft differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\Omega$  sei lokal auf einer Seite von  $\partial\Omega$ .

Der Raum  $C_0^\infty(\overline{\Omega})$  liegt dicht in  $H^1(\Omega)$ . Dann bezeichnen wir für  $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$  mit der Spur  $\gamma$  die lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \gamma : u &\mapsto \gamma u \\ \gamma u &= u|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die Auswertung einer  $H^1$ -Funktion an einem einzelnen Punkt ist im allgemeinen nicht sinnvoll. Der folgende Satz zeigt, daß die Restriktion auf den Rand von  $\Omega$  wenigstens eine  $L^2$ -Funktion ist.

**Satz 1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet mit hinreichend regulärem Rand. Dann läßt sich die Abbildung  $\gamma : u \rightarrow \gamma u = u|_{\partial\Omega}$ , definiert auf  $C_0^\infty(\overline{\Omega})$  mit Werten in  $C^\infty(\partial\Omega)$ , zu einer stetigen, surjektiven linearen Abbildung von  $H^1(\Omega)$  nach  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  fortsetzen.

Für den Beweis des Spursatzes verweisen wir auf Lions und Magenes [46][S.39ff] und Dautray und Lions [24][S.113ff].

Für die exakte Definition des Raumes  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  verweisen wir auf Adams [2][S.177ff] und Lions und Magenes [46]. Für die Regularitätseigenschaften des  $H^{\frac{1}{2}}$  kann davon ausgegangen werden, daß sie zwischen denen des  $H^1$  und des  $L^2$  liegen. Sobolev-Räume von rationaler Ordnung können auch als Interpolationsräume zwischen Sobolev-Räumen ganzzahliger Ordnung definiert werden (siehe Adams [2]).

Damit gilt

$$H = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma v|_{\Gamma_D} = 0\}.$$

Wir erhalten also für homogene Dirichletrandbedingungen aus dem Randwertproblem (2.17) durch Multiplikation mit einer Testfunktion  $v \in H$ , Integration über  $\Omega$  und Anwendung der Greenschen Formeln die Variationsformulierung:

$$p \in H: \quad a(p, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H \quad (2.20)$$

mit

$$a(p, v) := \int_{\Omega} \nabla p^T \frac{1}{\eta} \underline{\underline{K}} \nabla v \, dx \quad \text{und} \quad \ell(v) := \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} b v \, dx. \quad (2.21)$$

Für inhomogene Dirichlet–Randbedingungen (2.16) benötigen wir eine Teilmenge des  $H^1(\Omega)$ :

$$H_d(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \gamma u = d \quad \text{auf} \quad \Gamma_D\} \subset H^1(\Omega).$$

Wir setzen

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D) := \{v: \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R} \mid v = \hat{v}|_{\Gamma_D} \text{ für ein } \hat{v} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\}.$$

Dann existiert zu jedem  $d \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$  ein  $u \in H^1(\Omega)$  mit der Eigenschaft

$$\gamma u|_{\Gamma_D} = d$$

(siehe z.B. Dautray und Lions [24][S.380]) und wir erhalten die Lösung  $p = p_0 + u$  aus der Lösung von

$$p_0 \in H: \quad a(p_0, v) = \ell(v) - a(u, v) \quad \forall v \in H \quad (2.22)$$

Auf diese Weise lassen sich inhomogene Dirichletrandbedingungen auf homogene zurückführen. Deshalb betrachten wir im weiteren homogene Dirichlet–Randwerte.

Da wir keine  $H^2$ –Regularität zur Verfügung haben (vergl. Abschnitt 3.2.3), können wir den entsprechenden Spursatz für Neumann–Ränder nicht verwenden. Für diesen Fall erhalten wir die Spur  $\gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_N}$  als Fortsetzung einer stetigen Abbildung von  $H^* = \{v \in H^1(\Omega) \mid \Delta v \in L^2(\Omega)\}$  nach  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  (siehe Dautray und Lions [24][Lemma 1, S.381f]). Demnach existiert die Normalenableitung in  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  da  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ , diese kann nicht punktweise ausgewertet werden.

Wir haben die Dirichlet–Randbedingungen also explizit übernommen und in den Lösungsraum eingearbeitet, daher spricht man auch von wesentlichen Randbedingungen. Im Gegensatz dazu ergeben sich die Neumann–Randbedingungen auf natürliche Weise bei der Umformung des Randwertproblems (2.17) in die Variationsformulierung (2.20) (mit (2.21)), man spricht daher auch von natürlichen Randbedingungen.

Die Lösung des reinen Neumann–Problems ( $\Gamma_D = \emptyset$ ) ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt und muß die Kompatibilitätsbedingung

$$\rho g \int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Gamma_N} b v \, dx$$

erfüllen (siehe z.B. Braess [15]).

Die Lösung des Variationsproblems ((2.22) mit (2.21)) in  $H_d^1(\Omega)$  heißt schwache Lösung des Randwertproblems (2.17).

## 2.6 Existenz und Eindeutigkeit

Die Gleichung (2.14) für die Strömung einer nicht kompressiblen Flüssigkeit mit konstanter Dichte und Viskosität im gesättigten Untergrund führt uns auf den Fall eines linearen elliptischen Randwertproblems, für das eine gut ausgebaute Theorie bezüglich der Existenz und der Eindeutigkeit von Lösungen existiert.

**Definition 1** Es sei  $V$  ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_V$  und der Norm  $\|u\|_V = \sqrt{(u, u)_V}$ ,  $u \in V$ . Dann heißt die Bilinearform  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ :

beschränkt, falls ein  $\Gamma \in \mathbb{R}$  existiert mit

$$|a(u, v)| \leq \Gamma \|u\|_V \|v\|_V \quad u, v \in V$$

koerziv, falls ein  $\gamma > 0$  existiert mit

$$a(u, u) \geq \gamma \|u\|_V^2 \quad u \in V.$$

Eine beschränkte, koerzive Bilinearform auf dem Hilbertraum  $V$  heißt  $V$ -elliptisch.

Das folgende Lemma von Lax–Milgram liefert die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Variationsgleichungen mit einer  $V$ -elliptischen Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  und einem beschränkten, linearen Funktional  $\ell$ .

**Lemma 1 (Lax–Milgram–Lemma)** Sei  $a(\cdot, \cdot)$  eine  $V$ -elliptische Bilinearform und  $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$  ein beschränktes, lineares Funktional auf  $V$ . Dann hat die Variationsgleichung

$$u \in H : \quad a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H$$

für jedes  $\ell \in V'$  eine eindeutig bestimmte Lösung, und es gilt

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\gamma} \|\ell\|_{V'}$$

Dabei bezeichnet  $V'$  den Dualraum von  $V$ .

Beweis: siehe z.B. Brenner und Scott [18][Beweis zu Theorem 2.7.7].

**Satz 2** Unter den Voraussetzungen, daß die Permeabilität  $\underline{K}_0$  gleichmäßig positiv definit ist,  $p \in H_d^1(\Omega)$ ,  $b \in L^2(\Gamma_N)$  und der Spursatz (Satz 1) gilt, besitzt die schwache Formulierung (2.20) des Randwertproblems (2.17) für  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $d \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  Gebiet und  $\partial\Omega$  genügend glatt eine eindeutig bestimmte Lösung.

**Beweis:**

Ist die Permeabilität  $\underline{K}_0$  gleichmäßig positiv definit, so folgt die Koerzivität der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  aus (2.21) aus der Poincaré–Friedrichschen Ungleichung, die Beschränktheit von  $a(\cdot, \cdot)$  folgt aus

$$\int_{\Omega} |\nabla p|^2 d\Omega \leq \int_{\Omega} (|\nabla p|^2 + p^2) d\Omega = \|p\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Die Beschränktheit des Funktionals  $\ell$  erhalten wir für  $\mathbf{b} \in L^2(\Gamma_N)$  aus dem Spursatz (Satz 1) und der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung für  $L^2(\Omega)$ :

$$\begin{aligned}
 \ell(v) &= \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{b} \gamma_1 v \, d\sigma \\
 &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Gamma_N)} \|\gamma_1 v\|_{L^2(\Gamma_N)} \\
 &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Gamma_N)} \|\gamma_1 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
 &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Gamma_N)} c \|\gamma_1 v\|_{H^1(\Omega)} \\
 &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + c \|\mathbf{b}\|_{L^2(\Gamma_N)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Die Existenz und Eindeutigkeit der Randwertaufgabe (2.17) liefert dann das Lemma von Lax–Milgram (Lemma 1).

□