

Kapitel 4

Weiterführende Resultate

In diesem Abschnitt ziehen wir einige Folgerungen aus den in Kapitel 3 erzielten Ergebnissen. Außerdem zeigen wir etwas detaillierter, wie man die erzielten Resultate auf den Fall heterokliner Lösungen übertragen kann. Desweiteren wollen wir die erarbeitete Theorie in Abschnitt 4.2 dazu nutzen, Parallelen zu der Theorie von Schockwellen von Erhaltungsgleichungen zu ziehen, die sich dynamisch realisieren lassen.

4.1 Verzweigungen nahe heterokliner Lösungen

Wir betrachten in diesem Kapitel eine heterokline Lösung $h(t)$ eines Zwei-Parameter Systems

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \mu, c),$$

die gegen zwei verschiedene Gleichgewichte $h_{\pm\infty}$ konvergiert, d.h. es gilt $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} h(t) = h_{\pm\infty}$. Zusätzlich sind wir an dem Fall interessiert, in dem der Zustand h_∞ wegen des Auftretens zweier rein imaginärer Nullstellen der charakteristischen Funktion nicht hyperbolisch ist. Generisch tritt in diesem Gleichgewicht dann bezüglich eines Parameters λ eine Hopfverzweigung auf und es entstehen periodische Lösungen kleiner Amplitude. Analog zum vorigen Abschnitt 3.2 erwarten wir, dass eine Einparameter-Familie von Lösungen $h^\sigma(t)$ existiert, die für $t \rightarrow \infty$ gegen einen periodischen Orbit konvergieren und damit beginnen zu oszillieren. Und tatsächlich können wir folgendes zeigen: sind die nahe h_∞ auftretenden periodischen Lösungen instabil (bezüglich der Dynamik auf der Zentrums-mannigfaltigkeit), so existiert unter geeigneten Transversalitätsbedingungen eine Familie von Lösungen $h^\sigma(t)$, die für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gegen einen periodischen Orbit und für $t \rightarrow -\infty$ gegen das Gleichgewicht $h_{-\infty}$ konvergieren.

Wir unterteilen dieses Kapitel in folgende Abschnitte: zunächst formulieren und motivieren wir die entsprechenden Annahmen, unter denen wir die Existenz der gesuchten Lösungen beweisen können. Danach gehen wir auf den Beweis und spezieller auf diejenigen Beweisschritte ein, die im Vergleich zum vorigen Kapitel 3 modifiziert werden müssen. Anschließend diskutieren wir noch kurz in Kapitel 4.1.3, welche Phänomene wir erwarten, wenn die nahe h_∞ durch Hopfverzweigung entstehende Familie periodischer Lösungen bezüglich der Dynamik auf der Zentrums-mannigfaltigkeit stabil ist. Der Abschnitt 4.1.3 hat allerdings nur Diskussions-Charakter, da wir dort keine Beweise angeben. In Abschnitt 4.1.4 behandeln wir schließlich ein Modellbeispiel, in dem die studierte Verzweigung auftritt.

4.1.1 Formulierung des Hauptresultates

Wir betrachten nun eine allgemeine Forward-Backward-Delaygleichung

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \lambda, c), \quad (4.1)$$

in der $f(\cdot, \lambda, c) : C^0 := C^0([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine C^k -Abbildung mit $k \geq 2$ ist, die für festes $\varphi \in C^0$ stetig differenzierbar von zwei reellen Parametern λ, c abhängt und $\lambda \in (-\varepsilon + \lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ und $c \in (-\delta, \delta)$ gilt.

Im Gegensatz zum vorigen Kapitel nehmen wir nun die Existenz einer *heteroklinen* Lösung $h(t)$ der Gleichung (4.1) für den Parameterwert $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$ an. Also gilt

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} h(t) = h_{\pm\infty}, \quad (4.2)$$

für gewisse $h_{\pm\infty} \in \mathbb{R}^N$, die notwendigerweise Gleichgewichte von (4.1) ist. Zusammengefasst wollen wir also folgende Annahme machen:

Hypothese 9 (Existenz)

Für Parameterwerte $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$ existiere eine heterokline Lösung $h(\cdot)$ von (4.1), die exponentiell schnell gegen die Gleichgewichte $h_{\pm\infty}$ konvergiere.

Wir wollen nun den Fall betrachten, in dem im Gleichgewicht h_∞ bezüglich des Parameters λ eine Hopfverzweigung auftritt. Um sicherzustellen, dass nichttriviale periodische Lösungen für Parameterwerte $\lambda > \lambda_0$ auftreten, betrachten wir die Linearisierung L im Gleichgewicht h_∞ , also $L := D_1 f(h_\infty, \lambda_0, c_0)$, mit der dazugehörigen charakteristischen Funktion $\det \Delta(\cdot, \lambda_0, c_0)$. Den Restterm bezeichnen wir mit $\tilde{g}(\varphi, \lambda, c) := f(\varphi, \lambda, c) - L\varphi$, wobei $\varphi \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$. Um eine Hopfverzweigung nahe h_∞ zu beobachten, wollen wir die Existenz zweier rein imaginärer Nullstellen $\pm i\omega$ der charakteristischen Funktion $\det \Delta(\cdot, \lambda_0, c_0)$ annehmen. Die nächste Annahme stellt sicher, dass diese imaginären Nullstellen $\pm i\omega$ die imaginäre Achse mit nichtverschwindender Geschwindigkeit von rechts nach links kreuzen.

Hypothese 10 (Hopf bei h_∞)

Sei $\det \Delta(\mu) = a_0 + a_1(\mu - i\omega) + O((\mu - i\omega)^2)$ die Taylorentwicklung nahe $i\omega$. Es ist $a_i = a_i(\lambda, c)$ für $i = 1, 2$ und $a_0(\lambda_0, c_0) = 0, a_1(\lambda_0, c_0) \neq 0$ und wir wollen

$$-\operatorname{Re} [\partial_\mu \det \Delta(i\omega, \lambda_0, c_0)^{-1} (\partial_\lambda \det \Delta(i\omega, \lambda_0, c_0))] < 0.$$

annehmen. Desweiteren gelte $\det \Delta(ik) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$ mit $k \neq \pm\omega$, d.h. es existieren keine weiteren rein imaginären Eigenwerte der Linearisierung in h_∞ .

Genau wie in Abschnitt 3.2 gehen wir zunächst zu neuen Parametern über.

Parameterwechsel

Wir bemerken, dass man die einfachen Nullstellen $\pm i\omega$ nahe $(\lambda, c) = (\lambda_0, c_0)$ in Abhängigkeit von (λ, c) parametrisieren kann, d.h. es existiert eine C^1 -Abbildung $\mu(\lambda, c)$ mit $\mu(\lambda_0, c_0) = i\omega$ und $\det \Delta(\mu(\lambda, c), \lambda, c) = 0$. Betrachten wir die Hilfsfunktion $l(\lambda, c) := \operatorname{Re} \mu(\lambda, c)$, so gilt

$$l(\lambda_0, c_0) = \operatorname{Re}(i\omega) = 0, \quad D_1 l(\lambda_0, c_0) \neq 0$$

nach Hypothese „Hopf bei h_∞ “. Also existiert eine glatte Funktion $\lambda_* = \lambda_*(c)$ bezüglich c nahe c_0 mit $\operatorname{Re}(\mu(\lambda_*(c), c)) = 0$ für alle zulässigen $c \approx c_0$. Genau für diese μ treten rein

imaginäre Nullstellen der charakteristischen Funktion auf. Man beachte, dass in jedem vertikalen Streifen nur *endlich* viele Nullstellen liegen. Falls also (λ, c) genügend nahe an (λ_0, c_0) liegt, besitzen alle weiteren Nullstellen η mit $\operatorname{Re}(\eta) \neq 0$ einen positiven Abstand von der imaginären Achse.

Wir definieren nun neue Parameter $(\tilde{\lambda}, c)$ via

$$(\lambda, c) = (\lambda_*(c) + \tilde{\lambda}, c), \quad (4.3)$$

wobei $c \approx c_0$ und $\lambda \approx \lambda_0$ gilt. Dieser Parameterwechsel ist wohldefiniert, da die Ableitung der Abbildung $(\tilde{\lambda}, c) \rightarrow (\lambda_*(c) + \tilde{\lambda}, c) = (\lambda, c)$ bei $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c_0)$ invertierbar ist. Wir setzen also $f_{neu}(\varphi, \tilde{\lambda}, c) := f(\varphi, (\lambda_*(c) + \tilde{\lambda}), c)$, unterdrücken aber von nun an die Bezeichnung „neu“ und arbeiten ab sofort mit der Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \tilde{\lambda}, c). \quad (4.4)$$

Man beachte, dass diese Gleichung bezüglich der neuen Parameter $\tilde{\lambda}, c$ ebenfalls die Hypothese „Hopf bei h_∞ “ erfüllt.

Die Annahme „Hopf bei h_∞ “ sichert uns nun die Existenz periodischer Lösungen der Gleichung (4.4) für gewisse Parameterwerte $(\tilde{\lambda}, c)$ nahe $(0, c_0)$: Dazu schreiben wir zunächst die Gleichung (4.4) in der äquivalenten Form

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\Phi}(t, \cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\Phi(t, \cdot)) \\ \partial_\theta \Phi(t, \cdot) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{g}(\Phi(t, \cdot), \tilde{\lambda}, c) \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $(\xi(t), \Phi(t, \cdot)) \in X := \{(\eta, \Psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^N \times H^1([-a, b], \mathbb{R}^N) : \eta = \Psi(0)\}$ für jedes feste t . Direkte Anwendung des Satzes 2.6 bezüglich des Gleichgewichtes $H_\infty := (h_\infty, h_\infty)$ sichert die Existenz einer zweidimensionalen Zentrumsmannigfaltigkeit \mathcal{M} , die glatt von den Parametern $\tilde{\lambda}$ und c abhängt. Auf \mathcal{M} eingeschränkt haben wir eine *gewöhnliche Differentialgleichung* und der Standard-Satz über Hopfverzweigungen bezüglich gewöhnlicher Differentialgleichungen (siehe etwa [6]) liefert die Existenz periodischer Lösungen $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(\cdot)$; diese induzieren periodische Lösungen $\gamma_{\tilde{\lambda}, c}(\cdot)$ der Gleichung (4.4) via

$$\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) \\ \gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t + \cdot) \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(\cdot) = 0$, falls für diese Parameterwerte keine nichttriviale periodische Lösung existiert. Um sicherzustellen, dass die Verzweigung subkritisch ist, müssen wir eine zusätzliche Annahme an höhere Ordnungsterme der Nichtlinearität f stellen. Dazu benötigen wir das auf der Zentrumsmannigfaltigkeit reduzierte, lokal definierte Vektorfeld f_{red} . Zur Berechnung des Vektorfeldes f_{red} translatieren wir das Gleichgewicht $H_\infty = (h_\infty, h_\infty)$ in den Ursprung. Betrachte nun

$$f_{red}(\cdot, \tilde{\lambda}, c) : \mathbb{R}^2 \cap \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (4.5)$$

wobei \mathcal{U} eine genügend kleine Umgebung der Null bezeichnet. f_{red} hängt glatt von den Parametern $\tilde{\lambda}$ und c ab. Nun gilt $\operatorname{spec}(D_1 f_{red}(0, 0, c_0)) = \{\pm i\omega\}$ und nach Normalformtheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen kann man annehmen, dass das Taylorpolynom bis zu endlicher Ordnung rotationsäquivariant ist, siehe [25]. Wählt man also komplexe Koordinaten $z = x + iy, \bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$, so gilt

$$f_{red}(z, \tilde{\lambda}, c_0) = (b_1(\tilde{\lambda}, c_0) + i[d_1(\tilde{\lambda}, c_0)])z + d(\tilde{\lambda}, c_0)z|z|^2 + \text{h.o.t} \quad (4.6)$$

mit $b_1(0, c_0) = 0, d_1(0, c_0) = \omega$. Wir machen nun folgende Annahme:

Hypothese 11 (Subkritisch)

Betrachte die Taylorentwicklung des reduzierten Vektorfeldes f_{red} in der Darstellung (4.6). Wir nehmen an, dass $\operatorname{Re}(d(0, c_0)) > 0$ gilt.

Die beiden vorigen Hypothesen garantiert uns die Existenz einer Familie periodischer Lösungen für Parameterwerte $\tilde{\lambda} > 0$. Allerdings sind die nun entstehenden periodischen Lösungen instabil. Die Annahme $\partial_{\tilde{\lambda}} \operatorname{Re}(\mu(0, c_0)) < 0$ besagt nämlich (man beachte, dass Hypothese „Hopf bei h_∞ “ auch für die neuen Parameter $\tilde{\lambda}, c$ gilt), dass das Gleichgewicht h_∞ für die Parameterwerte $\tilde{\lambda} > 0$ bezüglich der Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit stabil ist. Also sind die für $\tilde{\lambda} > 0$ auf der Zentrumsmannigfaltigkeit auftretenden periodischen Lösungen

$$\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) \\ \gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t + \cdot) \end{pmatrix}$$

instabil.

Schließlich wollen wir annehmen, dass das Gleichgewicht $h_{-\infty}$ hyperbolisch ist:

Hypothese 12 (Hyperbolizität bei $h_{-\infty}$)

Wir nehmen an, dass die charakteristische Funktion der Linearisierung $D_1 f(h_{-\infty}, 0, c_0)$ im Gleichgewicht $h_{-\infty}$ keine rein imaginären Nullstellen besitzt.

Wir betrachten nun die Linearisierung von (4.4) entlang des heteroklinen Orbits $h(t)$:

$$\dot{v}(t) = D_1 f(h_t, \tilde{\lambda}, c)v_t, \quad (4.7)$$

wobei $v_t \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$ ist. Diese Gleichung induziert nun eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\lambda}, c} : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \\ \mathcal{L}_{\tilde{\lambda}, c} : w(\cdot)(t) &\mapsto \partial_t w(t) - D_1 f(h_t, \tilde{\lambda}, c)w_t. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Zur Eindeutigkeit der Lösungen von (4.8) machen wir folgende Annahme:

Hypothese 13 (Eindeutigkeit für Lösungen der Linearisierung)

Jedes $w \in \operatorname{Kern}(\mathcal{L}_{0, c_0})$, mit $w_t = 0$ für ein $t \in \mathbb{R}$, erfülle $w \equiv 0$ auf ganz \mathbb{R} .

Betrachte nun die nichtlineare Gleichung

$$\dot{x}(t) = D_1 f(h_t, 0, c_0)x_t + g(t, x_t, \tilde{\lambda}, c), \quad (4.9)$$

wobei wir $g(t, \varphi, \tilde{\lambda}, c) := f(\varphi, \tilde{\lambda}, c) - D_1 f(h_t, 0, c_0)\varphi$ für $\varphi \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$ gesetzt haben. Wir erinnern, dass die Norm von $H^{1, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ wie folgt definiert ist: es ist $\|w\|_{H^{1, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)} = \|w\|_{L^{2, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)} + \|\partial_t w\|_{L^{2, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)}$ und

$$\|w\|_{L^{2, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)}^2 := \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\eta t} w(t)|^2 dt.$$

Hypothese 14 (Transversalität)

Es existiere ein $\eta_1 < 0$, so dass der Operator $\mathcal{L}_{0, c_0}^\eta : H^{1, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \rightarrow L^{2, \eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ für alle $\eta \in (\eta_1, 0)$ Fredholmoperator vom Index Null ist. Weiterhin sei $\operatorname{Kern}(\mathcal{L}_{0, c_0}^\eta)$ eindimensional und die Funktion $t \rightarrow \partial_c g(t, h_t, 0, c_0)$ nicht im Abschluss des Bildes von $\mathcal{L}_{0, c_0} = \mathcal{L}_{0, c_0}^0 : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.

Die geometrische Deutung dieser Hypothese im Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist wie folgt: Da $h(t)$ in Vorwärts- und Rückwärtszeit mit exponentieller Rate konvergiert, liegt der Orbit von $h(\cdot)$ im Schnitt der stark-stabilen Mannigfaltigkeit $W^{ss,+}(h_\infty)$ des Gleichgewichtes h_∞ und der instabilen Mannigfaltigkeit $W^{u,-}(h_{-\infty})$ von $h_{-\infty}$. Die Hypothese „Transversalität“ besagt nun, dass sich $W_{0,c_0}^{ss,+}(h_\infty) \subset \mathbb{R}^N$ und $W_{0,c_0}^{u,-}(h_{-\infty}) \subset \mathbb{R}^N$ entlang keiner weiteren Lösung schneiden und die Summe der Tangentialräume die Kodimension eins besitzt. Erweitert man die Mannigfaltigkeiten allerdings um den Parameter c (wie in der Einleitung beschrieben), so schneiden sich die erweiterten Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ transversal. Auf diese Fakten werden wir allerdings noch ein wenig genauer im Beweis des Hauptresultates eingehen.

Die Annahme, dass der Operator $\mathcal{L}_{\tilde{\lambda},c}^\eta$ für negatives $\eta < 0$ ein Fredholmoperator vom Index Null ist, sieht zunächst willkürlich aus. Allerdings gibt es einen entscheidenden Unterschied zwischen Gewichten $\eta < 0$ und $\eta > 0$: man stelle sich etwa eine gewöhnliche Differentialgleichung im \mathbb{R}^4 vor. Das Spektrum in den Gleichgewichten $h_{-\infty}$ und h_∞ sehe dabei wie in den Abbildungen (a) und (b) von Bild 4.1 aus. Wir wollen uns vorstellen, dass die beiden Zustände $h_{\pm\infty}$, die durch eine heterokline Lösung miteinander verbunden sind, nahe beieinander sind. Man beachte, dass die Hopfeigenwerte aufgrund unserer Hypothese „Hopf bei h_∞ “ die imaginäre Achse für wachsendes $\tilde{\lambda}$ von rechts nach links kreuzen. Deswegen erwarten wir, dass das Spektrum im Gleichgewicht h_∞ wie in Abbildung (b) skizziert aussieht. Die Wahl des Gewichtes $\eta > 0$ würde nun bewirken, dass das gesamte Spektrum (wie in Bild (c)) um η nach *links* verschoben wird (man beachte die Definition der Norm $\|\cdot\|_{H^{1,\eta}}$!). Ein kurzer Blick auf die Berechnung des Fredholmindex i von $\mathcal{L}_{0,\eta}^\eta$ zeigt in diesem Fall, dass $i = 2$ gilt, also i von null verschieden ist: Es gilt nämlich $i = i_- - i_+$ und die Anzahl positiver Eigenwerte im Gleichgewicht h_∞ ist null. Zusammengefasst bewirkt also die Wahl des Gewichtes $\eta < 0$, dass die kritischen Eigenwerte in die Richtung „zurückgeschoben“ werden, aus der sie kommen.

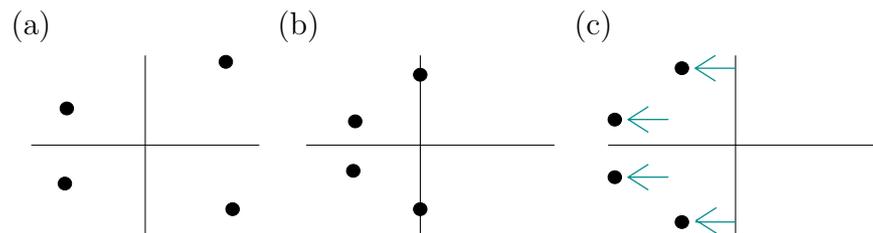


Abbildung 4.1: Beispiel im \mathbb{R}^4 : (a) Spektrum im Gleichgewicht $h_{-\infty}$; (b) Spektrum im Gleichgewicht h_∞ ; (c) Das um $\eta < 0$ nach links verschobene Spektrum von Abbildung (b)

Wir bemerken, dass die Funktion $t \rightarrow h(t)$ wegen der Hypothese „Existenz“ für $|t| \rightarrow \infty$ exponentiell schnell abklingt, weswegen $t \rightarrow \partial_c g(t, 0, \tilde{\lambda}, c) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ ist.

Wir können nun unser Hauptresultat dieses Kapitels formulieren, siehe auch Abbildung 4.2. Wir erinnern daran, dass $BC^\vartheta(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ für ein $\vartheta < 0$ den Raum aller stetigen Funk-

tionen x bezeichnet, die bezüglich der Norm $|x|_{\vartheta} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|_{\mathbb{R}^N} e^{-\vartheta|t|}$ beschränkt sind.

Satz 4.1 (Verzweigung von einer heteroklinen Lösung)

Seien die Hypothesen 9-14 erfüllt und $f(\cdot, \tilde{\lambda}, c)$ dreimal stetig differenzierbar. Dann existiert ein $\rho > 0$, eine differenzierbare Funktion $\tilde{\lambda}(\cdot, \cdot) : B_{\rho}(0) \times B_{\rho}(c_0) \rightarrow \mathbb{R}$, eine stetige Funktion $\hat{c}(\cdot) : B_{\rho}(0) \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Familie von Funktionen $h^{\sigma}(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit folgenden Eigenschaften:

- **Lösungen:** Alle Abbildungen $h^{\sigma}(\cdot)$ sind auf \mathbb{R} definierte Lösungen der Gleichung (4.4) für $(\tilde{\lambda}, c) = (\tilde{\lambda}(\sigma, \hat{c}(\sigma)), \hat{c}(\sigma))$ und erfüllen $h^{\sigma}(\cdot) \in H_{loc}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.
- **Stetige Abhängigkeit:** Es ist $\hat{c}(0) = c_0$, $\tilde{\lambda}(0, c_0) = 0$, $h_{0, c_0}(t) = h(t)$ und es existiert ein $\vartheta_0 < 0$, so dass $\sigma \mapsto h^{\sigma}(\cdot)$ als Abbildung von $B_{\rho}(0)$ nach $BC^{\vartheta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ für ein beliebiges $\vartheta \in (\vartheta_0, 0)$ stetig ist
- **Konvergenz in Rückwärtszeit:** Es gilt $|h^{\sigma}(t) - h_{-\infty}| \leq M e^{-\tilde{a}|t|}$ für $t \rightarrow -\infty$ und ein $\tilde{a} > 0$
- **Konvergenz in Vorwärtszeit:** Es gilt $|h^{\sigma}(t) - \gamma_{\tilde{\lambda}(\sigma, \hat{c}(\sigma)), \hat{c}(\sigma)}(t + \theta_0)| \leq M e^{-\kappa|t|}$ für $t \rightarrow \infty$ für ein $\theta_0 \in \mathbb{R}$ und ein $\kappa > 0$.
- **Nichttriviale Periodizität:** Die Lösungen $t \rightarrow \gamma_{\tilde{\lambda}(\sigma, \hat{c}(\sigma)), \hat{c}(\sigma)}(t)$ besitzen zu führender Ordnung in σ die Amplitude $C\sigma$ für $\sigma > 0$ und eine reelle Zahl $C > 0$. Insbesondere sind diese Lösungen keine Gleichgewichte für $\sigma > 0$.
- **Jeder Parameterwert tritt auf:** Für jedes $\tilde{\lambda} > 0$ klein genug (das sind die $\tilde{\lambda}$ -Werte, für die nichttriviale periodische Lösungen existieren) und $c \approx c_0$ existiert ein $\sigma \in B_{\zeta}(0)$ mit $(\tilde{\lambda}, c) = (\tilde{\lambda}(\sigma, c), c)$.

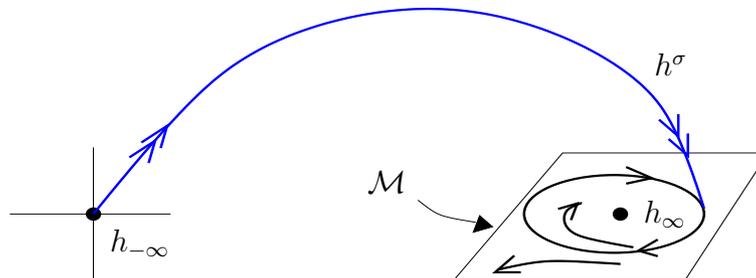


Abbildung 4.2: In der Abbildung ist die Abbildung h^{σ} skizziert. Doppelte Pfeile repräsentieren exponentielle Konvergenz.

4.1.2 Beweis des Hauptresultates

Wir werden nun Satz 4.1 beweisen. Da der Beweis in vielen Schritten identisch zu dem des Satzes 3.1 verläuft, werden wir nur auf die Punkte eingehen, in denen der Beweis modifiziert werden muss.

Wie im letzten Kapitel arbeiten wir mit einer skalierten Gleichung und bezeichnen die nichttriviale Periode der Funktionen $\Gamma_{\tilde{\lambda},c}(\cdot) = \Gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon,c),c}(\cdot)$ mit $T(\varepsilon, c)$, wobei

$$\Gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon,c),c}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon,c),c}(t) \\ \gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon,c),c}(t + \cdot) \end{pmatrix}$$

gilt und die Funktion $\gamma(\cdot) = \gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon,c),c}(\cdot)$ eine periodische Lösung der Gleichung (4.4) für die Parameterwerte $(\tilde{\lambda}, c) = (\tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c)$ ist. Die Abbildungen $\tilde{\lambda}(\cdot, \cdot)$ und $T(\cdot, \cdot)$ sind glatte Abbildungen, die am Anfang des Abschnittes 3.6.1 definiert wurde (siehe (3.151) und (3.152)). Den Parameter ε kann man sich hierbei als Amplitude der periodischen Funktionen $\Gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon,c),c}$ vorstellen.

Wie im vorigen Kapitel betrachten wir nun die skalierte Gleichung

$$\dot{x}(t) = f^{sk}(x_t, \varepsilon, c), \quad (4.10)$$

mit

$$f^{sk}(\varphi(\bullet), \varepsilon, c) := T(\varepsilon, c)f(\varphi(\bullet/T(\varepsilon, c)), \tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c)$$

für $\varphi \in H^1([(-a/T(0, c_0)) - 1, (b/T(0, c_0)) + 1], \mathbb{R}^N)$. Die skalierte Gleichung besitzt nun 1-periodische Lösungen $\gamma^{sk}(\cdot) = \gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(\cdot)$ kleiner Amplitude nahe h_∞ und es gilt

$$\gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(t) = \gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon,c),c}(t \cdot T(\varepsilon, c)).$$

Wir arbeiten von nun an mit der abstrakten, skalierten Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\Phi}(t, \cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{sk}(\Phi(t, \cdot), \varepsilon, c) \\ \partial_\theta \Phi(t, \cdot) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

für $(\xi(t), \Phi(t, \cdot)) \in X = \{(\eta, \varphi(\cdot)) \in \mathbb{R}^N \times H^1([(-a/T(0, c_0)) - 1, (b/T(0, c_0)) + 1], \mathbb{R}^N) : \varphi(0) = \eta\}$. Diese Gleichung besitzt dann für $(\varepsilon, c) = (0, c_0)$ eine heterokline Lösung $H^{sk}(t)$, die durch

$$H^{sk}(t) = \begin{pmatrix} h(t \cdot T(0, c_0)) \\ h((t + \cdot)T(0, c_0)) \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Es bezeichne weiterhin \hat{Y} denjenigen Hilbertraum, der durch $\hat{Y} := \mathbb{R}^N \times H^1([(-a/T(0, c_0)) - 1, (b/T(0, c_0)) + 1], \mathbb{R}^N)$ definiert ist.

Die folgenden, lokal invarianten Mannigfaltigkeiten der Gleichung (4.11) werden für uns im weiteren Verlauf eine wichtige Rolle spielen.

- **Die stark-stabile Mannigfaltigkeit $W^{ss,+}(0)$ nahe $H^{sk}(0)$**

(4.11) besitzt eine stark-stabile Mannigfaltigkeit $W^{ss,+}(0) = W_{\varepsilon,c}^{ss,+}(0) \subset \hat{Y}$. Diese enthält alle Anfangswerte von Lösungen $U(t)$ von (4.11) für $t \geq 0$, für die $U(t) = V(t) + H^{sk}(t)$ gilt, $|V(0)|_{\hat{Y}}$ genügend klein ist und $|V(t)|_{\hat{Y}} \leq Me^{-\beta t}|V(0)|_{\hat{Y}}$ gilt. Hierbei ist $\beta > 0$ eine positive Zahl.

Konstruktion:

Die Konstruktion dieser Mannigfaltigkeit verläuft ganz analog zum vorigen Kapitel: zunächst leiten wir aus dem Ansatz $U(t) = V(t) + H^{sk}(t)$ eine Differentialgleichung für die Funktion $V(t)$ für $t \geq 0$ her, wobei $U(t)$ eine Lösung von (4.11) ist. Dies führt auf eine Gleichung der Form

$$\dot{V}(t) = \mathcal{A}_{sk}(t)V(t) + \mathcal{G}^{sk}(t, V(t), \varepsilon, c). \quad (4.12)$$

Hierbei ist $\mathcal{A}_{sk}(t) : X \rightarrow Y$ für $(\xi, \Phi(\cdot)) \in X$ definiert durch

$$\mathcal{A}_{sk}(t) \begin{pmatrix} \xi \\ \Phi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) \Phi(\cdot) \\ \partial_\theta \Phi(\cdot) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathcal{G}^{sk}(t, (\xi, \Phi(\cdot)), \varepsilon, c) = \begin{pmatrix} f^{sk}(\Phi(\cdot) + h_t^{sk}(\cdot), \varepsilon, c) - D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) - f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Nach Satz 3.14 existieren dann Operatoren $\Phi_+^s(t, s)$ und $\Phi_+^{cu}(s, t)$ existieren, die $|\Phi_+^s(t, s)W|_Y \leq M|W|_Y$ und $|\Phi_+^{cu}(t, s)W|_Y \leq Me^{-\beta|t-s|}|W|_Y$ für alle $W \in Y$ und $s \geq t \geq 0$ bzw. $t \geq s \geq 0$ erfüllen. Die gesuchte Funktion $V(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \hat{Y}$ kann dann als Fixpunkt der Integralgleichung

$$\begin{aligned} V(t) &= \Phi_+^s(t, 0)V_0^s + \int_0^t \Phi_+^s(t, s)\mathcal{G}_{mod}^{sk}(t, V(t), \varepsilon, c)ds \\ &+ \int_\infty^t \Phi_+^{cu}(t, s)\mathcal{G}_{mod}^{sk}(t, V(t), \varepsilon, c)ds \end{aligned}$$

für ein $V_0^s \in \hat{E}_+^{s,sk}(0) := \text{Bild}(\Phi_+^{s,sk}(0, 0))|_{\hat{Y}}$ gewonnen werden, wobei \mathcal{G}_{mod}^{sk} die mit einer Cut-off-Funktion modifizierte Nichtlinearität bezeichnet.

- **Die instabile Mannigfaltigkeit $W^{u,-}(0)$ nahe $H^{sk}(0)$**
(4.11) besitzt eine instabile Mannigfaltigkeit $W^{u,-}(0) = W_{\varepsilon,c}^{u,-}(0)$. Diese enthält alle Anfangswerte von Lösungen $U(t)$ von (4.11) für $t \leq 0$, für die $U(t) = V(t) + H^{sk}(t)$ mit $|V(t)|_{\hat{Y}} \leq Me^{-\gamma t}|V(0)|_{\hat{Y}}$ gilt und $|V(0)|_{\hat{Y}}$ genügend klein ist. Hierbei ist $\gamma > 0$ eine positive Zahl. Die Konstruktion dieser Mannigfaltigkeit verläuft analog zur Konstruktion der Mannigfaltigkeit $W_{\varepsilon,c}^{ss,+}(0)$ bezüglich der unskalierten Gleichung in Kapitel 3.4.1 und ist sogar einfacher, da das Gleichgewicht $h_{-\infty}$ hyperbolisch ist und damit die Linearisierung $\mathcal{A}_{sk}(t)$ eine exponentielle Dichotomie auf \mathbb{R}_- besitzt.
- **Die stark-stabile Mannigfaltigkeit $W^{ss,loc}(\Gamma^{sk}(0))$ der periodischen Orbits**
Diese Mannigfaltigkeit enthält alle Lösungen $U(t)$ von (4.11), die für $t \rightarrow \infty$ exponentiell schnell mit Rate β gegen den Orbit von $\Gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(t)$ konvergieren, d.h. die $|U(t) - \Gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(t)| \leq Me^{-\beta t}$ erfüllen. Man beachte, dass nach Wahl der Parameter (ε, c) gerade $\Gamma_{0,c}^{sk}(t) = (h_\infty, h_\infty)$ gilt, wobei hier $H_\infty := (h_\infty, h_\infty)$ als Element von X aufzufassen ist. Die Konstruktion dieser Mannigfaltigkeit verläuft ganz analog zu der von $W^{u,loc}(\Gamma(0))$ bezüglich der unskalierten Gleichung in Abschnitt 3.4.1.

Notation

Wir bezeichnen im weiteren Verlauf die erweiterten Mannigfaltigkeiten mit einem „Dach“. Zum Beispiel bezeichnet also $\hat{W}_{\varepsilon}^{ss,loc}$ diejenige Mannigfaltigkeit in $\hat{Y} \times \mathbb{R}$, die durch $\hat{W}_{\varepsilon}^{ss,loc} := \{(U, c) \in \hat{Y} \times \mathbb{R} : U \in W_{\varepsilon,c}^{ss,loc}(\Gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(0)); |c - c_0| \leq \delta\}$ für ein genügend kleines $\delta > 0$ definiert ist. Analog seien nun alle anderen Mannigfaltigkeiten definiert, die mit einem „Dach“ versehen sind.

Transversalität

Wir nehmen nun ohne Einschränkung an, der Punkt $H^{sk}(0) \in \hat{Y}$ liege auf der Mannigfaltigkeit $W_{0,c_0}^{ss,loc}(\Gamma_{0,c}^{sk}(0))$. D.h. es gilt $(H^{sk}(0), c_0) \in \hat{W}_0^{ss,loc}$. Außerdem gilt $(H^{sk}(0), c_0) \in \hat{W}_0^{u,-}$. Wir wollen nun zeigen, dass die beiden Mannigfaltigkeiten $\hat{W}_0^{ss,loc}$ und $\hat{W}_0^{u,-}$ in dem Punkt (H^{sk}, c_0) transversal zueinander sind, d.h. es gilt

$$T_{(H^{sk}(0), c_0)} \hat{W}_0^{ss,loc} + T_{(H^{sk}(0), c_0)} \hat{W}_0^{u,-} = \hat{Y} \times \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

Um dies zu zeigen, betrachten wir den Operator $\mathcal{T}_\eta^{sk} : \mathcal{D}(\mathcal{T}_\eta^{sk}) \subset L^2(\mathbb{R}, Y) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, Y)$, der durch

$$\mathcal{T}_\eta^{sk} V(t) := \partial_t V(t) - \mathcal{A}_{sk}^\eta(t) V(t) \quad (4.15)$$

mit

$$\mathcal{A}_{sk}^\eta(t)(\xi, \varphi) = \begin{pmatrix} -\eta\xi + D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0)(e^\eta \varphi(\cdot)) \\ \partial_\theta \varphi(\cdot) \end{pmatrix}$$

definiert ist (der Definitionsbereich $\mathcal{D}(\mathcal{T}_\eta^{sk})$ von \mathcal{T}_η^{sk} ist kurz nach Gleichung (3.24) angegeben).

Nach Hypothese „Transversalität“ ist nun \mathcal{T}_η für jedes $\eta \in (\eta_1, 0)$ ein Fredholmoperator vom Index Null (dies folgt analog zu Abschnitt „Die Hypothesen „EFE“ und „Transversalität“ für die skalierte Gleichung“ in Kapitel (3.6.1)).

Die folgende Beobachtung ist entscheidend: aufgrund der Wahl $\eta < 0$ verschiebt sich das gesamte Spektrum der linearisierten Gleichung bezüglich des Gleichgewichtes h_∞ , also der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\phi}(t, \cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f^{sk}(h_\infty, 0, c_0)(\phi(t, \cdot)) \\ \partial_\theta \phi(t, \cdot) \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

mit $(\xi(t), \phi(t, \cdot)) \in X$, nach *rechts*. Das heißt, jeder Eigenwert λ des Linearteils der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\phi}(t, \cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta\xi(t) + D_1 f^{sk}(h_\infty, 0, c_0)(e^\eta \phi(t, \cdot)) \\ \partial_\theta \phi(t, \cdot) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

lässt sich in der Form $\lambda = \tilde{\lambda} + |\eta|$ für ein $\tilde{\lambda}$ im Spektrum der linearen Abbildung in (4.16) schreiben. Also sind die „Hopfeigenwerte“ $\pm i\omega$ für $\eta < 0$ in der rechten komplexen Halbebene enthalten. Damit haben sie keinen Einfluss auf die exponentielle Rate, bezüglich der der Lösungsoperator $\Phi_{+, \eta}^s(t, s)$ der linearen Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\phi}(t, \cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta\xi(t) + D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0)(e^\eta \phi(t, \cdot)) \\ \partial_\theta \phi(t, \cdot) \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

für $t \geq s \geq 0$ abklingt: Bezeichne dazu mit $\zeta > 0$ denjenigen Abstand, den ein Eigenwert $\lambda_0 = a + ib$, $a < 0$ bezüglich (4.17) mit betragsmäßig kleinstem Realteil von der imaginären Achse hat. Dann besitzt die lineare Gleichung (4.18) exponentielle Dichotomien auf \mathbb{R}_+ mit zugehörigen Operatoren $\Phi_{+, \eta}^s(t, s)$ und $\Phi_{+, \eta}^u(s, t)$ für $t \geq s \geq 0$, so dass

$$|\Phi_{+, \eta}^s(t, s)V|_Y \leq M e^{(-\zeta + \varepsilon)|t-s|} |V|_Y, \quad |\Phi_{+, \eta}^u(s, t)V|_Y \leq M e^{-(\eta)|t-s|} |V|_Y$$

für ein beliebiges $\varepsilon > 0$, ein $M = M(\varepsilon)$ und $V \in Y$ gilt. Man beachte, dass die Rate, mit der der Operator $\Phi_{+, \eta}^u$ abklingt genau η gewählt werden kann, da es gerade die ursprünglichen „Hopfeigenwerte“ sind, die bezüglich (4.17) den kleinsten Anstand von

der imaginären Achse haben. Da diese Eigenwerte weiterhin nach Annahme einfach sind, ergibt sich die Behauptung.

Direkte Anwendung des Lemmas 3.20 zeigt nun, dass die Kodimension des Unterraumes

$$E_{\eta,+}^s(0) + E_{\eta,-}^u(0)$$

bezüglich Y genau 1 ist, wobei $E_{\eta,+}^s(0) := \text{Bild}(\Phi_{+,\eta}^s(0,0)) \subset Y$ und weiterhin $E_{\eta,-}^u(0) := \text{Bild}(\Phi_{-,\eta}^u(0,0)) \subset Y$ gilt. Hierbei bezeichnet $\Phi_{\eta,-}^u(t,s)$ für $t \leq s \leq 0$ den Lösungsoperator bezüglich einer exponentiellen Dichotomie der linearen Gleichung (4.18) auf \mathbb{R}_- , der die Abschätzung $|\Phi^u, \eta, -(t,s)V| \leq Me^{-\beta|t-s|}|V|_Y$ für $V \in Y$ und ein $\beta > 0$ erfüllt.

Für $\eta = 0$ ist also die Kodimension von $E_{0,+}^s(0) + E_{0,-}^u(0)$ genau 1, wobei $E_+^s(0) := \text{Bild}(\Phi_+^s(0,0)) \subset Y$ und $\Phi_+^s(t,s), \Phi_+^{cu}(s,t)$ für $t \geq s \geq 0$ die Lösungsoperatoren der Gleichung (4.18) (für $\eta = 0$) bezüglich der Dichotomie auf \mathbb{R}_+ bezeichnen. Analog ist $E_-^u(0) := \text{Bild}(\Phi_-^u(0,0)) \subset Y$ und $\Phi_-^u(t,s), \Phi_-^{sk}(s,t)$ bezeichnen für $t \leq s \leq 0$ die Lösungsoperatoren der Gleichung (4.18) für $\eta = 0$ bezüglich einer Dichotomie auf \mathbb{R}_- . Insbesondere gilt die Abschätzung

$$|\Phi_+^s(t,s)V|_Y \leq Me^{(-\tilde{\gamma})|t-s|}|V|_Y$$

für ein $\tilde{\gamma} > 0$ und alle $V \in Y$. Wie wir schon früher bemerkt haben (siehe die Diskussion nach Lemma 3.20), ist nun auch die Kodimension von

$$\hat{E}_+^s(0) + \hat{E}_-^u(0)$$

bezüglich \hat{Y} genau 1, wobei $\hat{E}_+^s(0) := \hat{Y} \cap E_+^{s,sk}(0)$, $\hat{E}_-^u(0) := \hat{Y} \cap E_-^u(0)$ ist und beide Vektorräume mit der \hat{Y} -Norm versehen sind.

Um zu zeigen, dass sich die Mannigfaltigkeiten $\hat{W}_\varepsilon^{ss,loc}$ und $\hat{W}_\varepsilon^{u,-}$ als Mannigfaltigkeiten im Hibertraum $\hat{Y} \times \mathbb{R}$ in $(H^{sk}(0), c_0)$ transversal schneiden, reicht es also wie im Beweis des Lemmas 3.29 die Bedingung

$$\left\langle \Psi_*^0, \int_{-\infty}^0 \Phi_-^{s,sk}(0,\xi) \partial_c \mathcal{G}^{sk}(\xi, 0, 0, c_0) d\xi - \int_{\infty}^0 \Phi_+^{cu,sk}(0,\xi) \partial_c \mathcal{G}^{sk}(\xi, 0, 0, c_0) d\xi \right\rangle_Y \neq 0 \quad (4.19)$$

zu verifizieren (wobei Ψ_*^0 ein Vektor ist, der bezüglich des Y -Skalarproduktes senkrecht auf $\hat{E}_+^s(0) + \hat{E}_-^u(0)$ steht). Hierbei ist:

$$\mathcal{G}^{sk}(t, (\xi, \varphi), \varepsilon, c) := \begin{pmatrix} f^{sk}(h_t^{sk} + \varphi, \varepsilon, c) - D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) \varphi - f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und $(\xi, \phi(\cdot)) \in \hat{Y}$. Wie in Lemma 3.29 zeigt man nun, dass dieser Ausdruck von null verschieden ist, wenn Hypothese „Transversalität“ erfüllt ist. Dies zeigt, dass sich die erweiterten Mannigfaltigkeiten $\hat{W}_0^{ss,loc}, \hat{W}_0^{u,-}$ der skalierten Gleichung transversal schneiden. Nach dem impliziten Funktionensatz existiert also ein Schnittpunkt $(\tilde{U}(\varepsilon), c(\varepsilon)) \in \hat{W}_\varepsilon^{ss,loc} \cap \hat{W}_\varepsilon^{u,-}$ für $\varepsilon \approx 0$. Für $\varepsilon > 0$ gibt dieser Schnittpunkt Anlass zu einer Lösung $U^\varepsilon(\cdot)$ von (4.11), die in Vorwärtszeit gegen den periodischen Orbit $\Gamma_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^{sk}(\cdot)$ und in Rückwärtszeit exponentiell schnell gegen das Gleichgewicht $H_{-\infty}$ konvergiert.

Schreiben wir

$$U^\varepsilon(t) = (u(t, \varepsilon), u(t + \cdot, \varepsilon))$$

und definieren $h^\varepsilon(t) = u(t/T(\varepsilon, c), \varepsilon)$, so haben wir unsere gesuchten Lösungen gefunden. Damit ist der Satz 4.1 bewiesen. \square

4.1.3 Bemerkungen

Stabile periodische Lösungen

Sind die durch die Hopfverzweigung entstehenden periodischen Lösungen *stabil* bezüglich der Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit \mathcal{M} , so ist das auf \mathcal{M} reduzierte Vektorfeld für den kritischen Parameterwert (λ_0, c_0) ebenfalls stabil. Generisch nähert sich dann die heterokline Lösung $h(t)$ dem Gleichgewicht h_∞ entlang der Zentrumsrichtung. Wir können nun die gesuchte Familie von Lösungen mit der Hilfe des Schnittpunktes der (erweiterten) stark instabilen Mannigfaltigkeit bezüglich des Gleichgewichtes $H_{-\infty} = (h_{-\infty}, h_{-\infty})$ und der zentrumsstabilen Mannigfaltigkeit von $H_\infty = (h_\infty, h_\infty)$ konstruieren, die sich entlang der heteroklinen Lösung für den Parameterwert $(0, c_0)$ transversal schneiden. Ein Argument ähnlich dem von Kapitel 3 (man siehe insbesondere Lemma 3.23) liefert dann die gesuchte Familie von Lösungen. Also können unsere Methoden auch in diesem Fall angewendet werden.

Hopfverzweigung bei $h_{-\infty}$

Wir erwarten keine Unterschiede, wenn die Hopfverzweigung bei dem anderen Gleichgewicht $H_{-\infty} = (h_{-\infty}, h_{-\infty})$ auftritt. Sind die entstehenden periodischen Lösungen etwa stabil bezüglich der Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit, so ist das Gleichgewicht $H_{-\infty}$ zum Verzweigungszeitpunkt (also für den kritischen Parameterwert (λ_0, c_0)) ebenfalls stabil. Der heterokline Orbit $H(t)$ nähert sich also dem Gleichgewicht $H_{-\infty}$ entlang einer stark instabilen Richtung. Wir können dann analog zu dem Beweis des vorigen Kapitels zeigen, dass Lösungen $H^\sigma(t)$ der abstrakten Gleichung existieren, die in Vorwärtszeit mit exponentieller Rate gegen das Gleichgewicht H_∞ und in Rückwärtszeit gegen einen nahe $H_{-\infty}$ entstehenden periodischen Orbit konvergieren. Tatsächlich kann man diesen Fall durch die Zeittransformation $t \mapsto -t$ auf denjenigen Fall zurückführen, wo eine subkritische Hopfverzweigung in dem Gleichgewicht H_∞ auftritt. Analog kann man den Fall einer superkritischen Hopfverzweigung nahe $H_{-\infty}$ auf den Abschnitt „Stabile periodische Lösungen“ besprochenen Fall zurückführen.

4.1.4 Ein Beispiel

Wir studieren in diesem Abschnitt eine leicht modifizierte Version des Modellbeispiels (3.7), für das wir alle Hypothesen des Theorems 4.1 verifizieren können und betrachten dazu die folgende Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ f(x(t), c) + \gamma\chi(x(t))z(t) \\ \alpha(L(z_t) - z(t)) + g(z(t), \lambda, c) + k(x(t))z(t) \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Diese Gleichung definiert eine Forward-Backward-Delay Gleichung auf $[-2\pi, 2\pi]$. Ist $z = 0$ und $\lambda = 0$, so reduziert sich (4.20) auf

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ f(x(t), c) \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

falls $g(0, 0, c) = 0$. Dieses ist ein zweidimensionales Hamiltonsystem und wir wollen für $c = 1$ die Existenz eines heteroklinen Orbits annehmen, der die Gleichgewichte $(x, y) =$

$(-2\pi, 0)$ und $(0, 0)$ miteinander verbindet. Wir können etwa den Fall betrachten, dass

$$f(x, c) = \sin(x + \pi) + (c - 1)x \quad (4.22)$$

ist.

Wir zeigen nun, dass $\alpha \in \mathbb{R}$ und Funktionen $g(\theta, \lambda, c), k(\theta), \chi(\theta)$ existieren, so dass die Voraussetzungen von Theorem 4.1 erfüllt sind. Insbesondere existieren dann Lösungen $h^\sigma(t)$, die in Vorwärtszeit exponentiell gegen einen periodischen Orbit und in Rückwärtszeit gegen ein Gleichgewicht konvergieren.

Da viele Schritte ganz analog zu Beispiel 3.7 verlaufen, gehen wir nur auf die Punkte ein, bei denen man anders argumentieren muss. Viele unserer folgenden Argumente zur Verifikation der notwendigen Hypothesen beruhen darauf, dass die entlang der heteroklinen Lösung $(h_1(t), h_2(t))$ linearisierte Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ f'(h_1(t), 1)x(t) \end{pmatrix},$$

ein Fredholmoperator vom Index Null induziert. In diesem Sinne kann man die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung bezüglich x, y in (4.21) nicht durch eine eindimensionale ersetzen, da die entsprechende Linearisierung entlang des heteroklinen Orbits keinen Fredholmoperator vom Index Null induziert.

Wir machen nun zunächst die gleichen Annahmen an die in (4.20) auftretenden Größen, wie in Abschnitt 3.7:

- L hat die Form $L\varphi = \frac{1}{20}\varphi(-2\pi) + \frac{1}{5}\varphi(-\delta) + \frac{3}{4}\varphi(2\pi)$, wobei $\frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{3}{4} = 1$. Also ist $L(\mathbf{1}) = 1$
- $k(0) = 0, g(0, 0, c) = 0, \chi(0) \neq 0$

Existenz eines heteroklinen Orbits

Nach Annahme an $f(\cdot, c)$ besitzt das System (4.20) mit $z = 0$ und $c = 1$ einen heteroklinen Orbit $(h_1(t), h_2(t))$, der die Gleichgewichte $(-2\pi, 0)$ und $(0, 0)$ miteinander verbindet. Wie in dem Fall $f(\theta) = \sin(\theta + \pi)$ nehmen wir an, dass $h_2(t) > 0$ für alle t ist.

Da die Gleichgewichte $(-2\pi, 0)$ und $(0, 0)$ hyperbolisch sind, konvergiert $(h_1(t), h_2(t))$ exponentiell gegen Null. Also besitzt Gleichung (4.20) einen heteroklinen Orbit $H(t)$, mit $H(t) = (h_1(t), h_2(t), 0)$ und Hypothese „Existenz“ ist erfüllt.

Hopfverzweigung

Stellt man die gleichen Bedingungen an die Funktionen $k(\cdot), g(\cdot, \cdot, c)$ und wählt g in der Form

$$g(z, \lambda, c) = \tilde{g}(z, \lambda) + (c - 1)z$$

wie in den Abschnitten „Hopfverzweigung“ und „Die Taylorentwicklung des reduzierten Vektorfeldes“ von Kapitel 3.7, dann tritt bei Gleichung (4.20) für c nahe 1 eine subkritische Hopfverzweigung auf. Die Berechnungen verlaufen ganz analog. Speziell machen wir also folgende Annahmen:

- *Annahme i):* Die Funktion \tilde{g} erfüllt:

$$\partial_1 \tilde{g}(0, 0) = -\frac{2}{3}(L(\cos(s_N \bullet)) - 1),$$

wobei s_N wie im Abschnitt 3.7 kurz nach Gleichung (3.193) definiert ist.

- *Annahme ii)*: Es gelte $k''(0) + \partial_1 \tilde{g}(0, 0) = 0$.
- *Annahme iii)*: Sei $\partial_\lambda \tilde{g}(0, \lambda) \neq 0$ für $\lambda = 0$ und das Vorzeichen so gewählt, dass

$$-(-s_N^2 - \partial_1 f(0, 1)) \left[\frac{2}{3} L((\bullet) \cos(s_N \bullet)) - 1 \right] \partial_\lambda \tilde{g}(0, 0) > 0.$$

- *Annahme iv)*: Sei das Vorzeichen von $\partial_1^3 \tilde{g}(0, 0) + k'''(0)$ so gewählt, dass

$$(\partial_1^3 \tilde{g}(0, 0) + k'''(0))(-s_N^2 - \partial_1 f(0, 1)) \left(\frac{2}{3} L((\bullet) \cos(s_N \bullet)) - 1 \right) < 0.$$

Eindeutigkeit von Lösungen der Linearisierung

Die Linearisierung von (4.20) entlang des heteroklinen Orbits $(h_1(t), h_2(t), 0)$ für die Parameterwerte $c = 1$ und $\lambda = 0$ liest sich

$$\begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ f'(h_1(t), 1)u(t) + \gamma \chi(h_1(t))w(t) \\ \alpha(L(w_t) - w(t)) + \partial_1 \tilde{g}(0, 0)w(t) + k(h_1(t))w(t) \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Sei nun $(u(t), v(t), w(t))$ eine beschränkte Lösung dieser Gleichung, so dass $(u_\tau, v_\tau, w_\tau) = 0$ für ein $\tau \in \mathbb{R}$. Wir müssen nun zeigen, dass $(u(\cdot), v(\cdot), w(\cdot)) = 0$ ist. Wegen Satz 3.16 ist dann zunächst $w(\cdot) = 0$. Damit reduziert sich (4.23) auf die ersten beiden Gleichungen, die ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen widerspiegelt. Also gilt $(u(\cdot), v(\cdot), w(\cdot)) = 0$ und damit ist Hypothese 13 gezeigt.

Eindimensionaler Kern des Operators \mathcal{L}

Wir zeigen in diesem Abschnitt zunächst, dass der Kern der linearen Abbildung $\mathcal{L} : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ eindimensional ist. Hierbei ist

$$(\mathcal{L}(u(\cdot), v(\cdot), w(\cdot)))(t) = \partial_t(u(t), v(t), w(t)) - L(t)(u_t, v_t, w_t) \quad (4.24)$$

und der Term $L(t)(u_t, v_t, w_t)$ ist durch die rechte Seite von (4.23) definiert.

Wie in Kapitel 3.7 kann man nun zeigen, dass es höchstens drei linear unabhängige Funktionen $w^i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3$ geben kann, die im Kern der w -Gleichung von (4.23) liegen und damit die Gleichung

$$\dot{w}(t) = (\alpha(L(w_t) - w(t)) + \partial_1 \tilde{g}(0, 0)w(t) + k(h_1(t))w(t)) =: \Lambda(t)w_t. \quad (4.25)$$

erfüllen.

Man beachte nun, dass ein Kernelement von \mathcal{L} durch die Funktion $(h'_1(t), h'_2(t), 0)$ gegeben ist. Hierbei konvergieren die Abbildungen $h'_1(t), h'_2(t)$ sogar für $|t| \rightarrow \infty$ exponentiell gegen Null. Ein nichttrivialer Kern-Vektor der adjungierten Gleichung $\mathcal{L}^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}^*) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ ist

$$t \mapsto (-h'_2(t), h'_1(t), 0).$$

Bezeichne nun mit $\Theta : \mathcal{D}(\Theta) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ diejenige lineare Abbildung, die durch

$$\Theta(u, v)(t) = (\partial_t u(t), \partial_t v(t)) - (v(t), f'(h_1(t), 1)u(t))$$

definiert ist. Wir zeigen nun, dass eine Funktion $\chi(\cdot) \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für eine beliebige Lösung $w(\cdot)$ von (4.25) die L^2 -Funktion $(0, \chi(h_1(\cdot))w(\cdot))$ nicht im Bild von Θ liegt. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\int_{\mathbb{R}} [\chi(h_1(s))w(s)]h_1'(s)ds \neq 0,$$

da wir später zeigen, dass es bis auf skalare Vielfache nur ein nicht triviales Kernelement des adjungierten Operators Θ^* gibt. Zunächst einmal zeigt nun unser voriges Argument, dass es höchstens drei linear unabhängige Lösungen der Gleichung (4.25) gibt. Wir bezeichnen diese mit w^1, w^2, w^3 . Die Funktion $h_1'(t) = h_2(t)$ ist positiv für alle Zeiten t und konvergiert exponentiell gegen Null für $|t| \rightarrow \infty$. Nun existiert ein $M > 0$, so dass kein $w^i(t)$ einen Vorzeichenwechsel auf dem Intervall (M, ∞) hat und wir nehmen o.B.d.A. an, dass alle Funktionen positiv sind. Wir machen nun folgende Annahme an die Funktion $\chi(\cdot)$.

- *Annahme v):* Setze $h_1'(M) =: \varepsilon$. Dann ist $\varepsilon \in (-2\pi, 0)$ und wir wollen annehmen, dass die Funktion $\chi(s)$ auf dem Intervall $(-2\pi, -2\pi + \varepsilon)$ identisch verschwindet. Auf dem Intervall $(-1 + \varepsilon, 0)$ sei $\chi(s)$ von null verschieden.

Man beachte, dass diese Annahme im wesentlichen besagt, dass die x, y -Gleichung in (4.20) nahe dem Gleichgewicht $(-2\pi, 0, 0)$ nicht an die z -Gleichung gekoppelt ist. Da sich die periodischen Orbits allerdings für kleine Parameterwerte λ nahe dem anderen Gleichgewicht $(0, 0, 0)$ befinden, stellt dies keinen Widerspruch zur Existenz der gesuchten Lösungen dar, die das Gleichgewicht $(-2\pi, 0, 0)$ mit den periodischen Orbits verbinden. Es ist also $\chi(h_1(t)) = 0$ für alle $t \in (-\infty, M)$. Mit dieser Wahl gilt dann trivialerweise

$$\int_{\mathbb{R}} [\chi(h_1(s))w^i(s)]h_1'(s)ds > 0,$$

für alle $i = 1, 2, 3$. Also haben wir gezeigt, dass der Kern von \mathcal{L} eindimensional ist, falls dieses für den Kern der linearen Abbildung Θ zutrifft. Man beachte, dass Lösungen im Kern von Θ eine lineare, nichtautonome Differentialgleichung auf \mathbb{R} lösen. Benutzt man nun wie im Abschnitt 3.7 den Satz 3.22 von Palmer, so kann man zeigen, dass Θ ein Fredholmoperator vom Index Null ist mit einem eindimensionalen Kern ist.

Der adjungierte Operator \mathcal{L}^*

Elemente im Kern des adjungierten Operators \mathcal{L}^* erfüllen folgende Differentialgleichung

$$-\begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(h_1(t), 1)u(t) \\ v(t) \\ \alpha(\tilde{L}(w_t) - w(t)) + \partial_1 \tilde{g}(0, 0)w(t) + k(h_1(t))w(t) + \gamma \chi(h_1(t))w(t) \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist $\tilde{L}(\phi(\theta)) = (1/20)\phi(2\pi) + 1/5\phi(0) + 3/4\phi(-2\pi) = L(\phi(-\theta))$. Also ist weiterhin $\tilde{L}(\mathbf{1}) = 1$. Wir wollen zeigen, dass der Kern von \mathcal{L}^* endlichdimensional ist. Sei dazu $w(\cdot)$ eine Lösung der Gleichung

$$-\dot{w}(t) = \alpha(\tilde{L}(w_t) - w(t)) + \partial_1 \tilde{g}(0, 0)w(t) + k(h_1(t))w(t) + \gamma \chi(h_1(t))w(t). \quad (4.26)$$

Betrachte nun eine beliebige L^2 -Funktion $w(\cdot)$, die eine Lösung der Gleichung (4.26) ist. Wir können dann wieder den Satz 3.21 anwenden, um zu zeigen, dass es nur drei solcher linear unabhängigen Funktionen $w(\cdot)$ geben kann, die (4.26) lösen.

Außerdem haben wir gezeigt, dass der Operator Θ einen Fredholm Index null besitzt und der Kern eindimensional ist. Also wissen wir a priori, dass auch der Kern des adjungierten Operators Θ^* eindimensional ist. Kernelemente $(u(\cdot), v(\cdot))$ erfüllen die Gleichung

$$-\begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(h_1(t), 1)u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Also haben wir gezeigt, dass der Kern des Operators \mathcal{L}^* endlichdimensional ist.

Transversalität

Wir können nun zeigen, dass Hypothese „Transversalität“ erfüllt ist. Dazu müssen wir u.a. zeigen, dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ h'_1(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix} \notin \text{Bild}(\mathcal{L}) \quad (4.27)$$

gilt. Diesen Vektor erhält man, indem man die rechte Seite (4.20) an der Stelle $(h'_1, h'_2, 0)$ nach c ableitet. Es reicht wiederum zu zeigen, dass

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ h'_1(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -h'_2(\cdot) \\ h'_1(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \neq 0 \quad (4.28)$$

gilt, da wir nur diese Tatsache im Beweis benutzt haben. Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ Skalarprodukt. Es ist aber trivialerweise

$$\int_{\mathbb{R}} h'_1(s)h'_1(s)ds \neq 0$$

und damit die Behauptung bewiesen.

Der Operator \mathcal{L}_η

Schließlich wollen wir zeigen, dass der Operator $\mathcal{L}^\eta : H^{1,\eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \rightarrow L^{2,\eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, definiert durch

$$\mathcal{L}^\eta U := \mathcal{L}U$$

für alle $\eta \in (\eta_*, 0)$ und einem geeigneten $\eta_* < 0$ ein Fredholmoperator vom Index Null ist. Äquivalent dazu zeigen wir, dass der Operator $\mathcal{L}_\eta : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, definiert durch

$$(\mathcal{L}_\eta U(\cdot))(t) := \partial_t U(t) + \eta U(t) - L(t)(e^{\eta(\cdot)} U(t + \cdot)) \quad (4.29)$$

ein Fredholmoperator vom Index Null ist. Man beachte, dass (4.29) in jedem Fall ein Fredholmoperator für genügend kleine $|\eta| < |\eta_*|$ ist und nur der Index nicht klar ist.

Die Vorgehensweise verläuft in diesem Fall nicht analog zu dem entsprechenden Abschnitt in Kapitel 3.7 und wir gehen wie folgt vor: Zunächst einmal zeigen wir, dass der Kern des Operators \mathcal{L}_η eindimensional ist. Anschließend beweisen wir, dass der Fredholmindex Null ist.

Sei nun $U = (u, v, w)$ ein Kernelement der Gleichung $\mathcal{L}_\eta U = 0$. Die dritte Komponente dieser Gleichung hat dann die Form

$$0 = -\partial_t w(t) - \eta w(t) + \alpha(\tilde{L}(e^\eta w_t(\cdot)) - w(t)) + (\tilde{g}'(0, 0) + k(h_1(t)))w(t). \quad (4.30)$$

Wir wählen nun $|\eta_*|$ so klein, dass (4.29) für alle $\eta \in (\eta_*, 0)$ stets ein Fredholmoperator ist. Man kann nun wieder den Satz von Mallet-Paret 3.21 anwenden und wie im Fall $\eta = 0$ argumentieren, um zu zeigen, dass der Kern von (4.29) eindimensional ist. Dazu betrachtet man den Operator $\Theta_\eta : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, der durch

$$(\Theta_\eta(u, v))(t) := (\partial_t u(t), \partial_t v(t)) + (\eta u(t), \eta v(t)) - (v(t), f'(h_1(t), 1)u(t))$$

gegeben ist. Man beachte, dass $\Theta_0 = \Theta$ ist und ein Eigenvektor zum Eigenwert Null explizit durch $(e^{\eta t} h'_1(t), e^{\eta t} h'_2(t))$ gegeben ist. Analog zu den obigen Argumenten bezüglich Θ sieht man, dass der Kern von Θ_η für kleine η eindimensional ist. Außerdem ist Θ_η als kleine beschränkte Störung von Θ ein Fredholmoperator vom Index Null. Die restliche Argumentation ist wie im Fall $\eta = 0$.

Es bleibt zu zeigen, dass der Index i von L_η Null ist für alle $\eta \in (\eta_*, 0)$. Für dieses Argument benutzen wir einen weiteren Satz von Mallet-Paret [32]. Wir definieren dazu die „net number“ und betrachten dazu ein System der Form

$$\dot{X}(t) = \hat{L}(t)X_t \quad (4.31)$$

mit $\hat{L}(t) : C^0([-a, b], \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$ für alle t . Gelte weiterhin

$$\hat{L}(t)\varphi := \sum_{i=1}^N A_i(t)\varphi(r_i) \quad (4.32)$$

für jedes feste t mit $n \times n$ -Matrizen $A_i(t)$, die einen Limes für $|t| \rightarrow \infty$ besitzen. Hierbei ist $-a = r_1 \leq \dots \leq r_N = b$. Sei nun L^ρ eine Einparameterfamilie linearer Abbildungen, die für festes $\rho \in [0, 1]$ von der Form (4.32) mit t -unabhängigen Matrizen $A_i(t)$ sind. Sei weiterhin $\rho \rightarrow L^\rho \in L(C^0([-a, b], \mathbb{C}^N), \mathbb{C}^N)$ stetig mit hyperbolischen Abbildungen $L^1 = \hat{L}(+\infty)$, $L^0 := \hat{L}(-\infty)$ (d.h. es existieren in der Gleichung (4.31) keine Lösungen der Form $e^{sit}X$ für einen Vektor X , wenn $\hat{L}(t)$ durch $\hat{L}(\infty)$ bzw. $\hat{L}(-\infty)$ ersetzt wird). Existieren dann nur endlich viele $0 \leq \rho_j \leq 1$, für die L^{ρ_j} nicht hyperbolisch ist, so kann man die net number wie folgt definieren. Betrachte irgendein ρ_j und bezeichne mit $(\mu_{j,k})_k^{K_j}$ diejenigen Eigenwerte des Systems (4.31) mit L^{ρ_j} anstatt $\hat{L}(t)$, die sich auf der imaginären Achse befinden. Wir listen diese Eigenwerte mehrfach, in Abhängigkeit ihrer algebraischen Vielfachheit auf. Sei M_j die Summe ihrer Vielfachheiten. Für ρ nahe ρ_j , mit $\pm(\rho - \rho_j) > 0$ besitzt die Gleichung dann genau M_j (mit ihrer Vielfachheit gezählte) Eigenwerte nahe der imaginären Achse. Und zwar $M_j^{L^\pm}$ mit $\text{Re} < 0$ und $M_j^{R^\pm}$ mit $\text{Re} > 0$, wobei $M_j^{L^\pm} + M_j^{R^\pm} = M_j$. Die net number bei den Eigenwerten $\rho = \rho_j$ ist dann durch $M_j^{R^+} - M_j^{R^-}$ gegeben. Schließlich definieren wir die net number $\text{cross}(L^\rho)$ der Familie L^ρ durch

$$\text{cross}(L^\rho) = \sum_{j=1}^J (M_j^{R^+} - M_j^{R^-}).$$

Wir können nun folgenden Satz zitieren (siehe Theorem C, Seite 4 in [32]).

Satz 4.2 (Berechnung des Fredholmindex)

Betrachte das System (4.31) und sei L^ρ eine Einparameter Familie, die stetig von $\rho \in [0, 1]$ abhängt, die nur endlich viele Werte ρ_j besitzt, an denen L^{ρ_j} nicht hyperbolisch ist und $L^1 = \hat{L}(\infty)$, $L^0 = \hat{L}(-\infty)$ hyperbolisch sind. Dann ist $\Lambda : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ mit

$$(\Lambda X)(t) := \partial_t X(t) - \hat{L}(t)X_t,$$

ein Fredholmoperator vom Index

$$i = -\text{cross}(L^\rho).$$

In unserem Fall lässt sich die Determinante von $\hat{L}(t)\phi(\cdot) := L(t)(e^{\eta(\cdot)}\phi(\cdot)) - \eta\phi(0)$ in (4.29) für festes t durch

$$\det \Delta^t(\zeta) = (\eta - \zeta)^2(-f'(h_1(t), 1)) [\alpha(L(e^{\eta+\zeta(\cdot)})) - 1 + (\partial_1 \tilde{g}(0, 0) - \eta + k(h_1(t))) - \zeta]$$

berechnen. Wir zeigen nun, dass für geeignete Abbildung $k(\cdot)$ keine rein imaginären Nullstellen $\zeta = is$ der Abbildung $\det \Delta^t(\zeta)$ für festes $t \in \mathbb{R}$ existieren. Sei dazu $\tilde{k} \in \{k(h_1(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ und $\tilde{f} \in [f'(h_1(-\infty), 1), f'(h_1(\infty), 1)]$. Im betrachteten Fall mit $f(x, 1) = \sin(x+\pi)$ ist dann $\tilde{f} = f(h_1(-\infty)) = f(h_1(\infty)) = 0$. Also ist $\det \Delta^t(\zeta)$ für ein $\zeta = is$ und ein $t \in \mathbb{R}$ genau dann Null, wenn der zweite Faktor

$$\left[\alpha(L(e^{\eta+is(\cdot)}) - 1) + (\partial_1 \tilde{g}(0, 0) - \eta + \tilde{k}) - is \right] \quad (4.33)$$

verschwindet. Wir wollen nun zeigen, dass ein $\eta_0 < 0$ existiert, so dass (4.33) für alle $\eta \in (\eta_0, 0)$ und $s \in \mathbb{R}$ von null verschieden ist. Der Satz 4.2 besagt dann, dass der Fredholmindex, der in (4.29) definierten Abbildung \mathcal{L}_η , Null ist.

Wir betrachten nun den Fall kleiner \tilde{k} , die entweder positiv oder negativ sind. Betrachte die Gleichung

$$\hat{\Delta}(\zeta, \eta, \tilde{k}) := \alpha(L(e^{\eta+\zeta(\cdot)}) - 1) + (\partial_1 \tilde{g}(0, 0) - \eta + \tilde{k}) - \zeta = 0. \quad (4.34)$$

Dann gilt $\hat{\Delta}(is_N, 0, 0) = 0$ und $\partial_1 \hat{\Delta}(is_N, 0, 0) \neq 1$, da die Nullstellen $\pm is_N$ einfach sind. Also existiert nach dem impliziten Funktionensatz eine Abbildung $\zeta(\eta, \tilde{k})$ mit

$$\hat{\Delta}(\zeta(\eta, \tilde{k}), \eta, \tilde{k}) \equiv 0.$$

Ableiten dieser Gleichung liefert

$$\partial_{\eta, \tilde{k}} \zeta(0, 0)(\eta, \tilde{k}) = - \left(\partial_1 \hat{\Delta}(is_N, 0, 0) \right)^{-1} \left[(\alpha L((\bullet)e^{is_N \bullet}) - 1)\eta + \tilde{k} \right]. \quad (4.35)$$

Könnten wir zeigen, dass dieser Ausdruck für einen der beiden Fälle $\eta < 0$ und $\tilde{k} > 0$ oder $\eta < 0$ und $\tilde{k} < 0$ ein konstantes Vorzeichen hat, so hätten wir gezeigt, dass die Abbildung (4.34) für den Fall $|\eta| + |\tilde{k}| < \delta$ keine rein imaginären Nullstellen $\zeta = is$ besitzt, falls $\delta > 0$ klein genug ist.

Es stellt sich aber heraus, dass $\partial_\eta(\text{Re } \zeta)(0, 0) = 0$ ist. Bereits die zweite Ableitung $\partial_\eta^2(\text{Re } \zeta)(0, 0)$ ist ein komplizierter Ausdruck in $\sin(s_N \theta)$ und $\cos(s_N \theta)$ für $\theta \in \{-2\pi, 0, 2\pi\}$ und es ist nicht leicht zu entscheiden, ob dieser Term ungleich Null ist oder nicht, da die Nullstelle s_N nicht explizit bekannt ist.

Wir gehen daher anders vor. Man beachte, dass für festes ζ und \tilde{k} die Abbildung

$$\eta \rightarrow \hat{\Delta}(\zeta, \eta, \tilde{k}) \quad (4.36)$$

analytisch ist. Deswegen ist auch die Abbildung $\eta \rightarrow \zeta(\eta, \tilde{k})$ analytisch. Weiterhin wissen wir, dass für η klein genug keine rein imaginäre Nullstelle $\zeta = is_*$ nahe is_N von $\zeta \rightarrow \hat{\Delta}(\zeta, \eta, \tilde{k})$ existiert. Also ist der Realteil der komplexen Zahl $\zeta(\eta, \tilde{k})$ für kleine $|\eta| > 0$ von null verschieden. Da diese Abbildung aber (reell) analytisch bezüglich η ist, muss es ein minimales $\infty > l \geq 2$, $l \in \mathbb{N}$ geben, so dass $\partial_\eta^l(\text{Re } \zeta)(0, 0) \neq 0$ ist (der Index „l“ bezeichnet hierbei die l -te Ableitung).

Wir machen nun folgende Annahme an $k(\cdot)$.

- Falls $\partial_\eta^l(\operatorname{Re} \zeta)(0, 0) > 0$ und $\operatorname{Re}\left(-\left(\hat{\Delta}(is_N, 0, 0)\right)^{-1}\right) < 0$, so wollen wir annehmen, dass $-\delta/2 < k(\theta) < 0$ ist für alle $\theta \in (-2\pi, 0)$.
- Falls $\partial_\eta^l(\operatorname{Re} \zeta)(0, 0) > 0$ und $\operatorname{Re}\left(-\left(\hat{\Delta}(is_N, 0, 0)\right)^{-1}\right) > 0$, so wollen wir annehmen, dass $\delta/2 > k(\theta) > 0$ ist für alle $\theta \in (-2\pi, 0)$ ist.
- Falls $\partial_\eta^l(\operatorname{Re} \zeta)(0, 0) < 0$ und $\operatorname{Re}\left(-\left(\hat{\Delta}(is_N, 0, 0)\right)^{-1}\right) < 0$, so wollen wir annehmen, $\delta/2 > k(\theta) > 0$ ist für alle $\theta \in (-2\pi, 0)$
- Falls $\partial_\eta^l(\operatorname{Re} \zeta)(0, 0) < 0$ und $\operatorname{Re}\left(-\left(\hat{\Delta}(is_N, 0, 0)\right)^{-1}\right) > 0$, so wollen wir annehmen, $-\delta/2 < k(\theta) < 0$ ist für alle $\theta \in (-2\pi, 0)$.

Unter dieser Annahme besitzt also $\det \Delta^t(\zeta)$ für kein $t \in \mathbb{R}$ rein imaginäre Nullstellen und wir haben damit gezeigt, dass der Fredholmindex von $(\mathcal{L}_\eta U(\cdot))(t) = \partial_t U(t) + \eta U(t) - L(t)(e^{+\eta} U(t + \cdot))$ Null ist, falls $\eta \in (-\delta/2, 0)$. Gilt also die obere Annahmen und die Voraussetzungen $i) - v)$, so haben wir alle Hypothesen des Satzes 4.1 verifiziert.