

**Seismic pulse propagation in  
statistically heterogeneous  
geological structures**

**\*\*\*\*\***

**Seismische Pulswellenausbreitung  
in statistisch heterogenen  
geologischen Strukturen**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

bei dem Fachbereich Geowissenschaften  
der Freien Universität Berlin  
genehmigte

**DISSERTATION**

von

Dipl.-Geophys. Tobias Müller  
aus Göppingen

Tag der Disputation:  
Referent:  
Korreferent:

19. Juli 2001  
Prof. Dr. Serge Shapiro  
Prof. Dr. Rainer Kind



# Abstract

In this thesis a novel description of seismic pulses propagating in statistically heterogeneous geological structures is developed. It is based on the theory of statistical wave propagation in random media. Presented applications of this approach comprise the interpretation of seismic attenuation measurements and the estimation of reflection coefficients when the effect of small-scale heterogeneities is taken into account.

For this purpose, the complex valued, ensemble averaged wave vector of an initially plane wave propagating in 2-D and 3-D weakly heterogeneous elastic random media is constructed. The validity range of this wave vector has practically no restrictions in the frequency domain. The wave vector is obtained by combination of the Rytov and Bourret approximations and application of the causality principle. Its real part is related to the phase velocity, whereas its imaginary part denotes the scattering attenuation coefficient of a wave corresponding to the maximum of the probability density function of the ballistic wave field. The ballistic wave is understood as the wave field in the vicinity of the first arrivals and is equivalent to the seismic primary wave. In the weak fluctuation regime the wave vector is a self-averaged quantity and thus characterizes most probable ballistic waves in single realizations of random media. Moreover, the low- and high-frequency asymptotics of the phase velocity and of the attenuation coefficient agree with effective-media theories and geometrical optics, respectively. This approach for 2-D and 3-D random media is analogous with the so-called generalized O'Doherty-Anstey formalism of 1-D random media. The analytical results are verified with help of finite-difference simulations in 2-D and 3-D elastic random media.

This scattering attenuation theory is applied in order to model observed  $Q$ -values at the German KTB-site using simple statistical estimates from well-log data. It is shown that scattering attenuation plays an important role in the upper crust in this area. This is not conform with previous studies that suggest intrinsic absorption mechanisms as the main reason for attenuation. A good agreement between the magnitude of scattering attenuation and the observed  $Q$ -values shows the necessity to review the role of scattering in seismic attenuation phenomena.

By means of numerical simulations, it is shown how the effects of small-scale heterogeneities on the seismic wave field, making usual imaging and inversion techniques inapplicable, can be removed. In that way, reliable estimates of reflection coefficients in complex geological regions can be obtained.



# Zusammenfassung

Thema dieser Dissertation ist die Entwicklung einer Theorie zur seismischen Pulswellenausbreitung in statistisch heterogenen geologischen Strukturen. Diese Wellenfeldapproximation basiert auf der Theorie der statistischen Wellenausbreitung in zufallsverteilten Medien. Anwendungsgebiete umfassen die Abschätzung von Streudämpfung aus seismischen Dämpfungsmessungen sowie die Abschätzung von Reflexionskoeffizienten unter Berücksichtigung von kleinräumigen Heterogenitäten.

Dazu wird der komplexe, ensemblemittelte Wellenvektor einer anfänglich ebenen Welle in zwei- und dreidimensionalen, schwach heterogenen elastischen zufallsverteilten Medien berechnet. Der Gültigkeitsbereich dieses Wellenvektors bezüglich verwendbarer Frequenzen ist praktisch uneingeschränkt. Die Berechnung erfolgt unter Zuhilfenahme der Rytov- und Bourret Approximationen und des Kausalitätsprinzips. Der Realteil des Wellenvektors ist verknüpft mit der Phasengeschwindigkeit, wohingegen der Imaginärteil den Streudämpfungskoeffizienten des ballistischen, wahrscheinlichsten Wellenfeldes beschreibt. Das ballistische Wellenfeld ist das Wellenfeld in unmittelbarer Umgebung der ersten Wellenfront und wird in der geophysikalischen Literatur mit *primary wave field* bezeichnet. Es wird gezeigt, dass im Bereich der schwachen Streuung der Wellenvektor eine selbstmittelnde Größe ist und somit die Charakterisierung von ballistischen Pulsen mit maximaler Auftrittswahrscheinlichkeit in einzelnen Realisationen des zufallsverteilten Mediums ermöglicht. Darüber hinaus wird das asymptotische Verhalten bei hohen und niedrigen Frequenzen untersucht. Im entsprechenden Grenzfall liefert die Wellenfeldapproximation die Ergebnisse der geometrischen Optik-Näherung und die der Effektiv-Medien Theorien.

Die Herleitung erfolgt in Analogie zur verallgemeinerten O'Doherty-Anstey Theorie für eindimensionale zufallsverteilte Medien. In diesem Sinne kann die vorliegende Theorie als Erweiterung der O'Doherty-Anstey Theorie bezüglich ihrer Gültigkeit in zwei- und dreidimensionalen Medien verstanden werden. Alle analytischen Ergebnisse werden mit Hilfe Finiten-Differenzen Simulationen überprüft.

Das hieraus entstandene Streudämpfungsmodell wird angewandt, um die im Rahmen des kontinentalen Tiefbohrprogramms (KTB) gemessenen seismischen Dämpfungswerte hinsichtlich der zu erwartenden Streudämpfung zu modellieren. Dazu fließen die aus den Bohrlochdaten gewonnenen Abschätzungen der Mediumsheterogenitäten mit in die Berechnung ein. Das Ergebnis zeigt, dass ein beträchtlicher Anteil der gemessenen Dämpfung in diesem Bereich der Erdkruste durch Streudämpfung erklärt werden kann. Dies ist entgegengesetzt zu bisherigen Abschätzungen, die Absorbtionsmechanismen als Hauptgrund für seismische Dämpfung annehmen.

Anhand numerischer Simulationen wird weiterhin gezeigt, wie die obige Theorie dazu eingesetzt werden kann, um den Effekt kleinräumiger Heterogenitäten auf das Wellenfeld, der die Anwendung üblicher Abbildungs- und Inversionsverfahren beeinträchtigt, zu eliminieren. Auf diese Weise können verlässliche Abschätzungen von Reflexionskoeffizienten gemacht werden.



# Contents

<b>Abstract</b>	<b>I</b>
<b>Zusammenfassung</b>	<b>III</b>
<b>1 General Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Scattering of elastic waves in the Earth . . . . .	2
1.2 Transient waves and self-averaging . . . . .	4
1.3 Motivation of this work . . . . .	5
<b>2 A survey of waves in random media</b>	<b>7</b>
2.1 Wave-matter interactions . . . . .	8
2.1.1 Stochastic scalar wave equations . . . . .	8
2.1.2 Propagation regimes . . . . .	10
2.1.3 Methods for weak and strong wave field fluctuations . . . . .	12
2.1.4 Vector versus scalar wave scattering . . . . .	17
2.2 Numerical modeling of waves in elastic random media . . . . .	20
2.2.1 Random media realizations in 2-D and 3-D . . . . .	20
2.2.2 Simulation of wave propagation using finite-difference methods . . . . .	20
2.3 Statistics of randomly scattered wave fields . . . . .	24
2.3.1 Analysis of amplitude and phase fluctuations . . . . .	24
2.3.2 Random focusing . . . . .	27
<b>3 Pulse propagation in 2-D and 3-D random media</b>	<b>29</b>
3.1 Review of the ODA approach in 1-D random media . . . . .	30
3.2 Extension of the ODA theory to 2-D and 3-D media . . . . .	31
3.3 Approximation for the logarithmic wave field attributes . . . . .	32
3.4 Causality . . . . .	33
3.4.1 Causal wave field attributes . . . . .	33
3.4.2 Validity range . . . . .	35
3.5 Self-averaging . . . . .	36
3.5.1 Partial self-averaging . . . . .	36
3.5.2 Typical (most probable) wave field realizations . . . . .	41
3.6 Attenuation and phase velocity dispersion . . . . .	42
3.6.1 Plane waves . . . . .	42
3.6.2 Spherical waves . . . . .	46
3.6.3 Relation to other scattering attenuation models . . . . .	49

3.7	Green's function for the primary wave field . . . . .	50
3.7.1	Acoustic media . . . . .	50
3.7.2	Gaussian pulse approximation . . . . .	51
3.7.3	Elastic media . . . . .	52
3.8	Numerical results . . . . .	57
3.8.1	Evolution of seismic pulses and typical seismograms . . . . .	57
3.8.2	Relation to the averaged travelttime-corrected field . . . . .	64
3.8.3	Estimates of scattering attenuation . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Beyond the primary wave field</b>	<b>69</b>
4.1	Evolution of seismogram envelopes . . . . .	70
4.2	Envelope broadening in the Rytov approximation . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Applications</b>	<b>77</b>
5.1	Interpretation of scattering attenuation in the KTB area . . . . .	78
5.1.1	Attenuation measurements at the KTB-site . . . . .	78
5.1.2	Application of the new scattering attenuation model . . . . .	79
5.2	Correction for transmission losses . . . . .	83
5.2.1	Migration in the presence of a heterogeneous overburden . . . . .	83
5.2.2	Improved AVO analysis . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Conclusions and perspectives</b>	<b>91</b>
<b>A</b>	<b>Derivation of Rytov's solution</b>	<b>95</b>
A.1	First-order approximation . . . . .	95
A.2	Second-order approximation . . . . .	96
<b>B</b>	<b>Explicit expressions for the wave field attributes</b>	<b>98</b>
B.1	Log-amplitude and phase variances . . . . .	98
B.2	Exponential and Gaussian media . . . . .	99
<b>C</b>	<b>Dispersion relations with <math>n</math> subtractions</b>	<b>101</b>
C.1	Twice-subtracted dispersion relations . . . . .	102
C.2	Triple-subtracted dispersion relations . . . . .	103
<b>D</b>	<b>Two-frequency mutual coherence function</b>	<b>105</b>
D.1	The Markovian approach . . . . .	105
D.2	$\Gamma_2$ in Rytov and Bourret approximation . . . . .	107
<b>E</b>	<b>Elastic Rytov and Bourret approximation</b>	<b>109</b>
E.1	Elastic Rytov approximation . . . . .	109
E.2	Elastic Bourret approximation . . . . .	111
	<b>References</b>	<b>113</b>
	<b>Acknowledgements – Danksagung</b>	<b>119</b>