

Kapitel 5

Abbildungsmethoden

Im vorangegangenen Kapitel sind die Impedanztensoren, also die MT-Ergebnisse, als scheinbare spezifische Widerstände ρ_a und Phasen ϕ dargestellt worden. Bei der Berechnung von ρ_a und Phase (siehe Gleichungen (2.15) und (2.16)) wird das Betragsquadrat sowie der Arcustangens gebildet. Die Tensoreigenschaften der Eingangsgröße gehen dabei wie in Kapitel 2 beschrieben verloren (siehe auch Anhang **A1**). Aus dem komplexen rotationsinvarianten Impedanztensor ergeben sich acht Größen (vier scheinbare spezifische Widerstands- und vier Phasenkomponenten), die nun von dem jeweilig gewählten Koordinatensystem abhängen. Obwohl wir eine physikalisch anschauliche Größe - nämlich den Widerstand - erhalten haben, müssen jetzt mindestens vier Größen in einem sinnvoll gewählten Koordinatensystem dargestellt werden. Dieses Problem vereinfacht sich, wenn unser Impedanztensor annähernd ein- oder zweidimensional ist und eine Streichrichtung existiert. Bei einem voll besetzten 3D-Tensor liefert diese Darstellung keine intuitiv auswertbare Information über die Leitfähigkeitsverteilung im Untergrund.

Die Leitfähigkeit ist der Gesteinsparameter, der mit der Magnetotellurik erfaßt wird. Es ist also durchaus wünschenswert, die Leitfähigkeit, bzw. ihr Inverses, den Widerstand, darzustellen. Es gibt einige wenige Transformationen, um MT-Ergebnisse direkt in eine Leitfähigkeits-Tiefen-Aussage zu überführen. Dazu zählen die BOSTICK-Transformation [Bostick, 1977] und die $\rho^* - z^*$ Transformation von Schmucker [1970]. Sie setzen jedoch einen geschichteten Untergrund voraus, so dass sie einer komplizierten Leitfähigkeitsverteilung nicht gerecht werden.

Eine grundsätzlich andere Art der Abbildung wird von Zhdanov *et al.* [1996] und Zhdanov & Traynin [1997], vorgeschlagen. Sie verwenden eine elektromagnetische Migration, um eine gegebene Leitfähigkeitsverteilung in einer Sektion abzubilden. Sie testen diese Methode an synthetischen MT-Daten einer 2D-Anomalie im homogenen Halbraum und ist in der Lage, mit der Migration die Anomalien wieder in der richtigen Tiefe abzubilden. Eine Zuordnung der Leitfähigkeiten ist nur dann möglich, wenn die Umgebungsleitfähigkeit richtig gewählt wird. Die Migration scheint insofern nicht für einen komplizierten Datensatz, wie den aus Namibia, geeignet zu sein.

Aus diesem Grund werden zur Abbildung der Leitfähigkeiten im Untergrund meistens Modellrechnungen verwendet. Die Möglichkeit der Modellierung der MT-Ergebnisse, sei es als Vorwärtsmodellierung oder Inversion, bedeutet einen enormen Fortschritt. Neben diesem Fortschritt besteht aber auch die Gefahr, die Inversion als *black box* zu verwenden. Die Ergebnisse einer Inversion hängen von unterschiedlichen Parametern ab. Die Stationsdichte hat einen wesentlichen Einfluß darauf, wie genau Strukturen aufgelöst werden. Nach ihr richtet sich auch das Modellgitter, mit dem der Modellraum in einzelne Zellen unterteilt wird. An dieser Stelle ist also schon vorherbestimmt, wie kleinräumig Variationen der Leitfähigkeit im Modell sein können. Ein zweites Problem, das von der Stationsdichte sowie der Profillänge abhängt, besteht darin, dass das Inversionsprogramm Anomalien bevorzugt dahin plziert, wo keine Daten vorliegen. Die Modelle müssen in Abhängigkeit der anzupassenden Frequenzen nach allen Seiten genügend groß generiert werden, damit keine Randeefekte aufgrund eines zu großen Induktionsraumes auftreten. Somit besitzt jedes Modell einen Randbereich, der nicht mit Messstationen abgedeckt ist. Die meisten Inversionsalgorithmen sind zudem so angelegt, dass die Entstehung für die Anpassung überflüssig erscheinender, bzw. nicht auflösbarer Modellstrukturen unterdrückt wird. Das bedeutet, dass ein durch einen Glättungsparameter beeinflusstes, glattes Leitfähigkeitsmodell entsteht. Diese Einschränkungen spiegeln sich in dem resultierenden Leitfähigkeits-Tiefen-Modell wieder. Auch bei einer 3D-Inversion bleibt die Abhängigkeit des Ergebnisses von den gewählten Modell- und Inversionsparametern bestehen.

Abbildungsverfahren ermöglichen eine objektivere Darstellung von leitfähigen Strukturen. Sie stellen lediglich eine Transformation der Ergebnisse dar und sind unabhängig von Zellgrößen oder Glättungsparametern. Trotzdem sind sie in gewisser Weise abhängig vom Abstand der vermessenen Stationen. Ein weniger dichtes Stationsnetz resultiert in einem nicht oder schlecht erkennbaren Abbild der Strukturen. Dies ist vergleichbar mit einem Photo, bei dem große Bereiche verdeckt sind. Das Motiv ist erst dann erkennbar, wenn genügend große Bereiche des Photos sichtbar sind.

In diesem Kapitel möchte ich nun drei Abbildungsverfahren vorstellen und ableiten. Bevor die Dekompositionsverfahren (siehe Kap. 2.2.2) Ende der achtziger Jahre entwickelt wurden und daraufhin weitverbreitet zum Einsatz kamen, gab es im wesentlichen zwei Ansätze, die Eigenwert-Analyse, bzw. die *Singular Value Decomposition*, die mit einer Hauptachsentransformation des Impedanztensors ein optimales Koordinatensystem suchen [Eggers, 1982, LaTorraca *et al.*, 1986]. Die gefundenen Hauptachsen, bzw. ihre Länge, lassen sich durch Ellipsen graphisch in der Fläche darstellen. Dabei sollen die Eigenschaften des Tensors und somit auch Leitfähigkeitsverteilungen wiedergegeben werden.

Eine für die Magnetotellurik neue Abbildungsmethode soll anschließend ausführlich hergeleitet und erläutert werden. Ihre Theorie stammt von Reilly [1979], und ihre Art der Darstellung wurde bislang auf Ergebnisse aus transienten elektromagneti-

schen Messungen [Caldwell & Bibby, 1998] angewendet. Sie ist vergleichbar mit der in der Festkörperphysik beschriebenen Theorie zur Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem polarisierbaren, leitfähigen und anisotropen Medium. Über einen komplexen „ Ausbreitungstensor “ lässt sich ein scheinbarer Widerstandstensor ableiten, der im Gegensatz zu den scheinbaren spezifischen Widerständen seine Tensor- und somit seine Transformationseigenschaften beibehält. Zur Darstellung dieses Tensors eignen sich ebenfalls Ellipsen.

Die folgenden Abbildungsmethoden stellen keine Inversion der Daten dar, sie transformieren sie lediglich. Jeder Impedanztensor, unabhängig von der zugehörigen Periode wird in eine neue Größe transformiert, sie behält aber ihre Abhängigkeit von der Periode, bzw. der Eindringtiefe. Das bedeutet aber auch, dass unabhängig von den drei hier verwendeten Abbildungsverfahren die Tensorelemente zu langen Perioden die Information eines großen Induktionsraumes beinhalten.

5.1 EGGERS' Eigenstate Analysis

Die weitverbreitete Vorgehensweise, unabhängig von der Dimensionalität des Impedanztensors nach Rotation lediglich die Nebendiagonalelemente auszuwerten, veranlaßte Eggers [1982], physikalisch intuitive Größen zu finden, die die gesamte Tensorinformation beinhalten. Besonders komplizierten Leitfähigkeitsverteilungen scheint dieser Ansatz gerecht zu werden. Grundsätzlich handelt es sich bei der Eigenwert-Analyse jedoch nicht um eine Abbildungsmethode. Allerdings kann der abstrakte, komplexe Impedanztensor so transformiert werden, dass eine direkte Abbildung gut leitfähiger Strukturen möglich wird.

Ausgehend von den MAXWELL-Gleichungen und der Lösung durch den Ebene-Wellen-Ansatz erhält man eine Beziehung senkrecht zueinander stehender magnetischer und elektrischer Felder.

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{i\omega\mu}{\sqrt{-\omega^2\mu\epsilon + i\omega\mu\sigma}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Daraus folgt, dass das Skalarprodukt verschwindet:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (5.2)$$

Diese Beziehung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern muß für eine komplizierte Leitfähigkeitsverteilung nicht gegeben sein. Zum Beispiel zeigen Messdaten von einigen Stationen aus Namibia, deren univariate Kohärenzen hoch zwischen parallelen Komponenten sind, dass diese Voraussetzung verletzt ist. Dies impliziert eine starke Einschränkung dieses Verfahrens.

Eine Eigenwert-Analyse ist grundsätzlich nur dann möglich, wenn eine quadratische Matrix vorliegt. Die Eigenvektoren einer Matrix A sind Vektoren, deren Richtungen sich bei einer Abbildung durch die Matrix A nicht ändern, sondern deren

Längen lediglich anders skaliert werden. Das würde aber für unsere Impedanzgleichung bedeuten, dass der Eigenvektor des magnetischen Feldes auf ein paralleles elektrisches Feld abgebildet wird. Um der in Gleichung (5.1) beschriebenen Physik gerecht zu werden, ist die von EGGERS verwendete Eigenwert-Analyse dahingehend modifiziert, dass ein Magnetfeldvektor nicht parallel, sondern senkrecht zu dem E-Feldvektor steht und der Eigenwert also der Übertragungsfunktion zwischen diesen orthogonalen Feldern entspricht.

$$\mathbf{E}^i = \hat{\Lambda}^i \mathbf{H}^i \quad (5.3)$$

Der Index i steht für die beide Eigenwerte und -vektoren. Weiterhin gilt die in Gleichung (5.2) angegebene Bedingung. Dadurch ergibt sich eine schiefsymmetrische Form der Eigenwertmatrix:

$$\hat{\Lambda}^i = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^i \\ \lambda^i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Damit hat die Matrix die gleiche Form wie der Operator, der das elektrische und magnetische Feld einer transversalen elektromagnetischen Welle in einem homogenen Medium verknüpft (siehe Gl. (5.1)). Das Eigenwertproblem läßt sich daraufhin in folgender Notation ansetzen:

$$\mathbf{E}^i = \underline{\underline{Z}} \mathbf{H}^i = \hat{\Lambda}^i \mathbf{H}^i \quad (5.5)$$

und führt zu

$$(\underline{\underline{Z}} - \hat{\Lambda}^i) \mathbf{H}^i = 0. \quad (5.6)$$

Für ein nicht-verschwindendes \mathbf{H}^i muß die Determinante von $(\underline{\underline{Z}} - \hat{\Lambda}^i)$ Null sein. Dies führt zu einer quadratischen Gleichung der Eigenwerte λ^i , die sich folgendermaßen berechnen:

$$\lambda^\pm = \frac{1}{2}(Z_{xy} - Z_{yx}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(Z_{xy} - Z_{yx})^2 - \det(\underline{\underline{Z}})} \quad (5.7)$$

Zu diesen beiden Eigenwerten lassen sich je zwei elektrische und magnetische Eigenvektoren $(\mathbf{H}^+, \mathbf{E}^+)$ und $(\mathbf{H}^-, \mathbf{E}^-)$ angeben.

$$\mathbf{H}^\pm = \begin{pmatrix} \lambda^\pm - Z_{xy} \\ Z_{xx} \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}^\pm = \begin{pmatrix} Z_{xx} \\ Z_{yx} + \lambda^\pm \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Sie beschreiben die Polarisation des elektrischen und magnetischen Feldes. Die beiden Eigenwerte λ^\pm haben nun die Nebendiagonalelemente des Impedanztensors ersetzt. Die „Hauptdiagonalelemente“ von $\hat{\Lambda}^\pm$ sind Null, was bei einem gemessenen Tensor durch Rotation nicht exakt zu erreichen ist. Fraglich ist jedoch, welche Vorteile es bietet, einen physikalisch dreidimensionalen Tensor mathematisch korrekt in einen zweidimensionalen zu transformieren.

Es läßt sich zeigen, dass aufgrund der gemachten Annahmen der magnetische Eigenvektor senkrecht auf dem elektrischen steht:

$$\mathbf{E}^i = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^i \\ -\lambda^i & 0 \end{pmatrix} \mathbf{H}^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^i \mathbf{H}^i = \hat{R}_{\frac{\pi}{2}} \lambda^i \mathbf{H}^i \quad (5.9)$$

$\hat{R}_{\frac{\pi}{2}}$ steht für eine Rotation um 90° .

An dieser Stelle möchte ich kurz auf die Eigenschaften der Eigenwerte bei 1D- und 2D- Impedanztensoren eingehen. Bei den Eigenwerten handelt es sich um eine rotationsinvariante Größe, wie z.B. die Determinante oder $\frac{1}{2}(Z_{xy} - Z_{yx})$. Liegt ein homogener, bzw. geschichteter Untergrund vor, so sind die Nebendiagonalen lediglich mit Z besetzt (siehe Kap. 2.2.1). Wir erhalten dafür nur einen Eigenwert, nämlich Z . Bei einem 2D-Impedanztensor sind die Nebendiagonalen mit der Impedanz senkrecht und parallel zur elektrischen Streichrichtung besetzt. Die beiden Eigenwerte geben diese Impedanzen ebenfalls genau wieder. Im 1D und 2D Fall führt die EGGERS Eigenwert-Analyse zu wahren Impedanzen.

Wir haben nun aus dem Impedanztensor Eigenwerte und Eigenvektoren erhalten, für die wir eine geeignete und intuitive Darstellung benötigen. Am besten eignen sich dazu Ellipsen. Die Eigenschaften dieser Ellipsen möchte ich anhand eines Beispiel-Impedanztensors gemeinsam für alle Abbildungsmethoden am Ende dieses Kapitels erläutern.

5.2 LATORRACA Singular Value Decomposition

Die von EGGERS eingeführte Eigenwert-Analyse bildet den magnetischen Eigenvektor grundsätzlich auf einen orthogonalen, elektrischen Eigenvektor ab. Besonders im Fall komplexer Leitfähigkeitsverteilungen muß diese physikalische Voraussetzung nicht gegeben sein. LATORRACA [1986] unterscheidet deshalb die einfallende elektromagnetische Welle, deren elektrisches und magnetisches Feld orthogonal sind, und das Gesamtfeld, zusammengesetzt aus Primärfeld und einem Sekundärfeld in Abhängigkeit von der Leitfähigkeitsverteilung. Für das Gesamtfeld muss also nicht zwangsläufig die Orthogonalität von elektrischem und magnetischem Feld gelten. Zudem ist die Eigenwert-Analyse besonderen mathematischen Einschränkungen unterworfen. Die *Singular Value Decomposition (SVD)* bietet eine wesentliche Verallgemeinerung, da sie generell auch für nicht-quadratische Matrizen möglich ist.

Grundlage ist auch hier die Abbildung des magnetischen Feldes auf das elektrische mit „Skalierung“ durch den Impedanztensor (siehe Gl. (2.14)). Eine SVD des Impedanztensors \underline{Z} liefert je zwei zweikomponentige H-Vektoren \mathbf{h}_1 und \mathbf{h}_2 sowie E-Vektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 . Sie sind jeweils orthogonal und normiert, so dass

$$\mathbf{h}_i^* \cdot \mathbf{h}_j = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad , \quad (5.10)$$

mit $i, j = 1, 2$ und $*$ als dem konjugiert Komplexen gilt. δ_{ij} steht für das Kronecker-Symbol.

Damit läßt sich die Impedanzgleichung (2.14) als

$$\begin{aligned}\underline{\underline{Z}}\mathbf{h}_i &= r_i\mathbf{e}_i \\ \tilde{\underline{\underline{Z}}}\mathbf{e}_i &= r_i\mathbf{h}_i\end{aligned}\quad (5.11)$$

schreiben. $\tilde{\underline{\underline{Z}}}$ steht für die adjungierte (konjugiert komplexe, transponierte) Matrix. Diese Gleichungen beschreiben eine Abbildung von orthogonalen, magnetischen Vektoren auf orthogonale, elektrische Vektoren und einer Skalierung mit dem Faktor r_i . Im mathematischen Kontext werden die Vektoren \mathbf{h}_i rechte Singulärvektoren und \mathbf{e}_i linke Singulärvektoren genannt. r_i sind die Singulärwerte.

Die Singulärvektoren lassen sich zu Matrizen der Form

$$\hat{U}_H = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{2,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{U}_E = \begin{pmatrix} e_{1,1} & e_{2,1} \\ e_{1,2} & e_{2,2} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

zusammenfassen. Die Vektoren $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$, beziehungsweise $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, stehen in den Spalten der Matrix. Dann gilt:

$$\tilde{\hat{U}}_H\hat{U}_H = \hat{I} \quad \text{und} \quad \tilde{\hat{U}}_E\hat{U}_E = \hat{I} \quad (5.13)$$

mit \hat{I} als der Einheitsmatrix. Die Matrix \hat{R} bezeichnet eine Diagonalmatrix mit den Singulärwerten r_1 und r_2 .

Damit läßt sich Gleichung (5.11) wie folgt schreiben:

$$\underline{\underline{Z}}\hat{U}_H = \hat{U}_E\hat{R} \quad (5.14)$$

$$\tilde{\underline{\underline{Z}}}\hat{U}_E = \hat{U}_H\hat{R} \quad (5.15)$$

Durch eine rechtsseitige Multiplikation von $\tilde{\hat{U}}_H$ in Gleichung (5.14) erhält man die Darstellung von $\underline{\underline{Z}}$ als Singulärwert-Problem.

$$\underline{\underline{Z}} = \hat{U}_E\hat{R}\tilde{\hat{U}}_H \quad (5.16)$$

Diese Gleichung hat auf der rechten Seite 10 Parameter, \hat{U}_H und \hat{U}_E mit jeweils 4 und \hat{R} mit 2 Parametern, und auf der linken Seite den Impedanztensor mit 4 komplexen Elementen, das heißt 8 Parametern. Um dieses Missverhältnis zu beheben, führt LATORRACA einen gemeinsamen Phasenfaktor für \mathbf{e}_i und \mathbf{h}_i ein und damit als Folge komplexe Singulärwerte.

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mu_i = r_i e^{i\theta_i} \quad (5.17)$$

Gleichungen (5.14), (5.15) und (5.16) lassen sich daraufhin transformieren:

$$\underline{\underline{Z}} = \hat{U}_E \hat{M} \quad (5.18)$$

$$\underline{\underline{\tilde{Z}}} = \hat{U}_H \hat{M}^* \quad (5.19)$$

$$\underline{\underline{Z}} = \hat{U}_E \hat{M} \tilde{U}_H \quad (5.20)$$

Als charakteristische Vektoren¹ \hat{U}_H und \hat{U}_E erhält man

$$\hat{U}_H = \begin{pmatrix} \cos \beta_H \cos \gamma_H - i \sin \beta_H \sin \gamma_H & -\cos \beta_H \sin \gamma_H + i \sin \beta_H \cos \gamma_H \\ \cos \beta_H \sin \gamma_H + i \sin \beta_H \cos \gamma_H & -\cos \beta_H \cos \gamma_H + i \sin \beta_H \sin \gamma_H \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

$$\hat{U}_E = \begin{pmatrix} \cos \beta_E \cos \gamma_E - i \sin \beta_E \sin \gamma_E & -\cos \beta_E \sin \gamma_E + i \sin \beta_E \cos \gamma_E \\ \cos \beta_E \sin \gamma_E + i \sin \beta_E \cos \gamma_E & -\cos \beta_E \cos \gamma_E + i \sin \beta_E \sin \gamma_E \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

mit

$$\tan 2\gamma_H = (C_{12}^H + C_{21}^H)/(C_{11}^H - C_{22}^H), \quad \sin 2\beta_H = i(C_{12}^H - C_{21}^H)/(r_1^2 - r_2^2) \quad (5.23)$$

$$\tan 2\gamma_E = (C_{12}^E + C_{21}^E)/(C_{11}^E - C_{22}^E), \quad \sin 2\beta_E = i(C_{12}^E - C_{21}^E)/(r_1^2 - r_2^2) \quad (5.24)$$

Hinter den Matrizen \hat{C}^H und \hat{C}^E verbirgt sich das Matrixprodukt $\underline{\underline{\tilde{Z}}}\underline{\underline{Z}}$, beziehungsweise $\underline{\underline{Z}}\underline{\underline{\tilde{Z}}}$. Die Singulärwerte r_1 und r_2 stehen mit der Matrix \hat{C} in folgender Beziehung

$$\det(\hat{C}) = r_1^2 r_2^2 \quad \text{und} \quad \text{trace}(\hat{C}) = r_1^2 + r_2^2, \quad (5.25)$$

wobei es keine Rolle spielt, ob \hat{C}^H oder \hat{C}^E zur Berechnung verwendet wird.

Wir haben nun je zwei charakteristische Vektorpaare für das magnetische und elektrische Feld erhalten sowie die dazugehörigen Eigenwerte. Ähnlich der Eigenwert-Analyse lassen sich diese Größen als Ellipsen darstellen (siehe Abschnitt 5.4).

5.3 Propagation Number Analysis (PNA)

Die hier vorgestellte *Propagation Number Analysis* basiert auf Überlegungen von Reilly [1979] über die Anisotropie von MT-Tensoren. Anhand eines mathematischen Formalismus überführt er den Impedanztensor in zwei neue Tensoren, den scheinbaren Widerstandstensor und einen sogenannten scheinbaren Permittivitätstensor. Weiterhin schlägt er als Darstellung der Tensoren Invarianten vor, die jedoch erst etwa

¹Diese Bezeichnung wird anstelle der Bezeichnung „Singulärvektoren“ verwendet, da durch die Einführung einer Phase Einschränkungen für den Singulärvektor gemacht wurden (siehe [LaTorraca et al., 1986]).

20 Jahre später auf den gemessenen Widerstandstensor im Rahmen transienter Elektromagnetik (LOTEM) [Caldwell & Bibby, 1998] angewendet wurde. Die Herleitung und Darstellung eines Widerstandstensors ist auch in der Magnetotellurik von großer Bedeutung, da der mit Hilfe der *PNA* berechnete Widerstandstensor durch Invarianten, die unabhängig vom Koordinatensystem sind, dargestellt werden kann. Die in der MT übliche Berechnung der scheinbaren spezifischen Widerstände ist, wie im Anhang gezeigt wird, dazu nicht geeignet. Im Rahmen dieser Arbeit habe ich den mathematischen Formalismus in eine physikalische Beschreibung ebener, elektromagnetischer Wellen überführt. Dies ermöglicht ein leichteres Verständnis dieses Verfahrens auch in Bezug auf seine Einschränkungen für die Magnetotellurik. Zentrale Größe in der physikalischen Formulierung ist die komplexe Ausbreitungszahl, worauf auch der Name, den ich diesem Verfahren gegeben habe, hinweist. Genau genommen heißt dieser Parameter „Ausbreitungskonstante“ (*propagation constant*). Da sie aber ein dispersives Verhalten aufweist, scheint der Ausdruck „Konstante“ irreführend. Sie ist im Grunde genommen das Quadrat der mit $\sqrt{-1}$ multiplizierten Wellenzahl. Der Realteil der komplexen Ausbreitungszahl enthält die reelle dielektrische Permittivität ϵ , während der Imaginärteil die reelle Leitfähigkeit σ darstellt. Die Leitfähigkeit wiederum ist das Inverse des spezifischen Widerstandes. Mit der komplexen Ausbreitungszahl wird im allgemeinen die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in einem leitfähigen, polarisierbaren und anisotropen Medium beschrieben. Grundlage dafür sind die Maxwell-Gleichungen. Hierbei wird zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld eine tensorielle Beziehung angenommen, wie sie auch in der Magnetotellurik durch die Impedanz- $\underline{\underline{Z}}$, bzw. Admittanzgleichung zum Ausdruck kommt (vgl. auch Gl. 2.14).

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \underline{\underline{Z}}^{-1} \mathbf{E} = \underline{\underline{Y}} \mathbf{E} \quad (5.26)$$

beschrieben wird. Ausgeschrieben nimmt die rechte Seite folgende Form an

$$\underline{\underline{Y}} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} Y_{xx} E_x + Y_{xy} E_y \\ Y_{yx} E_x + Y_{yy} E_y \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Die Maxwell-Gleichungen lauten unter der Annahme eines zeitlichen periodischen Ansatzes $e^{i\omega t}$ für die elektrischen und magnetischen Felder (siehe Kap. 2):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} \quad (5.28)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + i\omega \mathbf{D} \quad (5.29)$$

Zusammen mit den Materialgleichungen (2.5) ergibt sich:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{H} \quad (5.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E} + i\omega \underline{\underline{\epsilon}} \mathbf{E} \quad (5.31)$$

Wie in Gleichung (5.31) zu erkennen ist, sind sowohl die Leitfähigkeit σ als auch die Permittivität ϵ als Tensoren, das heißt anisotrop angesetzt worden.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Bei Ausrichtung des Koordinatensystems senkrecht und parallel der Anisotropieachsen können alle Elemente bis auf die Hauptdiagonalelemente verschwinden. Zumeist wird aber ein symmetrischer Tensor vorausgesetzt (vgl. [Negi & Saraf, 1989]). Die meisten Medien besitzen eine sehr kleine dielektrische Permittivität, die nur bei elektromagnetischen Wellen sehr hoher Frequenz (Mikrowellenphysik) signifikant wird. In der MT schätzen wir die Größenordnung des Verschiebungsstrom-Terms ab und erkennen, dass er gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigbar klein ist. Im Folgenden wird der Verschiebungsstromanteil in den Betrachtungen beibehalten und ermöglicht zudem eine generelle Anwendung dieses Verfahrens auch für Messungen in einem Frequenzbereich, der höher ist als der in der MT betrachtete. In den MT-Messungen beobachten wir eine Phasenverschiebung, hervorgerufen durch Heterogenitäten der Leitfähigkeit im Untergrund. Die Frequenzantwort an unserem Messpunkt an der Erdoberfläche zeigt also Dispersionsverhalten. Deshalb ist es durchaus sinnvoll, eine dielektrische Permittivität zuzulassen.

Die Erweiterung der Gleichung (5.31) um den Faktor $i\omega\mu$ ergibt:

$$\begin{aligned} -i\omega\mu\nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega\mu(\underline{\underline{\sigma}} + i\omega\underline{\underline{\epsilon}})\mathbf{E} \\ &= -\omega\mu(i\underline{\underline{\sigma}} - \omega\underline{\underline{\epsilon}})\mathbf{E} \\ &= -\underline{\underline{\gamma}}\mathbf{E} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Der Tensor $\underline{\underline{\gamma}} = -\omega^2\mu\underline{\underline{\epsilon}} + i\omega\mu\underline{\underline{\sigma}}$ stellt die Ausbreitungszahl dar. Sie ist per Definition das Quadrat der mit $\sqrt{-1}$ multiplizierten, komplexen Wellenzahl k .

Das Magnetfeld \mathbf{H} in Gleichung (5.33) kann nun durch die Admittanzgleichung (5.26) ersetzt werden.

$$-i\omega\nabla \times \underline{\underline{Y}}\mathbf{E} = -\underline{\underline{\gamma}}\mathbf{E} \quad (5.34)$$

Genauso läßt sich \mathbf{H} in Gleichung (5.30) substituieren.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\underline{\underline{Y}}\mathbf{E} \quad (5.35)$$

Zur Lösung dieser Gleichungen wird neben der periodischen Zeitabhängigkeit eine exponentielle Abhängigkeit der elektrischen Felder mit der Tiefe z vorausgesetzt. Dies entspricht formal dem Ansatz für eine ebene elektromagnetische Welle, die sich vertikal fortpflanzt. Hierbei muss aber die reflektierte, nach oben verlaufende Welle unberücksichtigt bleiben, was für einen homogenen, also ungeschichteten, Untergrund zutrifft. Im weiteren ist demnach nur der mit der Tiefe z (positiv nach

unten) abklingende Term zu berücksichtigen. Die elektrischen Felder besitzen keine Abhängigkeit in horizontaler Ebene, weshalb auch Ableitungen nach x und y verschwinden. Außerdem werden keine vertikalen Ströme angenommen, weshalb E_z Null ist. Insgesamt setzen wir also nur eine horizontale Anisotropie voraus, da für eine vertikale Anisotropie zwar keine vertikalen Ströme auftreten, aber E_z ungleich Null ist.

Mit den beschriebenen Annahmen ist Gleichung (5.35) equivalent zu folgendem Ausdruck:

$$\nabla \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} E_y \\ \frac{\partial}{\partial z} E_x \\ 0 \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} Y_{xx}E_x + Y_{xy}E_y \\ Y_{yx}E_x + Y_{yy}E_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

Alle räumlichen Ableitungen nach x und y verschwinden, so dass auf der linken Seite lediglich die Ableitungen nach z bestehen bleiben.

Wendet man den Rotationsoperator auf Gleichung (5.34) an, bleiben ebenfalls nur die Ableitungen nach z erhalten.

$$i\omega \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z}(Y_{yx}E_x + Y_{yy}E_y) \\ \frac{\partial}{\partial z}(Y_{xx}E_x + Y_{xy}E_y) \\ 0 \end{pmatrix} = -\underline{\underline{\gamma}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

Da wir einen homogenen, horizontal anisotropen Untergrund annehmen, können die Elemente des Admittanztensors keine Funktionen der Tiefe z sein, so dass sie sich wie konstante Faktoren bei der Ableitung verhalten. So gilt beispielsweise $\frac{\partial}{\partial z}(Y_{xy}E_x) = Y_{xy}\frac{\partial}{\partial z}E_x$. Die jeweiligen Ableitungen von E_x und E_y können durch die Komponenten der rechten Seite von Gleichung (5.36) ersetzt werden.

$$-(i\omega)^2 \begin{pmatrix} -Y_{yx}(Y_{yx}E_x + Y_{yy}E_y) + Y_{yy}(Y_{xx}E_x + Y_{xy}E_y) \\ Y_{xx}(Y_{yx}E_x + Y_{yy}E_y) - Y_{xy}(Y_{xx}E_x + Y_{xy}E_y) \\ 0 \end{pmatrix} = -\underline{\underline{\gamma}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

Im folgenden werde ich der Übersichtlichkeit wegen die Gleichungen auf zwei Dimensionen reduzieren, da die z -Komponente verschwindet. Der Vektor auf der linken Seite dieser Gleichung läßt sich zerlegen in eine 2×2 Matrix mit den Elementen des Admittanztensors und dem Vektor des elektrischen Feldes.

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} Y_{yy}Y_{xx} - Y_{yx}Y_{yx} & Y_{yy} \cdot (Y_{xy} - Y_{yx}) \\ Y_{xx} \cdot (Y_{yx} - Y_{xy}) & Y_{yy}Y_{xx} - Y_{xy}Y_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \underline{\underline{\gamma}} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

Der Tensor $\underline{\underline{\gamma}}$ hat demnach folgende Form:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} Y_{yy}Y_{xx} - Y_{yx}Y_{yx} & Y_{yy} \cdot (Y_{xy} - Y_{yx}) \\ Y_{xx} \cdot (Y_{yx} - Y_{xy}) & Y_{yy}Y_{xx} - Y_{xy}Y_{xy} \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Diese komplexe Größe läßt sich in Real- und Imaginärteil aufspalten, wobei der Realteil eine scheinbare Permittivität und der Imaginärteil eine scheinbare Leitfähigkeit darstellt (siehe Definition von $\underline{\underline{\gamma}}$ Gl. (5.33)). Das Inverse der Leitfähigkeit ist ein spezifischer Widerstand, der sich aus dem Imaginärteil bestimmen läßt.

$$\underline{\underline{\rho}} = \underline{\underline{\sigma}}^{-1} = \frac{\mu\omega}{\text{Im}(\underline{\underline{\gamma}})} \quad (5.41)$$

Im Rahmen dieser Arbeit bleibt der scheinbare Permittivitätstensor unberücksichtigt, da für die Abbildungen eine Transformation der Messdaten in Widerstandstensenoren genutzt werden soll.

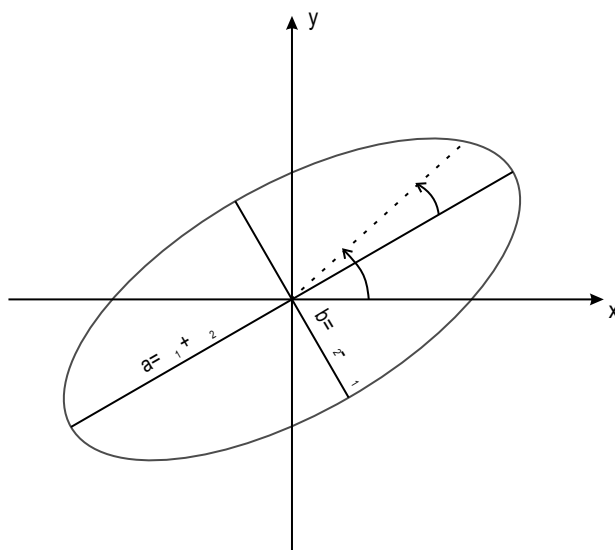


Abbildung 5.1: Die Skizze verdeutlicht, wie ein Tensor durch eine Ellipse abgebildet wird. Die Berechnung der Größen Π_1 und Π_2 , aus denen sich die Länge der Hauptachsen ergibt, sowie α und β , die den Rotationswinkel der Ellipse angeben, sind im Text näher erläutert.

Der durch die PNA erhaltene scheinbare spezifische Widerstand $\underline{\underline{\rho}}$ ist im Gegensatz zum scheinbaren spezifischen Widerstand ρ_a ein 2x2-Tensor. Für die Überprüfung der Tensoreigenschaften von γ sei auf den Anhang **A2** verwiesen. Der Imaginärteil eines Tensors, ist wiederum auch ein Tensor, womit auch $\underline{\underline{\rho}}$ ein Tensor ist.

Durch diese Herleitung ist der Impedanztensor in einen Widerstandstensor überführt

worden. Die *PNA* setzt dabei die Information über den komplizierten Untergrund in ein anisotropes Ersatzmodell um. Das bedeutet, dass für jeden Impedanztensor, unabhängig von der zugehörigen Frequenz, ein homogener, horizontal anisotroper Untergrund gesucht wird, der den gleichen Impedanztensor zur Folge hätte. Dabei lassen sich vor allem die Streichrichtungen von leitfähigen Anomalien als Größe und Richtung der Anisotropie ausdrücken. Diese Größen gehen in den Widerstandstensor ein. Mit der *PNA* soll kein Modell einer anisotropen Erdkruste aufgestellt werden, die Anisotropie dient lediglich als Hilfsmittel, um Geometrie und Leitfähigkeit der Anomalien in einem geographischen Koordinatensystem darstellen zu können.

Zu einer anschaulichen graphischen Darstellung von Tensoren können Ellipsen verwendet werden. Tensoren lassen sich als Summe von einem symmetrischen und einem asymmetrischen Anteil schreiben [Bibby, 1986].

$$\underline{\underline{\rho}} = \Pi_1 \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} + \Pi_2 \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ -\sin(2\beta) & \cos(2\beta) \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

mit

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2}[(\rho_{xx} - \rho_{yy})^2 + (\rho_{xy} + \rho_{yx})^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [P_1^2 + P_3^2 - P_2^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{1}{2}[(\rho_{xx} + \rho_{yy})^2 + (\rho_{xy} - \rho_{yx})^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [P_1^2 + P_3^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\tan(2\alpha) = (\rho_{xy} + \rho_{yx}) / (\rho_{xx} - \rho_{yy}) \quad (5.45)$$

$$\tan(2\beta) = (\rho_{xy} - \rho_{yx}) / (\rho_{xx} + \rho_{yy}) \quad (5.46)$$

Die Größen Π_1 , Π_2 , α und β bestehen aus rotationsinvarianten Ausdrücken

$$P_1 = \frac{1}{2}(\rho_{xx} + \rho_{yy}) = \frac{1}{2} \text{trace}(\underline{\underline{\rho}}) \quad (5.47)$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(\rho_{xx}\rho_{yy} - \rho_{xy}\rho_{yx})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[\det(\underline{\underline{\rho}})]^{\frac{1}{2}} \quad (5.48)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(\rho_{xy} - \rho_{yx}), \quad (5.49)$$

die vom jeweiligen Koordinatensystem unabhängig sind. Mit $a = \Pi_1 + \Pi_2$ und $b = \Pi_2 - \Pi_1$ erhält man die beiden Hauptachsen des Tensors, die als Hauptachsen einer Ellipse dargestellt werden können (siehe Abbildung 5.1).

Betrachtet man einen 1D Untergrund, so enthält der γ -Tensor auf den Hauptdiagonalen jeweils die Impedanz Z zum Quadrat. Die graphische Darstellung in Form des

scheinbaren Widerstandstensors führt zu einer Sonderform der Ellipse, dem Kreis. Auch für den 2D-Fall im Streichen werden die Nebendiagonalen des γ -Tensors Null, die Hauptdiagonalen sind mit den beiden Impedanzen Z_{\parallel}^2 und Z_{\perp}^2 besetzt. Für den allgemeinen 2D-Fall sowie einen 3D Untergrund ergibt sich ein vollbesetzter Widerstandstensor, der zu einer Ellipse führt, die in Richtung der höheren Leitfähigkeit gestreckt ist.

5.3.1 Einfluß von verzerrenden, oberflächennahen Strukturen auf die PNA

Mit der *Propagation Number Analysis* erhalten wir einen scheinbaren Widerstandstensor, dessen Form und Ausrichtung die Leitfähigkeitsverteilung im Untergrund abbilden soll. In diesem Zusammenhang liegt es nahe, die Auswirkungen einer kleinräumigen, oberflächennahen Anomalie zu betrachten. Diese Art von Anomalien wird vor allem bei den Dekompositionsverfahren vorausgesetzt. Sie lassen sich durch eine reelle, frequenzabhängige Verzerrungsmatrix ausdrücken (siehe Gl. (2.22)). Als Beispieltensor verwende ich den Tensor aus Formel (5.52), für den die Hauptdiagonalelemente Null gesetzt sind.

$$\underline{\underline{Z}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1.14 + 0.975i \\ -0.274 - 0.457i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

wird mit der reellen Verzerrungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 2 & 0.25 \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

multipliziert. Abbildung 5.2 zeigt links die resultierende Ellipse, deren Hauptachsen am Koordinatensystem ausgerichtet sind. Ein Vergleich mit der rechten Ellipse zeigt, dass der statisch verzerrte Impedanztensor dagegen sowohl die Größe der Ellipse als auch die Richtung beeinflusst. Durch dieses Beispiel wird deutlich, dass der Impedanztensor auch auf kleinräumige Inhomogenitäten reagiert. Dieses Beispiel soll nicht den Eindruck vermitteln, dass bei Vorhandensein kleinräumiger Inhomogenitäten keine aussagekräftigen Ellipsen entstehen. Vielmehr wird die Ellipse in diesem Fall die lokale Verzerrung abbilden. Dies kann dann von Interesse sein, wenn bei einer Modellierung diese Inhomogenitäten als a priori Information berücksichtigt werden sollen.

5.3.2 Einfluß von fehlerbehafteten Impedanzen auf die PNA

Für jedes Impedanzensorelement wird nach der statistischen Schätzung ein Fehler angegeben. Um den Einfluß dieses Fehlers, bzw. die Stabilität der Ellipse nach der PNA, zu untersuchen, wähle ich nicht die Methode der Fehlerfortpflanzung. Sie

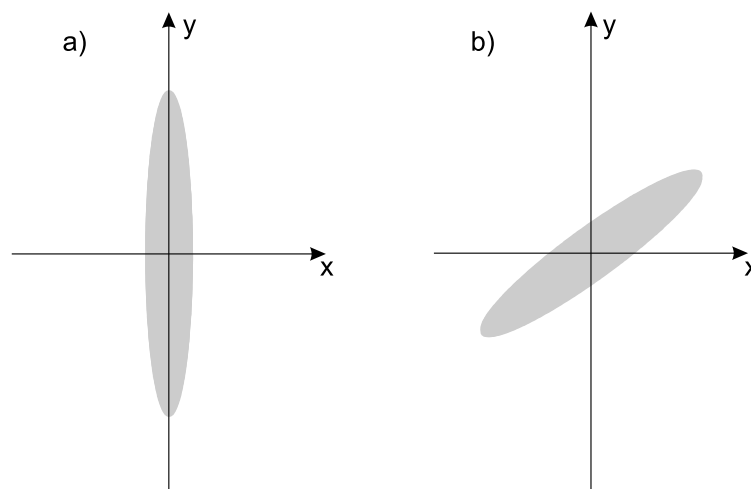


Abbildung 5.2: Ein 2D-Impedanztensor wurde mit einer reellen Verzerrungsmatrix multipliziert. Die Darstellung zeigt die Ellipsen nach der *PNA* für den 2D-Tensor a) ohne und b) mit Verzerrung.

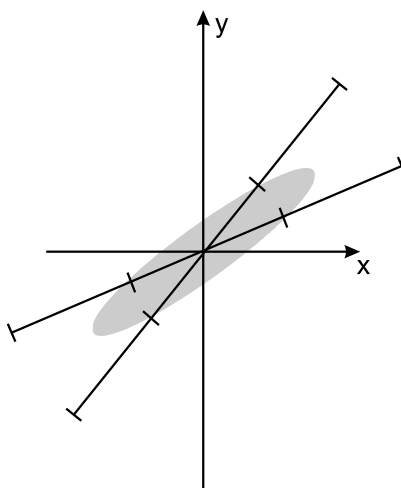


Abbildung 5.3: Darstellung der „Fehlerbalken“ für die Ellipsen nach der *PNA*: Die beiden Linien geben den Bereich an, indem die Hauptachsenrichtung liegen kann. Die Markierungen auf den Linien zeigen die maximale und minimale Länge der Hauptachse.

gestaltet sich bei dieser Transformation kompliziert und ist nicht lösbar. Vielmehr berechne ich für jedes Impedanztensorelement 500 Zufallswerte, die sich innerhalb der Fehlergrenzen für dieses Element befinden. Trägt man das Impedanztensorelement mit seinem Fehler in der komplexen Ebene auf, so ergibt sich ein Kreis. In einigen Versuchen hat sich gezeigt, dass bei dem Fehlerbereich, der für diesen Datensatz bei langen Perioden typischen ist, 500 Zufallswerte genügen, um optisch eine gleichmäßige Überdeckung des Fehlerbereichs zu erhalten. Aus den jeweils 500 Zufallswerten für jedes Impedanztensorelement werden die Tensoren zusammengesetzt. Auf die Gesamtmenge an „Daten“² wende ich die *PNA* an und ermittle für jede Ellipse minimale und maximale Längen der Hauptachsen sowie minimale und maximale Winkel zum Koordinatensystem. Diese Abschätzung ist zwar rechenaufwendig, bietet aber eine Alternative zur klassischen Fehlerfortpflanzung.

Zur Darstellung der Fehlerbereiche (siehe Abb. 5.3) verwende ich zwei sich kreuzende Linien über der Ellipse. Sie beschreiben, um welchen Betrag die Richtung der Hauptachse im Rahmen der Datenfehler variieren kann. Die Begrenzungen auf den Linien geben die minimale und maximale Hauptachsenlänge wieder. Auf diese Weise erhält man einen Eindruck wie gut die jeweilige Ellipse nach der *PNA* bestimmt ist.

5.4 Vergleich der Abbildungsmethoden

Um die Eigenwert-Analyse nach EGGERS' und die *SVD* nach LATORRACA zu vergleichen, verwendet ich den aus der Literatur [Eggers, 1982, LaTorraca *et al.*, 1986] bekannten Impedanztensor mit der Form

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{pmatrix} 0.097 + 0.208i & 1.140 + 0.957i \\ -0.274 - 0.457i & 0.297 - 0.138i \end{pmatrix} . \quad (5.52)$$

Für beide Methoden lassen sich je zwei magnetische und elektrische Polarisationsellipsen nach den Eigenvektoren aufzeichnen. Die oberen Skizzen in Abbildung 5.4 beziehen sich auf die ersten E- und H-Eigenwerte, die unteren auf die jeweils zweiten. Zuerst möchte ich auf einige geometrische Parameter und Zusammenhänge der EGGERS' Ellipsen eingehen (Abb. 5.4 links). Die Hauptachse des ersten E-Eigenwerts hat die Länge des ersten Eigenwerts. Dementsprechend ist die Hauptachse der zweiten elektrischen Polarisationsellipse mit dem zweiten Eigenwert skaliert. Die Winkel Ψ^+ und Ψ^- gegenüber der x-Achse³ berechnen sich aus den Elementen der jeweiligen Eigenvektoren \mathbf{E}^+ und \mathbf{E}^- :

$$\tan 2\Psi = \frac{2 \cdot \operatorname{Re}(E_x E_y^*)}{|E_x|^2 - |E_y|^2} \quad (5.53)$$

²500 Tensoren für jede Station und jede Frequenz

³Man beachte, dass die x-Achse in dem für die MT üblichen Koordinatensystem positiv nach Norden zeigt.

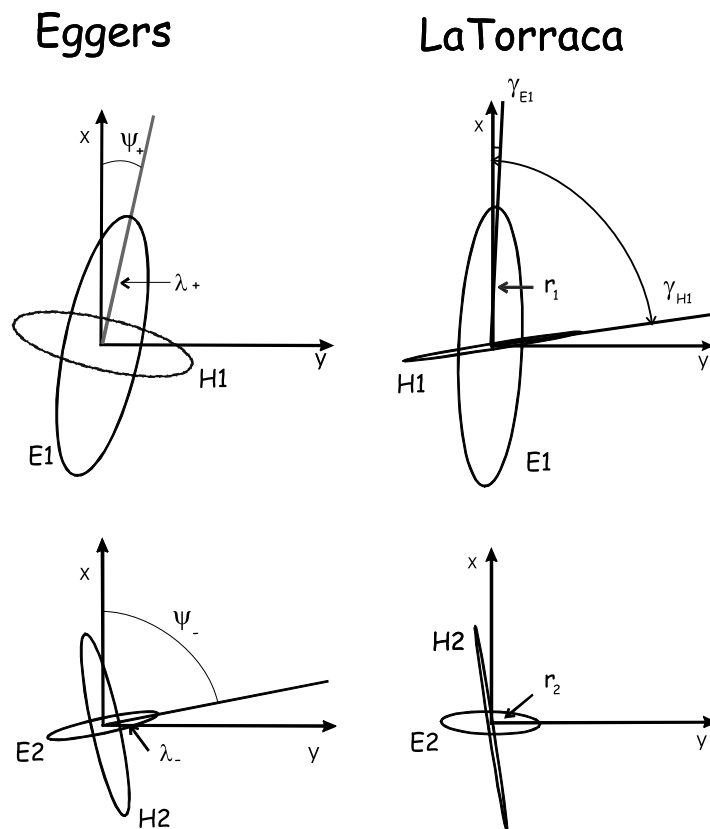


Abbildung 5.4: Darstellung der Eigenvektoren und -werte nach der EGGERS' *Eigenstate Analysis* und LATORRACA *Singular Value Decomposition* für den im Text gegebenen Impedanztensor. Trotz leichter Differenzen zwischen beiden Verfahren ähneln sich die Ellipsen.

Die dazugehörigen magnetischen Eigenvektoren sind normiert und stehen grundsätzlich senkrecht zu den elektrischen.

Die Ellipsen, die nach den beiden Singulärvektorpaaren der *SVD* berechnet werden (Abb. 5.4 rechts), sind vergleichbar mit denen der Eigenwert-Analyse. Die obere Skizze zeigt die beiden ersten charakteristischen Vektoren. Die Länge der Hauptachse der elektrischen Polarisationsellipse ist auf den ersten Singulärwert r_1 skaliert und ist um den Winkel γ_{E1} gegenüber der x-Achse verdreht. Die Amplitude des magnetischen Feldes ist auf 1 normiert und um den Winkel γ_{H1} gedreht. Im Gegensatz zu den EGGERS' Ellipsen stehen elektrisches und magnetisches Feld nicht zwangsläufig senkrecht aufeinander. Dies ist nur bei bestimmten Leitfähigkeitsgeometrien der Fall. Das zweite Paar charakteristischer Vektoren steht per Definition senkrecht zu dem ersten und ist durch den zweiten Singulärwert skaliert.

Möchte man die Ellipsendarstellung nach EGGERS oder LATORRACA als Abbil-

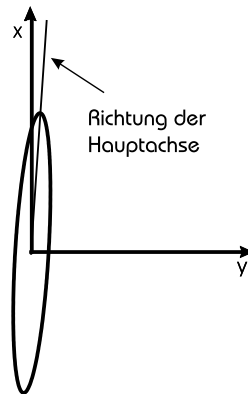


Abbildung 5.5: Für den gleichen Impedanztensor wie in Abbildung 5.4 wurde die Ellipse nach der *PNA* berechnet. Sie ist in ihrer Ausrichtung mit dem ersten elektrischen Eigenwert nach der *SVD* vergleichbar.

dungsverfahren verwenden, so zeichnet man diese Ellipsen für eine bestimmte Frequenz oder Tiefe an allen Stationen. Durch die Geometrie der Ellipsen sollen leitfähige Strukturen abgebildet werden. Bei EGGERS' Eigenwert-Analyse stehen elektrisches und magnetisches Feld senkrecht aufeinander. Um komplizierte Leitfähigkeitsstrukturen abzubilden, ist es daher wesentlich sinnvoller, die Ellipsen der beiden elektrischen Eigenvektoren zu verwenden.

Bei der *SVD* stehen per Definition jeweils die beiden elektrischen und magnetischen Felder senkrecht zueinander, jedoch kann ein beliebiger, von der Leitfähigkeitsverteilung abhängiger Winkel zwischen dem E- und H-Feld auftreten. Es genügt also, zu reinen Abbildungszwecken nur das erste charakteristische Vektorpaar zu verwenden. Eine wichtige Größe bezüglich der Winkel zwischen dem ersten charakteristischen Vektorpaar ist die LATORRACA *Skew*⁴:

$$S = \frac{1}{2}\pi - \gamma_H + \gamma_E \quad (5.54)$$

Sie ist ein Maß für die Abweichung von der Orthogonalität zwischen elektrischem und magnetischem Feld.

Zu dem Impedanztensor aus Gleichung 5.52 wurde auch die dazugehörige Ellipse nach der *PNA* berechnet. Sie ist in Abbildung 5.5 dargestellt. In Ausrichtung und Größe ist sie vergleichbar mit dem ersten Singulärwert E_1 . Im Gegensatz zu den anderen beiden Verfahren haben wir hierbei nur eine Ellipse. Es ist also nicht der Winkel zwischen zwei Ellipsen, der eine wesentliche Rolle spielt.

Zu einer Abbildungsmethode werden alle drei Verfahren jedoch nur bei Anwendung auf einen genügend dicht vermessenen Datensatz. In Kapitel 6 sollen anhand ver-

⁴Die Winkel γ_H und γ_E sind nicht zu verwechseln mit der Ausbreitungszahl γ .

schiedener 2D- und 3D-Modelle die Vor- und Nachteile dieser Abbildungsverfahren verglichen werden.

5.5 Verwendung von Invarianten

Die hier als *PNA* eingeführte Abbildungsmethode stützt sich auf die Darstellung von Invarianten. Immer dann, wenn wir es in der Geophysik mit den unterschiedlichsten Tensoren zu tun haben, taucht die Berechnung und Darstellung von Invarianten auf. In der Magnetotellurik beschäftigen sich viele Arbeiten über einen langen Zeitraum mit Invarianten des Impedanzensors und ihrer Aussagekraft [Berdichevsky & Dmitriev, 1974, Ranganayaki, 1984, Ingham, 1988, Park & Livelybrooks, 1989, Szarka & Menvielle, 1997, Weaver *et al.*, 2000]. Besonders bei einer komplizierten Leitfähigkeitsverteilung scheinen diese von der Richtung des induzierenden elektromagnetischen Feldes sowie vom gewählten Koordinatensystem unabhängige Parameter wichtige und objektive Informationen des Untergrundes zu besitzen. Die Invarianten des Impedanzensors werden als Ellipsen oder *Mohr'sche Kreise* [Lilley, 1993] in der komplexen Ebene dargestellt. Die im Rahmen dieser Arbeit berechneten Invarianten beziehen sich jedoch auf den aus der *PNA* resultierenden Widerstandstensor. Im Gegensatz zum Impedanztensor ist der Widerstandstensor eine reelle, physikalisch anschauliche Größe. Die erhaltenen Invarianten eignen sich zur Darstellung in einer Stationskarte, so dass sich durch direkte Zuordnung zur Messlokation ein Abbild des Untergrundes ergibt.