4.2 Strukturelle Stabilität von Schockwellen in einer Modellgleichung der Elastizitätstheorie

Oftmals werden zweidimensionale Erhaltungsgleichungen $\partial_t u + \partial_x g(u) = 0$ mit $u \in \mathbb{R}^2, g(u) \in \mathbb{R}^2$ durch einen Viskoseterm $\varepsilon\partial_x^2 u$ regularisiert. Ein Ansatz $u(t,x) = U(x - ct)$, mit $U(\xi) \to U_\pm$ für $\xi \to \pm\infty$, führt nun auf die Travelling-Wave Gleichung

$$U'(\xi) = g(U(\xi)) - cU(\xi) + C \tag{4.37}$$

und es ist $C := \lim_{\xi\to-\infty}(cU(\xi) - g(U(\xi))) = cU_- - g(U_-)$, siehe etwa [49, 52] für Beispiele. Man sieht, dass heterokline Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung (4.37), die U_- mit einem Gleichgewicht U_+ verbinden, notwendigerweise die Rankine-Hugoniot Bedingung

$$g(U_+) - g(U_-) = c(U_+ - U_-)$$

lösen, siehe etwas [52]. Erfüllen umgekehrt U_+, U_- und $c \neq 0$ die Rankine-Hugoniot Bedingung, so kann man fragen, ob es einen heteroklinen Orbit der Gleichung (4.37) gibt, der die Zustände U_- und U_+ miteinander verbindet. Tritt dies ein, so sagen wir, dass die durch (U_-, U_+, c) definierte Schockwelle durch ein viskoses Profil realisiert wird oder dynamisch realisierbar ist. Eine interessante Frage ist nun, ob viskose Profile als Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung (4.37) strukturell stabil sind, d.h. stabil gegenüber kleiner Störungen der Nichtlinearität $g(\cdot)$ oder der Travelling-Wave Geschwindigkeit c sind. In dieser Hinsicht ist es wichtig, ob die durch das Tripel (U_+, U_-, c) induzierte Schockwelle *kompressiv* oder *unterkompressiv* ist. Zur Vereinfachung stellen wir uns nun vor, dass $Dg(u)$ für $u \in \mathbb{R}^2$ zwei reelle Eigenwerte $\lambda_1(u) \leq \lambda_2(u)$ besitzt.

Definition 14
Eine durch das Tripel (U_-, U_+, c) definierte Schockwelle heißt

- *kompressiv, falls $\lambda_1(U_-) > c > \lambda_1(U_+)$ oder $\lambda_2(U_-) > c > \lambda_2(U_+)$ gilt*
- *unterkompressiv, falls $\lambda_2(U_-) > c > \lambda_1(U_+)$ und $\lambda_2(U_+) > c > \lambda_1(U_-)$ gilt*

Wird nun eine kompressive Schockwelle durch ein viskoses Profil realisiert, so schneiden sich die stabile Mannigfaltigkeit des Gleichgewichtes U_+ und die instabile Mannigfaltigkeit von U_- des Viskoseprofils der gewöhnlichen Differentialgleichung (4.37) im allgemeinen transversal, siehe [52]. Denn im Fall $\lambda_1(U_-) > c > \lambda_1(U_+)$ besitzt die instabile Mannigfaltigkeit von U_- wegen $\lambda_2(U_-) > \lambda_1(U_-)$ die Dimension zwei. Die stabile Mannigfaltigkeit von U_+ ist hingegen mindestens eindimensional. Im Fall einer unterkompressiven Schockwelle schneiden sich die instabile Mannigfaltigkeit des Gleichgewichtes U_- und die stabile Mannigfaltigkeit von U_+ allerdings nicht transversal: beide sind eindimensional. Insbesondere ist also die Existenz eines viskosen Profils robust unter kleinen Störungen der Nichtlinearität g, wenn die durch (U_+, U_-, c) definierte Schockwelle *kompressiv* ist.
Wir versuchen nun, diese Beobachtungen auf unsere Modellgleichung aus der Elastizität zu übertragen. Diese lautet

$$\begin{aligned} \partial_t w(t,x) - \partial_x v(t,x) &= 0 \\ \partial_t v(t,x) - \partial_x(\sigma(w(t,x))) &= \mu\varepsilon\partial_x^2 v - \gamma\partial_x([K^\varepsilon * w(t,\cdot)](x) - w(t,x)); \end{aligned} \tag{4.38}$$

vergleiche (2.74). Ist $\varepsilon = 0$, so ist diese Gleichung eine zweidimensionale Erhaltungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t w(t,x) - \partial_x v(t,x) &= 0 \\ \partial_t v(t,x) - \partial_x(\sigma(w(t,x))) &= 0. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Nach einem Travelling-Wave Ansatz $w(x,t) = W(x-ct)$, $v(x,t) = V(x-ct)$ und einmaliger Integration erhalten wir aus (4.39) die Gleichung

$$c\mu W'(\xi) = \gamma(L_1 W_\xi - W(\xi)) + \sigma(W(\xi)) - c^2 W(\xi) + c^2 W_- - \sigma(W_-), \tag{4.40}$$

wobei wir uns wegen der Skalierungsinvarianz auf den Fall $\varepsilon = 1$ beschränken und $\mu = \gamma = 1$ setzen, siehe Lemma 2.7. Definieren wir $f(W) := f(W, W_-, c) := \sigma(W) - c^2 W + c^2 W_- - \sigma(W_-)$, so hat Gleichung (4.40) die Form

$$c\partial_\xi W(\xi) = (L(W_\xi) - W(\xi)) + f(W(\xi)), \tag{4.41}$$

wobei wir den Index „1“ bei der linearen Abbildung L_1 unterdrückt haben und $\mu = 1$ gesetzt haben. Wir erinnern, dass L durch

$$L(\varphi(\cdot)) = \int_{-a}^{a} \varphi(\theta) K^1(\theta) d\theta,$$

definiert ist, wobei $K^1(\cdot) : (-a,a) \to \mathbb{R}$ eine stetige, achsensymmetrische Abbildung ist, d.h. $K^1(-\theta) = K^1(\theta)$ erfüllt. Diese Gleichung wurde im Fall kubischer Nichtlinearitäten, wie etwa $f(\theta) = \theta(a-\theta)(-a-\theta)$, in [1] studiert. Aufgrund unserer Motivation sehen wir Gleichung (4.41) als *Travelling-Wave Gleichung* für die W-Profile an. Eine heterokline Lösung $W(\cdot)$ dieser Gleichung induziert dann via Integration der ersten Gleichung in (4.39) (wie in Abschnitt 1.6.1 beschrieben) eine Travelling-Wave Lösung der Gleichung (4.40), die punktweise gegen eine Schockwelle konvergiert .
Wir stellen uns nun eine Schockwelle $((W_-, V_-), (W_+, V_+), c)$ der Gleichung (4.38) vor, die durch eine heterokline Lösung der Travelling-Wave Gleichung (4.41) induziert wird. Diese Gleichung ist nun im Unterschied zur Travelling-Wave Gleichung (4.37) eine Forward-Backward-Delay Gleichung. Außerdem nehmen wir an, dass $\sqrt{\sigma'(W_+)}$ und $\sqrt{\sigma'(W_-)}$ reell sind. Wir fragen, ob man analog zu (4.37) eine Aussage über die Persistenz dieser heteroklinen Lösung in Abhängigkeit der „unterliegenden“ Schockwelle machen kann, die durch das Tripel $(U_-, U_+, c) := ((W_-, V_-), (W_+, V_+), c)$ induziert wird. Ist die Schockwelle etwa kompressiv, so würden wir in Analogie zum (4.37)-Setting erwarten, dass die heterokline Lösung bezüglich kleiner Störungen der Nichtlinearität $g(\cdot)$, der Linearität L oder c persistiert. Ist im Gegensatz dazu die Schockwelle unterkompressiv, so erwarten wir, dass kleine Störungen der Nichtlinearität bzw. der Travelling-Wave Geschwindigkeit die heterokline Lösung im allgemeinen zerstören.
Wie schon angedeutet, ist die Travelling-Wave Gleichung (4.41) nun unendlichdimensional. Insbesondere sind stabile und instabile Mannigfaltigkeiten der Gleichgewichte U_-, U_+ ebenfalls unendlichdimensional.
Wir machen folgende Beobachtung: Schreibt man Gleichung (4.41) in abstrakter Form, so erhält man Gleichung (2.85), nämlich

$$\begin{pmatrix} \dot\eta(t) \\ \dot\varphi(t,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\left(\gamma(L\varphi(t,\cdot) - \eta(t)) + f(\eta(t))\right) \\ \partial_\theta \varphi(t,\theta) \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

mit $(\eta(t), \varphi(t,\cdot)) \in X := \{(\eta, c, \phi(\cdot)) \in \mathbb{R}^2 \times H^1([-1,1],\mathbb{R}^2) : \phi(0) = (\eta, c))\}$.
Wir bezeichnen den Linearteil der Gleichung (4.42) mit $\mathcal{A}_\pm$, je nachdem, ob wir in $(W_+, W_+) \in \mathbb{R} \times H^1([-1,1],\mathbb{R})$ oder (W_-, W_-) linearisieren. Also ist $\mathcal{A}_\pm$ für $(\eta, \phi(\cdot)) \in X$ durch

$$\mathcal{A}_\pm \begin{pmatrix} \eta \\ \phi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}(L(\phi(\cdot) - \eta) + f'(W_\pm)) \\ \partial_\theta \phi(\cdot) \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Berechnung des Spektrums analog zu Kapitel 2.5.3 und speziell (2.87) zeigt, dass für ein $s \in \mathbb{R}$

$$is \in \operatorname{spec}(\mathcal{A}_\pm) \Leftrightarrow \quad \big(s = 0 \quad \text{und} \quad \sigma'(W_\pm) = c^2\big) \tag{4.43}$$

gilt. Insbesondere kann es bis auf $s = 0$ kein rein imaginäres Spektrum geben. Diese Tatsache liegt im wesentlichen an der Symmetriebedingung der linearen Abbildung L (alias L_1), die durch die Achsensymmetrie der Funktion $K_1(\cdot)$ induziert wird. (4.43) gilt also auch dann, wenn wir die abstrakte Gleichung (4.41) mit einer *beliebigen* stetigen Funktion f betrachten.
Die Linearisierung der Gleichung (4.41) entlang der heteroklinen Lösung $W(\cdot)$ (die die beiden Zustände W_-, W_+ miteinander verbindet) nimmt die Form

$$cY'(\xi) = L(Y_\xi) - Y(\xi) + Df(W(\xi))Y(\xi) =: \hat{L}(\xi)Y_\xi \tag{4.44}$$

an. Wegen der Beobachtung (4.43) stellt sich nun heraus, dass (4.44) einen Fredholmoperator $\mathcal{L}$ auf $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit Definitionsbereich $H^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ induziert, wenn etwa im Fall einer kompressiven Schockwelle die Bedingung $\lambda_1(W_-, V_-) > c > \lambda_1(W_+, V_+)$ und deswegen $c \neq \lambda_2(W_+, V_+)$ und $c \neq 0$ gilt. Man beachte nämlich, dass in unserem speziellen Fall

$$\lambda_1(W_\pm, V_\pm) = -\sqrt{\sigma'(W_\pm)} \qquad \lambda_2(W_\pm, V_\pm) = \sqrt{\sigma'(W_\pm)}$$

gilt (siehe auch den Anfang von Abschnitt 2.5.2) und deswegen die asymptotischen Linearteile der Gleichung (4.44) hyperbolisch sind. Wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, können Fredholmindizes zur Bestimmung der Kodimension (!) der Summe der Tangentialräume der stabilen Mannigfaltigkeit von W_+ und der instabilen Mannigfaltigkeit von W_- benutzt werden. Ist etwa der Kern von $\mathcal{L}$ eindimensional und der Fredholmindex null, so haben wir gezeigt, dass diese Summe in einem beliebigen Punkt der heteroklinen Lösung $W(\cdot)$ die Kodimension eins besitzt (siehe Lemma 3.20 und die Bemerkungen genau im Anschluss an den Beweis des Lemmas).
Ist hingegen der Fredholmindex negativ, etwa -1, so erwarten wir, dass die Mannigfaltigkeiten in einem Punkt der heteroklinen Lösung $W(\cdot)$ transversal zueinander sind. Natürlich kann dies im Fall einer homoklinen Lösung $W(\cdot)$ und $W_- = W_+$ niemals eintreffen, aber sehr wohl im Fall $W_- \neq W_+$. Die entscheidende Beobachtung (4.43) erlaubt uns nun, die spezielle Klassifikation der „unterliegenden“ Schockwelle als kompressiv oder unterkompressive Schockwelle in die Berechnung des Fredholmindizes von $\mathcal{L}$ mit einzubeziehen. Wir benötigen dazu erneut einen Satz von Mallet-Paret zur Bestimmung des Fredholmindizes (siehe dazu Abschnitt 4.1.4 Theorem 4.2):

Satz 4.3 (Berechnung des Fredholmindizes)
Betrachte das System $Y'(\xi) = \hat{L}(\xi)Y(\xi)$ (siehe (4.44) für die Definition von $\hat{L}(\xi)$) und sei $f'(W_\pm) \neq 0$. Bezeichne mit L^ρ die Einparameter-Familie

$$L^\rho \phi(\cdot) = \frac{1}{c_*}\left[\int_{-a}^{a} K(\theta)\phi(\theta)d\theta - \phi(0)(1 - \rho f'(W_-)) + \phi(0)(1-\rho)f'(W_+)\right].$$

Dann existieren nur endlich viele Werte

$$\rho^1 < \ldots < \rho^n \in [0,1],$$

für die L^{ρ^j} nicht hyperbolisch ist und der Fredholmindex i von $\mathcal{L}$ erfüllt

$$i = -\mathit{cross}(L^\rho).$$

Wir wenden diesen Satz nun zunächst an und verschieben den Beweis.
Der Satz besagt also, dass man im wesentlichen nur eine generische Homotopie zwischen den beiden Linearteilen in den Endzuständen betrachten und zählen muss, wieviele Eigenwerte in dieser Homtopie die imaginäre Achse kreuzen. Natürlich bezieht die net-number cross(L^ρ) auch mit ein, ob Eigenwerte von links nach rechts oder umgekehrt über die imaginäre Achse laufen. Kreuzt nun etwa bei anwachsendem ρ ein einziger Eigenwert η_* die imaginäre Achse bei dem Parameterwert ρ_* von rechts nach links, so ist die net number in der Notation von Kapitel 3.7 an dieser Stelle negativ.
Wir betrachten also unsere linearisierte Gleichung

$$Y'(\xi) = \hat{L}(\xi)Y_\xi \tag{4.45}$$

mit $\hat{L}(\xi)Y_\xi := \frac{1}{c}(Df(W(\xi))Y(\xi) + L(Y_\xi) - Y(\xi))$ und wählen für $\rho \in [0,1]$ die Homotopie

$$L^\rho\phi(\cdot) := \frac{1}{c}(\rho Df(W_+)\phi(0) + (1-\rho)Df(W_-)\phi(0)) + \frac{1}{c}L(\phi(\cdot)) - \phi(0)).$$

Mit dieser Definition gilt $L^0 = \hat{L}(-\infty)$ und $L^1 = \hat{L}(\infty)$. Wir betrachten nun zunächst den Fall einer kompressiven Schockwelle.

Kompressive Schockwelle

Gelte $\sqrt{\sigma'(W_-)} > c > \sqrt{\sigma'(W_+)}$ oder $-\sqrt{\sigma'(W_-)} > c > -\sqrt{\sigma'(W_+)}$. Um den Fredholmindex der linearisierten Gleichung (4.45) zu bestimmen, betrachten wir die oben angegebene Familie L^ρ und bestimmen, für welche Werte $0 < \rho < 1$ der Operator L^ρ rein imaginäre Eigenwerte besitzt. Dazu betrachten wir die charakteristische Funktion $\triangle(\eta,\rho)$ von L^ρ, mit

$$\begin{aligned}\triangle(\eta,\rho) &= \eta - \frac{1}{c}\left(\rho f'(W_+) + (1-\rho)f'(W_-)\right) - \frac{1}{c}(L(e^{\eta\bullet}) - 1)\\ &= \eta - \frac{1}{c}\left(\rho\sigma'(W_+) + (1-\rho)\sigma'(W_-) + c^2\right) - \frac{1}{c}(L(e^{\eta\bullet}) - 1).\end{aligned} \tag{4.46}$$

Man beachte, dass wegen (4.43) nur der Eigenwert Null als kritischer Eigenwert auftauchen kann. Einsetzen von $\eta = 0$ in die Funktion $\triangle(\eta,\rho)$ liefert nun

$$\triangle(0,\rho) = -\frac{1}{c}\left(\rho\sigma'(W_+) + (1-\rho)\sigma'(W_-) + c^2\right)$$

und es ist genau dann $\triangle(0,\rho_*) = 0$, wenn $\rho_*\sigma'(W_+) + (1-\rho_*)\sigma'(W_-) + c^2 = 0$ ist. Wegen der Bedingung $\sigma'(W_-) > c^2 > \sigma'(W_+)$ existiert also genau ein ρ_*, an dem L^{ρ_*} einen Eigenwert null besitzt. Wir überprüfen nun, ob der kritische Eigenwert $\eta = \eta(\rho)$ mit $\eta(\rho_*) = 0$ von links nach rechts oder rechts nach links über die imaginäre Achse läuft. Man beachte, dass eine solche Funktion $\eta(\rho)$ lokal nahe ρ_* wegen des impliziten Funktionensatzes existiert, da $\partial_\eta \triangle (\eta,\rho)\big|_{(0,\rho_*)} = 1$ ist. Wir bestimmen $\partial_\rho \eta(\rho)$ an der Stelle $\rho = \rho_*$ und erhalten

$$\begin{aligned} \partial_\rho \eta(\rho)\big|_{\rho=\rho_*} &= -(\partial_\eta \triangle (0,\rho_*))^{-1}\partial_\rho \triangle (0,\rho_*)) \\ &= \frac{1}{c}(\sigma'(W_+) - \sigma'(W_-)) < 0; \end{aligned}$$

also kreuzt der Eigenwert η die imaginäre Achse beim Parameterwert $\rho = \rho_*$ für anwachsendes ρ von rechts nach links. Deswegen ist $\text{cross}(L^{\rho_*}) = -1 < 0$ und nach dem Satz von Mallet-Paret erhalten wir für den Fredholmindex i von $\Lambda : H^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$i = -\text{cross}(L^{\rho_*}) = 1. \tag{4.47}$$

Stellen wir uns also den generischen Fall vor, in dem der Kern des Operators Λ eindimensional ist (man beachte, dass $W'(\cdot) \in \text{Kern}(\Lambda)$), so besagt (4.47), dass der Kern des *adjungierten* Operators ϑ trivial ist. Wir haben damit gezeigt, dass sich die stabile Mannigfaltigkeite von W_+ und die instabile Mannigfaltigkeit von W_- der abstrakten Gleichung (4.42) in einem beliebigen Punkt der heteroklinen Lösung $H(\xi) := (W(\xi), W_\xi)$ *transversal* schneiden; siehe Lemma 3.20. Also ist die Lösungen wegen des Beweises von Korollar 3.2 gegenüber kleinen Störungen der Nichtlinearität, der Linearität L oder der Travelling-Wave Geschwindigkeit c stabil.
Wir halten dieses Resultat in dem folgenden Satz fest.

Satz 4.4
Wir nehmen an, dass das Tripel $(U_+, U_-, c) = ((W_+, V_+), (W_-, V_-), c)$ mit $c \neq 0$ die Rankine-Hugoniot Bedingung erfüllt und die dadurch induzierte Schockwelle kompressiv ist, d.h. es gilt $\sigma'(W_-) > c^2 > \sigma'(W_+)$. Weiterhin wollen wir annehmen, dass diese Schockwelle durch eine heterokline Lösung $(W(\cdot), V(\cdot))$ realisiert wird, d.h. es existiert eine heterokline Lösung $W(\cdot)$ der Gleichung (4.41), so dass $W(\xi) \to W_\pm$ für $\xi \to \pm\infty$ gilt, wobei $V(\cdot)$ durch die Gleichung $-cW(\tau) - V(\tau) = -cW_- - V_-$ gegeben ist.
Ist der Kern von $\mathcal{L}$ nur eindimensional (man beachte, dass $Y(\xi) := H'(\xi)$ stets ein nichttriviales Element im Kern ist), dann sind die Lösungen $W(\cdot), V(\cdot)$ strukturell stabil: für kleine Störungen der Nichtlinearität $\sigma(\cdot)$ in der $BC^1(\mathbb{R},\mathbb{R})-$Norm, der linearen Abbildung L_1 in der $L(C^0([-1,1],\mathbb{R}),\mathbb{R})-$Norm oder der Travelling-Wave Geschwindigkeit c in der Betragsnorm besitzt die Gleichung (4.41) weiterhin Gleichgewichtslösungen $\tilde{W}_- \approx W_-$ und $\tilde{W}_+ \approx W_+$, die durch eine heterokline $\tilde{W}(\cdot)$ Lösung der Gleichung (4.41) verbunden werden. $\tilde{W}(\cdot)$ induziert dann durch die Gleichung $-c\tilde{W}(\tau) - \tilde{V}(\tau) = -c\tilde{W}_- - \tilde{V}_-$ eine Abbildung $\tilde{V}$ auf $\mathbb{R}$ und man kann via $(w(t,x), v(t,x)) := (\tilde{W}(\frac{x-ct}{\varepsilon}), \tilde{V}(\frac{x-ct}{\varepsilon}))$ eine Travelling-Wave Lösung der Gleichung 4.40 definieren, die für $\varepsilon \to 0$ punktweise gegen eine Schockwelle konvergiert.

Unterkompressive Schockwellen

In diesem Fall gilt $\sqrt{\sigma'(W_-)} > c > -\sqrt{\sigma'(W_+)}$ und $\sqrt{\sigma'(W_+)} > c > -\sqrt{\sigma'(W_-)}$. Also gilt $\sigma'(W_-) > c^2$ und $\sigma'(W_+) > c^2$. Betrachten wir nun wieder die Homotopie L^ρ, so beobachten wir, dass *kein* Eigenwert die rein imaginäre Achse kreuzt. Damit ist nach der Berechnung des Fredholmindizes i trivialerweise $i = 0$. Nach Lemma 3.20 schneiden sich die stabile Mannigfaltigkeit von W_+ und die instabile Mannigfaltigkeit von W_- der abstrakten Gleichung (4.42) generisch nicht transversal. Genauer ist die Kodimension der Summe der beiden Tangentialräume im generischen Fall eins (falls nämlich der Kern des linearen Operators Λ eindimensional ist). Wir halten fest:

Satz 4.5
Wir nehmen an, dass das Tripel $(U_+, U_-, c) = ((W_+, V_+), (W_-, V_-), c)$ mit $c \neq 0$ die Rankine-Hugoniot Bedingung erfüllt und die dadurch induzierte Schockwelle unterkompressiv ist, d.h. es gilt $\sigma'(W_-) > c^2$ und $\sigma'(W_+) > c^2$. Weiterhin wollen wir annehmen, dass diese Schockwelle durch eine heterokline Lösung $(W(\cdot), V(\cdot))$ realisiert wird.
Ist dann der Kern des Operators Λ eindimensional, so so sind die Lösungen $W(\cdot), V(\cdot)$ strukturell instabil. Darunter verstehen wir, dass sich die stabile Mannigfaltigkeit des Gleichgewichtes W_+ und die instabile Mannigfaltigkeit des Gleichgewichtes W_- der abstrakten Gleichung (4.42) entlang der heteroklinen Lösung $H(\xi) = (W(\xi), W_\xi)$ nicht transversal schneiden. Genauer ist die Kodimension der Summe der Tangentialräume in dem Schnittpunkt $(W(0), W(0))$ eins.

Dieser Satz besagt also, dass generische, kleine Störungen der Nichtlinearität f, der Linearität L oder der travelling Geschwindigkeit c i.a. bewirken, dass Gleichung (4.41) in einer kleinen Tubenumgebung der heteroklinen Lösung $(W(\cdot), V(\cdot))$ keine heteroklinen Lösungen von (4.41) mehr existieren, die $\tilde{W}_-$ mit $\tilde{W}_+$ verbinden. $\tilde{W}_\pm$ bezeichnen hierbei die durch Störung der Nichtlinearität σ, der Linearität L oder c entstehenden Gleichgewichte der Gleichung (4.41) nahe $W_\pm$.

Beweis von Satz 4.2

Wir gehen in diesem Abschnitt kurz auf den Beweis von Satz 4.2 ein und führen unseren Fall auf den in Mallet-Paret [32] behandelten zurück. Wir approximieren das Integral $\int_{-a}^{a} K(\theta)\phi(\theta)d\theta$ durch Riemann Summen

$$L^m\phi := \sum_{j=1}^{m} K(\theta_i)\phi(\theta_i)(\theta_{i+1} - \theta_i)$$

für eine symmetrische Partition $-a = \theta_1 \leq \ldots \leq \theta_m = a$. Dies definiert eine lineare Abbildung $L^m : C^0([-1,1], \mathbb{R})$. Wir bemerken, dass $\mathcal{L}$ und $\tilde{\mathcal{L}}$ den gleichen Fredholmindex besitzen, falls $m > 0$ groß genug ist und

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ (\tilde{\mathcal{L}}x(\cdot))(t) &= \dot{x}(t) - \frac{1}{c_*}(L^m x_t - x(t) - f'(U(t))x(t)). \end{aligned}$$

In der Tat ist $\tilde{\mathcal{L}}$ asymptotisch konstant und deswegen ein Fredholmoperator. Wir betrachten nun einen "Weg"$\mathcal{L}^\eta$, für $\eta \in [0,1]$, von $\mathcal{L}$ nach $\tilde{\mathcal{L}}$, wobei

$$(\mathcal{L}^\eta x(\cdot))(t) = \dot{x}(t) - \frac{1}{c_*}\left[(1-\eta)\int_{-a}^{a} K(\theta)x_t d\theta - \eta L^m x_t - x(t) - f'(U(t))x(t)\right].$$

Dann gilt $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}$ und $\mathcal{L}^1 = \tilde{\mathcal{L}}$. Außerdem ist jedes $\mathcal{L}^\eta$ asymptisch konstant und hyperbolisch: Wir illustrieren die Rechnung für den Fall $t \to \infty$: Für $\omega \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \det \triangle(i\omega) := i\omega - \frac{1}{c_*}\left[(1-\eta)\int_{-a}^{a} K(\theta)e^{i\omega}d\theta - \eta L^m e^{i\omega} - 1 - f'(x_+)\right] \\ &\Leftrightarrow \quad \omega = 0 \quad \wedge \quad f'(x_+) - (1-\eta) + 1 - \eta\left[\sum_{j=1}^{m} K(\theta_i)(\theta_{i+1} - \theta_i)\right] = 0 \end{aligned}$$

und letzteres gilt, falls m groß genug ist, da

$$\sum_{j=1}^{m} K(\theta_i)(\theta_{i+1} - \theta_i) \to \int_{-a}^{a} K(\theta) d\theta = 1$$

für $m \to \infty$ und $f'(x_\pm) \neq 0$. Diese Rechnung zeigt, dass $\mathcal{L}^\eta$ stets Fredholm ist. Also haben $\mathcal{L}^0$ und $\mathcal{L}^1$ den gleichen Index.
Für $\rho \in [0,1]$ betrachten wir nun die Familie

$$\tilde{L}^\rho \phi := \frac{1}{c_*} \left[L^m \phi(\theta) - \phi(0)(1 - \rho f'(x_-) - (1-\rho) f'(x_+)) \right].$$

Dann besagt Theorem C in [32], dass der Fredholmindex von $\tilde{\mathcal{L}}$ (und daher auch der von $\mathcal{L}$) durch $i = -\mathrm{cross}(\tilde{L}^\rho)$ berechnet werden kann. Ausserdem sind die net-nembers der Familien L^ρ und $\tilde{L}^\rho$ identisch, wie man leicht sehen kann. $\square$