

**Entwicklung von Software zur Lösung von
gemischt-ganzzahligen Optimierungsmodellen
mit einem Branch-and-Cut-Ansatz**

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DES AKADEMISCHEN GRADES
DOCTOR RERUM POLITICARUM
IM FACHBEREICH WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFT

von
Dipl. Kff. Veronika Waue

Berlin, 2007

Erstgutachter: Prof. Dr. Uwe Suhl
Zweitgutachter: Prof. Dr. Peter Mevert
Dekan: Prof. Dr. Michael Kleinaltenkamp
Tag der Disputation: 13. Juli 2007

Danksagung

An erster Stelle bedanke ich mich herzlich bei meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Uwe Suhl für seine ausgezeichnete Betreuung. Mit seiner ansteckenden Begeisterung für das Thema der mathematischen Optimierung hat er entscheidend dazu beigetragen, dass ich diese Dissertation begonnen und fertig gestellt habe. Seine immer vorhandene Hilfsbereitschaft und seine Anregungen und Ideen waren wesentlich für das Gelingen der Arbeit.

Herrn Prof. Dr. Peter Mevert danke ich für die wertvollen Anregungen und die zügige Zweitkorrektur.

Des Weiteren gilt mein Dank meinen fleißigen Korrekturlesern, meiner Mutter Ruth und meinem Bruder Martin sowie meinem Freund Mattias Ruch, dem ich gleichzeitig noch für seine besondere Geduld und persönliche Unterstützung danken möchte.

Meinen Eltern, die mich bis zum heutigen Tage bei meiner wissenschaftlichen und beruflichen Entwicklung unterstützten und förderten, gilt ein ganz besonderer Dank.

Ihnen möchte ich diese Arbeit widmen.

Gliederung

1	Einleitung	1
2	Aufbau der Arbeit	5
3	Mathematische Optimierungsmodelle	7
3.1	Lineare Modelle	8
3.2	Gemischt-ganzzahlige Modelle.....	9
3.3	Nicht-lineare Modelle	10
3.4	Klassische gemischt-ganzzahlige Optimierungsmodelle	11
3.4.1	Fixkosten Probleme.....	11
3.4.2	Set Covering, Partitioning and Packing problems	13
3.4.3	Knapsack Probleme.....	13
4	Die strenge LP-Relaxierung	15
4.1	Lösung gemischt-ganzzahliger Modelle	15
4.2	Bedeutung der strengen LP-Relaxierung	17
4.3	Manuelle Modellreformulierung	18
4.4	Automatische Reformulierung des Modells.....	21
4.5	Das Supernode processing	21
4.6	Bound Reductions	25
4.6.1	Fixed Charge Bound Reduction	25
4.6.2	Bound Reduction ganzzahliger Variablen.....	27
4.6.3	Die globale Obergrenze.....	28
4.6.4	Steuerung der Bound Reductions	29
4.7	Schnittebenen (Cuts)	30
4.7.1	Allgemeine Erläuterungen zu Schnittebenen	30

4.7.2	Qualität einer Schnittebene	33
4.7.3	Liften von Schnittebenen	35
4.7.4	Cover Cuts.....	37
4.7.5	Mixed Integer Gomory Cuts	49
4.7.6	Clique Cuts.....	54
4.7.7	Implication Cuts	61
5	Branch-and-Bound Verfahren.....	65
5.1	Grundstruktur des Branch-and-Bound Verfahrens	65
5.2	Auswahlregeln für eine Branching-Variable.....	70
5.2.1	Verzweigen auf die fraktionellste Variable.....	70
5.2.2	Strong Branching.....	71
5.2.3	Pseudocost Branching	71
5.3	Regeln zur Knotenauswahl.....	72
5.3.1	Statische Regeln	73
5.3.2	Auf Schätzungen basierende Regeln.....	73
5.3.3	Zwei-Phasen-Regeln	74
5.3.4	Backtracking Methoden	75
6	Das Branch-and-Cut Verfahren	77
6.1	Grundstruktur eines Branch-and-Cut Ansatzes.....	77
6.2	Entscheidung zwischen Verzweigen oder Anfügen einer Schnittebene	80
6.2.1	Strategien zur Ermittlung eines ausgewählten Knotens.....	80
6.2.2	Faktoren, die die Strategien beeinflussen.....	83
6.2.3	Löschen von nicht bindenden Schnittebenen.....	84
6.2.4	Ein Cutpool zur Aufbewahrung von nicht verletzten Schnittebenen.....	86
6.3	Globale und lokale Gültigkeit von Schnittebenen im Baum.....	87
6.4	Liften zur globalen Gültigkeit.....	88

6.4.1	Binäre Variablen	88
6.4.2	Allgemeine Integervariablen	90
6.5	Anwendung von lokal gültigen Cuts	94
6.6	Anwendung ausgewählter Cuts an einem Knoten.....	96
6.6.1	Cover Cuts.....	97
6.6.2	Mixed Integer Gomory Cuts	97
6.6.3	Clique Cuts.....	103
6.6.4	Implikation Cuts.....	106
7	Implementierungsaspekte.....	109
7.1	MOPS – ein Mathematisches OPTimierungsSystem	109
7.1.1	Zugriffsmöglichkeiten auf MOPS	111
7.1.2	Interner Aufbau von MOPS	112
7.2	Der Branch-and-Cut Algorithmus	115
7.2.1	Strategienauswahl.....	115
7.2.2	Lokale Cuts	118
7.2.3	Aktivieren und Inaktivieren von Cuts	119
7.3	Supernode processing.....	121
7.3.1	Implementierungsaspekte von Cover Cuts.....	121
7.3.2	Implementierungsaspekte von Gomory Cuts	126
8	Numerische Resultate	129
8.1	Die Modelle.....	129
8.2	Branch-and-Cut Standardstrategie	130
8.3	Weitere Branch-and-Cut Strategien	138
9	Zusammenfassung und Ausblick	143
	Literaturverzeichnis.....	145
	Anhang	155

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 4.1: Das Verfahren zum Lösen von gemisch-ganzzahligen Modellen	16
Abbildung 4.2: Formulierung $x \leq y$	17
Abbildung 4.3: Formulierung $x \leq 2y$	17
Abbildung 4.4: Lösungsraum ohne Supernode processing.....	22
Abbildung 4.5: Lösungsraum mit Supernode processing	22
Abbildung 4.6: Ablauf des Supernode processings	24
Abbildung 4.7: Graphische Darstellung eines ganzzahligen Optimierungsproblems.....	31
Abbildung 4.8: Graphische Darstellung eines ganzzahligen Optimierungsproblems mit Cut	32
Abbildung 4.9: Darstellung von Cliques	55
Abbildung 4.10: Darstellung von Cliques aus zwei Restriktionen.....	56
Abbildung 4.11: Vorgehen zur Erweiterung einer Clique	59
Abbildung 5.1: Ein Enumerationsbaum	66
Abbildung 5.2: Das Branch-and-Bound Verfahren.....	69
Abbildung 6.1: Das Branch-and-Cut Verfahren	78
Abbildung 6.2: Ausgangspunkt des Branch-and-Cut Verfahrens	95
Abbildung 6.3: Darstellung der globalen Ober- bzw. Untergrenzen	95
Abbildung 7.1: Externe Zugriffsmöglichkeiten auf MOPS	112
Abbildung 7.2: Interner Aufbau von MOPS	114
Abbildung 7.3: Strategien für den Branch-and-Cut Ansatz	115
Abbildung 7.4: Routinen des Branch-and-Cut Ansatzes	117
Abbildung 7.5: Zeilenweise Darstellung in MOPS.....	119
Abbildung 7.6: Spaltenweise Darstellung in MOPS	119
Abbildung 7.7: Verschiebung inaktiver Elemente	120

Abbildung 7.8: Routine zum Ableiten von Cover Cuts 122

Abbildung 7.9: Routinen für das Auffinden von Gomory Cuts..... 126

Tabellen

Tabelle 7.1: Entwicklung der MOPS Versionen.....	109
Tabelle 7.2: Fortschritte der LP-Optimierung am Modell Oil	110
Tabelle 7.3: Fortschritte der IP-Optimierung am Modell Oil	110
Tabelle 8.1: Übersicht der Modell.....	129
Tabelle 8.2: Zusammenfassung der leicht zu lösenden Probleme	132
Tabelle 8.3: Zusammenfassung der schwer zu lösenden Probleme	133
Tabelle 8.4: Ergebnisse mit Cutlevel I.....	134
Tabelle 8.5: Ergebnisse mit Cutlevel II.....	135
Tabelle 8.6: Ergebnisse mit Cutlevel III	136
Tabelle 8.7: Ergebnisse mit Cutlevel IV	137
Tabelle 8.8: Übersicht der getesteten Strategien.....	138
Tabelle 8.9: Zusammenfassung der Ergebnisse der getesteten Strategien Teil I.....	139
Tabelle 8.10: Zusammenfassung der Ergebnisse der getesteten Strategien Teil II.....	140
Tabelle 9.1: Zusammensetzung der im Cutlevel I generierten Cuts	155
Tabelle 9.2: Zusammensetzung der im Cutlevel II generierten Cuts.....	156
Tabelle 9.3: Zusammensetzung der im Cutlevel II generierten Cuts.....	157
Tabelle 9.4: Zusammensetzung der im Cutlevel II generierten Cuts.....	158
Tabelle 9.5: Ergebnisse der Strategie 2.....	159
Tabelle 9.6: Ergebnisse der Strategie 3.....	159
Tabelle 9.7: Ergebnisse der Strategie 4.....	160
Tabelle 9.8: Ergebnisse der Strategie 5.....	160
Tabelle 9.9: Ergebnisse der Strategie 6.....	161
Tabelle 9.10: Ergebnisse der Strategie 7.....	161

