

3.8 Diskussion anderer Phänomene und Limitationen

Diskussion des Verzweigungsdiagramms

In diesem Abschnitt wollen wir studieren, was in anderen Regionen des Verzweigungsdiagramms passieren kann, siehe Abbildung 3.13. Spezieller wollen wir diskutieren, welche Lösungen der Gleichung $\dot{x}(t) = f(x_t, \lambda, c)$ für Parameterwerte nahe der in Abbildung 3.13 eingezeichneten Kurve Het-I auftreten können. Liegt ein Parameterwert (λ, c) auf der Kurve Het-I und ist $\lambda > \lambda_0$, so existieren Lösungen der Gleichung $\dot{x}(t) = f(x_t, \lambda, c)$, die in Vorwärtszeit gegen eine periodische Lösung und in Rückwärtszeit mit exponentieller Rate gegen ein Gleichgewicht konvergieren: Dies ist die Aussage des Satzes 1.2 bzw. 3.2. Was passiert zunächst einmal für Parameterwerte (λ_*, c_*) auf der Kurve Het-I, für die $\lambda_* < \lambda_0$ gilt? Für (λ_*, c_*) existiert nach Konstruktion der Kurve ein Schnittpunkt u der instabilen Mannigfaltigkeit und der zentrumsstabilen Mannigfaltigkeit der Gleichgewichtslösung null. Das Gleichgewicht ist nun für den Parameterwert (λ_*, c_*) *stabil* auf der Zentrums-mannigfaltigkeit. Also konvergiert die durch den Schnittpunkt u induzierte Lösung der Gleichung $\dot{x}(t) = f(x_t, \lambda_*, c_*)$ in Vorwärtszeit gegen das Gleichgewicht. Also existiert für den Parameterwert (λ_*, c_*) eine homokline Lösung, die in Vorwärts- und Rückwärtszeit gegen ein *hyperbolisches* Gleichgewicht konvergiert. Nach Satz B der Arbeit [33] existieren nun zumindest für Gleichungen mit diskretem Forward-Backward Delay periodische Lösungen großer Amplitude, die für gewisse Parameterwerte $(\lambda, c) \approx (\lambda_*, c_*)$ mit einem beliebigen (λ_*, c_*) auf der Kurve Het-I mit $\lambda_* < \lambda_0$ existieren und in einer kleinen Tubenumgebung der ursprünglichen homoklinen Lösung liegen (die für (λ_0, c_0) auftritt). Die Existenz dieser periodischen Lösungen ist im Verzweigungsdiagramm 3.13 mit „Per“ gekennzeichnet.

Wir betrachten nun den Zweig der Kurve Het-I, der in der rechten Halbebene des Parameterraumes liegt und betrachten einen beliebigen Punkt (λ^*, c^*) auf der Kurve Het-I mit $\lambda^* > \lambda_0$. Für diesen Punkt existiert dann eine Lösung der Gleichung $\dot{x}(t) = f(x_t, \lambda^*, c^*)$, die in Rückwärtszeit gegen ein Gleichgewicht und in Vorwärtszeit gegen eine periodische Lösung konvergiert. Die instabile Mannigfaltigkeit $W^{u,loc}(0)$ und zentrumsstabile Mannigfaltigkeit $W^{cs,+}(0)$ schneiden sich entlang dieser Lösung und die Kodimension der Summe der Tangentialräume ist eins (siehe Lemma 3.20). Allerdings erwarten wir, dass sich die zentrumsstabile Mannigfaltigkeit und die *zentrumsinstabile* Mannigfaltigkeit $W^{cu,+}(0)$ für den Parameterwert $(\lambda, c) = (\lambda^*, c^*)$ *transversal* schneiden. Kreuzen wir also die Kurve Het-I in dem Punkt (λ^*, c^*) , so erwarten wir für Parameterwerte $(\lambda, c) \approx (\lambda^*, c^*)$, die nicht auf der Kurve Het-I liegen, die Existenz einer global definierten Lösung x der Gleichung $\dot{x}(t) = f(x_t, \lambda, c)$, die ebenfalls in Vorwärtszeit gegen eine periodische Lösung und in Rückwärtszeit gegen das Gleichgewicht konvergiert. Die Existenz dieser Lösungen x haben wir im Verzweigungsdiagramm 3.13 mit „Het“ gekennzeichnet. Allerdings nähert sich nun die Lösung x dem Gleichgewicht Null in Rückwärtszeit generisch entlang der Zentrumsrichtung, siehe Abbildung 3.14. Dies ist möglich, da die Gleichgewichtslösung für diese Parameterwerte instabil ist. Lediglich die Rate, mit der die Lösung x in Rückwärtszeit gegen null konvergiert, hat sich also verringert. Vernachlässigen wir allerdings die Abklingraten, so können wir erwarten, dass die Lösungen h^σ aus Satz 3.1 *strukturell stabil* sind: Kleine Störungen der Parameter resultiert weiterhin in Lösungen x der gestörten Gleichung, die das gleiche asymptotische Verhalten wie die ursprüngliche Lösung h^σ aufweisen.

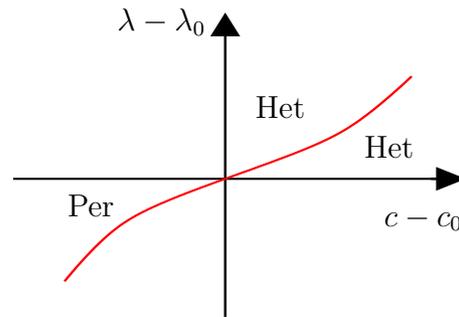


Abbildung 3.13: Das Verzweigungsdiagramm mit eingezeichneter Kurve Het-I, siehe auch Abbildung 1.7

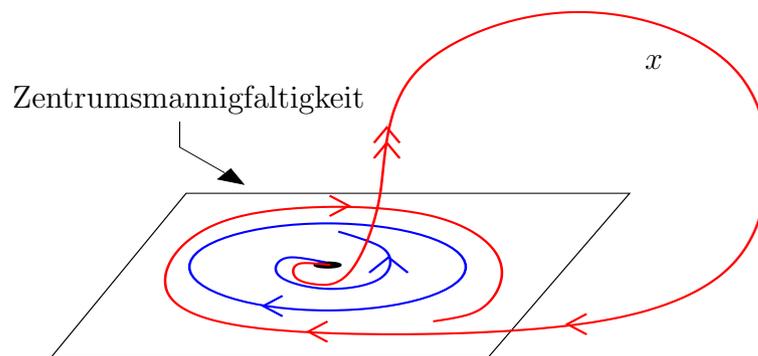


Abbildung 3.14: Dargestellt ist die Lösung x der Gleichung $\dot{x}(t) = f(x_t, \lambda, c)$ für einen Parameterwert (λ, c) im Bereich „Het“ des Verzweigungsdiagramms 3.13.

Existieren Shilnikov-Phänomene?

Wir vermuten, dass analog zum Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichung auch periodische Lösungen großer Amplitude der Gleichung $\dot{x}(t) = f(x_t, \lambda, c)$ nahe der homoklinen Lösung $h(\cdot)$ auftreten können. Verzweigungen dieser Art für gewöhnliche Differentialgleichungen $\dot{x} = g(x, \alpha)$ und $x \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}$, in denen eine homokline Lösung $h(t)$ gegen ein Gleichgewicht h_∞ konvergiert, wurden bereits von Shilnikov studiert, siehe dazu etwa das exzellente Buch von Kuznetszov [25]. Die Komplexität und Anzahl der hierbei auftretenden, periodischen Lösungen hängt dabei stark von der Divergenz des Gleichgewichtes ab: ausschlaggebend sind in dem Shilnikov-Szenario diejenigen Eigenwerte, deren Realteile der imaginären Achse am nächsten liegen. Man betrachte etwa die drei parameterabhängigen Eigenwerte $\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha), \lambda_3(\alpha)$ der Linearisierung $Dg(h_\infty, \alpha)$ im Gleichgewicht h_∞ , so dass $\lambda_1(0) > 0$ und $\text{Re}\lambda_2(0) = \text{Re}\lambda_3(0)$ gilt. Sei weiterhin $\lambda_1(0) + \text{Re}(\lambda_{2/3}(0)) > 0$, d.h. die komplexen Eigenwerte $\lambda_{2/3}(0)$ liegen näher an der imaginären Achse als $\lambda_1(0)$. Unter diesen Voraussetzungen zeigte Shilnikov die Existenz *unendlich* vieler periodischer Lösungen in einer Tubenumgebung des homoklinen Orbits unter Variation des Parameters α .

Wir bemerken, dass die wesentlichen Annahmen des Shilnikov-Szenarios auch bei uns erfüllt sind: man kann zeigen, dass für $\tilde{\lambda} < 0$ und einer geeigneten Funktion $c(\tilde{\lambda})$ eine homokline Lösung $h_{\tilde{\lambda}}(\cdot)$ der Gleichung $\dot{x}(t) = f(x_t, \tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda}))$ existiert. Man beachte, dass das Gleichgewicht $h_\infty = 0$ *stabil* bezüglich der Dynamik auf der parameterabhängigen Zentrumsmannigfaltigkeit $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\tilde{\lambda}, c(\tilde{\lambda})}$ der Null ist. Für ein festes $\tilde{\lambda} > 0$, das genügend nahe null ist, sind nun die „Hopfeigenwerte“ diejenigen Eigenwerte, die der imaginären Achse am nächsten sind. Man beachte, dass der Realteil dieser Eigenwerte nun negativ ist. Also würden wir analog zum Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen die Existenz unendlich vieler periodischer Lösungen großer Amplitude in der Nähe des homoklinen Orbits erwarten. Allerdings ist nicht klar, wie man die Existenz dieser unendlich vielen oszillierenden Lösungen beweisen soll.

Limitation: Delay-Differential Gleichungen

Offensichtlich sind der Fall reiner Delay-Gleichungen

$$\dot{x}(t) = f(x_t),$$

$x_t \in C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N)$, mit $a, N > 0$ ein (wichtiger) Spezialfall von Forward-Backward-Delay Gleichungen. Leider gelten die Theoreme 3.1 und 3.2 in diesem Fall im allgemeinen nicht. Der Grund hierfür liegt in einem wesentlichen Unterschied der linearen Lösungsoperatoren $T_s(t), T_u(t)$ für $t \geq 0$ bzw. $t \leq 0$ der linearen Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\phi}(t, \cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\phi(t, \cdot) \\ \partial_\theta \phi(t, \cdot) \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \phi(t, \cdot) \end{pmatrix}$$

mit einer beschränkten linearen Abbildung $L \in L(C^0([-a, 0], \mathbb{R}^N), \mathbb{R}^N)$, die einen hyperbolischen Operator \mathcal{A} induziert. Die Lösungsoperatoren $T_s(t), T_u(t)$ sind auf abgeschlossenen Unterräumen von $Y = \mathbb{R}^N \times L^2([-a, 0], \mathbb{R}^N)$ definiert und nach Konstruktion gilt für ein $U = (\xi, \phi) \in Y$ gerade $T_s(t)U = (\xi(t), x_t)$, wobei $x_s = \phi$ und $x(t)$ die Lösung der Gleichung $\dot{x}(t) = Lx_t$ ist. Ist allerdings $U \in \tilde{Y}$, also $\phi \in H^1([-a, 0], \mathbb{R}^N)$, so ist in diesem Fall nicht notwendigerweise $x(\cdot) \in H_{loc}^1([-a, \infty), \mathbb{R}^N)$, da die Lösung x an der Stelle 0 nicht einmal stetig sein muss. Im Gegensatz dazu folgt im Fall einer Forward-Backward-Delay Gleichung mit $x_t \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$ und $a, b > 0$ aus der Annahme

$$U = (\xi, \phi) \in \tilde{Y} = \mathbb{R}^N \times H^1([-a, b], \mathbb{R}^N)$$

die Tatsache

$$x \in H_{loc}^1([0, \infty), \mathbb{R}^N), \quad x_0 = \phi$$

für die Lösung x von $\dot{x}(t) = Lx_t$. Also gilt $x(\cdot) \in H_{loc}^1([0, \infty), \mathbb{R}^N)$. Insbesondere gilt im Fall einer reinen Delay Gleichung also im allgemeinen *nicht*

$$T_s(t)U \in \tilde{Y} \text{ und } T_u(t)U \in \tilde{Y}.$$

Dies ist auch der Grund für die Einführung des abstrakten Sun-Star-Settings im Fall reiner Delay-Gleichungen, siehe das Lehrbuch [28] für mehr Details. Als Konsequenz hiervon können wir nicht die Existenz invarianter Mannigfaltigkeiten in der Nähe des homoklinen Orbits gewährleisten und unsere Beweisstrategie bricht im Fall von Delay-Gleichungen zusammen.

Wir bemerken, dass wir als einzigen Spezialfall Delay Gleichungen $\dot{x}(t) = f(x_t)$ behandeln können, falls $f \in C^2(L^2([-a, b], \mathbb{R}^N), \mathbb{R}^N)$ (siehe die Bemerkung nach Gleichung (3.95)). Diese Tatsache ist allerdings eine große Einschränkung und verbietet etwa alle Delaygleichungen mit nichttrivialen diskreten Delays, wie etwa $f(\phi) = \phi(-1)$. Allerdings sind Gleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = \int_{-1}^0 x(t + \theta) d\theta + g(x(t))$$

mit einer nichtlinearen Funktion g behandelbar.