

Zusammenfassung

In dieser Dissertation betrachten wir neue Strategien für ein unendliches kombinatorisches Spiel, untersuchen die Komplexität einer Klasse von Spielen auf Hypergraphen und beantworten eine offene Frage zu einem Berechnungsproblem auf gerichteten Graphen. Obwohl gewisse Verbindungen zwischen den behandelten Gebieten bzw. den prinzipiellen Fragestellungen bestehen, handelt es sich um drei unabhängige Themen.

Das Engel-Problem. Auf einem unendlichen Schachbrett versucht der *Engel*, eine “Schachfigur” mit beschränkter Schrittweite, seinem Gegner, dem *Teufel*, unendlich lange davonzulaufen. Der Teufel blockiert Zug um Zug Felder des Brettes mit der Absicht, den Engel einzukreisen. Es ist ein offenes Problem, ob ein Engel mit hinreichend großen Schritten gewinnen kann. Wir verbessern eine bekannte Teufel-Strategie und zeigen außerdem, dass der Engel auf einem dreidimensionalen Brett entkommt.

Positionelle Spiele auf Hypergraphen. Zwei Spieler wählen abwechselnd Ecken eines Hypergraphen bis alle Ecken vergeben sind. Der Anziehende gewinnt, wenn es ihm gelingt, eine Kante des Hypergraphen zu vervollständigen, andernfalls siegt sein Gegner. Diese asymmetrische Verallgemeinerung des bekannten Spiels Tic-Tac-Toe wird als *schwaches positionelles Spiel* bezeichnet und ist PSPACE-vollständig. Der entsprechende Härtebeweis verwendet Kanten mit bis zu 11 Ecken. Wir versuchen Spiele auf Hypergraphen mit nicht mehr als drei Ecken pro Kante vollständig zu lösen. Dies gelingt uns fast, mit der zusätzlichen Einschränkung, dass sich je zwei Kanten in höchstens einer Ecke treffen dürfen. Mittels einer vollständigen Klassifizierung in Gewinner und Verlierer erhalten wir einen Polynomialzeit-Algorithmus, der solche Spiele optimal spielt.

Wurzeln gerichteter Graphen. Interpretiert man eine quadratische Boolesche 0/1-Matrix als Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen, so induziert die Matrixmultiplikation auf natürliche Weise eine Potenzoperation auf gerichteten Graphen. Wir zeigen, dass in diesem Sinne das Berechnen von Wurzeln gerichteter Graphen NP-vollständig ist. In einem zweiten Teil stellen wir eine Beziehung zwischen solchen Wurzeln und Graphisomorphie her und zeigen, dass für eine spezielle Klasse von gerichteten Graphen das Wurzelproblem von derselben Komplexität ist wie das Isomorphie-Problem für Graphen.