Kapitel 2

Zum Verständnis komplizierter Leitfähigkeitsverteilungen

Für das physikalische Verständnis der elektromagnetischen Tiefensondierung sollen an dieser Stelle zunächst die Grundlagen vorgestellt werden. Besonders bei der Herleitung der in der Magnetotellurik (MT) verwendeten Diffusionsgleichungen werden eine Reihe Annahmen vorausgesetzt. Basierend auf der Theorie der MAXWELL-Gleichung verknüpft der Impedanztensor die elektrischen und magnetischen Felder linear miteinander. Da er alle Informationen über die Leitfähigkeitsverteilung im Untergrund beinhaltet, widmet sich ein Teil dieses Kapitels den Eigenschaften des Impedanztensors.

2.1 Elektromagnetische Tiefensondierung

Die Theorie für Induktionsvorgänge basiert auf den MAXWELL-Gleichungen, die im Frequenzbereich folgende Form annehmen:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mathbf{B} \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\mathbf{D} + \mathbf{j} \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{el} \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad . \tag{2.4}$$

Zusätzlich gelten die Materialgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0\mu_r\mathbf{H} \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} \end{aligned} \tag{2.5}$$

und das Ohmsche Gesetz für isotrope und homogene Leiter:

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \quad . \tag{2.6}$$

$\mathbf{E}$ steht für das elektrische Feld in $[\frac{V}{m}]$, $\mathbf{H}$ für das magnetische Feld in $[\frac{A}{m}]$, $\mathbf{B}$ für die magnetische Flussdichte in $[T]$, $\mathbf{D}$ für die Verschiebungsdichte in $[\frac{C}{m^2}]$ und $\mathbf{j}$ für die Stromdichte in $[\frac{A}{m^2}]$. Diese als auch die übrigen verwendeten Variablen sind in der Tabelle auf Seite (vi) zusammengefaßt.
Die in den nächsten Abschnitten beschriebenen Annahmen werden in der MT zur Herleitung der Diffusionsgleichungen hinzugezogen:

- Die Quellen der elektromagnetischen Felder befinden sich außerhalb des Untergrundes.
- Die relative magnetische Permeabilität μ_r und die relative Permittivität ϵ_r werden hier als konstant, isotrop und frequenzunabhängig (nicht dispersiv) angenommen.
- Da für die im Untergrund befindlichen Gesteine die Permeabilität klein ist, wird die magnetische Permeabilität $\mu = \mu_0$ des Vakuums angenommen.

Unter Verwendung der Materialgleichungen (2.5) und des Ohmschen Gesetzes (2.6) vereinfachen sich die MAXWELL-Gleichungen zu:[1]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H} \tag{2.7}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} - i\omega\epsilon\mathbf{E} \tag{2.8}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad .$$

Der Term $\sigma\mathbf{E}$ in Gleichung (2.8) beschreibt den Leitungsstrom, während der Term $-i\omega\epsilon\mathbf{E}$ den Anteil des Verschiebungsstroms wiedergibt. Das Verhältnis zwischen Leitungs- und Verschiebungsstrom ist demnach $\frac{\omega\epsilon}{\sigma} \simeq \frac{\rho \cdot f}{2} \cdot 10^{-10}$. Für die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Frequenzen zwischen $1000Hz$ und $0.001Hz$, sowie für die für die Erde üblichen Widerstände von $1\Omega m - 1000\Omega m$ kann der Verschiebungsstrom vernachlässigt werden [Kaufman & Keller, 1981].
Die Anwendung eines weiteren Rotationsoperators auf die Gleichung (2.8) liefert die Diffusionsgleichung für das Magnetfeld.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \sigma\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0\sigma i\omega\mathbf{B} \tag{2.9}$$

Im kartesischen Koordinatensystem gilt die Vektoridentität $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$. Aus der Divergenzfreiheit von $\mathbf{B}$ ergibt sich die Diffusionsgleichung als partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung im quasi-homogenen Fall als:

$$\nabla^2\mathbf{H} = \triangle\mathbf{H} = k^2\mathbf{H} \tag{2.10}$$

[1] $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ gilt nur im homogenen oder geschichteten Medium.

mit der komplexen Wellenzahl $k = \sqrt{\mu_0 \sigma i \omega}$.
Für das elektrische Feld läßt sich auf ähnliche Weise eine Diffusionsgleichung aufstellen.

Die Diffusionsgleichungen beschreiben die Ausbreitung von elektrischen und magnetischen Feldern als Diffusion in einem homogenen Medium mit der Leitfähigkeit σ. Die komplexe Wellenzahl k steht mit der Skintiefe δ in folgendem Zusammenhang:

$$k = \frac{1+i}{\delta} \tag{2.11}$$

Unter der Annahme eines homogenen Untergrundes läßt sich hieraus die Eindringtiefe elektromagnetischer Wellen mit

$$\delta \approx \frac{1}{2}\sqrt{\rho T} \quad [km] \tag{2.12}$$

abschätzen.

Die magnetotellurische Impedanz berechnet sich aus dem Quotienten aus elektrischem und magnetischem Feld.

$$Z(\omega) = \frac{E(\omega)}{H(\omega)} \qquad \text{mit} \qquad E \perp H \tag{2.13}$$

Dieser lineare Zusammenhang zwischen horizontalem elektrischem und magnetischem Feld verallgemeinert sich für dreidimensionale Felder zu einem Ansatz, für den eine horizontale E-Feldkomponente linear mit den beiden Magnetfeldkomponenten verknüpft ist:[2]

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \underline{\underline{Z}} \cdot \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Der komplexe Impedanztensor [3] kann in den physikalisch aussagekräftigeren, scheinbaren spezifischen Widerstand ρ_a und die Phase umgerechnet werden:

$$\rho_{a,ij} = \frac{\mu_0}{2\pi f}|Z_{ij}|^2 \tag{2.15}$$

$$\phi_{ij} = \arctan\left(\frac{Im(Z_{ij})}{Re(Z_{ij})}\right) \qquad \text{mit} \quad i,j = x,y \tag{2.16}$$

Für jedes komplexe Impedanztensorelement erhält man nun eine scheinbare spezifische Widerstands- sowie eine Phasenkomponente. Sie lassen sich aber nicht mehr zu

[2]Da in der MT das elektrische Feld **E** und die magnetische Induktion **B** gemessen werden, bezeichne ich im folgenden die Impedanz als Verhältnis dieser beiden Felder. Durch die Materialgleichungen besteht die in Gleichung (2.5) angegebene Beziehung zwischen magnetischem Feld und magnetischer Induktion.

[3]Die Frequenzabhängigkeit des Impedanztensors sowie aller abgeleiteten Größen ist im Folgenden nicht mehr explizit angegeben.

einem Widerstands- und Phasentensor zusammensetzen, da durch die Bildung des Betragsquadrates aufgrund der Dreiecksungleichung die Tensoreigenschaften verloren gegangen sind[4].

Analog zu dem Impedanztensor definiert man die magnetischen Übertragungsfunktionen zwischen den beiden horizontalen und dem vertikalen Magnetfeld:

$$B_z = T_x B_x + T_y B_y \tag{2.17}$$

Die anschauliche Darstellung dieser Übertragungsfunktionen erfolgt durch Induktionspfeile. Ihre Berechnung ist in Tabelle 2.1 zusammengefaßt.

Realpfeil		Imaginärpfeil	
Betrag	Winkel	Betrag	Winkel
$\sqrt{Re(T_x)^2 + Re(T_y)^2}$	$\arctan\left(\frac{Re(T_y)}{Re(T_x)}\right)$	$\sqrt{Im(T_x)^2 + Im(T_y)^2}$	$\arctan\left(\frac{Im(T_y)}{Im(T_x)}\right)$

Tabelle 2.1: *Betrag und Winkel des Induktionspfeils nach* WIESE

In der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten WIESE-Konvention [Wiese, 1962] zeigen die Realpfeile von gutleitenden Strukturen weg.

2.2 Eigenschaften des Impedanztensors

Von der Leitfähigkeitsverteilung im Untergrund hängt ab, welche Form der Impedanztensor annimmt. Der Impedanztensor und die darin enthaltene Dimensionalitätsinformation sind von großer Bedeutung, da die frequenzabhängige Übertragungsfunktion mit Modellrechnungen in ein Leitfähigkeits-Tiefenmodell überführt werden muß. Zur Verfügung stehen 1D-Inversions- und 1D-Vorwärtsmodellierungsalgorithmen, die wenig rechenaufwendig sind, da die Leitfähigkeit nur mit der Tiefe variiert. Mittlerweile sind neben 2D-Vorwärtsmodellierungsprogrammen [Wannamaker, 1990] auch sehr gute und effiziente 2D-Inversionsalgorithmen [Rodi & Mackie, 2001] vorhanden. Um 3D-Leitfähigkeitsmodelle zu erhalten, können zur Zeit nur Vorwärtsrechnungen [Mackie *et al.*, 1993] durchgeführt werden. Aufgrund der Komplexität und der unüberschaubar vielen freien Modellparameter sind hierbei oft nur vereinfachende Modellstudien möglich. Diese Probleme und die damit verbundene enorme Rechenleistung und -zeit erklären, dass zur Zeit keine effizienten 3D-Inversionsalgorithmen vorhanden sind. Aus diesem Grund werden momentan fast standardmäßig 2D-Inversionen zur Auswertung der MT-Ergebnisse eingesetzt. Um zu entscheiden, ob eine zweidimensionale Interpretation der MT Ergebnisse gerechtfertigt ist, sind Parameter nötig, mit denen die Dimensionalität der Felder und

[4]Anhand eines 2D-Tensors soll diese Problematik in Anhang **A1** erläutert werden.

damit in der Regel auch des Untergrundes anhand der Impedanztensors abgeschätzt werden kann. Oft verzerren oberflächennahe, kleinräumige Inhomogenitäten eine ansonsten regionale 2D-Leitfähigkeitsstruktur. Eine wichtige Größe in diesem Zusammenhang ist die regionale Streichrichtung.
Im Folgenden werden unterschiedliche Leitfähigkeitsverteilungen zusammen mit ihrem Einfluß auf den Impedanztensor und anderer MT-Parameter untersucht.

2.2.1 Homogener und geschichteter Halbraum

Im homogenen ($\sigma = const.$) sowie im geschichteten ($\sigma = \sigma(z)$) Halbraum sind lediglich die beiden Nebendiagonalelemente Z_{xy} und Z_{yx} des Impedanztensors besetzt, die Hauptdiagonalelemente Z_{xx} und Z_{yy} sind Null. Da es keine lateralen Leitfähigkeitsänderungen gibt, gilt: $Z_{xy} = -Z_{yx}$.
Für den homogenen Untergrund gibt der scheinbare spezifische Widerstand den wahren Widerstand an. Die Phasenwerte liegen bei 45^o [Kaufman & Keller, 1981]. Die Impedanztensorelemente für den geschichteten Halbraum sind im Gegensatz zum homogenen Halbraum frequenzabhängig.
Bei einer 1D-Leitfähigkeitsverteilung existiert keine interne vertikale Magnetfeldkomponente, weshalb $T_x = T_y = 0$ ist.

2.2.2 2D-Leitfähigkeitsverteilung

Für eine 2D-Leitfähigkeitsverteilung des Untergrundes gelte $\sigma = \sigma(y, z)$, was bedeutet, dass Leitfähigkeitskontraste in x-Richtung streichen. In diesem Fall entkoppeln die Maxwell-Gleichungen in zwei unabhängige Polarisationen. Ist das magnetische Feld parallel zur Streichrichtung polarisiert, spricht man von der B-Polarisation oder auch der TM-Mode [5]. Das zugehörige elektrische Feld ist senkrecht zum Kontrast orientiert. Mit der E-Polarisation, bzw. TE-Mode[6], ist ein elektrisches Feld parallel zur Streichrichtung gemeint.

TE-Mode	**TM-Mode**
$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega B_y$	$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \sigma E_y$
$\frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z$	$-\frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \sigma E_z$
$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \sigma E_x$	$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega B_x$

Die Tabelle oben impliziert außerdem, dass auch für eine 2D-Leitfähigkeitsverteilung nur die Nebendiagonalelemente Z_{xy} und Z_{yx} des Impedanztensors besetzt sind,

[5] tangential magnetisch bezüglich der elektrischen Streichrichtung
[6] tangential elektrisch bezüglich der elektrischen Streichrichtung

während die Hauptdiagonalelemente Z_{xx} und Z_{yy} verschwinden. In der TM-Mode tritt keine magnetische Vertikalkomponente auf, was bedeutet, dass die magnetische Übertragungsfunktion T_x parallel zum Streichen des Kontrastes Null ist. Der Realteil der daraus berechneten Induktionspfeile weist in der WIESE-Konvention senkrecht vom guten Leiter weg, der Imaginärteil ist abhängig vom Periodenbereich[7] parallel, bzw. antiparallel, zu ihm ausgerichtet.

Die beschriebenen Vereinfachungen gelten jedoch nur, wenn das Messkoordinatensystem senkrecht, bzw. parallel, zu der Streichrichtung des Leitfähigkeitskontrasts ausgerichtet ist. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall, so dass der Impedanztensor trotz eines 2D-Untergrundes voll besetzt ist. Durch Rotation um den Winkel α kann der Tensor in das gewünschte Koordinatensystem überführt werden. Für den rotierten Tensor gilt dann:

$$\underline{\underline{Z'}} = \hat{R}\underline{\underline{Z}}\hat{R}^T \tag{2.18}$$

mit

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

als Drehmatrix und $\hat{R}^T$ als der Transponierten von $\hat{R}$.
Zur Bestimmung des Rotationswinkels α nach SWIFT [1967] muss die Summe der Betragsquadrate der Hauptdiagonalelemente minimiert werden. Der dabei ermittelte Winkel wird auch als Swiftwinkel α_s bezeichnet. Ein grundsätzlicher Nachteil dieser Methode ist die Sensibilität gegenüber kleinräumigen, oberflächennahen Inhomogenitäten. Sie verursachen eine Ladungsanhäufung, die ein statisches elektrisches Feld zur Folge hat. Dieses frequenzunabhängige Feld tritt mit dem induzierten elektrischen Feld in Wechselwirkung.
Neben dem Rotationswinkel wird die Schiefe (Skew) des Impedanztensors als Dimensionalitätsabschätzung verwendet. Sie ist ein rotationsinvariantes Maß für die Abweichung des Tensors von der 1D-/2D-Struktur, bei der wie beschrieben die Hauptdiagonalelemente Null sind:

$$\kappa = \frac{|Z_{xx} + Z_{yy}|}{|Z_{yx} - Z_{yx}|} \tag{2.20}$$

Ein empirischer Grenzwert von $\kappa \geq 0.2$ ist mit einem 1D- oder 2D-Untergrund inkompatibel.

[7]In der hier vorliegenden Arbeit werden die Bezeichnungen „Frequenzbereich“ und „Periodenbereich“ wahlweise verwendet: Um Frequenzangaben mit unübersichtliche Dezimalzahlen < 1 zu vermeiden, bezeichne ich den Bereich von Frequenzen $> 1Hz$ im allgemeinen als Frequenz-, den $< 1Hz$ oder $1s$ als Periodenbereich.

Um regionale Streichrichtungen auch bei Vorhandensein von lokalen verzerrenden Inhomogenitäten zu erhalten, stehen unterschiedliche Dekompositionsverfahren zur Verfügung, die sich seit den letzten 20 Jahren enorm weiterentwickelt haben.
Schon Ende der siebziger Jahre hat sich LARSEN [1977] mit der Entfernung von oberflächennahen, lokalen Effekten aus langperiodischen Daten beschäftigt. Dazu wird eine reelle Verzerrungsmatrix $\hat{C}$ vom gemessenen Impedanztensor $\underline{\underline{Z}}^{meas}$, der zudem rotiert sein kann, abgespalten:

$$\underline{\underline{Z}}^{meas} = \hat{R} \cdot \hat{C} \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot \hat{R}^T \tag{2.21}$$

Diese Idee wurde in den folgenden Jahren unter anderem von BAHR [1988] aufgegriffen. Er setzt voraus, dass ein statisches elektrisches Feld sich durch eine reelle Matrix ausdrücken läßt, die mit dem 2D-Impedanztensor multipliziert ist.

$$\underline{\underline{Z}}^{meas} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}Z_{yx} & a_{11}Z_{xy} \\ a_{22}Z_{yx} & a_{21}Z_{xy} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Da in den Spalten des verzerrten Tensors jeweils die Impedanz parallel und senkrecht zum Streichen Z_{xy} und Z_{yx} steht, müssen die Phasen beider Spaltenelemente gleich sein. Wenn nun dem gemessenen Impedanztensor tatsächlich eine regionale 2D-Struktur zugrunde liegt, er aber in einem beliebigen Winkel zum Streichen registriert worden ist, so wird der Winkel α_b ermittelt, bei dem die Phasengleichheit der Spaltenelemente wieder hergestellt ist. Der durch diesen analytischen Ansatz ermittelte Winkel wird auch phasensensitiver Rotationswinkel genannt und gilt als robust gegenüber kleinräumigen Inhomogenitäten.
Neben dem Rotationswinkel hat BAHR auch eine phasensensitive Skew η eingeführt. Der Grenzwert, bei dem eine 2D Interpretation der Daten gerechtfertigt ist, ist ebenfalls empirisch und liegt bei $\eta \approx 0.3$ [Bahr, 1991].

Kurze Zeit zuvor entwickelten GROOM & BAILEY [1989] ein numerisches Verfahren, das grundsätzlich vergleichbar mit dem BAHR'schen Ansatz ist [Smith, 1995]. Hierbei wird die Verzerrungsmatrix $\hat{C}$ weiter in 3 Matrizen und eine skalare Größe zerlegt:

$$\hat{C} = g \cdot \hat{S} \cdot \hat{T} \cdot \hat{A} \tag{2.23}$$

mit g als einem skalaren Verstärkungsfaktor, $\hat{S}$ als *shear*-Tensor, $\hat{T}$ als *twist*-Tensor und $\hat{A}$ als Anisotropie-Matrix. Sowohl die Anisotropie als auch der Verstärkungsfaktor können durch die Entzerrung nicht aufgelöst werden [Groom & Bailey, 1989]. Bei einer Dekomposition werden neben der regionalen Streichrichtung die genannten Parameter durch Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems mit der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Eine Dekomposition gilt dann als erfolgreich, wenn über den gewählten Periodenbereich die Skalare *Twist* und *Shear*, aus denen die gleichnamigen Tensoren gebildet werden, nahezu konstant sind [Echternacht, 1998].

Diese Frequenzunabhängigkeit ist eine wesentliche Voraussetzung der Dekomposition.
Obwohl die Berechnung des regionalen Streichwinkels mittels des numerischen Verfahrens nach GROOM & BAILEY zu Instabilitäten neigt, hat es einen Vorteil gegenüber der BAHR'schen Methode: Das numerische Verfahren kann für mehrere Frequenzen und/oder Stationen zusammen verwendet werden. MCNEICE & JONES [2001] haben diese Dekomposition zu einer „multisite - multifrequency decomposition "erweitert. Dabei können mehrere Frequenzen von einer oder mehreren Stationen zusammen analysiert werden, da davon auszugehen ist, dass sie die Information gleicher regionaler Streichrichtung beinhalten. Der Einfluß von verrauschten Einzeldaten läßt sich dadurch verringern und die numerische Stabilität erhöhen.

Während die genannten Dekompositionsverfahren nur die elektrische Verzerrung untersuchen, so gibt es auch mehrere Ansätze, dies auf magnetische Verzerrungen zu übertragen. Eine lokale Inhomogenität verzerrt das elektrische Feld, was auch ein anomales magnetisches Feld zur Folge hat. Ritter & Banks [1998] betrachten dabei die magnetischen Übertragungsfunktionen und kombinieren die Zerlegung der gemessenen magnetischen Vertikalkomponente mit einer *Hypothetical Event Analysis.* Um dieses Verfahren anzuwenden, müssen die magnetischen Übertragungsfunktionen eines Stationsnetzes zur Verfügung stehen.
Eine kombinierte tellurische und magnetische Dekomposition bieten CHAVE & SMITH [1994] an. Im wesentlichen wird ein der tellurischen Verzerrung ähnlicher Ansatz verwendet [Smith, 1997], der zusammen mit der tellurischen Verzerrung den gemessenen Impedanztensor wie folgt zerlegt:

$$\underline{\underline{Z}}^{meas} = \hat{C}\underline{\underline{Z}} - \underline{\underline{Z}}^{meas}\hat{D}\underline{\underline{Z}} \tag{2.24}$$

mit $\hat{C}$ als tellurischer und $\hat{D}$ als magnetischer Verzerrungsmatrix. $\underline{\underline{Z}}$ stellt den 2D-Impedanztensor dar.
Während CHAVE & SMITH [1994] die Existenz von galvanisch-verzerrten Magnetfeldern anhand zweier unterschiedlicher Datensätze aufzeigen, demonstrieren AGARWAL & WEAVER [2000] mit Modellstudien eine untergeordnete Rolle von magnetischen Verzerrungen.

In der Zusammenfassung der wichtigsten Dekompositionsverfahren sind die sogenannten „mathematischen Dekompositionsverfahren "bislang unberücksichtigt geblieben. Mit ihnen beschäftigt sich diese Arbeit ausführlicher in Kapitel 5.

2.2.3 3D-Leitfähigkeitsverteilung

Eine regionale 3D-Leitfähigkeitsverteilung liegt dann vor, wenn nicht nur lokale Inhomogenitäten in einem regionalen 2D-Untergrund eingebettet sind, sondern diese Anomalien großräumig und vor allem auch induktiv wirksam sind. In diesem Fall sind alle Impedanztensorelemente besetzt und Dekompositionsverfahren schlagen fehl, da die Annahme einer regionalen 2D-Struktur nicht erfüllt ist. Jedoch stellt es sich oft als schwierig dar, zwischen starker Verzerrung durch lokale Inhomogenitäten in einem 2D-Untergrund, was sich wieder auf ein Dekompositionsproblem zurückführen lassen würde, und einem großräumigen 3D-Untergrund zu unterscheiden.