

## Kapitel 2

# Nichtlinearität und homoklines Chaos als Voraussetzung von Stabilität

Nach der Einführung und Motivation der Bewegungsgleichungen eines nichtlinearen Doppelkettensystems, soll in diesem Kapitel erläutert werden, wie es möglich ist, eine bestimmte lokale Amplitudenverteilung als räumlich lokale Anregung des Systems aufzufinden, die auch in der zeitlichen Entwicklung ihren lokalisierten Charakter beibehält, denn dies ist die Voraussetzung für weitere Untersuchungen der Transferdynamik und des Energieaustausches innerhalb des Doppelkettensystems. Würde eine räumlich lokalisierte Anregung nach kurzer Zeit eine Energieverteilung über das gesamte System zur Folge haben, so wäre es überhaupt nicht möglich, von zielgerichtetem Energietransfer oder Energietransport zu sprechen, da dies ja immer auch eine Lokalisierung der Energie innerhalb des Systems voraussetzt.

Intrinsische Eigenschaften des Systems, insbesondere die Nichtlinearitäten, wirken einer Diffusion der Energie über das Gesamtsystem entgegen. Dies ist der entscheidende Punkt, der die Betrachtung nichtlinearer Kettensysteme so interessant macht. Dabei ist von erheblicher Bedeutung, wie die Amplituden der einzelnen Kettenoszillatoren, als Folge der energetischen Anregung, zu einer bestimmten Startzeit  $T_0$  auf dem Kettensystem verteilt sind. Manche Verteilungen bleiben im zeitlichen Verlauf aufgrund der Selbstlokalisierungseffekte stabil, andere Verteilungen hingegen zeigen eine Tendenz zu diffusivem Verhalten.

Es hat sich unlängst gezeigt [22], [8], daß die Problematik, eine geeignete Startkonfiguration der Amplitudenverteilung zu finden, unter Umständen mit algebraischen Mitteln lösbar ist. Es gilt demnach, das auftretende Problem, nämlich eine geeig-

nete Anfangsbedingung für ein System nichtlinearer Differentialgleichungen zu finden, mit Hilfe einer, dem Differentialgleichungssystem zugrundeliegenden Abbildung zu lösen. Dabei handelt es sich in unserem Fall um eine iterative Punktabbildung  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ . Dem Differentialgleichungssystem wird eindeutig eine vierdimensionale Abbildung zugeordnet, deren Fixpunktverhalten Rückschlüsse auf die gesuchte Startkonfiguration unseres Ausgangssystems zulässt. Ziel ist es, in der Umgebung von hyperbolischen Fixpunkten dieser zugeordneten Abbildung sogenannte *homokline* Punkte zu finden, welche in der Lage sind, nach Rücktransformation auf die Doppelkette eine geeignete Amplitudenverteilung zu liefern. Wir suchen folglich ein Chaos ganz bestimmter Art, nämlich homoklines Chaos, mit dem eine lokalisierte Energie stabilisiert werden kann, um damit eine stabile Transfersituation herzustellen. Dies klingt etwas verwegen, ist aber, wie wir in Abschnitt 2.4 sehen werden, durchaus von Erfolg gekrönt.

## 2.1 Die vierdimensionale Abbildung

Ausgehend vom Gleichungssystem der GDNLS-Kette soll die Zuordnung einer iterativen Abbildung erläutert werden. Die GDNLS-Kette wird gewählt, da sie durch entsprechende Wahl der Nichtlinearitätsparameter  $\gamma$  und  $\mu$  den Übergang von der DST- zur AL-Kette ermöglicht. Setzt man in den Bewegungsgleichungen einen der Parameter  $\mu$  bzw.  $\gamma$  gleich Null, dann beschreiben sie die DST-Kette bzw. die AL-Kette.

Ausgangspunkt sind die Bewegungsgleichungen der GDNLS-Kette ohne Donator- und Akzeptoranteil, da die Übertragung einer energetischen Anregung von einer Kette auf die andere im Vordergrund der Untersuchungen steht. Der Energietransfer von dem Kettensystem in die Donator- bzw. Akzeptorgebiete hängt stark von der Ankopplung und der Beschaffenheit dieser Gebiete ab und erfordert gegebenenfalls eine gesonderte Untersuchung. Desweiteren werden zur Klärung der prinzipiellen Frage nach Möglichkeiten der Energieübertragung zwei homogene Kettenstränge betrachtet. Daher sind die On-Site-Energien und die ketteninternen Kopplungsparameter vorerst ortsunabhängig und das vereinfachte Gleichungssystem lautet dann

$$\begin{aligned}
i\dot{\psi}_n &= -V^\psi(1 + \mu|\psi_n|^2)(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) \\
&\quad -\gamma|\psi_n|^2\psi_n - \kappa(n)(1 + \mu|\psi_n|^2)\phi_n,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
i\dot{\phi}_n &= -V^\phi(1 + \mu|\phi_n|^2)(\phi_{n+1} + \phi_{n-1}) \\
&\quad -\gamma|\phi_n|^2\phi_n - \kappa(n)(1 + \mu|\phi_n|^2)\psi_n,
\end{aligned}$$

dessen stationäre Lösungen mit Hilfe des Ansatzes

$$\psi_n(t) = a_n e^{-i\omega t}, \quad \phi_n = b_n e^{-i\omega t} \tag{2.2}$$

untersucht werden können.

Wie bereits in [30] bewiesen wurde, müssen die Amplituden  $a_n$  und  $b_n$  reelle Größen sein, um schlußendlich stationäre Lösungen zu erhalten. Wird dieser Ansatz in Gl.(2.1) eingesetzt, so ergibt sich ein gekoppeltes Gleichungssystem für die Amplituden  $a_n$  und  $b_n$ :

$$\begin{aligned}
\omega a_n &= -\gamma a_n^3 - V^\psi(1 + \mu a_n^2)(a_{n+1} + a_{n-1}) - \kappa(n)b_n(1 + \mu a_n^2), \\
\omega b_n &= -\gamma b_n^3 - V^\phi(1 + \mu b_n^2)(b_{n+1} + b_{n-1}) - \kappa(n)a_n(1 + \mu b_n^2).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Als nächster Schritt folgt eine Substitution, durch die jeweils den Nachbaramplituden jeder Kette neue Variablen zugeordnet werden:

$$a_n = x_n, \quad a_{n-1} = y_n, \quad b_n = u_n, \quad b_{n-1} = v_n. \tag{2.4}$$

Jeder Punkt in einer  $(x, y)$ - bzw.  $(u, v)$ -Hyperebene repräsentiert ein  $(a_n, a_{n-1})$  bzw.  $(b_n, b_{n-1})$  Amplituden-Tupel auf der  $\psi$ - bzw.  $\phi$ -Kette.

Wird das dadurch entstandene Gleichungssystem nach den  $(n+1)$ -ten Gliedern der vier neuen Variablen  $x, y, u$  und  $v$  aufgelöst

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= -\frac{\gamma x_n^3 + \omega x_n}{V^\psi(1 + \mu x_n^2)} - y_n - \frac{\kappa(n)}{V^\psi} u_n, \\
u_{n+1} &= -\frac{\gamma u_n^3 + \omega u_n}{V^\phi(1 + \mu u_n^2)} - v_n - \frac{\kappa(n)}{V^\phi} x_n,
\end{aligned}$$

so entsteht eine vierdimensionale iterative nichtlineare Abbildungsvorschrift mit den skalierten Parametern:

$$\gamma^\psi = \frac{\gamma}{V^\psi}, \quad \gamma^\phi = \frac{\gamma}{V^\phi}, \quad \omega^\psi = \frac{\omega}{V^\psi}, \quad \omega^\phi = \frac{\omega}{V^\phi}, \tag{2.5}$$

$$A : \begin{pmatrix} x_n \\ u_n \\ y_n \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{n+1} = -\frac{\gamma^\psi x_n^3 + \omega^\psi x_n}{(1 + \mu x_n^2)} - y_n - \frac{\kappa(n)}{V^\psi} u_n \\ u_{n+1} = -\frac{\gamma^\phi u_n^3 + \omega^\phi u_n}{(1 + \mu u_n^2)} - v_n - \frac{\kappa(n)}{V^\phi} x_n \\ y_{n+1} = x_n \\ v_{n+1} = u_n \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Die Abbildung  $A$  ist eine nichtlineare Abbildung von  $\mathbb{R}^4$  nach  $\mathbb{R}^4$ . Hierbei werden Punkte (Elemente) in  $\mathbb{R}^4$  als Spaltenvektoren geschrieben.  $A$  ist dabei wegen (2.6) *keine* lineare Transformation.

Mit  $DA_{\vec{x}}$  wird die lineare Approximation der Abbildung  $A$  im Punkte  $\vec{x}$  bezeichnet. Weiterhin gilt

$$A^{n+1} = A^n \circ A,$$

wobei  $A^n$  die  $n$ -fache Iteration der Abbildung  $A$  ist.

Im Mittelpunkt der Untersuchung steht jetzt das Auffinden von lokalisierten Lösungen auf der Doppelkette. Eine lokalisierte Lösung zeichnet sich dadurch aus, daß der überwiegende Anteil der Anregungsenergie auf nur einigen wenigen Kettenplätzen verteilt ist. Um z. B. den überwiegenden Anteil der Energie auf dem Kettenplatz  $j$  zu lokalisieren, muß gelten:

$$|\Phi_j|^2 \gg |\Phi_{j+n}|^2 \quad \text{bzw.} \quad |\Psi_j|^2 \gg |\Psi_{j+n}|^2 \quad \text{für } n > 0 \quad \text{und für } n < 0.$$

Für solitonartige Lösungen erwarten wir ein exponentielles Abklingen der Amplituden rechts und links von dem Gitterplatz, um den die Energie lokalisiert ist. Je schneller das Absinken der Amplituden rechts und links dieses Gitterplatzes vonstatten geht, umso stärker lokalisiert ist die Energie.

Die Untersuchung der  $(x, y)$ - und  $(u, v)$ -Hyperebenen der Abbildung  $A$  zeigt uns, wie durch die Iteration die Nachbaramplituden  $a_n$  und  $a_{n+1}$  bzw.  $b_n$  und  $b_{n+1}$  entstehen. Wir können an der jeweiligen Form der Orbits der Abbildung  $A$  die Amplitudenverteilung auf der Doppelkette ablesen.

Die Orbits auf der  $(x, y)$ - und der  $(u, v)$ -Ebene stehen ja gerade für die räumliche Amplitudenverteilung  $a_n$  und  $b_n$  auf der entsprechenden Kette. Es wird sich später herausstellen (Abschnitt 2.3.), daß die instabilen (hyperbolischen) Fixpunkte mit ihren stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eine Voraussetzung für die Existenz

von lokalisierten Lösungen darstellen.

Die nichtlineare Abbildung  $A$  kann mit einem Startvektor

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ u_n \\ y_n \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad (2.7)$$

in einer kompakten Schreibweise formuliert werden:

$$\vec{x}_{n+1} = A(\vec{x}_n). \quad (2.8)$$

Es ist also mit Hilfe des Ansatzes (2.2) sowie der Substitutionsvorschrift (2.4) gelungen, dem Differentialgleichungssystem (2.1) eine vierdimensionale Abbildung zuzuordnen.

Die weitere Zielsetzung ist nun, mittels dieser Abbildung  $A$  eine Ausgangsamplitudenverteilung auf der Kette zu finden, die anfänglich, aber auch in der darauf folgenden zeitlichen Entwicklung eine lokalisierte Energieverteilung bewirkt.

Bevölkert man den Vektor  $\vec{x}_n$  mit Anfangswerten und läßt die Abbildung  $A$  mehrfach auf ihn wirken, so ergeben sich, je nach Wahl der Parameter, die nachstehenden Bilder (2.1-1 bis 2.1-3). Da die Abbildungsvorschrift  $\mathbb{R}^4$  auf  $\mathbb{R}^4$  abbildet ( $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ), werden zu ihrer Darstellung die Unterräume der  $(x, y)$ - und  $(u, v)$ -Ebenen herangezogen. Durch die hohe Symmetrie des Doppelstrangsystems sieht die Abbildung  $A$ , für den Fall gleicher Anfangswerte in der  $(x, y)$ - und in der  $(u, v)$ -Ebene, in beiden Unterräumen identisch aus.

Wiederholte Anwendung von Gleichung (2.6) erzeugt eine Menge von Punkten

$\{x_n, u_n, y_n, v_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , die als *Orbit* bezeichnet wird.

Abbildung  $A$  ist eine volumenerhaltende Abbildung, denn die Bedingung:

$$\det(DA_{\vec{x}}) = 1$$

ist für alle  $\vec{x}$  erfüllt ( $DA$  ist hier die Jacobimatrix der Abbildung).

Volumenerhaltung bedeutet, daß im Liouville'schen Sinne keine Änderung des Phasenraumvolumens des Systems vorliegt, da das Doppelkettensystem konservativ ist und keine Dissipation zeigt.

Die volumenerhaltende Abbildung  $A$  erzeugt periodische, quasiperiodische oder chaotische Orbits.

- Eine *periodische* Abbildung der Periode  $k$  kehrt nach  $k$ -facher Anwendung wieder zum Startwert zurück, d. h.  $\underbrace{A \circ A \dots A \circ A}_{k \text{ fach}}(\vec{x}) = \vec{x}$ . Ein periodischer Orbit besteht daher aus einer diskreten Punktmenge. Ein Fixpunkt ist ein periodischer Orbit mit der Periode  $k = 1$ .
- Eine *quasiperiodische* Abbildung kehrt nicht nach endlich vielen Iterationen zu ihrem Startwert zurück. Erst für  $k \rightarrow \infty$  wird der Ausgangspunkt wieder erreicht. Der so entstandene quasiperiodische Orbit bildet in zwei Dimensionen eine kreis- oder ellipsenförmige Punktmenge mit einem stabilen Fixpunkt als Mittelpunkt. (Ein stabiler Fixpunkt ist auch in seiner Umgebung stabil.) Für  $k \rightarrow \infty$  bildet die Punktmenge eine Kurve, die dicht in  $\mathbb{R}^2$  liegt. Diese Eigenschaft wird in der Mathematik als *ergodisch* bezeichnet.
- Eine *chaotische* Abbildung erzeugt hingegen völlig irreguläre Punktfolgen in denen keine Struktur erkennbar ist.

Ein periodischer Orbit bzw. ein Fixpunkt kann stabil oder instabil sein. Ein stabiler Fixpunkt ist von elliptischen quasiperiodischen Orbits umgeben. Ein instabiler Fixpunkt hat in seiner Umgebung Bereiche deren innere Punkte sich bei Iteration weit vom Fixpunkt entfernen können.

In der Nähe eines instabilen Fixpunktes einer nichtintegrablen Abbildung findet man chaotische Bereiche. Zu einem instabilen Fixpunkt gehören stabile und instabile Mannigfaltigkeiten. Für integrable Abbildungen sind stabile und instabile Mannigfaltigkeiten identisch und formen einen Orbit. Dieser Orbit wird aufgrund seiner Trennungseigenschaft von verschiedenen Phasenraumbereichen als *Separatrix* bezeichnet. Ist die Abbildung nicht integrabel, so kommt es in der Nähe von instabilen Fixpunkten zu einem "Gewirr" (homoclinic tangles) der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten. Diese Bereiche bilden Übergänge zu chaotischen Bereichen der Abbildung (z. B. Hufeisenchaos). Die Entstehung dieser chaotischen Bereiche (auch stochastische Schicht genannt) ist charakteristisch für nichtintegrable Abbildungen. Es ist möglich, nichtintegrable Abbildungen störungstheoretisch zu behandeln. In Abschnitt 2.2 wird dieser Ansatz im Rahmen der Melnikovmethode vorgestellt. Der nichtintegrable Anteil wird dabei als Störung der integrablen Abbildung angesehen. Das *KAM-Theorem* [23] besagt für den zweidimensionalen Fall unter anderem, daß bei kleinen Störungen nur wenige quasiperiodische Orbits aufbrechen und die Entstehung von chaotischen Bereichen nur auf einige wenige Raumbereiche beschränkt

bleibt. Je größer die Störung wird, umso größer werden die chaotischen Bereiche und immer weniger quasiperiodische Orbits bleiben erhalten. Die erhaltenen Orbits werden dabei immer stärker deformiert. Gleichzeitig können auch die periodischen Orbits ihre Stabilitätseigenschaften ändern.

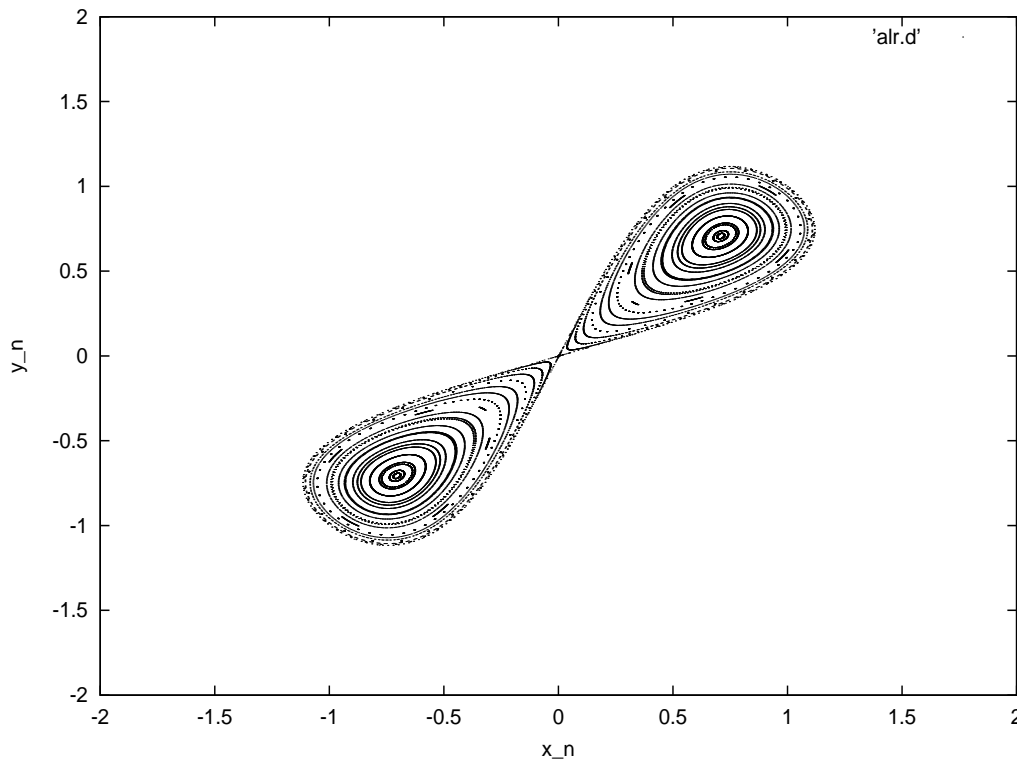


Abbildung 2.1-1: Iteration der Abbildung  $A$  mit den Parameterwerten  $\gamma = 0$ ,  $\mu = 1$ ,  $\kappa = 0$ ,  $V = 1$ . 50 Anfangswerte auf der Winkelhalbierenden werden 500mal iteriert (integrables System).

Abbildung (2.1-1) stellt eine Iteration der Abbildung  $A$  dar, die mit  $\gamma = \kappa = 0$  eine einzelne integrable AL-Kette repräsentiert. Man erkennt zwei elliptische Fixpunkte bei  $x_n = y_n = \pm 0.7$ . Im Ursprung  $(0, 0)$  hat die Abbildung einen elliptischen

Fixpunkt. Stabile und instabile Mannigfaltigkeit sind identisch und bilden eine Separatrix.

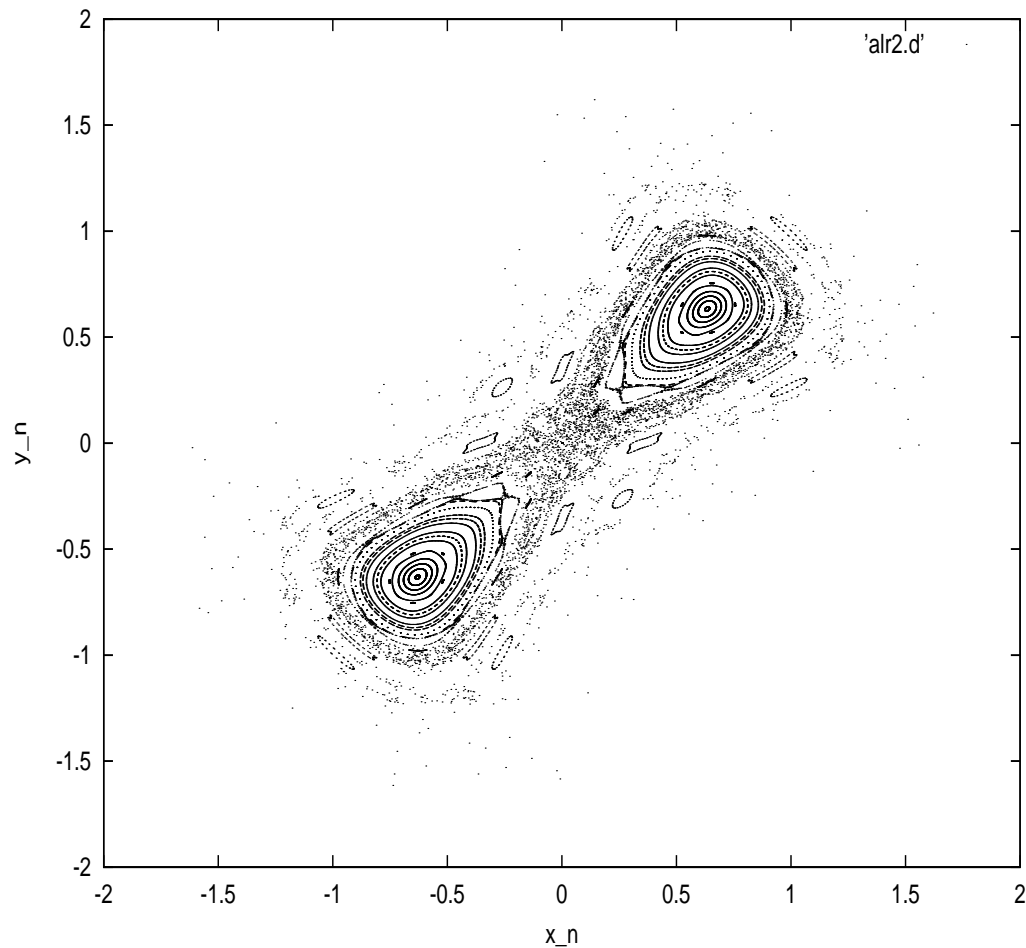


Abbildung 2.1-2: Abbildung  $A$  mit den Parameterwerten  $\gamma = 0.5$ ,  $\mu = 1$ ,  $\kappa = 0$ ,  $V = 1$ . 50 Anfangswerte auf der Winkelhalbierenden werden 500mal iteriert. Das System ist durch Einschalten von  $\gamma$  nichtintegrabel geworden. Die Separatrix ist aufgelöst und nicht mehr zu erkennen.



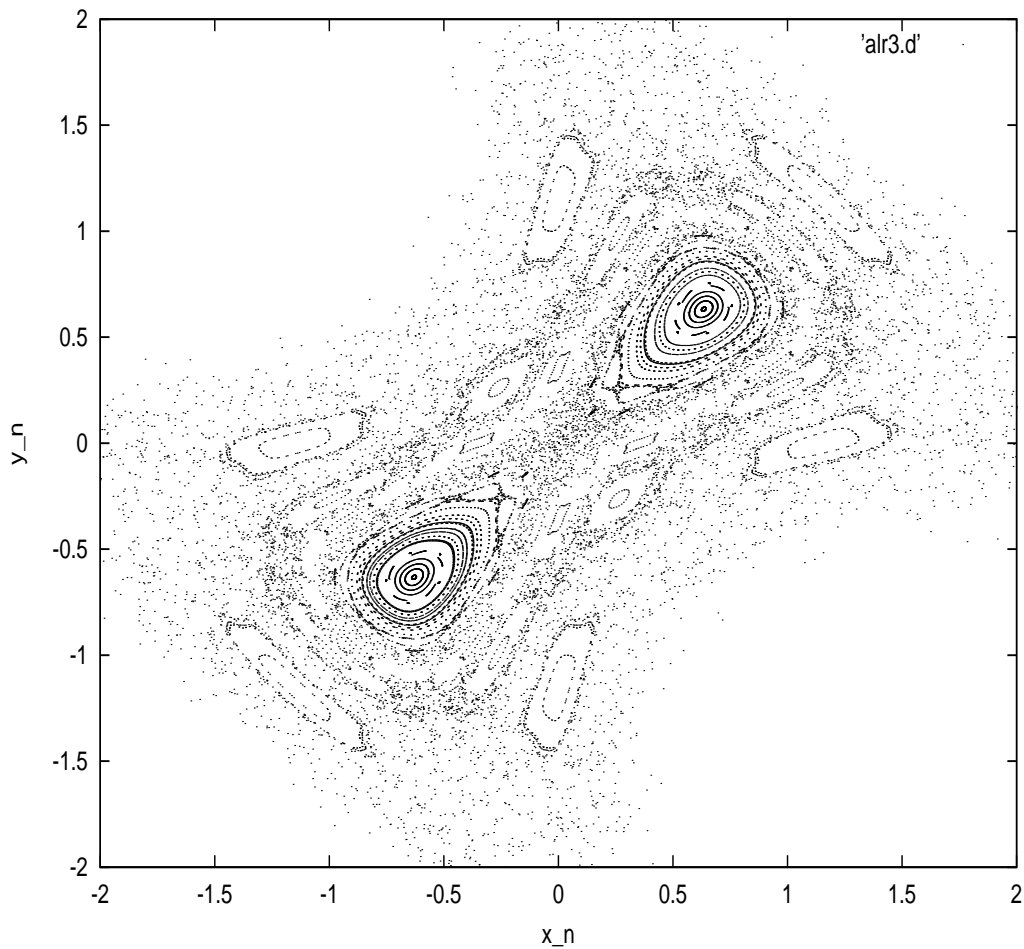


Abbildung 2.1-3: Abbildung  $A$  mit den Parameterwerten  $\gamma = 0.5$ ,  $\mu = 1$ ,  $\kappa = \kappa(n)$  (gaußverteilt),  $V = 1$ . 50 Anfangswerte auf der Winkelhalbierenden werden 500mal iteriert. Die Aufspaltung von quasiperiodischen Orbits ist, im Vergleich zu Abbildung (2.1-2), durch das Einschalten der Kopplung noch weiter fortgeschritten (nichtintegrables System).

## 2.2 Allgemeine Definition des Melnikovvektors

In diesem Abschnitt soll die Methode der höherdimensionalen Melnikovanalyse gemäß [25] beschrieben werden.

Diese Methode stellt eine Erweiterung der Methode für planare Abbildungen von

Glasser et. al. [22] dar.

Der ursprüngliche Zugang zu dem Problem der Melnikovanalyse wurde von Chow und Yamashita eingeführt und ist geometrischer Natur [26]. Sie formulieren das Problem mit Hilfe von Systemen linearer Gleichungen und unter Anwendung der Fredholm-Alternative. In einer Weiterentwicklung dieser Arbeiten ist es Bountis gelungen, eine Melnikovanalyse für höherdimensionale Abbildungen zu entwickeln [25].

Die Melnikovanalyse soll in den folgenden Kapiteln auf die in Abschnitt 2.1 eingeführte Abbildung angewendet werden. Es folgt eine kurze Einführung in die Methodik gemäß [19].

Für eine mehrdimensionale Abbildung  $M$  ist es möglich, einen Melnikovvektor zu berechnen. Die Komponenten dieses Melnikovvektors geben den Abstand zwischen der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit eines hyperbolischen Fixpunktes dieser Abbildung an.

Unter der Annahme, daß der hyperbolische Fixpunkt im Koordinatenursprung liegt, gilt mit  $\vec{x} \in R^n$  folgende Definition für die stabile Mannigfaltigkeit  $W^s$  und die instabile Mannigfaltigkeit  $W^u$ :

$$W^s : = \{ \vec{x}_n \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \}, \quad (2.9)$$

$$W^u : = \{ \vec{x}_n \mid \lim_{n \rightarrow -\infty} \vec{x}_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow -\infty \}. \quad (2.10)$$

Dabei beschreibt  $\vec{x}_n$  die n-te Iteration einer Abbildung  $M$ :

$$\vec{x}_{n+1} = M(\vec{x}_n).$$

Die Melnikovanalyse ist eine Methode der Störungstheorie. Demgemäß wird die Abbildung  $M$  in einen ungestörten Anteil  $F$  und einen Störungsanteil  $G$  zerlegt:

$$\vec{x}_{n+1} = M(\vec{x}_n) = F(\vec{x}_n) + \epsilon G(\vec{x}_n). \quad (2.11)$$

Der dimensionslose Parameter  $\epsilon \ll 1$  reguliert die Stärke der Störung. Die Zerlegung von  $M$  in  $F$  und  $G$  wird so gewählt, daß der ungestörte Anteil  $F$  aus einer integrierbaren Ausgangsgleichung herleitbar ist.

Besitzt die ungestörte, integrierbare Abbildung  $F$  einen hyperbolischen Fixpunkt, so sind dessen stabile und instabile Mannigfaltigkeiten identisch. Dies ist die Separatrixlösung des Systems.

Im Folgenden wird ein Variationsproblem bzw. ein adjungiertes Variationsproblem der Separatrix betrachtet.

Ziel dieser Untersuchung ist, stabile und instabile Mannigfaltigkeiten und insbesondere deren Abstände für das gestörte System zu erhalten. Schneiden sich die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten transversal, so liegt homoklines Chaos vor.

Die Gesamtheit der Schnittpunkte bildet dabei den homoklinen Orbit des hyperbolischen Fixpunktes der gestörten Abbildung.

An dieser Stelle sei bereits erwähnt, daß der homokline Orbit eine stationäre lokalisierte Lösung definiert, die als Anfangsbedingung für das zeitabhängige Problem eine stabile solitonartige Lösung des gestörten Systems liefert. Für den ungestörten Anteil der Abbildung ist der homokline Orbit mit der Separatrix identisch.

Die Abstände der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten eines hyperbolischen Fixpunktes der gestörten Abbildung sollen als Komponenten eines Vektors, des *Melnikovvektors*, dargestellt werden.

Dazu werden die Variationsgleichungen

$$\begin{aligned}\vec{q}_{n+1} &= D_n \vec{q}_n, \\ \vec{q}_{n+1}^T &= \vec{q}_n^T D_n^{-1},\end{aligned}\tag{2.12}$$

mit

$$D_n = DF(\vec{x}_n^0)$$

verwendet. Die  $\vec{q}_n$  sind n-dimensionale Vektoren und  $D_n$  bezeichnet die Jacobimatrix der ungestörten Abbildung.  $\vec{x}_n^0$  bezeichnet einen (parametrisierten) ungestörten Orbit der Abbildung, d. h.  $\vec{x}_{n+1}^0 = F(\vec{x}_n^0)$ .

Bei der fundamentalen Lösungsmatrix  $Q_n$  bzw.  $\tilde{Q}_n$  handelt sich es um eine Matrix, deren Spalten bzw. Zeilen linear unabhängige Lösungen der Variationsgleichungen (2.12) sind und deren Rang gleich der Dimension des Parameterraums  $R^m$  ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}Q_{n+1} &= D_n Q_n, \\ \tilde{Q}_{n+1} &= \tilde{Q}_n D_n^{-1}.\end{aligned}$$

Zwischen den fundamentalen Lösungsmatrizen besteht folgender Zusammenhang, der später (Anhang B) anhand der expliziten Lösungen für das Ablowitz-Ladik-System noch verifiziert wird:

$$\tilde{Q}_{n+1} Q_{n+1} = \tilde{Q}_n Q_n = \tilde{Q}_0 Q_0 = \text{constant}.\tag{2.13}$$

$\vec{x}_n(s, t)$  sei jetzt ein Orbit des gestörten Systems.

(Eine explizite Parametrisierung eines ungestörten Orbits mit jeweils einem Parameter für jede zweidimensionale Hyperebene der Abbildung  $A$  ist im nächsten Abschnitt angegeben.)

Dieser soll, wie folgt, in einer Potenzreihe im Störparameter  $\epsilon$ , in der Nähe des ungestörten homoklinen Orbits, entwickelt werden:

$$\vec{x}_n = \vec{x}_n^0 + \epsilon \vec{x}_n^{(1)} + \epsilon^2 \vec{x}_n^{(2)} + \dots$$

Unter Benutzung der ersten beiden Glieder und Gleichung (2.11) erhält man die Variationsgleichung:

$$\vec{x}_{n+1}^{(1)} = D_n \vec{x}_n^{(1)} + G(\vec{x}_n^0). \quad (2.14)$$

Soll  $\vec{q}_n$  eine Lösung der Variationsgleichung (2.12) sein, dann muß  $\vec{q}_n$  für alle  $n$  beschränkt sein.

Multiplikation von Gleichung (2.14) mit  $\vec{q}_{n+1}$  (bzw.  $\vec{q}_{n+1}^T$ ) und Summation über alle  $n$  liefert:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \vec{q}_{n+1} \vec{x}_{n+1}^{(1)} - \vec{q}_{n+1} D_n \vec{x}_n^{(1)} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{q}_{n+1} G(\vec{x}_n^0(s, t)). \quad (2.15)$$

Gelingt es, bestimmte  $s = s^*$  und  $t = t^*$  so zu finden, daß die Summe verschwindet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{q}_{n+1} G(\vec{x}_n^0(s^*, t^*)) = 0, \quad (2.16)$$

dann sind dies die gesuchten Schnittpunkte von stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit des hyperbolischen Fixpunktes.

Ist (2.16) erfüllt, dann muß die linke Seite von (2.15) für  $(s^*, t^*)$  ebenfalls Null sein:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \vec{q}_{n+1} \vec{x}_{n+1}^{(1)} - \vec{q}_n \vec{x}_n^{(1)} \right) = 0. \quad (2.17)$$

Die Reihe (2.17) kann andererseits nur konvergieren, wenn  $\vec{x}_n^{(1)}$  für alle  $n$  beschränkt ist.

Die notwendige Bedingung ist demnach, den ungestörten Orbit  $\vec{x}_n^0$  mit solchen Parametern  $s^*$  und  $t^*$  zu beschreiben, daß die Abbildung auch unter der Störung  $G$  beschränkt bleibt.

Die gesuchten Anfangswerte der Iteration (2.11), die zu einer stabilen Lösung führen, sind somit durch die Nullstellen von (2.16) gegeben. Setzt man  $s^*$  und  $t^*$  in die Parametrisierung von  $\vec{x}_n$  ein und führt die Iteration

$$\vec{x}_{n+1} = F(\vec{x}_n) + \epsilon G(\vec{x}_n)$$

durch, so erhält man genau die Anfangsbedingung des Systems, die zu einer stabilen, lokalisierten Lösung der zeitlichen Entwicklung führt. Dies wird in den nächsten Abschnitten gezeigt.

Die Summe (2.15) dient als Definition für den Melnikovvektor:

$$M_i(s, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{q}_{n+1}^{(i)} G(\vec{x}_n^0(s, t)) \quad (i = 1, 2).$$

( $i = 1, 2$  ist der Index für jeden Unterraum in dem ein Parameter den ungestörten Orbit parametrisiert. Hier sind dies die Parameter  $s$  und  $t$ .)

## 2.3 Der Melnikovvektor der GDNLS-Doppelkette

Nach der einführenden Darstellung der Melnikovmethode, wird dieser Formalismus jetzt auf die GDNLS-Doppelkette angewendet. Damit soll exemplarisch gezeigt werden, daß transversale Schnitte der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten und damit homoklines Chaos in Abbildungen auftreten, die mehrdimensionalen, nicht-linearen Schrödingersystemen zugrunde liegen. Der Nutzen dieses Phänomens liegt dann in der Möglichkeit, Selbstorganisationsprozesse in Form von Selbstlokalisierung der Anregungsenergie gezielt produzieren zu können.

Ausgehend von der Iterationsvorschrift (2.6) des GDNLS-Systems, wird die Abbildung in einen integralen Anteil  $F$  und einen nichtintegralen Anteil  $G$  aufgespalten, um somit die störungstheoretische Melnikovmethode anwenden zu können.

In Abschnitt 2.2 wurde die Zerlegung

$$\vec{x}_{n+1} = A(\vec{x}_n) = F(\vec{x}_n) + \epsilon G(\vec{x}_n) \quad (2.18)$$

als störungstheoretischer Ansatz für die Abbildung  $A$  begründet.

Für das GDNLS-Doppelkettensystem gilt:

$$F(\vec{x}_n) = \begin{pmatrix} \frac{-\omega^\psi x_n}{1 + \mu x_n^2} - y_n \\ \frac{-\omega^\phi u_n}{1 + \mu u_n^2} - u_n \\ x_n \\ u_n \end{pmatrix}$$

und

$$G(\vec{x}_n) = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma^\psi x_n^3}{1 + \mu x_n^2} - \frac{\kappa(n)}{V^\psi} u_n \\ -\frac{\kappa(n)}{V^\phi} x_n - \frac{\gamma^\phi u_n^3}{1 + \mu u_n^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt es, den Orbit der ungestörten Abbildung zu parametrisieren. Wenn die Störung ausgeschaltet ist, gilt  $\kappa(n) = 0$  und  $\gamma = 0$  und wir betrachten zwei entkoppelte AL-Ketten ( $\gamma = 0$  führt gemäß Kapitel 1 auf die Ablowitz-Ladik-Kette). Es existiert je eine Separatrix in der  $(x, y)$ -Hyperebene und eine in der  $(u, v)$ -Hyperebene. Ausgangspunkt ist das Gleichungssystem der Amplituden Gl.(2.3) für den ungestörten Fall:

$$\begin{aligned} \omega a_n &= -V^\psi(1 + \mu a_n^2)(a_{n+1} + a_{n-1}), \\ \omega b_n &= -V^\phi(1 + \mu b_n^2)(b_{n+1} + b_{n-1}). \end{aligned}$$

Die jetzt entkoppelten Gleichungen werden dahingehend umgeformt, daß zwei Konstanten der Bewegung als implizit dargestellte Funktionen die Separatrix in der  $(x, y)$ -Ebene bzw. in der  $(u, v)$ -Ebene analytisch beschreiben. Anschließend werden diese Funktionen, die nicht eindeutig auflösbar sind, parametrisiert, um die Separatrix in Gestalt von sogenannten Lemniskaten geschlossen darstellen zu können.

Die erste der letztgenannten Gleichungen wird unter Beachtung von (2.5) mit  $(a_{n+1} - a_{n-1})$  multipliziert und anschließend um  $a_n^2$  erweitert. Die zweite Gleichung wird ent-

sprechend umgeformt. Dies führt mit (2.5) auf:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 + a_n^2 + \mu a_{n+1}^2 a_n^2 + \omega^\psi a_{n+1} a_n &= a_n^2 + a_{n-1}^2 + \mu a_n^2 a_{n-1}^2 + \omega^\psi a_n a_{n-1}, \\ b_{n+1}^2 + b_n^2 + \mu b_{n+1}^2 b_n^2 + \omega^\phi b_{n+1} b_n &= b_n^2 + b_{n-1}^2 + \mu b_n^2 b_{n-1}^2 + \omega^\phi b_n b_{n-1}. \end{aligned}$$

Da dies für alle  $n$  gilt, erhält man mit der Substitutionsvorschrift für die Nachbaramplituden (2.4) zwei Konstanten der Bewegung:

$$\begin{aligned} x_n^2 + y_n^2 + \mu x_n^2 y_n^2 + \omega^\psi x_n y_n &= \text{const.}, \\ u_n^2 + v_n^2 + \mu u_n^2 v_n^2 + \omega^\phi u_n v_n &= \text{const.} \end{aligned}$$

Werden die Konstanten o. B. d. A. gleich Null gesetzt und die Indizes vorerst vernachlässigt, erhält man die impliziten Gleichungen der Separatrizen:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 = \mu x^2 y^2 + x^2 + y^2 + \omega^\psi xy, \\ g(u, v) &= 0 = \mu u^2 v^2 + u^2 + v^2 + \omega^\phi uv, \end{aligned}$$

deren Graphen Lemniskaten in der  $(x, y)$ - bzw.  $(u, v)$ -Ebene sind.

Aus  $f$  und  $g$  können kanonische Bewegungsgleichungen abgeleitet und mit Hilfe von hyperbolischen Funktionen im positiven Quadranten gelöst werden [22]. Man erhält die kontinuierlichen Parametrisierungen der Lemniskaten (Separatrizen) mit den Parametern  $t$  und  $s$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sinh(\beta_1) \operatorname{sech}(\sinh(\beta_1)t - t_0), & y(t) &= \sinh(\beta_1) \operatorname{sech}(\sinh(\beta_1)t + \beta_1 - t_0), \\ u(s) &= \sinh(\beta_2) \operatorname{sech}(\sinh(\beta_2)s - s_0), & v(s) &= \sinh(\beta_2) \operatorname{sech}(\sinh(\beta_2)s + \beta_2 - s_0). \end{aligned}$$

Dabei ist  $\beta_{1,2}$  durch

$$\cosh(\beta_{1,2}) = \pm \frac{\omega^{\psi,\phi}}{2} \quad (2.19)$$

erklärt. Da der Definitionsbereich der  $\operatorname{Arccosh}$ -Funktion nur Werte größer Eins zuläßt ( $D(\operatorname{Arccosh}) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ ), muß  $|\omega| \geq 2$  gelten. Dies ist auch für die Existenz eines hyperbolischen Fixpunktes im Ursprung der Abbildung  $A$  notwendig. Auf eine umfangreiche Stabilitätsanalyse der Abbildung, die Aufschluß über Existenz und hyperbolisches bzw. elliptisches Verhalten von Fixpunkten gibt, kann an dieser Stelle verzichtet werden, da die Gestalt der Poincare-Abbildung (Abschnitt 2.1) eindeutig einen hyperbolischen Fixpunkt im Ursprung identifiziert. Die Abhängigkeit

des Fixpunktverhaltens von anderen Systemparametern kann durchaus kompliziert sein. Dabei spielen verschiedene Bifurkationstypen eine wichtige Rolle, die beim Übergang von stabilen zu instabilen Fixpunkten auftreten und mit Hilfe von Linearisierungsansätzen klassifiziert werden können. Mehr hierzu findet sich z. B. in [19] und [32]. Werden die Parameter gemäß

$$t = n\tilde{t}, \quad s = n\tilde{s} \quad \text{mit} \quad \tilde{t} = \frac{\beta_1}{\sinh(\beta_1)} \quad \text{und} \quad \tilde{s} = \frac{\beta_2}{\sinh(\beta_2)}$$

diskretisiert, so ergibt sich eine Parametrisierung des ungestörten Orbits, der aus zwei disjunkten, eindimensionalen Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  besteht und als Vereinigung dieser beiden Separatrizen anzusehen ist. Dabei parametrisiert  $t$  die Separatrix in der  $(x, y)$ -Ebene und  $s$  die Separatrix in der  $(u, v)$ -Ebene.

$$\vec{x}_n^0(t, s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \begin{pmatrix} \sinh(\beta_1) \operatorname{sech}(t - n\beta_1) \\ \sinh(\beta_2) \operatorname{sech}(s - n\beta_2) \\ \sinh(\beta_1) \operatorname{sech}(t - (n+1)\beta_1) \\ \sinh(\beta_2) \operatorname{sech}(s - (n+1)\beta_2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4. \quad (2.20)$$

Der Index  $n$  repräsentiert als Iterationsindex eine diskrete Zeitvariable und kann daher bei zeitlich stabilen Amplitudenverteilungen quasi beliebig gewählt werden. Eine Verschiebung des Index  $n$  bedeutet lediglich die Auswahl eines anderen Durchlaufs (Loop) auf der Lemniskate. Die Separatrizen in der  $(x, y)$ - bzw.  $(u, v)$ -Ebene repräsentieren ja gerade die Erhaltungsgrößen und damit die zeitlich stabilen Amplitudenkonfigurationen der  $a_n$ 's und  $b_n$ 's. Auf der negativen Schlaufe der Separatrix ändern sich die Vorzeichen der Amplituden, aber nicht ihre Verteilungsform. In der  $(x, y)$ -Ebene sowie in der  $(u, v)$ -Ebene hat die ungestörte Separatrix (Lemniskate) folgende Gestalt :



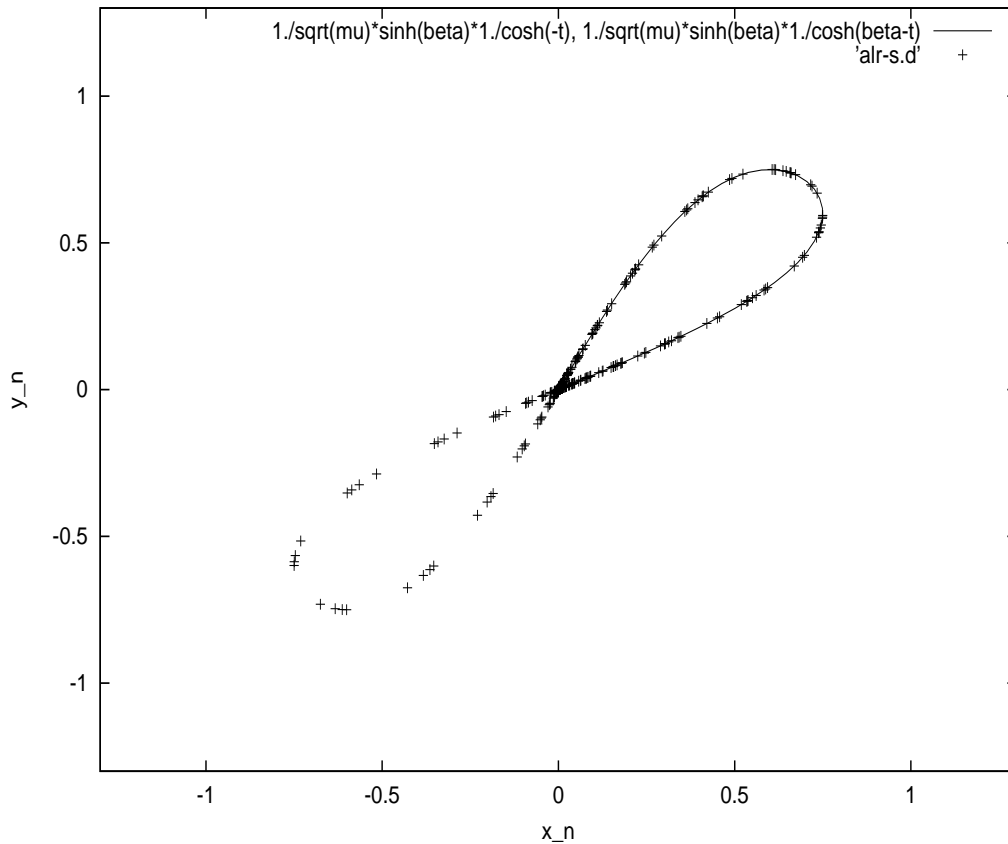


Abbildung 2.3-1: Separatrix der ungestörten Abbildung  $F$  gemäß (2.20) für  $n = 0$  und  $t \in (-10, 10)$ . Für die Verifizierung der Parametrisierung sind zur Kontrolle einige Iterationspunkte der Abbildung  $F$  eingetragen. Startwert ist ein  $(t, s)$ -Tupel in der direkten Umgebung des hyperbolischen Fixpunktes  $(0, 0)$ . Die Iteration treibt die Punkte wiederholt loop-artig vom Ursprung weg und wieder auf ihn zu. Jeder Loop steht dabei gemäß (2.4) für eine Amplitudenkonfiguration  $a_n$ . Für große  $n$  wird die Lemniskate komplett überdeckt. Die Übereinstimmung der Iterationspunkte mit der Parametrisierung ist evident.

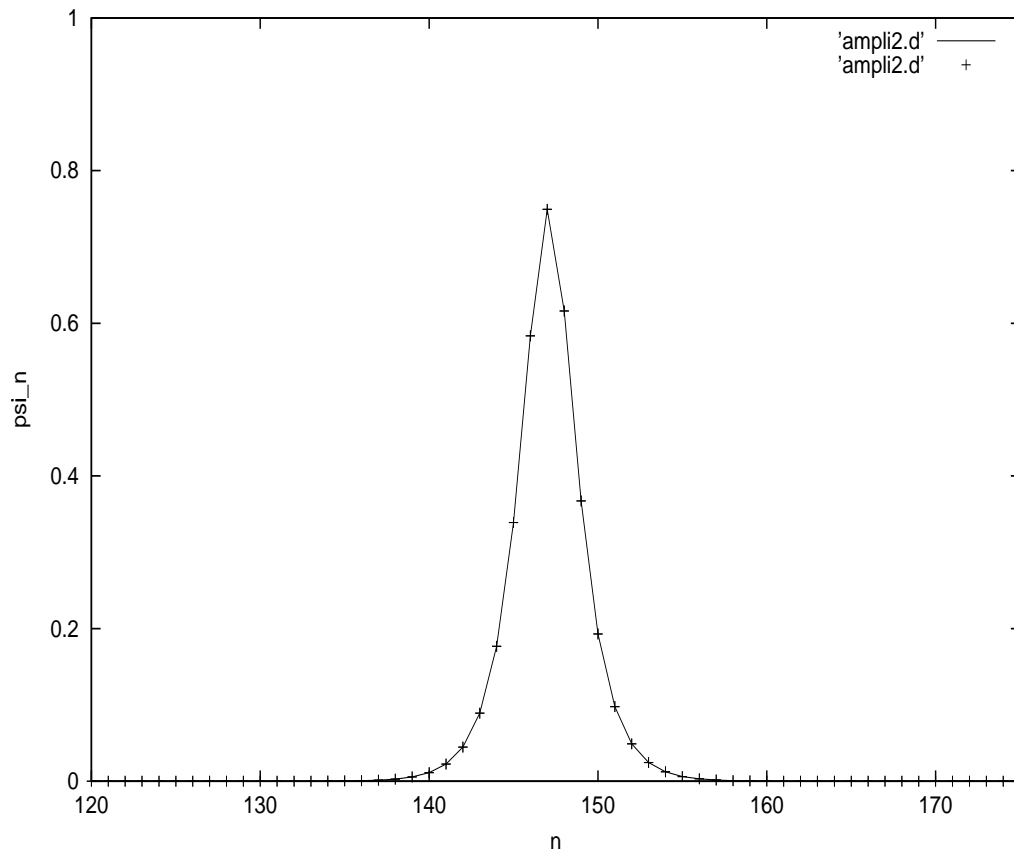


Abbildung 2.3-2: Exemplarische Amplitudenverteilung ( $n = 120$  bis  $175$ ) auf der (ungestörten!)  $\psi$ -Kette nach Rücksubstitution (2.4) der Daten aus der  $(x, y)$ -Ebene. Das Amplitudenprofil ist invariant gegen Verschiebungen des Index  $n$  und deshalb einerseits invariant gegenüber Verschiebungen entlang der  $\psi$ -Kette und desweiteren zeitlich stabil, da stets die gleiche Amplitudenverteilung durch beliebige Wahl von  $n$  in der Parametrisierungsvorschrift erzeugt wird.

### 2.3.1 Das ungestörte System als Repräsentant einer integrierbaren Ablowitz-Ladik-Kette

Wird das ungestörte System für  $\gamma = 0$  und  $\kappa = 0$  betrachtet, so hat man gemäß Kapitel 1 zwei einzelne Ablowitz-Ladik-Ketten vorliegen. In [3] wurde für die nicht-lineare eindimensionale AL-Kette die folgende analytische Solitonlösung angegeben:

$$\Psi_n^{AL}(t) = A \operatorname{sech}(B(n - ut - x_0)) \exp(-i(\omega t + Cn + \delta)) \quad (2.21)$$

mit:

$$A = \frac{\sinh(B)}{\sqrt{\mu}}, \quad B = \operatorname{arccosh} \left( -\frac{\omega}{2V \cos(C)} \right) \quad \text{und der Energie } E = -\frac{4}{\mu} \cos(C) \sinh(B)$$

Die Amplitudenverteilung hat die Form einer *sech*-Glockenkurve mit der inversen Breite  $B$  und dem Schwerpunkt am Kettenplatz  $x_0$ . Dieses Soliton bewegt sich im Laufe der Zeit mit einer bestimmten Geschwindigkeit, die von  $u$  und  $C$  bestimmt wird, forminvariant über die Kette. Der Exponentialterm ist Ausdruck dafür, daß es sich hier um ein Wellenpaket handelt, das die *sech*-Funktion als einhüllende Funktion besitzt und durch das Vorzeichen der "Phasendrift"  $C$  eine vorgegebene Bewegungsrichtung hat.

Ein Vergleich dieser analytischen Lösung  $\Psi_n^{AL}(t)$  mit der, durch die Iteration bzw. durch die Parametrisierung des iterierten Orbits des ungestörten Systems gewonnenen, zeitlich stabilen Amplitudenverteilung zeigt eine perfekte Übereinstimmung der diskreten bzw. kontinuierlichen Kurven (Abbildung 2.3.1-1).

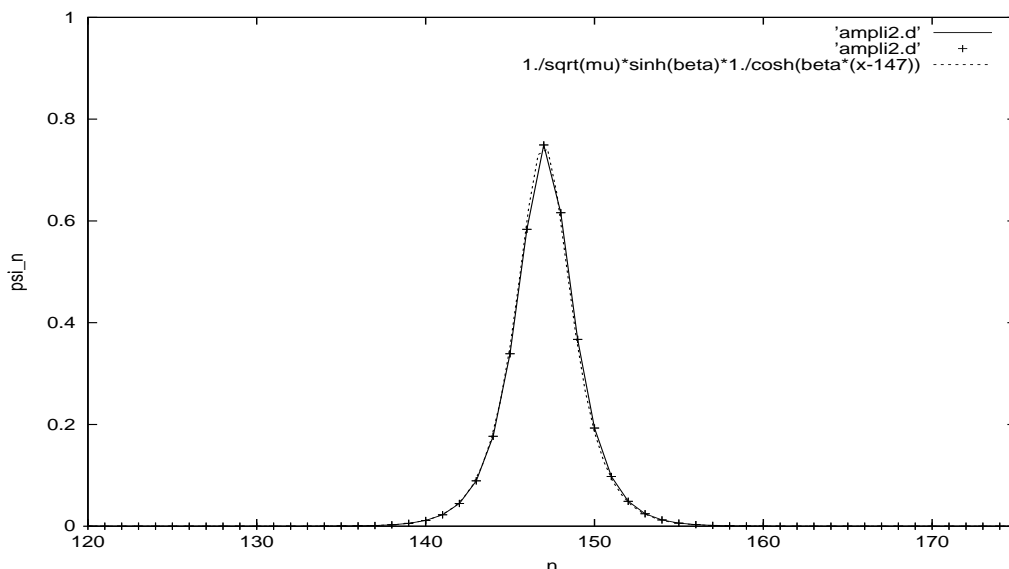


Abbildung 2.3.1-1: Zeitlich stabile Amplitudenverteilung auf einer Ablowitz-Ladik-Kette. Die durch die Iteration gewonnenen Amplituden (+, —) entsprechen exakt der analytischen Lösung (—) der AL-Kette für  $\Psi_n^{AL}(t=0)$  und  $C$ ,  $\delta = 0$ . Der Schwerpunkt wurde dabei gemäß der Iterationslösung beispielhaft auf  $x_0 = 147$  gesetzt.

Weitere Parameter:  $\mu = 1.0$ ,  $\omega = -2.5$ ,  $V = 1.0$ , daraus folgt  $B = 0.693$ .

### 2.3.2 Die Komponenten des Melnikovvektors

Um die Komponenten des Melnikovvektors

$$M_i(s, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{q}_{n+1}^{(i)} G(\vec{x}_n^0(t, s)), \quad (i = 1, 2)$$

zu bestimmen, werden zuerst die  $q$ - und  $\tilde{q}$ -Vektoren berechnet. Nach Gleichung (2.13) gilt

$$\vec{q}_{n+1} = D_n \vec{q}_n, \quad \vec{q}_{n+1}^T = \vec{q}_n^T D_n^{-1},$$

dabei ist  $D_n$  die Jacobimatrix bzw. die nichtlineare Approximation der ungestörten, aber dennoch nichtlinearen Abbildung  $F$  in den Punkten der ungestörten Separatrix:

$$D_n = DF(\vec{x}_n^0).$$

Wie in [25] gezeigt wird, ist es möglich, die Vektoren  $\vec{q}_n^{(1)}$  und  $\vec{q}_n^{(2)}$  (Spalten der fundamentalen Lösungsmatrizen  $Q$ , siehe Abschnitt 2.2) über die partiellen Ableitungen der Parametrisierung der Separatrix des ungestörten Systems ( $\vec{x}_n^0(t, s)$ ) zu berechnen:

$$\vec{q}_n^{(1)} = \frac{\partial \vec{x}_n^0(t, s)}{\partial t}, \quad \vec{q}_n^{(2)} = \frac{\partial \vec{x}_n^0(t, s)}{\partial s}.$$

Daraus ergibt sich für die  $q$ -Vektoren:

$$\vec{q}_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \begin{pmatrix} \sinh(\beta_1) \operatorname{sech}(\beta_1 n - t) \tanh(\beta_1 n - t) \\ 0 \\ \sinh(\beta_1) \operatorname{sech}(\beta_1(n+1) - t) \tanh(\beta_1(n+1) - t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{q}_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\beta_2) \operatorname{sech}(\beta_2 n - s) \tanh(\beta_2 n - s) \\ 0 \\ \sinh(\beta_2) \operatorname{sech}(\beta_2(n+1) - s) \tanh(\beta_2(n+1) - s) \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen der ungestörten Abbildung  $F$  bilden die Jacobimatrix und ihr Inverses

$$D_n = DF_{\vec{x}_n} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial F(\vec{x})_i}{\partial x_j}, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (2.22)$$

und

$$D_n^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & p_2 \end{pmatrix}$$

mit den Polynomen  $p_1$  und  $p_2$ :

$$p_x = \frac{\omega^\psi(\mu x_n^2 - 1)}{(1 + \mu x_n^2)^2},$$

$$p_u = \frac{\omega^\phi(\mu u_n^2 - 1)}{(1 + \mu u_n^2)^2}.$$

Mit den Abkürzungen

$$S_n(t) = \operatorname{sech}(n\beta_1 - t),$$

$$S_n(s) = \operatorname{sech}(n\beta_2 - s),$$

$$T_n(t) = \operatorname{tanh}(n\beta_1 - t),$$

$$T_n(s) = \operatorname{tanh}(n\beta_2 - s)$$

und der Bedingung für die Orthogonalität

$$\vec{q}_n^{(i)} \cdot \vec{\tilde{q}}_n^{(i)} = 0,$$

bekommen die  $q$ - und  $\tilde{q}$ -Vektoren folgende Gestalt:

$$\vec{q}_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sinh(\beta_1) \begin{pmatrix} S_n(t) T_n(t) \\ 0 \\ S_{n+1}(t) T_{n+1}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sinh(\beta_2) \begin{pmatrix} 0 \\ S_n(s) T_n(s) \\ 0 \\ S_{n+1}(s) T_{n+1}(s) \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{\tilde{q}}_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sinh(\beta_1) \begin{pmatrix} S_{n+1}(t) T_{n+1}(t) \\ 0 \\ -S_n(t) T_n(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\tilde{q}}_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sinh(\beta_2) \begin{pmatrix} 0 \\ S_{n+1}(s) T_{n+1}(s) \\ 0 \\ -S_n(s) T_n(s) \end{pmatrix}.$$

Die für den Melnikovvektor gesuchten Vektoren  $\vec{\tilde{q}}_{n+1}^{(i)}$  sind nach (2.22) über die Jacobimatrix der ungestörten Abbildung  $F$  in der adjungierten Variationsgleichung

miteinander verknüpft:

$$\begin{aligned}\vec{q}_{n+1}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sinh(\beta_1) \begin{pmatrix} S_{n+1}(t) T_{n+1}(t) \\ 0 \\ -S_n(t) T_n(t) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & p_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sinh(\beta_1) \begin{pmatrix} S_n(t) T_n(t) \\ 0 \\ S_{n+1}(t) T_{n+1}(t) - p_1 S_n(t) T_n(t) \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{q}_{n+1}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sinh(\beta_2) \begin{pmatrix} 0 \\ S_{n+1}(s) T_{n+1}(s) \\ 0 \\ -S_n(s) T_n(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & p_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sinh(\beta_2) \begin{pmatrix} 0 \\ S_n(s) T_n(s) \\ 0 \\ S_{n+1}(s) T_{n+1}(s) - p_2 S_n(s) T_n(s) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil des Melnikovvektors berechnet.

Der zweite Anteil des Melnikovvektors enthält die Störung  $G(\vec{x}_n^0(t, s))$  und ist unter Verwendung der Parametrisierung (2.20) und der eingeführten Abkürzungen (2.23) durch

$$G(\vec{x}_n^0(t, s)) = -\frac{\kappa(n)}{\sqrt{\mu}} \begin{pmatrix} \sinh(\beta_2) \frac{S_n(s)}{V^\psi} \\ \sinh(\beta_1) \frac{S_n(t)}{V^\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} \frac{\gamma^\psi \sinh^3(\beta_1) S_n^3(t)}{1 + \sinh^2(\beta_1) S_n^2(t)} \\ \frac{\gamma^\phi \sinh^3(\beta_2) S_n^3(s)}{1 + \sinh^2(\beta_2) S_n^2(s)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Summe über die auftretenden Terme bestimmt das Ergebnis des zweidimensionalen Melnikovvektors der GDNLS-Doppelkette, dessen Komponenten nur

noch von den Kurvenparametern  $t$  und  $s$  des ungestörten, parametrisierten Orbits abhängen:

$$\begin{aligned}
 M_1(t, s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{q}_{n+1}^{(1)} G(\tilde{x}_n^0(t, s)) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sinh(\beta_1) \begin{pmatrix} S_n(t) T_n(t) \\ 0 \\ S_{n+1}(t) T_{n+1}(t) - p_1 S_n(t) T_n(t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \\
 &\quad \left( \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \sinh(\beta_2) \frac{S_n(s)}{V^\psi} \\ \sinh(\beta_1) \frac{S_n(t)}{V^\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} \frac{\gamma^\psi \sinh^3(\beta_1) S_n^3(t)}{1 + \sinh^2(\beta_1) S_n^2(t)} \\ \frac{\gamma^\phi \sinh^3(\beta_2) S_n^3(s)}{1 + \sinh^2(\beta_2) S_n^2(s)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
 &= -\frac{\sinh(\beta_1)}{\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sinh(\beta_2)}{V^\psi} \kappa(n) S_n(s) S_n(t) T_n(t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\mu} \frac{\gamma^\psi \sinh^3(\beta_1) S_n^4(t) T_n(t)}{1 + \sinh^2(\beta_1) S_n^2(t)} \right\}. \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Die zweite Melnikovvektorkomponente hat die Gestalt:

$$\begin{aligned}
 M_2(t, s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{q}_{n+1}^{(2)} G(\tilde{x}_n^0(t, s)) \\
 &= -\frac{\sinh(\beta_2)}{\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sinh(\beta_1)}{V^\phi} \kappa(n) S_n(s) S_n(t) T_n(s) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\mu} \frac{\gamma^\phi \sinh^3(\beta_2) S_n^4(s) T_n(s)}{1 + \sinh^2(\beta_2) S_n^2(s)} \right\}. \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

Die nachstehenden Abbildungen zeigen beispielhaft die einzelnen Komponenten (Abbildung 2.3.2-1 und 2.3.2-2) sowie den gesamten Melnikovvektor mit der Nullebene ( $M_1 = M_2 = 0$ ) im Parameterraum (Abbildung 2.3.2-3). Die mit  $V^{\psi, \phi}$  skalierten Frequenzen der Kettenoszillatoren  $\omega^{\psi, \phi}$  sind dabei unterschiedlich, da, um größtmöglicher Allgemeinheit Rechnung zu tragen, zwei unterschiedliche homogene Ketten ( $V^\psi \neq V^\phi$ ) betrachtet werden. Der Wert  $\omega = 2.4$  ist mit den ketteninternen Kopplungen  $V_\psi = 0.8$  und  $V_\phi = 0.96$  skaliert. Daraus ergibt sich:

$$\omega^\psi = \frac{\omega}{V^\psi} = 3$$

und

$$\omega^\phi = \frac{\omega}{V^\phi} = 2.5.$$

Gemäß (2.19) werden den skalierten Frequenzen unterschiedliche  $\beta$ -Werte

$$\beta_1 = 0.962 \quad \text{und} \quad \beta_2 = 0.693$$

zugeordnet.

Aufgrund der verschiedenen ketteninternen Kopplungen  $V^{\psi, \phi}$  und deshalb verschiedenen  $\beta$ -Werten, sind beide Komponenten des Melnikovvektors von unterschiedlicher Gestalt, wie in den Abbildungen (2.3.2-1 und 2.3.2-2) unschwer zu erkennen ist. Es handelt sich jeweils um eine Fläche über der  $(t, s)$ -Parameterebene, die für große Parameterwerte gegen Null strebt:

$$M_i \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad t, s \longrightarrow \pm\infty$$

Als Kopplung zwischen den Ketten ist hier die kontinuierliche Form aus Abschnitt 1.1.4 Gl.(1.17) gewählt:

$$\kappa(n) = \exp\left(-\frac{(n - n_0)}{2\sigma^2}\right) \quad \text{mit } n_0 = 0.$$

Um den Koordinatenursprung herum weisen beide Flächen eine positive und eine negative Krümmung auf, die für größere  $\beta$ -Werte noch zusätzlich von einer deutlichen Oszillation in  $t$ - bzw.  $s$ -Richtung überlagert sind. Die Oszillation wird jedoch schwächer, wenn die  $\beta$ -Werte abnehmen und ist nur bei der Darstellung in kleinen Maßstäben zu erkennen.



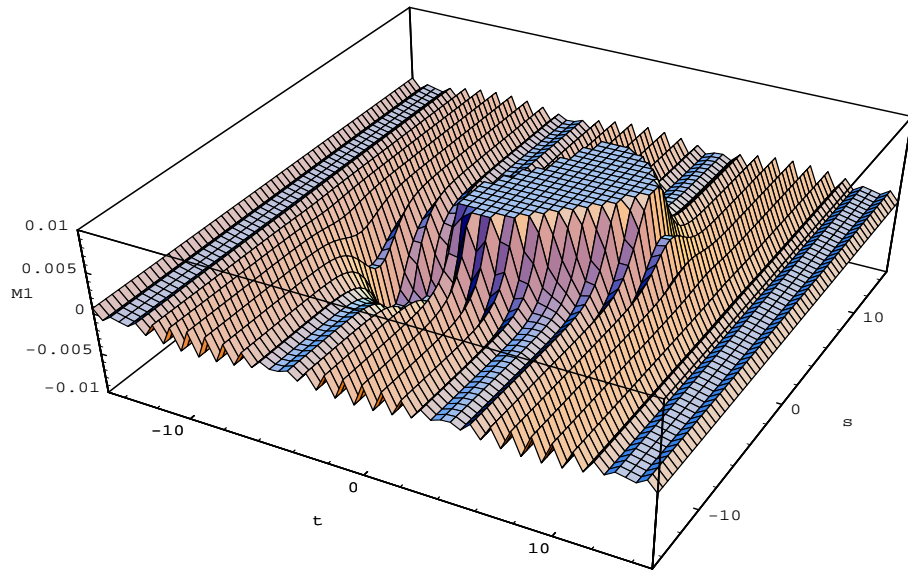
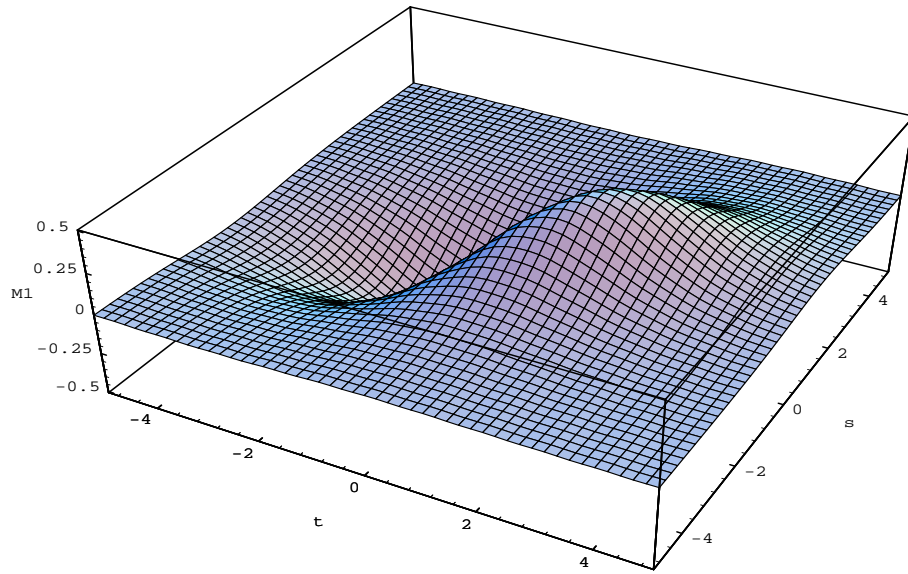


Abbildung 2.3.2-1: Melnikovvektorkomponente  $M_1$  gemäß (2.23) mit  $\beta_1 = 0.962$ ,  $\mu = 1.5$  und  $\gamma^\psi = 0.25$ .

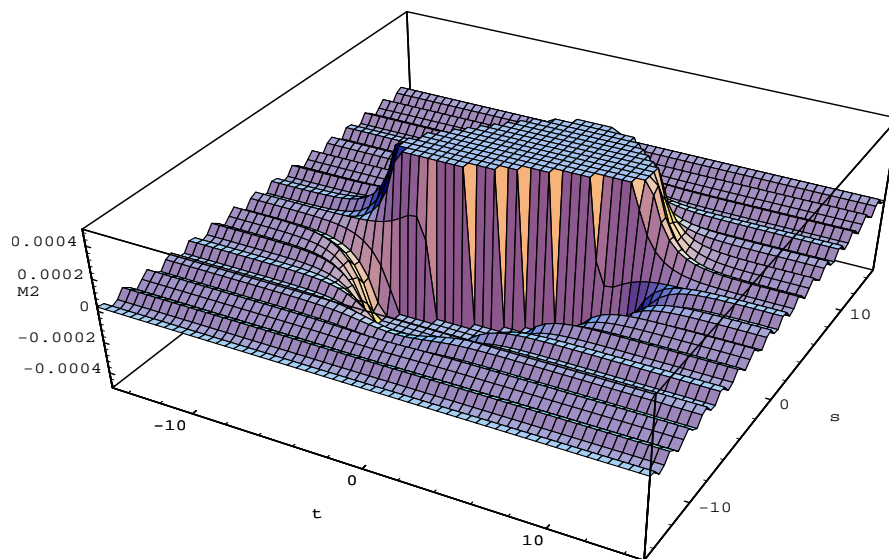
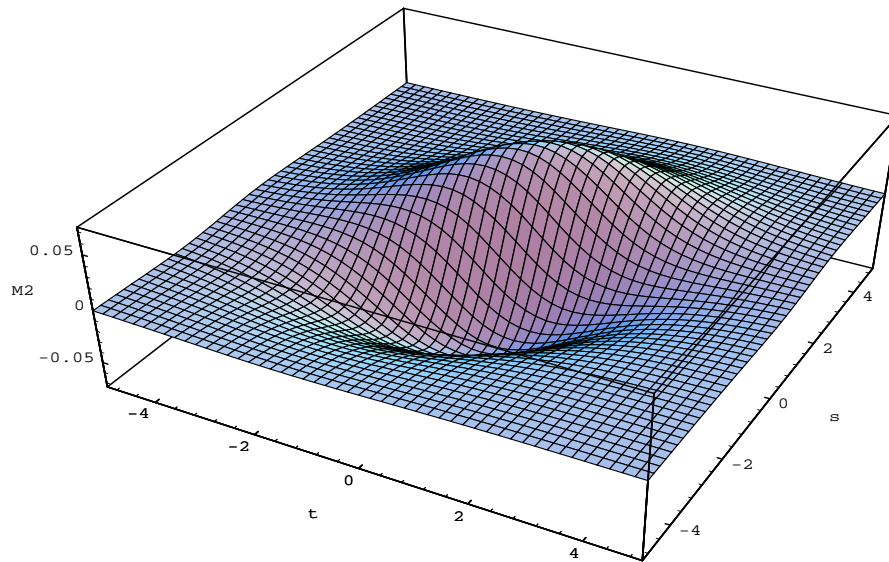


Abbildung 2.3.2-2: Melnikovvektorkomponente  $M_2$  gemäß (2.24) mit  $\beta_2 = 0.693$ ,  $\mu = 1.5$  und  $\gamma^\phi = 0.208$ .

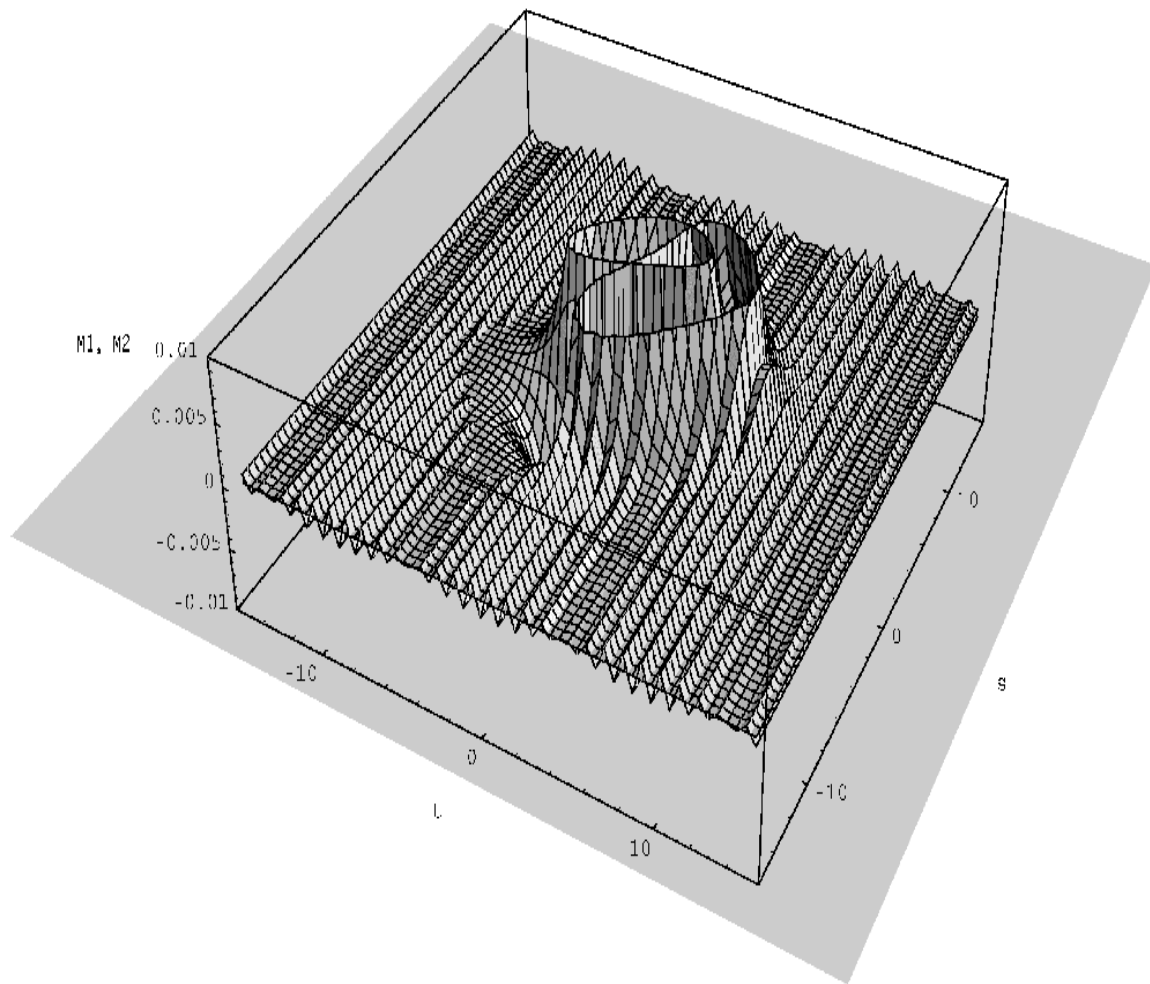


Abbildung 2.3.2-3: Melnikovvektorkomponenten  $M_1$  und  $M_2$  gemäß (2.23 und 2.24) mit Ebene für  $M_1 = M_2 = 0$ .

Nach der Berechnung des Melnikovvektors ist der nächste Schritt die Suche nach den gemeinsamen Nullstellen seiner Komponenten, da diese ja gerade die Schnittpunkte der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten der nichtlinearen iterativen Abbildung

A (2.6) darstellen. Diese homoklinen Punkte erhält man, indem *ein* solcher Punkt in die Iterationsvorschrift (2.6) eingesetzt wird. Dafür werden die Schnittpunkte des Melnikovvektors mit der  $\vec{M} = 0$  Ebene numerisch berechnet, um mindestens eine isolierte Nullstelle zu finden. Werden bei der Nullstellensuche sogar mehrere homokline Punkte gefunden, können mit ihnen verschiedene Anfangskonfigurationen generiert werden und das System hat mehrere stabile Zustände, die räumlich lokalisiert sind. Nur solche  $(t, s)$ -Tupel, an denen beide Melnikovvektorkomponenten identisch verschwinden, sind gemäß Abschnitt 2.2 die für uns interessanten Punkte. In Abbildung (2.3.2-4) ist das Ergebnis dargestellt.

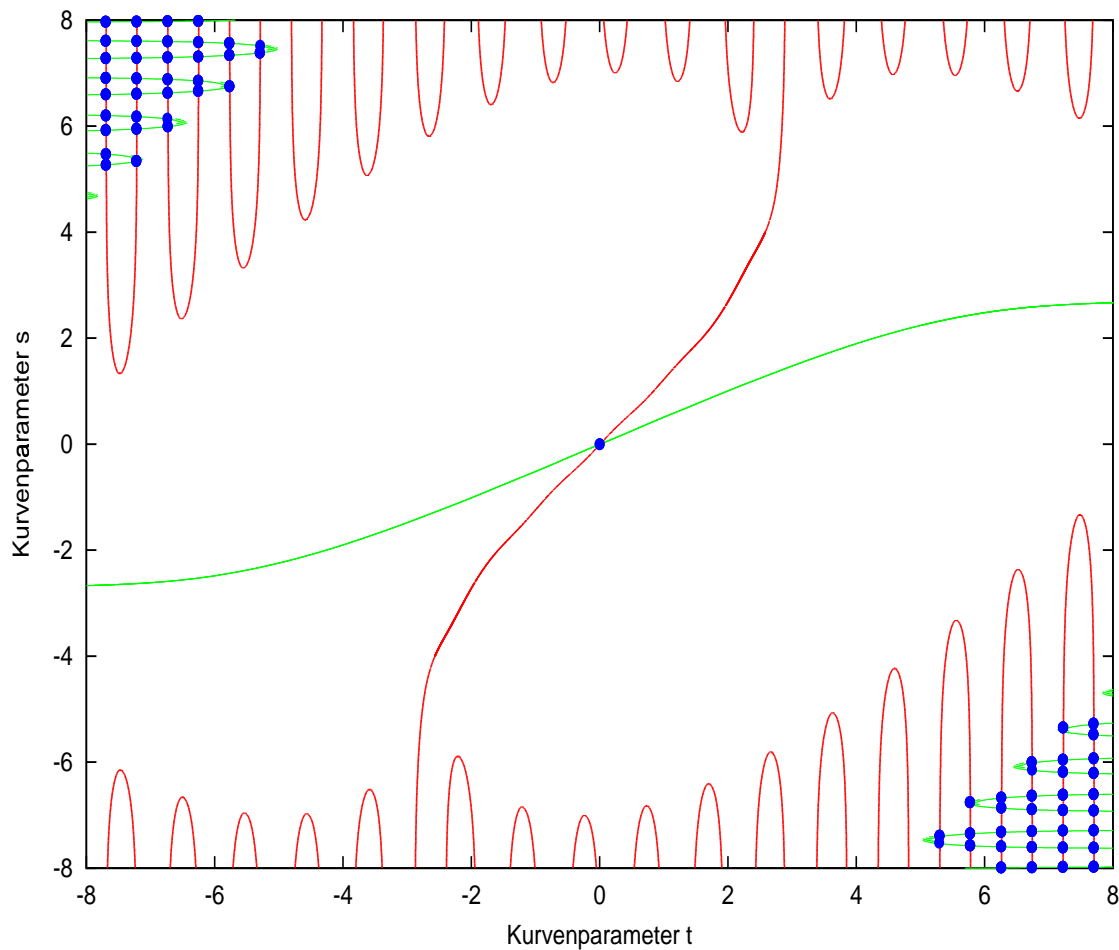


Abbildung 2.3.2-4: Schnittebene für  $M_1 = 0$  und  $M_2 = 0$ . Die blauen Punkte sind gemeinsame Nullstellen beider Melnikovvektorkomponenten. Die rote bzw. grüne Linie ist die gemeinsame Schnittmenge von  $M_1$  bzw.  $M_2$  mit der Nullebene.

Bei Wahl gleicher ketteninterner Kopplungsparameter  $V^\psi = V^\phi$  und damit gleicher Frequenzen  $\omega^{\psi, \phi}$  haben die Komponenten  $M_i$ , aufgrund der dann herrschenden hohen Symmetrie, die gleiche Form und gehen mit Hilfe einer Drehspiegelung ineinander über.

Zum Vergleich ist in Abbildung (2.3.2-5) die  $\vec{M} = 0$  Ebene für gleiche Frequenzen ( $\omega^\psi = \omega^\phi$ ) und somit identische  $\beta$ -Werte dargestellt. Man erkennt die Rotations-symmetrie beider Melnikovvektorkomponenten beim Durchgang durch die  $\vec{M} = 0$  Ebene.

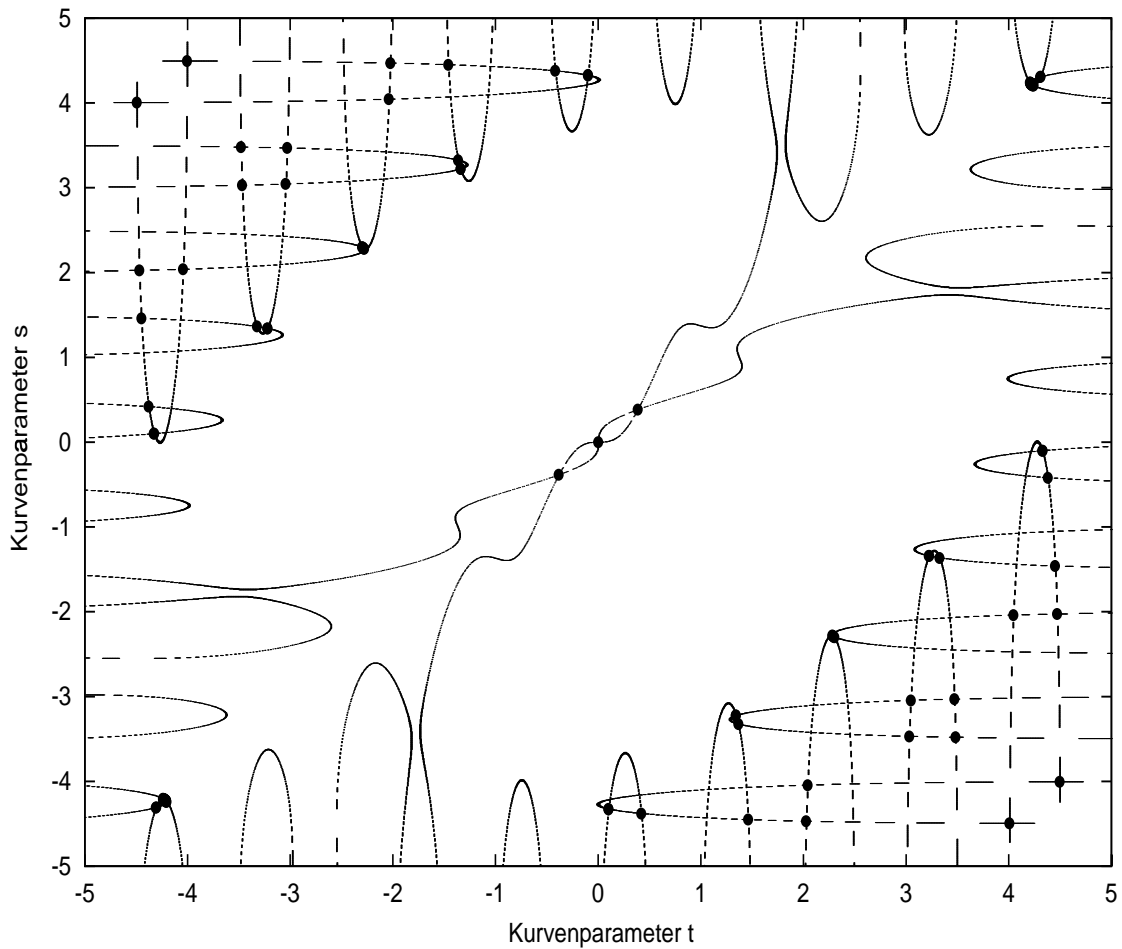


Abbildung 2.3.2-5: Schnittlinien  $M_1 = 0$  und  $M_2 = 0$ . Für identische  $\beta$ -Werte (hier:  $\beta_1 = \beta_2 = 1.1$ ) haben die Melnikovvektorkomponenten eine hohe Symmetrie. Ihre Schnittlinien mit der Nullebene haben gemeinsame Punkte (einige sind als dicke Punkte eingetragen). Diese isolierten Nullstellen ( $\vec{M} = 0$ ) sind die Startpunkte zur Iteration eines homoklinen Orbits.

### 2.3.3 Der homokline Orbit

Wir sind jetzt in der Lage, Nullstellen des Melnikovvektors explizit anzugeben, d. h. es ist nun möglich, einen Schnittpunkt der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit auszurechnen, indem das  $(t, s)$ -Wertepaar einer Nullstelle in die Parametrisierung (2.20) des ungestörten Orbits eingesetzt wird, um einen Startpunkt zur Iteration des homoklinen Orbits zu erhalten.

Wählt man beispielsweise als gemeinsame Nullstelle der Melnikovvektorkomponenten den Punkt  $(s, t) = (0, 0)$ , dann erhält man als Startvektor für die Iteration, bei der Suche nach einer stabilen Anfangskonfiguration, die relativ weit vom Schwerpunkt des Kopplungsgebietes entfernt ist ( $n = -100$ ):

$$\vec{x}_{-100} = \begin{pmatrix} 1.4718 \cdot 10^{-44} \\ 1.4925 \cdot 10^{-33} \\ 5.3286 \cdot 10^{-45} \\ 6.9877 \cdot 10^{-34} \end{pmatrix}.$$

Dieser Startvektor generiert nun durch  $n$ -fache Anwendung der Iterationsvorschrift  $n$  homokline Punkte der Abbildung  $A$ .

Dabei wird für die Kopplungsstärke  $\kappa(n)$  die kontinuierliche Gaußverteilung (Abschnitt 1.1.4., Abbildung 1.1.4-2) benutzt, um umständliche Fallunterscheidungen zwischen innerhalb und außerhalb des Kopplungsgebietes zu vermeiden. Der Schwerpunkt der Kopplungsstärke soll exemplarisch bei  $n_0 = 0$  liegen. Daraus folgt

$$\kappa(n = -100) = \exp\left(-\frac{-100^2}{2\sigma^2}\right)$$

und das Aufsuchen einer stabilen Struktur fernab vom Kopplungsgebiet ist sichergestellt. Die Breite der Gaußverteilung  $\sigma$  wird bei der Iteration des homoklinen Orbits auf  $\sigma = 1.0$  gesetzt, spielt aber in diesem Zusammenhang keine große Rolle, da am Kettenplatz -100 ohnehin kaum noch Kopplung zur Nachbarkette zu 'spüren' ist. Durch die Iteration generieren wir die (diskrete) zeitliche Entwicklung der Nachbaramplituden  $a_{-100}$  und  $a_{-101}$  in der  $(x, y)$ -Ebene und  $b_{-100}$  und  $b_{-101}$  in der  $(u, v)$ -Ebene, da ja während der Iteration der Index 'n' die Rolle einer diskreten Zeit spielt (siehe auch Abschnitt 2.3).

Das Ergebnis für  $n = -100$  ist in Abbildung (2.3.3-1) dargestellt. Der Startpunkt liegt in unmittelbarer Umgebung des hyperbolischen Fixpunktes  $(x_n = 0, y_n = 0)$ . Die Iteration führt zu der dargestellten Punktmenge in der  $(x_n, y_n)$ -Ebene, dem homoklinen Orbit. Ein homokliner Punkt wird im nächsten Iterationsschritt wieder

auf einen homoklinen Punkt abgebildet. Wäre dies nicht der Fall, so würde daraus folgen, daß man durch Iteration eines homoklinen Punktes von einer stabilen auf eine instabile Mannigfaltigkeit springen könnte und damit für  $n \rightarrow \infty$  keine eindeutige Entwicklung des Abstands der iterierten Punkte zum betrachteten Fixpunkt existieren würde. Dies widerspräche jedoch der strengen Definition (2.9) der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit.

Demnach ist mit der Existenz eines homoklinen Punktes die Existenz von unendlich vielen homoklinen Punkten sichergestellt. Wenn sich die Mannigfaltigkeiten schneiden, dann tun sie es unendlich oft.

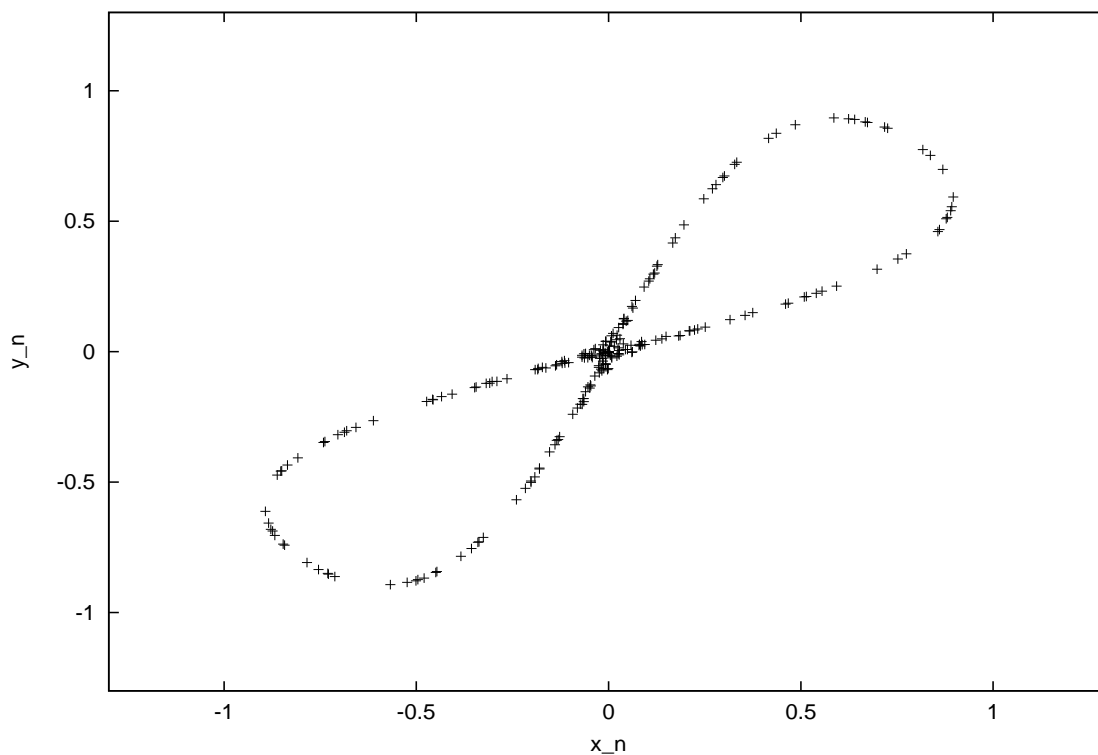


Abbildung 2.3.3-1: Lage der Schnittpunkte der Mannigfaltigkeiten des hyperbolischen Fixpunktes in der  $(x_n, y_n)$ -Ebene. Eine Separatrix existiert nicht mehr, da die stabile und instabile Mannigfaltigkeit nicht mehr identisch sind. Jedes Kreuz stellt einen transversalen Schnitt der Mannigfaltigkeiten dar. Nichtlinearitätsparameter:  $\mu = 1.5$ ,  $\gamma^\psi = 0.25$ ,  $\gamma^\phi = 0.208$ .

Übersetzt man diese Daten durch Umkehrung der Substitutionsvorschrift (2.4) in die Sprache der Amplitudenverteilung auf der  $\psi$ -Kette, indem  $x_n$  und  $y_n$  als Nachbaramplituden angesehen werden, so entsteht das in Abbildung (2.3.3-2) gezeigte Amplitudenprofil.

Eine entsprechende Verteilung auf der  $\phi$ -Kette folgt aus dem homoklinen Orbit in der  $(u_n, v_n)$ -Ebene.

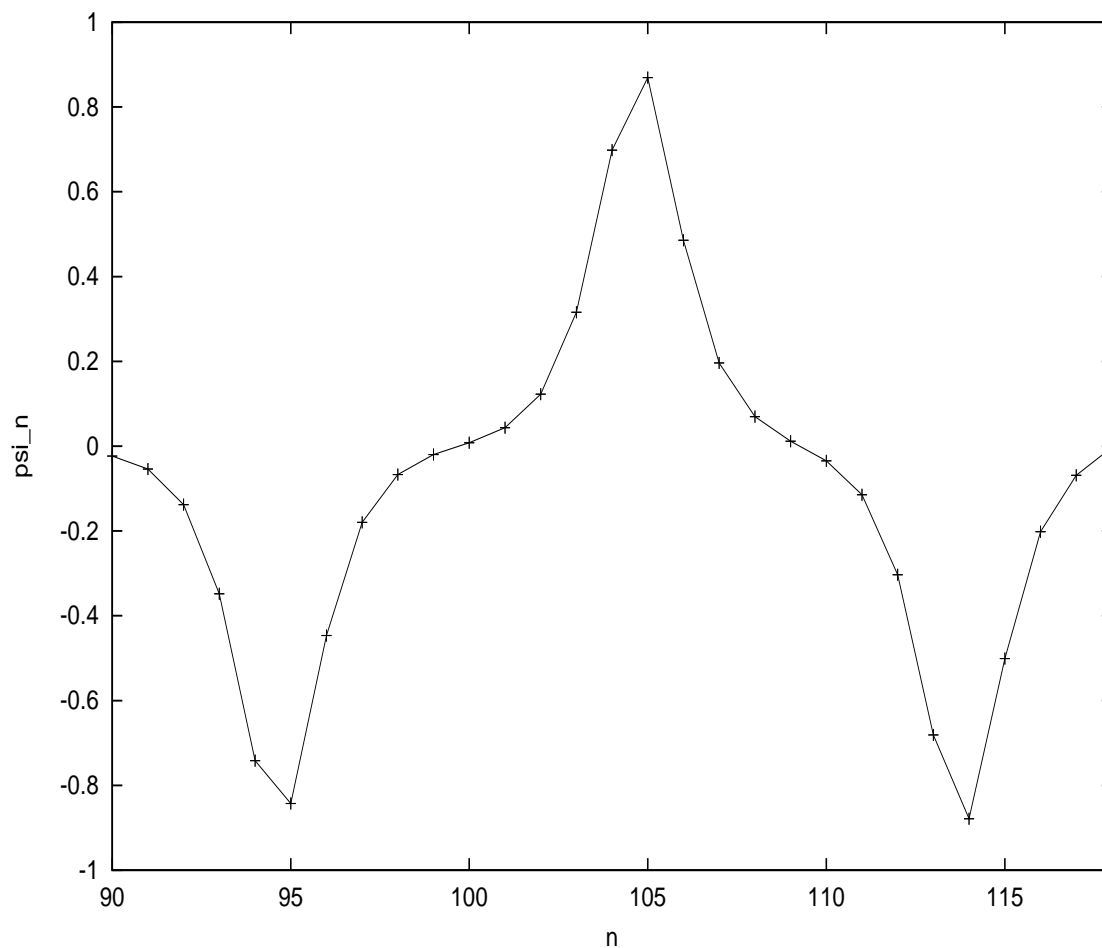


Abbildung 2.3.3-2: Aus der Berechnung des homoklinen Orbits resultierende Amplitudenverteilung auf der  $\psi$ -Kette.



## 2.4 Solitonartige Dynamik und Breatherlösungen

Die Berechnung des Melnikovvektors hat auf eine Anfangskonfiguration geführt, die in der zeitlichen Entwicklung des Doppelstrangsystems stabil bleibt. Diese solitonartige Struktur erstreckt sich nur über wenige Kettenplätze. Ihre Gestalt ist der einer analytischen Solitonlösung, wie sie z. B. für die integrable AL-Gleichung existiert (siehe Anhang B), sehr ähnlich. Das AL-Soliton hat die Form einer *sech*-Funktion. Offensichtlich sind Amplitudenprofile dieses Typs besonders geeignet, einer diffusiven Ausbreitung über das gesamte System zu widerstehen. Die inneren Nichtlinearitäten verstärken dabei die Bildung solcher Profile, die durchaus auch spontan aufgrund stochastischer Anregungsprozesse entstehen können. Wird hingegen durch gezielte Anregung eine solitonartige Amplitudenverteilung hervorgerufen, so wird das nichtlineare System formerhaltend wirken, sofern die solitonartige Struktur in ihrer Gestalt der eines exakten Eigenzustands (berechenbar mit der Melnikovmethode) besonders nahe ist.

Die in Abschnitt 2.3.3 berechnete Anfangskonfiguration ist eine stationäre Lösung des Systems, die forminvariant auf der Kette steht. Eine Bewegung über die Kette impliziert diese Lösung nicht, da sie ja aus einem stationären Ansatz (2.2) hervorging und bei der Transformation der Bewegungsgleichungen in eine iterative Abbildung die dynamische Information verlorengelht. Man spricht in diesem Fall von sogenannten “*gepinnten*”, d. h. fixierten Solitonen bzw. von Breatherlösungen (“*Breather*”) [9]. Sie sind fest an bestimmte Kettenplätze gebunden und können dort im Fall des Breathers in Höhe und Breite oszillieren, wobei die mit der Kette eingeschlossene Fläche gleich groß bleibt.

Die zeitliche Entwicklung der, mit Hilfe des homoklinen Orbits berechneten Anfangskonfiguration, ist in Abbildung (2.4-1) für die  $\psi$ -Kette dargestellt.

Die Daten für die Abbildung wurden mit Hilfe einer numerischen Integration der Bewegungsgleichungen der vereinfachten GDNLS-Doppelkette (2.1) gewonnen.

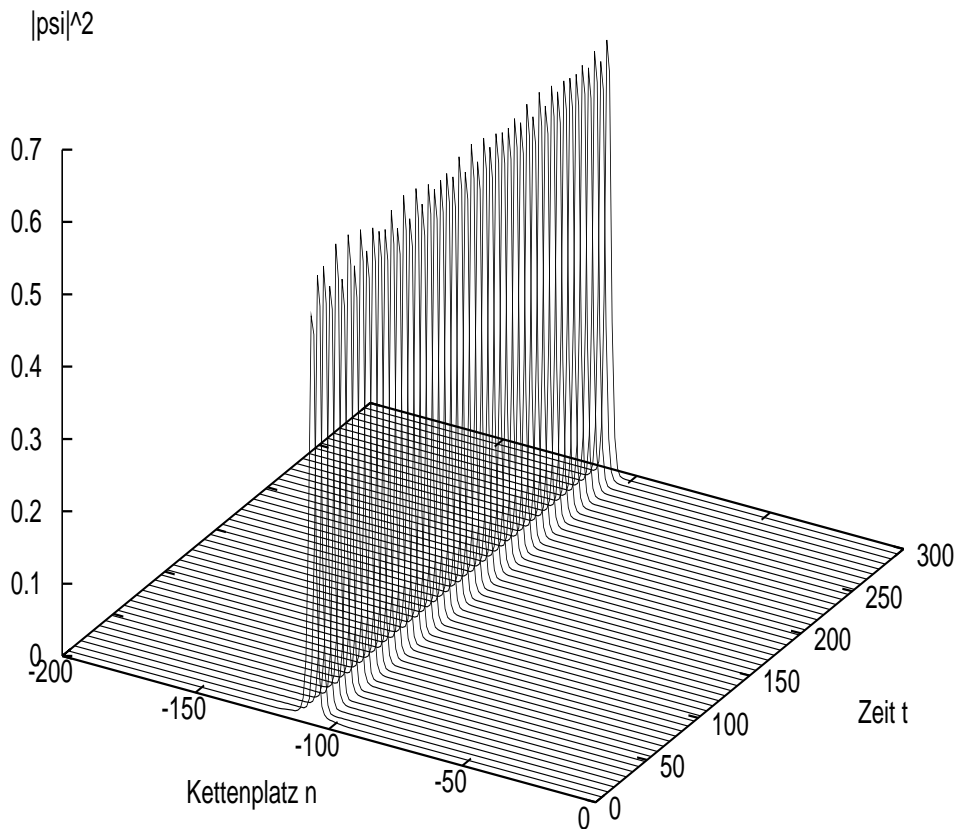


Abbildung 2.4-1: Die mit Hilfe des homoklinen Orbits berechnete, solitonartige Struktur steht forminvariant am Anregungsplatz, dessen Schwerpunkt hier exemplarisch bei  $n = -110$  liegt.

### 2.4.1 Einführung einer dimensionslosen Systemzeit

Sei  $\tau$  eine Bezugszeit definiert durch die Anzahl von Zeitschritten, nach denen das Amplitudenquadrat der Anfangskonfiguration auf der  $\psi$ -Kette auf 10% abgefallen ist, multipliziert mit der ketteninternen Kopplung  $V$ , die den Abklingprozeß stark

beeinflusst, dann kann sie in allen folgenden dynamischen Betrachtungen als Basis-einheit der Zeit benutzt werden.

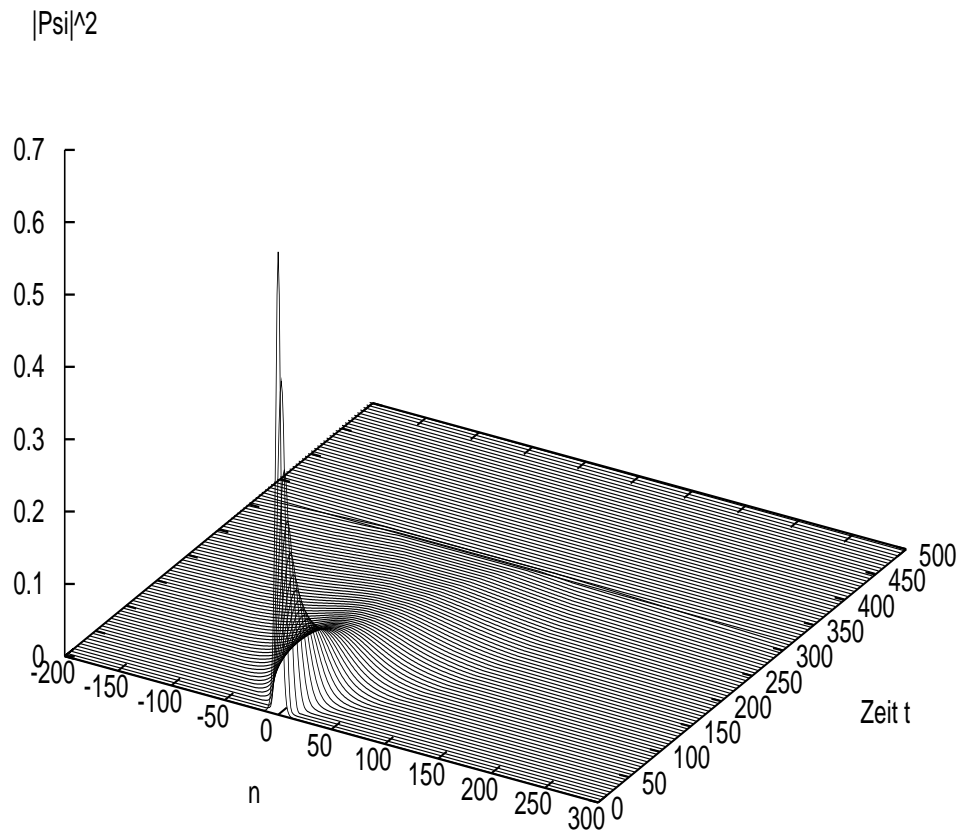


Abbildung 2.4.1-1: Amplitudenentwicklung der Anfangskonfiguration auf der  $\psi$ -Kette ohne ketteninterne Nichtlinearität. Nach ca. 80 Zeitschritten (entspricht 8000 numerischen Zeitschritten bei einer Schrittgröße von 0.01) ist das Amplitudenquadrat auf 10 Prozent des Anfangswerts abgefallen und stark delokalisiert.

Die dimensionslose Zeiteinheit ergibt sich danach zu:

$$\tau = 80 t V.$$

Es erscheint sinnvoll, die aus der Numerik stammenden, angegebenen Zeitintervalle auf die physikalisch begründete Einheit  $\tau$  zu beziehen und damit eine aus dem System heraus begründete Zeiteinheit zu benutzen. Dabei ist zu beachten, daß der Delokalisationsprozeß und damit auch  $\tau$  von der ketteninternen Kopplung  $V$  abhängen. Sind die Kettenglieder stark untereinander gekoppelt, so wird sich auch die Anregungsenergie schnell auf die Nachbarkettenglieder verteilen. Die ketteninterne Kopplung ist ein Systemparameter, der von einer physikalischen Realisierung des Doppelkettensystems abhängig ist und in den allgemeinen dynamischen Rechnungen zu  $V = 1$  gesetzt wird.

Die Delokalisierung wird durch Selbstorganisationsprozesse aufgehoben, wenn eine intrinsische Nichtlinearität existiert und gleichzeitig eine geeignete Amplitudenanfangsverteilung gewählt wird. Eine Selbstlokalisierung der Anregungsenergie tritt ein, wenn das Verhältnis von Nichtlinearitätsparameter zu ketteninternem Kopplungsparameter nicht kleiner als ca. 0.1 ist. Bei einem Verhältnis von ca. 2 werden die lokalen Gitterpotentiale (Peierls-Nabarrow-Barrieren) so groß, daß eine Bewegung der Solitonstruktur entlang des Kettensystems kaum noch möglich ist. Dadurch ist der Wertebereich der Nichtlinearitätsparameter bei festem  $V = 1$  entsprechend eingeschränkt.

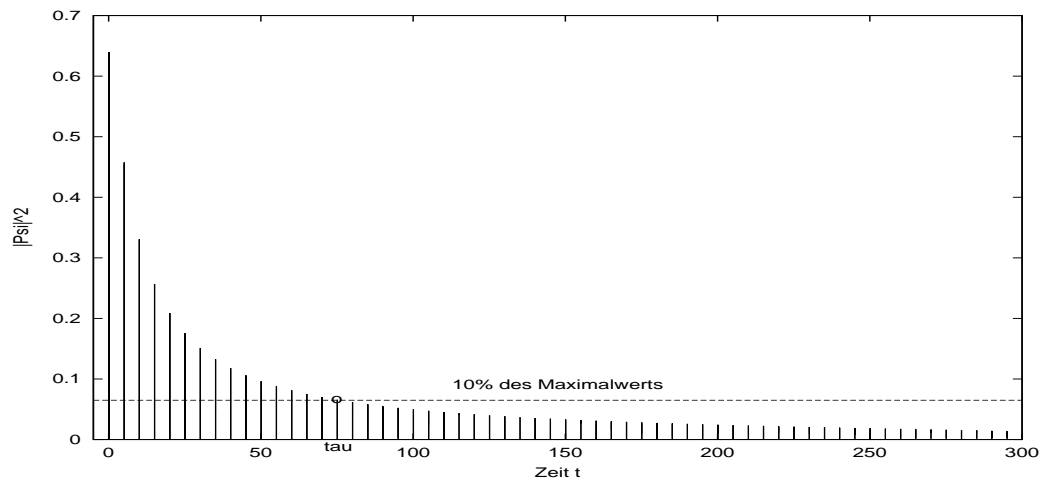


Abbildung 2.4.1-2: Amplitudenentwicklung der Anfangskonfiguration ohne ketteninterne Nichtlinearität. Demnach gilt:  $\tau = 80$  Zeitschritte.

## 2.5 Fitfunktion der Amplitudenverteilung

Die Amplitudenkonfiguration, die mit Hilfe der numerischen Berechnung eines homoklinen Orbits über den Melnikovvektor entstanden ist, liegt ausschließlich als Menge numerischer Daten für die einzelnen Kettenplätze vor. Ein analytischer Ausdruck für die Zeitentwicklung der Amplitudenverteilung existiert nicht. Lediglich für die integrable eindimensionale Ablowitz-Ladik-Kette gibt es den analytischen Zusammenhang  $\Psi_n^{AL}(t)$ . Die exakte AL-Lösung für eine unendlich lange Kette besteht aus einem *sech*-förmigen Wellenpaket, wie in Abschnitt (2.3.1) beschrieben:

$$\Psi_n^{AL}(t) = \frac{\sinh(\beta)}{\sqrt{\mu}} \operatorname{sech}(B(n - ut - n_0)) \exp(-i(\omega t - Cn - \delta))$$

$$\text{mit } A = \frac{\sinh(B)}{\sqrt{\mu}}, \quad B = \operatorname{arccosh}\left(-\frac{\omega}{2V \cos(C)}\right)$$

$$\text{und der Energie} \quad E = -\frac{4}{\mu} \cos(C) \sinh(B).$$

Es erscheint daher sinnvoll, die numerisch berechnete Amplitudenkonfiguration  $\psi_n$  mit der analytischen AL-Lösung  $\Psi_n^{AL}(t)$  zu vergleichen.

Man erkennt in Abbildung (2.5-1), daß nach Anpassung der Parameter  $\mu$  und  $\beta$  eine Fitfunktion, bestehend aus dem Realteil  $\operatorname{Re}\{\Psi_n^{AL}(t=0)\}$  der AL-Lösung, eine sehr gute Näherung der numerischen Amplitudenkonfiguration darstellt.

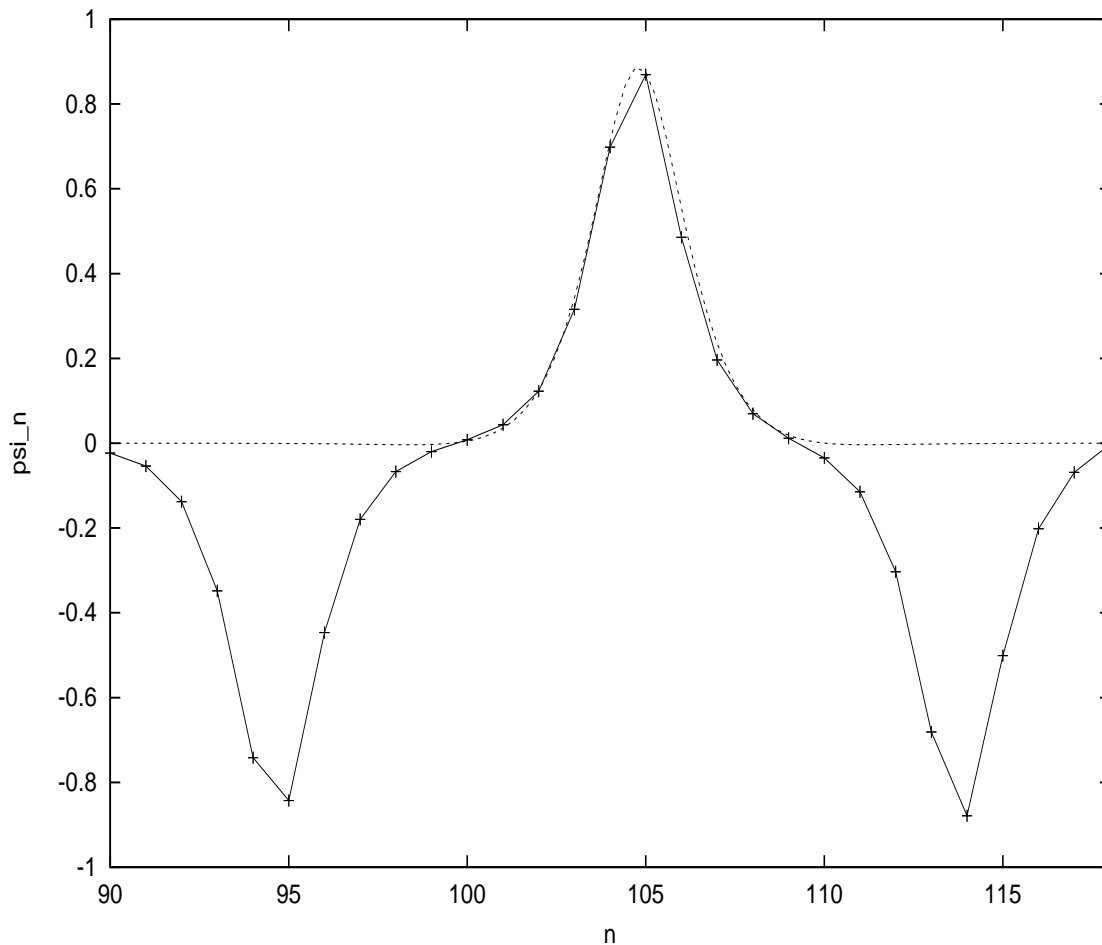


Abbildung 2.5-1: Die Melnikovmethode und die numerische Berechnung des homoklinen Orbits liefern eine zeitlich stabile Amplitudenverteilung, die mit dem Realteil der Ablowitz-Ladik-Lösung:  $Re\{\Psi_n^{AL}(t=0)\}$  in guter Näherung beschrieben werden kann (gestrichelte Linie). Dafür müssen die Parameter der AL-Lösung an die GDNLS-Konfiguration angepaßt werden. Es ergibt sich:  $B = 0.8$ ,  $\mu = 1.0$  und  $C = 0.3$ . Jeder Iterations-Loop der gestörten Abbildung liefert einen 'Buckel' der *sech*-Funktion.

Die Iteration des homoklinen Orbits liefert wiederholt Amplitudenverteilungen in der charakteristischen *sech*-Form. Durch die Störung der Abbildung entstehen kleine Differenzen in der Form der *sech*-'Buckel'.

In der Abbildungsiteration repräsentiert der Index  $n$  eine diskrete Zeitvariable. Für lange Iterationen ( $n \rightarrow \infty$ ) und damit auch für lange Zeiten ist trotz der kleinen

Differenzen eine hohe Formstabilität der solitonartigen Struktur feststellbar. Dies gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, daß die Iteration  $\vec{x}_{n+1} = A(\vec{x}_n)$  mit einem Kopplungsterm  $\kappa(n_0)$  durchgeführt wird, der den Schwerpunkt der Kopplung in einer hinreichend großen Entfernung von der lokalisierten Struktur festsetzt. Ist dies nicht der Fall, zeigen sich größere Unterschiede für unterschiedliche Loop Durchläufe des homoklinen Orbits. Dies entspricht einer lokalisierten Amplitudenverteilung, die im Kopplungsgebiet in Höhe und Breite variiert, aber dennoch auf wenigen Kettenplätzen lokalisiert bleibt.

Wir interessieren uns jedoch für stabile Strukturen fernab von Kopplungsgebieten zur Nachbarkette. Denn hier sollen Anregungsformen durch äußere Einflüsse entstehen und auf die Nachbarkette transportiert werden.

Im Hinblick auf weitere Untersuchungen in Kapitel 3 und 4 ist folgendes festzuhalten:

Mit der Fitfunktion liegt jetzt ein analytischer Ausdruck vor, der hinsichtlich der Transfereigenschaften und des Energietransports einen deutlichen Vorteil liefert, da bei der Berechnung des Energietransfers analytische Ausdrücke bestimmt werden müssen, die auch eine geschlossene Beschreibung der zeitabhängigen Amplitudenkonfigurationen voraussetzen. Dies ist zwar mit der Fitfunktion nur näherungsweise möglich, liefert aber trotzdem Einsichten in die Transferdynamik, die sonst gänzlich unzugänglich wären. Näheres dazu wird in Kapitel 3 und 4 zu sagen sein.

Zusammenfassend läßt sich nach den oben dargelegten Sachverhalten feststellen:

Wird dem Doppelstrangsystem Anregungsenergie zugeführt, die zur Folge hat, daß sich im Donatorbereich exakt eine Amplitudenverteilung der lokalen Oszillatoren gemäß dem homoklinen Orbit einstellt, dann ist dieser Zustand für alle Zeiten stabil. Eine diffusive Ausbreitung der Anregungsenergie auf das gesamte System findet *nicht* statt. Der lokalisierte Charakter bleibt aufgrund von intrinsischen Nichtlinearitäten erhalten.

Die stabile Amplitudenkonfiguration kann näherungsweise sehr gut mit analytischen Ablowitz-Ladik-Lösungen beschrieben werden.