

## 3.6 Lösungen, die in Vorwärts- und Rückwärtszeit gegen eine periodische Lösung konvergieren

Wir suchen nun Lösungen der abstrakten Gleichung

$$\dot{U}(t) = \mathcal{F}(U(t), \tilde{\lambda}, c), \quad (3.150)$$

die für Parameterwerte  $(\tilde{\lambda}, c) \neq (0, c_0)$  in Vorwärts- und Rückwärtszeit gegen die periodischen Lösungen  $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}$  konvergieren. Analog zum vorigen Kapitel liegt es nahe, die gesuchten Lösungen mit Hilfe eines Schnittpunktes zweier geeigneter Mannigfaltigkeiten  $W^{cs,+}(0)$  und  $W^{u,loc}(\Gamma(0))$  zu konstruieren. Punkte in der (noch nicht konstruierten) Mannigfaltigkeit  $W^{u,loc}(\Gamma(0)) = W_{\tilde{\lambda}, c}^{u,loc}(\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(0))$  sollten dabei Anlass zu einer Lösung  $U(\cdot)$  der Gestalt

$$U(t) = \Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) + V(t)$$

geben, wobei  $V(\cdot)$  eine Funktion ist, die für  $t \rightarrow -\infty$  exponentiell gegen null konvergiert. Versucht man allerdings, diese Mannigfaltigkeit analog zu der stark-instabilen Blätterung  $W^{u,loc}(\Lambda)$  am Anfang des Kapitels 3.5.2 zu konstruieren, so stößt man auf folgendes Problem: Für die stetige Abhängigkeit der Mannigfaltigkeit  $W^{u,loc}(\Lambda) = W_{\tilde{\lambda}, c}^{u,loc}(\Lambda_{\tilde{\lambda}, c})$  von dem Parameter  $c$  war es wichtig, dass die Abbildung  $c \mapsto \Lambda_{\tilde{\lambda}, c}(\cdot)$  mit Werten in dem Raum der beschränkten, stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}_-$  stetig ist. Dies ist für den Fall einer  $c$ -abhängigen Familie periodischer Lösungen nie der Fall, wenn sich mit dem Parameter  $c$  auch die Periode ändert.

Die Strategie ist also die folgende: Anstatt mit der ursprünglichen Familie periodischer Lösungen zu arbeiten, skalieren wir diese auf die feste Periode  $T = 1$ . Skalierte Lösungen der ursprünglichen Gleichung  $\dot{x}(t) = f(x_t, \tilde{\lambda}, c)$  lösen allerdings eine andere, skalierte Gleichung  $\dot{z}(t) = f^{sk}(z_t, \tilde{\lambda}, c)$ , in der nun die Parameterabhängigkeit ebenfalls im Argument der Abbildung  $z_t(\cdot)$  auftaucht. Die Idee ist es dann, mit der skalierten Gleichung zu arbeiten und die gesuchten Lösungen für diese Gleichung zu konstruieren.

Allerdings müssen wir dazu folgende Fragen klären:

- Wie übertragen sich die in Abschnitt 3.2 formulierten Hypothesen „Eindeutige Fortsetzungs-Eigenschaft“ und „Transversalität“ auf die skalierte Gleichung?
- Wie gehen wir mit der Tatsache um, dass die Parameterabhängigkeit in der skalierten Gleichung ebenfalls im „Delay“ auftaucht?

Wir beginnen im nächsten Abschnitt mit der Definition der skalierten Gleichung. Dannach kümmern wir uns um die Beantwortung der Frage a). In Abschnitt 3.6.2 konstruieren wir dann die für den Beweis benötigten invarianten Mannigfaltigkeiten. Da diese parameterabhängig sind, müssen wir uns bei der Konstruktion dieser Mannigfaltigkeiten mit der Frage beschäftigen, welche Auswirkungen die nun auftretende Parameterabhängigkeit im Delay des Vektorfeldes für die Existenz der Mannigfaltigkeiten haben.

### 3.6.1 Die skalierte Gleichung

Für die Definition der skalierten Gleichung benötigen wir eine genauere Kenntnis der Periode der Lösungen  $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(\cdot)$ , mit der wir uns im nächsten Abschnitt beschäftigen werden.

## Abhängigkeit der Periode von den Parametern

Wir gehen nun zu einem anderen „Parameter“  $\varepsilon$  über (wobei man sich  $|\varepsilon|$  als Amplitude der periodischen Lösungen vorstellen kann), so dass die Amplitude der periodischen Lösungen und die Periodenfunktion  $T = T(\varepsilon, c)$  differenzierbar von  $\varepsilon$  und  $c$  abhängen.

Nach Theorem 1.1, Seite 505 in [28] existiert nun eine stetig differenzierbare Abbildung

$$T(\cdot, \cdot) : B_\zeta(0) \times B_\zeta(c_0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\varepsilon, c) \mapsto T(\varepsilon, c), \quad (3.151)$$

die  $T(0, c_0) = 2\pi/\omega$  erfüllt und  $B_\zeta(0)$  eine Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius  $\zeta$  für ein  $\zeta > 0$  bezeichnet. Genauer hängt die Abbildung  $T(\varepsilon, c)$  sogar nur von  $\varepsilon^2$  ab, d.h. es ist  $\partial_\varepsilon T(\varepsilon, c_0)|_{\varepsilon=0} = 0$ . Außerdem existiert eine differenzierbare Abbildung

$$\tilde{\lambda}(\cdot, \cdot) : B_\zeta(0) \times B_\zeta(c_0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\varepsilon, c) \mapsto \tilde{\lambda}(\varepsilon, c) \quad (3.152)$$

mit  $\tilde{\lambda}(0, c_0) = 0$ ,  $\partial_\varepsilon \tilde{\lambda}(\varepsilon, c_0)|_{\varepsilon=0} = 0$  und  $\tilde{\lambda}(\varepsilon, c) > 0$  für  $\varepsilon > 0$ . Wir halten fest, dass es genau diese Funktion ist, die in der Formulierung von Satz 3.1 auftritt und die ebenfalls mit  $\tilde{\lambda}(\cdot, \cdot)$  bezeichnet wurde.

Weiterhin gibt es nahe null genau für  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\varepsilon, c) > 0$  eine (nichttriviale) periodische Funktion  $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(\cdot) = \Gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c}(\cdot)$  der abstrakten Gleichung (3.150) für die Parameterwerte  $(\tilde{\lambda}, c) = (\tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c)$ , wobei wir erinnern, dass

$$\Gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c}(t) \\ \gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c}(t + \cdot) \end{pmatrix}$$

gilt. Diese Abbildung besitzt die Entwicklung

$$\Gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c}(t) = \varepsilon A_H e^{i\omega t} + \mathcal{O}(\varepsilon^2 + |c - c_0|\varepsilon),$$

und hier  $\varepsilon > 0$  ist (vergleiche mit (3.81)). Außerdem hat die Funktion  $\Gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c}(\cdot)$  die Periode  $T(\varepsilon, c)$ .

## Definition der skalierten Gleichung

Wir definieren nun die skalierte Familie  $\Gamma_{\varepsilon, c}^{sk}(\cdot)$  periodischer Lösungen durch

$$\Gamma_{\varepsilon, c}^{sk}(t) := \begin{pmatrix} \gamma_{\varepsilon, c}^{sk}(t) \\ \gamma_{\varepsilon, c}^{sk}(t + \cdot) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c}(t \cdot T(\varepsilon, c)) \\ \gamma_{\tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c}(T(\varepsilon, c)(t + \cdot)) \end{pmatrix}.$$

Bevor wir die resultierende Mixed-Type Gleichung für  $\gamma^{sk}(t) = \gamma_{\varepsilon, c}^{sk}(t)$  diskutieren, sammeln wir einige Eigenschaften dieser Funktion.

### Lemma 3.28

Jedes  $\Gamma_{\varepsilon, c}^{sk}(\cdot)$  besitzt die Periode 1 und die Abbildung  $c \mapsto \Gamma_{\varepsilon, c}(\cdot) \in BC^0(\mathbb{R}, X)$  ist stetig differenzierbar.

### Beweis

Zunächst einmal ist sowohl die Abbildung  $c \mapsto \gamma_{\tilde{\lambda}, c}(\cdot)$  als Abbildung von  $(-\delta + c_0, c_0 + \delta)$  nach  $BC^0([-1, 1], \mathbb{R}^N)$  als auch die Abbildung  $t \mapsto \gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t)$  stetig differenzierbar. Daraus folgern wir, dass ebenfalls die Abbildung  $c \mapsto \left[ t \mapsto \gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t \cdot T(\tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c)) \right]$  als Abbildung

von  $(-\delta + c_0, c_0 + \delta)$  nach  $BC^0([-1, 1], \mathbb{R}^N)$  stetig differenzierbar ist. Diese Abbildung ist aber periodisch, d.h. die Abbildung

$$\begin{aligned} (-\delta + c_0, c_0 + \delta) &\rightarrow BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \\ c &\mapsto \left[ t \mapsto \gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t \cdot T(\tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c)) \right] \end{aligned}$$

ist ebenfalls stetig differenzierbar. Da nach Annahme  $\gamma_{\tilde{\lambda}, c}(\cdot)$  glatt genug ist (also mindestens zweimal stetig differenzierbar), ist  $(\gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t), \gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t + \cdot)) \in X$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und die Abbildung

$$\begin{aligned} (-\delta + c_0, c_0 + \delta) &\rightarrow BC^0(\mathbb{R}, X) \\ c &\mapsto \left[ t \mapsto \Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t \cdot T(\tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c)) \right] \end{aligned}$$

ist stetig differenzierbar. □

Die Funktion  $t \mapsto \gamma_{\varepsilon, c}^{sk}(t) := \gamma_{\varepsilon, c}(T(\varepsilon, c) \cdot t)$  löst nun die skalierte Gleichung

$$\dot{z}(t) = f^{sk}(z_t, \varepsilon, c), \quad (3.153)$$

mit  $z_t \in H^1([-a/T(0, c_0) - 1, (b/T(0, c_0)) + 1], \mathbb{R}^N)$  und

$$f^{sk}(\phi(\bullet), \varepsilon, c) = T(\varepsilon, c) \cdot f(\phi(\bullet/T(\varepsilon, c)), \tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c) \quad (3.154)$$

gilt. Ist dann  $(\varepsilon, c)$  genügend klein, so ist  $f^{sk}$  wohldefiniert, das heisst es gilt  $\theta/T(\varepsilon, c) \in [-a/T(0, c_0) - 1, (b/T(0, c_0)) + 1]$  für  $\theta \in [-a, b]$ .

Zur Veranschaulichung betrachten wir die Beispielfunktion  $f(\cdot) : H^1([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$f(\varphi, \varepsilon, c) = \varphi(-1) + \varphi(1) + \int_{-1}^1 K(\theta, \varepsilon, c) \varphi(\theta) d\theta.$$

für eine Funktion  $K(\cdot, \varepsilon, c) : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . In diesem Fall nimmt  $f^{sk}$  folgende Form an:

$$f^{sk}(\varphi, \varepsilon, c) = T(\varepsilon, c) \left( \varphi(-1/T(\varepsilon, c)) + \varphi(1/T(\varepsilon, c)) + \int_{-1}^1 K(\theta, \varepsilon, c) \varphi(\theta/T(\varepsilon, c)) d\theta \right)$$

Die Funktion  $\varphi(\cdot)$  muss also auf dem Intervall  $[-1/T(\varepsilon, c), 1/T(\varepsilon, c)]$  bekannt sein. Für kleine  $(\varepsilon, c) \approx (0, c_0)$  gilt aber  $[-1/T(\varepsilon, c), 1/T(\varepsilon, c)] \subset [-1/T(0, c_0) - 1, 1/T(0, c_0) + 1]$  und damit ist  $f^{sk}(\cdot, \varepsilon, c)$  für  $(\varepsilon, c) \approx (0, c_0)$  wohldefiniert.

Außerdem bemerken wir, dass die Abbildung  $c \mapsto f^{sk}(\varphi, \varepsilon, c)$  differenzierbar ist, wenn die Funktion  $\varphi$  glatt genug ist (also mindestens in  $H^2$  liegt). Wir überprüfen nun im nächsten Abschnitt, wie sich die Hypothesen „Eindeutige-Fortsetzungseigenschaft“ (EFE) und „Transversalität“ auf die skalierte Gleichung übertragen.

### Die Hypothesen „EFE“ und „Transversalität“ für die skalierte Gleichung

Zunächst einmal bemerken wir, dass die skalierte Gleichung (3.153) die homokline Lösung  $h^{sk}(t) := h(t \cdot T(0, c_0))$  für die Parameterwerte  $(\varepsilon, c) = (0, c_0)$  besitzt. Die zu (3.9) äquivalente lineare Abbildung  $\mathcal{L}_{\varepsilon, c}^{sk}$  nimmt dann die Form

$$(\mathcal{L}_{\varepsilon, c}^{sk} w(\cdot))(t) := \partial_t w(t) - D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, \varepsilon, c) w_t \quad (3.155)$$

an. Ist nun  $w \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  ein Kernelement von  $\mathcal{L}_{0,c_0}^{sk}$ , so definiert  $z(t) := w(t/T(0, c_0))$  eine Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t z(t) &= D_1 f(h^{sk}(t/T(0, c_0) + \bullet/T(0, c_0)), \tilde{\lambda}, c) [w(t/T(0, c_0) + \bullet/T(0, c_0))] \\ &= D_1 f(h_t, 0, c_0) z_t \\ &= \int_{-a}^b p(h_t(\theta), \theta, 0, c_0) \varphi(\theta) d\theta + \sum_{k=1}^m A_k(h_t(r_k), 0, c_0) \varphi(r_k), \end{aligned}$$

siehe (3.66), wobei wir diemal genauer  $A_k(h_t(r_k), 0, c)$  anstatt  $A_k(t, 0, c)$  und  $p(h_t(\theta), \theta, 0, c)$  anstatt  $p(t, \theta, 0, c)$  geschrieben haben. Für letzte Gleichung ist aber nach Annahme Hypothese 4 erfüllt und diese gilt deswegen auch für den skalierten Operator  $\mathcal{L}_{0,c_0}^{sk} : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ .

Wir betrachten nun die adjungierte Gleichung  $\mathcal{L}_{0,c_0}^* v = 0$ , also

$$\partial_t v(t) = - \int_{-a}^b p^*(h_{t-\theta}(\theta), \theta, 0, c_0) v(t - \theta) d\theta - \sum_{k=1}^m A_k^*(h_{t-r_k}(r_k), 0, c_0) v(t - r_k). \quad (3.156)$$

Sei nun  $v(t)$  eine Lösung dieser Gleichung auf ganz  $\mathbb{R}$  und setze  $z(t) := v(t \cdot T(0, c_0))$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial_t z(t) &= - \int_{-a}^b p^*(h(t \cdot T(0, c_0)), \theta, 0, c_0) v(t \cdot T(0, c_0) - \theta) d\theta \\ &\quad - \sum_{k=1}^m A_k^*(h(t \cdot T(0, c_0)), 0, c_0) v(t \cdot T(0, c_0) - r_k) \end{aligned} \quad (3.157)$$

also

$$\begin{aligned} \partial_t z(t) &= - \int_{-a}^b p^*(h^{sk}(t), \theta, 0, c_0) z(t - (\theta/T(0, c_0))) d\theta \\ &\quad - \sum_{k=1}^m A_k^*(h^{sk}(t), 0, c_0) z(t - (r_k/T(0, c_0))) \end{aligned} \quad (3.158)$$

und dies ist die adjungierte skalierte Gleichung. Man beachte nämlich, dass man die letzte Gleichung auch erhält, wenn man den adjungierten Operator von  $\mathcal{L}_{0,c_0}^{sk}$  in (3.155) für  $\varepsilon = 0$  berechnet. Wir haben also gezeigt, dass die (bis auf ein skalares Vielfaches) eindeutige beschränkte Lösung  $\rho(\cdot)$  der adjungierten Gleichung (3.156), die in Vorwärtszeit exponentiell fällt, via  $\rho^{sk}(t) := \rho(t \cdot T(0, c_0))$  eine Lösung der skalierten adjungierten Gleichung (3.157) definiert, die die gleichen asymptotischen Eigenschaften wie  $\rho(\cdot)$  besitzt. Um die Dimension des Kerns der Abbildung  $\mathcal{L}_{sk}^\eta : H^{1,\eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  mit  $\mathcal{L}_{sk}^\eta z := \mathcal{L}_{0,c_0}^{sk} z$  zu bestimmen (man beachte, dass diese Abbildung ein Fredholmoperator vom Index Null ist, weswegen wir die Kodimension des Bildes nicht mehr zu bestimmen brauchen, sobald wir die Dimension des Kerns kennen), betrachtet man wie am Anfang des Abschnitts 3.5 den „translatierten“ Operator  $\mathcal{L}_\eta^{trans}$  (siehe auch Gleichung (3.121)), der in unserem Fall die Gestalt

$$(\mathcal{L}_\eta^{trans} \tilde{w})(t) := \dot{\tilde{w}}(t) + \eta \tilde{w}(t) - D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0)(e^{\eta \cdot} \tilde{w}_t(\cdot)) \quad (3.159)$$

annimmt. Eine kurze Rechnung zeigt, dass der Kern dieses Operators die gleiche Dimension wie Kern( $\mathcal{L}_{sk}^\eta$ ) besitzt und auch die Kodimensionen der Bilder der Operatoren  $\mathcal{L}_{sk}^\eta$  und  $\mathcal{L}_\eta^{trans}$  übereinstimmen. Eine zu (3.156), (3.157), (3.157) analoge Rechnung zeigt nun, dass die Dimension des Kerns von  $\mathcal{L}_\eta^{trans}$  und  $\mathcal{L}_{0,c_0}^\eta$  aus Hypothese „Transversalität“ übereinstimmt, also eindimensional ist. Zusammengefasst gilt also:

*Die Hypothese „Transversalität“ für die skalierte Gleichung*

Ist die Hypothese „Transversalität“ für die unskalierte Gleichung (3.4) erfüllt, so existiert ein  $\eta_1 > 0$ , so dass der Operator  $\mathcal{L}_{sk}^\eta : H^{1,\eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \rightarrow L^{2,\eta}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$  für alle  $\eta \in (0, \eta_1)$  ein Fredholmoperator vom Index Null mit eindimensionalen Kern ist.

Wir haben also alle in der Hypothese „Transversalität“ geforderten Bedingungen bis auf das Nichtverschwinden des Melnikovintegrals (3.13) für die skalierte Gleichung verifiziert. Dies werden wir in Lemma 3.29 tun.

### 3.6.2 Invariante Mannigfaltigkeiten für die skalierte Gleichung

Wir betrachten von nun an die skalierte Gleichung

$$\dot{z}(t) = f^{sk}(z_t, \varepsilon, c), \quad (3.160)$$

definiert in (3.154). Die abstrakte Gleichung nimmt dann die Gestalt

$$\dot{U}(t) = \mathcal{F}^{sk}(U(t), \varepsilon, c) \quad (3.161)$$

an, wobei  $(\xi, \phi) \in X = \{(\xi, \phi) \in \mathbb{R}^N \times H^1([(-a/T(0, c_0)) - 1, (b/T(0, c_0)) + 1], \mathbb{R}^N) : \phi(0) = \xi\}$

$$\mathcal{F}^{sk}((\xi, \phi), \varepsilon, c) := \begin{pmatrix} f^{sk}(\phi, \varepsilon, c) \\ \partial_\theta \phi \end{pmatrix}$$

und  $\mathcal{F}^{sk}(\cdot, \varepsilon, c) : X \rightarrow Y$  nach Annahme eine dreimal stetig differenzierbare Funktion ist (da  $f(\cdot, \lambda, c) : H^1([-a, b], \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}^N$  dreimal stetig differenzierbar ist). Die Gleichung (3.161) besitzt für die Parameterwerte  $(\varepsilon, c) = (0, c_0)$  eine homokline Lösung  $H^{sk}(t) = H(T(0, c_0) \cdot t)$  und eine Familie  $\Gamma_{\varepsilon, c}^{sk}$  periodischer Lösungen, die sich nahe dem Gleichgewicht Null von (3.161) befinden.

#### Notation

Alle in diesem Abschnitt konstruierten Mannigfaltigkeiten beziehen sich nun auf die skalierte abstrakte Gleichung (3.161). Wir verzichten daher in der Notation aller Mannigfaltigkeiten auf einen Index, der auf die skalierte Gleichung verweist. Außerdem unterdrücken wir die Parameterabhängigkeit der Mannigfaltigkeit, wenn diese für die Argumentation nicht unbedingt notwendig ist.

Wir zeigen nun die Existenz einer zentrumsstabilen Mannigfaltigkeit  $W^{cs,+}(0) \subset \hat{Y}$ , die zweimal stetig differenzierbar von den Parametern  $c$  und  $\varepsilon$  abhängt. Hierbei haben wir

$$\hat{Y} := \mathbb{R}^N \times H^3([(-a/T(0, c_0)) - 1, (b/T(0, c_0)) + 1], \mathbb{R}^N)$$

gesetzt. Für die Formulierung des nächsten Theorems benötigen wir die lineare Gleichung

$$\dot{V}(t) = \mathcal{A}^{sk}(t)V(t) \quad (3.162)$$

mit

$$\mathcal{A}^{sk}(t) \begin{pmatrix} \xi \\ \phi(\cdot) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) \phi(\cdot) \\ \partial_\theta \phi(\cdot) \end{pmatrix}$$

für  $(\xi, \phi(\cdot)) \in X$  und  $\mathcal{A}(t) : X \rightarrow Y$ . Dann existiert wegen Satz 3.14 eine Dichotomie auf  $\mathbb{R}_+$  mit Lösungsoperatoren  $\Phi_+^{cs}(t, s) : Y \rightarrow Y$  und  $\Phi_+^u(s, t) : Y \rightarrow Y$ , die folgende Abschätzung erfüllen:

$$|\Phi_+^{cs}(t, s)V|_Y \leq M e^{\sigma|t-s|} |V|_Y \quad |\Phi_+^u(s, t)V|_Y \leq M e^{-\beta|t-s|} |V|_Y \quad (3.163)$$

für  $\beta > 0$ ,  $V \in Y$  und  $t \geq s \geq 0$ . Außerdem kann  $\sigma > 0$  beliebig klein gewählt werden, wobei  $M = M(\sigma) \rightarrow \infty$  für  $\sigma \rightarrow 0$  eintreten kann (da  $h^{sk}(\cdot)$  in Vorwärtszeit *nicht* exponentiell gegen Null konvergiert). Von nun an setzen wir  $E_+^{cs}(0) := \text{Bild}(\Phi_+^{cs}(0, 0)|_Y)$  und  $\hat{E}_+^{cs}(0) := E_+^{cs}(0) \cap \hat{Y}$ ; dann ist  $\hat{E}_+^{cs}(0)$  ein bezüglich der  $\hat{Y}$ -Norm abgeschlossener Unterraum. Außerdem setzen wir  $E_+^u(0) := \text{Bild}(\Phi_+^u(0, 0)|_Y)$  und  $\hat{E}_+^u(0) := E_+^u(0) \cap \hat{Y}$ . Auch dieser ist bezüglich der  $\hat{Y}$ -Norm abgeschlossen.

### Satz 3.19

Die abstrakte Gleichung (3.161) besitzt nahe  $H^{sk}(0)$  eine lokal invariante  $C^2$ -Mannigfaltigkeit  $W_{\varepsilon, c}^{cs, +}(0) = W^{cs, +}(0) \subset \hat{Y}$ , die folgende Eigenschaften besitzt:

- Die Mannigfaltigkeit ist bei  $H^{sk}(0) \in W_{0, c_0}^{cs, +}(0)$  tangential an  $\hat{E}_+^{cs}(0)$ . Weiterhin gilt  $W_{\varepsilon, c}^{cs, +}(0) = \text{Graph}(\Psi_{\varepsilon, c}(\cdot)) + H^{sk}(0)$  für eine Funktion  $\Psi_{\varepsilon, c}(\cdot) : \hat{E}_+^{cs}(0) \rightarrow \hat{E}_+^u(0)$  und  $(c, \lambda) \mapsto \Psi_{\lambda, c}(U) \in \hat{Y}$  ist für ein festes  $U \in Y$  zweimal stetig differenzierbar.
- $W^{cs, +}(0)$  enthält alle Punkte  $U_+ \approx H^{sk}(0)$ , für die eine Lösung  $U^{sk}(t)$  von (3.161) auf  $\mathbb{R}_+$  mit Anfangswert  $U_+^{sk}$ , die für alle Zeiten  $t \geq 0$  uniform nahe  $H^{sk}(t)$  bleibt (bezüglich der  $\hat{Y}$ -Topologie).

Außerdem existiert ein  $\zeta > 0$ , so dass für alle  $(\varepsilon_*, c_*) \neq (0, c)$  mit  $\varepsilon_* > 0$  und alle  $U^{sk}$  mit  $|U^{sk} - H^{sk}(0)|_{\hat{Y}} < \zeta$  eine auf  $\mathbb{R}_+$  definierte Lösung  $U^{sk}(t)$  von (3.161) für die Parameterwerte  $(\varepsilon, c) = (\varepsilon_*, c_*)$  und  $U^{sk}(0) = U^{sk}$  existiert, so dass  $U^{sk}(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  entweder gegen das Gleichgewicht Null oder gegen den Orbit der periodischen Funktion  $\Gamma_{\varepsilon_*, c_*}^{sk}(\cdot)$  Lösung konvergiert.

### Beweis

Der Beweis unterteilt sich in mehrere Schritte. Wir beginnen mit der folgenden Regularität der Operatoren  $\Phi_+^{cs}(t, t)$  und  $\Phi_+^u(t, t)$ .

### Regularität der Lösungsoperatoren

Wir beginnen mit der folgenden Beobachtung: Ist  $V \in \hat{Y}$ , dann gilt auch

$$\Phi_+^{cs}(t, t)V \in \hat{Y}, \quad \Phi_+^u(t, t)V \in \hat{Y}$$

für alle  $t \geq 0$  und beide Operatoren sind als Abbildungen von  $\hat{Y}$  nach  $\hat{Y}$  beschränkt. Um diese Behauptung zu beweisen zeigen wir, dass  $\Phi_+^{cs}(t, t)V \in \mathcal{Y}$ ,  $\Phi_+^u(t, t)V \in \mathcal{Y}$ , falls  $V \in \mathcal{Y} := \mathbb{R}^N \times H^1([-a/T(0, c_0) - 1, (b/T(0, c_0)) + 1], \mathbb{R}^N)$  ist. Man kann sich dann sukzessive bis  $\hat{Y}$  hocharbeiten.

Da die Operatoren  $\Phi_+^{cs}, \Phi_+^u$  keine *exponentielle* Dichotomie auf  $\mathbb{R}_+$  definieren, arbeiten wir mit den Lösungsoperatoren  $\Phi_s^+, \Phi_u^+$ , wobei

$$\Phi_s^+(t, s) := e^{-\mu(t-s)} \Phi_+^{cs}(t, s), \quad \Phi_u^+(t, s) := e^{-\mu(t-s)} \Phi_+^u(t, s)$$

für ein  $\mu > 0$  klein genug und  $t \geq s \geq 0$  in der ersten und  $s \geq t \geq 0$  in der zweiten Identität gilt (siehe Abschnitt 3.3.4 und Gleichung (3.70) für die Definition von  $e_\mu^t$ ). Diese definieren dann eine *exponentielle* Dichotomie der asymptotisch *hyperbolischen* Gleichung

$$\partial_t V(t) = \mathcal{A}_{hyp}(t)V(t) \quad (3.164)$$

auf  $\mathbb{R}_+$  mit

$$\mathcal{A}_{hyp}(t) \begin{pmatrix} \xi \\ \varphi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu\xi + D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0)[e^{\mu \cdot} \varphi(\cdot)] \\ \partial_\theta \varphi(\cdot) \end{pmatrix} \quad (3.165)$$

für  $(\xi, \varphi(\cdot)) \in X = \{(\xi, \varphi(\cdot)) \in \mathbb{R}^N \times H^1([-a/T(0, c_0) - 1, (b/T(0, c_0) + 1], \mathbb{R}^N) : \varphi(0) = \xi\}$ . Wir zeigen also nur

$$\Phi_s^+(t, t)V \in \mathcal{Y}, \quad \Phi_u^+(t, t)V \in \mathcal{Y}.$$

Um dies einzusehen, erinnern wir uns daran, wie wir etwa die Lösung  $U(t) := \Phi_s^+(t, s)V$  der Gleichung (3.165) mit  $U(s) = \Phi_s^+(s, s)V$  in Lemma 3.10 konstruiert haben. Nach dem Beweis und der Notation von Lemma 3.10 gilt:

$$U(t) = \tilde{U}(t) + V(t) + \phi(t)$$

und wir erinnern im Folgenden daran, wie die Funktionen  $\tilde{U}, V, \phi$  definiert sind. In diesem Ausdruck ist  $\phi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow Y$  immer eine glatte Funktion, die ein Kernelement der Gleichung

$$\dot{\phi}(t) = \mathcal{A}_{hyp}(t)\phi(t)$$

ist. Deswegen besitzt  $\phi(t) \in Y$  die Gestalt  $\phi(t) = (\alpha(t), \alpha(t + \cdot))$  mit einer  $C^\infty$  Funktion  $\alpha(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Also ist insbesondere  $\phi(s) \in X \cap \mathcal{Y}$ . Wir betrachten nun  $V(\cdot)$ . Bezeichne dazu mit

$$\mathcal{A}_\infty \begin{pmatrix} \xi \\ \varphi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu\xi + D_1 f^{sk}(h_\infty, 0, c_0)[e^{\mu \cdot} \varphi(\cdot)] \\ \partial_\theta \varphi(\cdot) \end{pmatrix},$$

also  $\mathcal{A}_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{A}_{hyp}(t)$ , die asymptotische, hyperbolische Linearisierung. Bezeichne weiterhin mit  $\Pi_+ : Y \rightarrow Y$  die Projektion auf den verallgemeinerten, abgeschlossenen Unterraum von  $\mathcal{A}_\infty$ , auf dem dieser Operator nur positives Spektrum besitzt. Dann ist  $id - \Pi_+$  eine Projektion auf den verallgemeinerten Unterraum, auf dem  $\mathcal{A}_\infty$  nur negatives Spektrum besitzt. Eine solche Projektion  $\Pi_+$  existiert und ist nach [28], Theorem 1.7 durch

$$\Pi_+ V = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} (\lambda - \mathcal{A}_\infty)^{-1} d\lambda V$$

gegeben, wobei das Integral im Cesaro Sinne zu verstehen ist, d.h. es ist

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} (\lambda - \mathcal{A}_\infty)^{-1} V d\lambda := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{1}{N} \int_{-l}^l (ik - \mathcal{A}_\infty)^{-1} V dl idk.$$

Weiterhin sei  $\mathcal{A}_+ := \mathcal{A}_\infty|_{\text{Bild}(\Pi_+)}$  und  $\mathcal{A}_- := \mathcal{A}_\infty|_{\text{Bild}(id - \Pi_+)}$ . Die Funktion  $V(\cdot)$  ist dann durch

$$V(t) := \begin{cases} e^{\mathcal{A}_+(t-s)} \Pi_+ V & t > 0 \\ -e^{\mathcal{A}_-(t-s)} (id - \Pi_-) V & t \leq 0 \end{cases} \quad (3.166)$$

gegeben. Ist  $V \in \mathcal{Y}$ , so gilt nach Lemma 3.4 ebenfalls  $\Pi_+V \in \mathcal{Y}$  und die Funktion  $V(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow Y$  ist differenzierbar mit  $V(s) = \Pi_+V \in \mathcal{Y}$ .

Nach Konstruktion ist nun  $\tilde{U}(\cdot)$  eine Lösung der Gleichung  $\mathcal{T}_{hyp}\tilde{U} = \mathcal{B}V$  mit  $\mathcal{T}_{hyp} : \mathcal{D}(\mathcal{T}_{hyp}) \subset L^2(\mathbb{R}, Y) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, Y)$  und der Definitionsbereich nach Gleichung (3.24) definiert ist. Hierbei ist  $(\mathcal{T}_{hyp}W)(t) := \partial_t W(t) - \mathcal{A}_{hyp}(t)W(t)$  und  $\mathcal{B} : L^2(\mathbb{R}, Y) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, Y)$  wie in Lemma 3.10 durch

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}W(\cdot))(t) &= \mathcal{B} \begin{pmatrix} \xi(\cdot) \\ \varphi(\cdot, \cdot) \end{pmatrix} (t) \\ &= \begin{pmatrix} D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0)[e^{\mu} \varphi(t, \cdot)] - D_1 f^{sk}(h_\infty, 0, c_0)[e^{\mu} \varphi(t, \cdot)] \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gegeben, wobei  $W(t) = (\xi(t), \varphi(t, \cdot)) \in L^2(\mathbb{R}, Y)$  gilt. Aus dieser Darstellung sehen wir, dass  $\tilde{U}(t) = (u^1(t), u^2(t, \theta))$  mit  $u^2(t, \theta) = u(t + \theta)$  für eine glatte Funktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  gilt. Insbesondere gilt also  $\tilde{U}(s) = (u^1(t), u(t + \cdot)) \in \mathcal{Y}$ . Zusammenfassend haben wir gezeigt, dass

$$\Phi_s^+(s, s)V = U(s) = \tilde{U}(s) + \phi(s) + V(s) \in \mathcal{Y}$$

gilt und damit ist die Behauptung bewiesen. Außerdem beobachten wir, dass die Zuordnung  $V \mapsto U(s) = \tilde{U}(s) + V(s) + \phi(s)$  als Abbildung mit Werten in  $\mathcal{Y}$  beschränkt ist: Die Abbildung  $V \mapsto V(s)$  ist beschränkt wegen Lemma 3.4; die Abbildung  $V \mapsto \tilde{U}(s)$  lässt sich schreiben als  $V \mapsto V(\cdot) \mapsto \mathcal{B}V(\cdot) \mapsto \mathcal{T}_{hyp}^{-1}\mathcal{B}V(\cdot) \mapsto (\mathcal{T}_{hyp}^{-1}\mathcal{B}V(\cdot))(s) = \tilde{U}(s)$ , wobei die Abbildung  $V \mapsto \mathcal{B}V(\cdot)$  als Abbildung von  $\mathcal{Y}$  nach  $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$  beschränkt ist. Außerdem ist  $\mathcal{T}_{hyp}^{-1}$  eine beschränkte Abbildung von  $\text{Bild}(\mathcal{T}_{hyp}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$  (versehen mit der  $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$ -Norm) nach  $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$ . Schließlich ist die Abbildung  $Z(\cdot) \mapsto (\mathcal{T}_{hyp}^{-1}Z(\cdot))(s)$  als Abbildung von  $\text{Bild}(\mathcal{T}_{hyp}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$  nach  $\mathcal{Y}$  wohldefiniert und beschränkt, denn es gilt mit  $(a(t), a_t(\cdot)) := (\mathcal{T}_{hyp}^{-1}Z(\cdot))(t)$ :

$$\begin{aligned} |a(s)| &\leq |a(\cdot)|_\infty \leq C|(a(s), a_s(\cdot))|_{H^1(\mathbb{R}, Y)} \leq M|Z(\cdot)|_{L^2(\mathbb{R}, \mathcal{Y})} \\ \|a'_s\|_{L^2([-a/T(0, c_0)]-1, [b/T(0, c_0)]+1], \mathbb{R}^N)} &\leq K|a(\cdot)|_{H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)} \\ &\leq C|(a(s), a_s(\cdot))|_{H^1(\mathbb{R}, Y)} \leq M|Z(\cdot)|_{L^2(\mathbb{R}, \mathcal{Y})} \end{aligned}$$

Genauso sieht man ein, dass die Abbildung  $V \mapsto V(\cdot) \mapsto \phi(\cdot) \mapsto \phi(s)$  als Abbildung von  $\mathcal{Y}$  in sich beschränkt ist. Hierbei ist  $\phi(\cdot)$  die Projektion von  $V(\cdot)$  auf den (endlichdimensionalen!) Kern von  $\mathcal{T}_{hyp}$  entlang dem Orthogonalkomplement von  $\text{Kern}\mathcal{T}_{hyp}$ . Auf dem Kern kann man deswegen eine geeignete Norm wählen. Damit ist Beschränktheit gezeigt.

Analog kann man nun zeigen, dass  $\Phi_s^+(t, t)[\hat{Y}] \subset \hat{Y}$  und  $\Phi_u^+(t, t)[\hat{Y}] \subset \hat{Y}$  gilt, woraus ebenfalls  $\Phi_+^{cs}(t, t)[\hat{Y}] \subset \hat{Y}$  und  $\Phi_+^u(t, t)[\hat{Y}] \subset \hat{Y}$  folgt. Die Beschränktheit kann man analog zu dem eben bewiesenen zeigen.

### Die Fixpunktgleichung

Erneut machen wir den Ansatz  $U^{sk}(t) = H^{sk}(t) + V(t)$  und suchen  $V(\cdot)$  als Fixpunkt der Integralgleichung

$$\begin{aligned} V(t) &= \Phi_+^{cs}(t, 0)V_0^{cs} + \int_0^t \Phi_+^{cs}(t, s)\mathcal{G}_{mod}(s, V(s), \varepsilon, c)ds \\ &+ \int_\infty^t \Phi_+^u(t, s)\mathcal{G}_{mod}(s, V(s), \varepsilon, c)ds, \end{aligned} \quad (3.167)$$

wobei

$$V_0^{cs} \in \hat{E}_+^{cs}(0) = E_+^{cs}(0) \cap \hat{Y} = \text{Bild}(\Phi_+^{cs}(0, 0)|_{\hat{Y}}). \quad (3.168)$$

In dieser Gleichung ist  $V(\cdot) \in BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \hat{Y})$  für ein noch zu wählendes  $\gamma > 0$  und  $\mathcal{G}_{mod}$  bezeichnet die mit einer cut-off-Funktion modifizierte Funktion  $\mathcal{G}(\cdot, \cdot, \varepsilon, c) : \mathbb{R}_+ \times \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}$ , mit

$$\mathcal{G}(t, (\xi, \varphi), \varepsilon, c) := \begin{pmatrix} f^{sk}(h_t^{sk} + \varphi, \varepsilon, c) - D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0)\varphi - f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.169)$$

vergleiche mit (3.89). Wir setzen

$$\mathcal{G}_{mod}(t, (\xi, \varphi), \varepsilon, c) := \chi_\delta(\langle (\xi, \varphi), (\xi, \varphi) \rangle_{\hat{Y}}) \cdot \mathcal{G}(t, (\xi, \varphi), \varepsilon, c) \quad (3.170)$$

und wählen nun  $0 < \sigma < \gamma < \beta$  (siehe Gleichung (3.163) für die Definition von  $\beta, \sigma$ ). Die Fixpunktgleichung (3.167) ist dann wohldefiniert, d.h. für  $V(\cdot) \in BC^\gamma := BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \hat{Y})$  definiert auch die rechte Seite von (3.167) ein Element in  $BC^\gamma$ : Es folgt zunächst aus der Regularität der Projektionen  $\Phi_+^{cs}(t, t)$  und  $\Phi_+^u(t, t)$  für alle  $t \geq 0$ , dass der Raum  $\hat{Y}$  in sich abgebildet wird. Da der Lösungsoperator  $\Phi_+^{cs}(t, s)V_{cs}$  für ein  $V_{cs} \in \text{Bild}(\Phi_+^{cs}(s, s)) \cap \hat{Y}$  ein Shiftoperator auf Lösungen einer Forward-Backward-Delay Gleichung ist (d.h. es gilt  $\Phi_+^{cs}(t, s)V_{cs} = (\phi(t), \phi(t + \cdot))$  für  $t \geq s$  und  $\phi(\cdot)$  löst eine lineare Forward-Backward-Delay Gleichung auf dem Intervall  $(s, \infty)$ ), gilt für ein  $V \in \hat{Y}$  ebenfalls:

$$\Phi_+^{cs}(t, s)V = \Phi_+^{cs}(t, s) (\Phi_+^{cs}(s, s)V) \in \hat{Y}$$

und diese Abbildung ist beschränkt (siehe auch die komplett analoge Argumentation kurz vor und nach Gleichung (3.92) im Beweis der Existenz von  $W^{cs,+}(0)$ ). Analog kann man zeigen, dass  $\Phi_+^u(t, s)V \in \hat{Y}$  für  $V \in \hat{Y}$  und  $s \geq t \geq 0$ . Man beachte nun, dass  $\mathcal{G}_{mod}(s, V(s), \varepsilon, c) \in \mathbb{R}^N \times \{0\} \subset \hat{Y}$  für ein beliebiges  $V(\cdot) \in BC^\gamma$  gilt und deswegen definieren die Abbildungen  $s \rightarrow \Phi_+^{cs}(t, s)\mathcal{G}(s, V(s), \varepsilon, c)$  und  $s \rightarrow \Phi_+^u(t, s)\mathcal{G}(s, V(s), \varepsilon, c)$  stetige Funktionen von  $\mathbb{R}_+$  nach  $\hat{Y}$ . Analog wie im Beweis von Satz 3.17 kann man nun zeigen, dass auch

$$t \rightarrow \int_0^t \Phi_+^{cs}(t, s)\mathcal{G}(s, V(s), \varepsilon, c)ds, \quad t \rightarrow \int_\infty^t \Phi_+^u(t, s)\mathcal{G}(s, V(s), \varepsilon, c)ds$$

stetige Funktionen von  $\mathbb{R}_+$  nach  $\hat{Y}$  sind, die jeweils Elemente in  $BC^\gamma$  definieren. Exemplarisch betrachten wir den Integralterm  $t \rightarrow \int_0^t \Phi_+^{cs}(t, s)\mathcal{G}(s, V(s), \varepsilon, c)ds$  und zeigen, dass die  $|\cdot|_{BC^\gamma}$ -Norm beschränkt ist. Unter Beachtung der Tatsache, dass die Nichtlinearität  $\mathcal{G}_{mod}(s, \cdot, \varepsilon, c)$  als Abbildung mit Werten in  $\hat{Y}$  eine globale Lipschitzfunktion mit beliebig kleiner Lipschitzkonstante ist, gilt dann:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\sigma(t-s)} |\mathcal{G}_{mod}(s, V(s), \varepsilon, c)|_{\hat{Y}} ds &\leq \int_0^t e^{\sigma(t-s)} \delta_0 |V(s)|_{\hat{Y}} ds \\ &\leq \int_0^t e^{\sigma(t-s)} \delta_0 C e^{\gamma s} ds \\ &= \delta_0 C e^{\sigma t} [e^{(\gamma-\sigma)s} / (\gamma - \sigma)]_0^t = \mathcal{O}(e^{\gamma t}). \end{aligned}$$

Wählt man die Lipschitzkonstante von  $\mathcal{G}_{mod}$  klein genug, so existiert für jedes feste  $V_0^{cs} \in \hat{E}_{cs}$  und  $\varepsilon \approx 0$ ,  $c \approx c_0$  ein eindeutiger Fixpunkt  $V_*(\cdot) \in BC^\gamma$  von (3.167). Nach

Vanderbauwhede [54], Theorem 2, ist nun die Abbildung

$$\begin{aligned}\Psi(\cdot, \varepsilon, c) : \hat{E}_{cs} &\rightarrow \text{Bild}(\Phi_+^u(0, 0)|_{\hat{Y}}) \\ \Psi(\cdot, \varepsilon, c) : V_0^{cs} &\mapsto \Phi_+^u(0, 0)V_*(0)\end{aligned}$$

eine  $C^2$  Abbildung, wobei der Raum  $\text{Bild}(\Phi_+^u(0, 0)|_{\hat{Y}}) \subset \hat{Y}$  ein bezüglich  $\hat{Y}$  abgeschlossener Unterraum ist. Wir definieren nun unsere gesuchte Mannigfaltigkeit durch

$$W_{\varepsilon, c}^{cs,+}(0) := \text{Graph}(\Psi(\cdot, \varepsilon, c)) + H^{sk}(0) \quad (3.171)$$

und kümmern uns nun im nächsten Abschnitt um die Parameterabhängigkeit dieser Mannigfaltigkeit.

### Parameterabhängigkeit

*Die Stetigkeit der erweiterten Mannigfaltigkeit*

Um die  $C^2$ -Abhängigkeit der Mannigfaltigkeit  $W_{\varepsilon, c}^{cs,+}(0)$  von den Parametern  $\varepsilon$  und  $c$  zu zeigen, erweitere man das System

$$\dot{V}(t) = \mathcal{A}^{sk}(t)V(t) + \mathcal{G}(t, V(t), \varepsilon, c) \quad (3.172)$$

um die zusätzlichen Gleichungen  $\dot{\varepsilon} = 0$  und  $\dot{c} = 0$ . Dies induziert eine lineare Abbildung für das erweiterte System, das nun die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{V}}(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{sk}(t)\tilde{V}(t) + D_{\tilde{\lambda}, c}\mathcal{G}(t, 0, 0, c_0)(\varepsilon, c) + \mathcal{G}_{rest}(t, \tilde{V}(t), \varepsilon, c) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.173)$$

annimmt und  $\mathcal{G}_{rest} + D_{\tilde{\lambda}, c}\mathcal{G} = \mathcal{G}$  gilt. Der neue,  $t$ -abhängige Linearteil des erweiterten Systems  $A^{erw}(t) : X \times \mathbb{R}^2 \rightarrow Y \times \mathbb{R}^2$ , nämlich

$$A^{erw}(t) \begin{pmatrix} \tilde{V} \\ \varepsilon \\ c \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{sk}(t)\tilde{V} + D_{\tilde{\lambda}, c}\mathcal{G}(t, 0, 0, c_0)(\varepsilon, c) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt zwei zusätzliche, einfache Eigenwerte 0 für jedes feste  $t$ . Damit gilt dies auch für die asymptotischen linearen Abbildungen bezüglich  $t \rightarrow \pm\infty$ . Deswegen besitzt die Gleichung  $\dot{W}(t) = A^{erw}(t)W(t)$  eine (Zentrums-) Dichotomie auf  $\mathbb{R}_+$ , mit zugehörigen Lösungsoperatoren  $\tilde{\Phi}_+^{cs}(t, s) : Y \times \mathbb{R}^2 \rightarrow Y \times \mathbb{R}^2$  und  $\tilde{\Phi}_+^u(s, t) : Y \times \mathbb{R}^2 \rightarrow Y \times \mathbb{R}^2$  für  $t \geq s \geq 0$ .

Schreiben wir  $V \in \hat{Y}$  in der Form  $V = (\xi, \phi(\cdot))$ , so ist die Abbildung  $\mathcal{G}_{rest} : \mathbb{R} \times \hat{Y} \times$

$(-\delta, \delta) \times (-\delta + c_0, c_0 + \delta) \rightarrow \hat{Y} \times \mathbb{R}^2$  explizit durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{rest}(t, (\xi, \phi(\cdot)), \varepsilon, c) &= \begin{pmatrix} f^{sk}(h_t^{sk} + \phi(\cdot), \varepsilon, c) - D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) \phi(\cdot) - f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} D_2 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) \varepsilon + D_3 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) Dh^{sk}(t + \cdot) \partial_c(1/T(\varepsilon, c))|_{(\varepsilon, c)=(0, c_0)} \cdot c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) Dh^{sk}(t + \cdot) \partial_\varepsilon(1/T(\varepsilon, c))|_{(\varepsilon, c)=(0, c_0)} \cdot \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.174}$$

gegeben und eine  $C^2$ -Abbildung: Nach Definition von  $\mathcal{G}_{rest}$  ist nämlich nur die  $\mathbb{R}^N$ -Komponente von  $\hat{Y}$  von Null verschieden. Deswegen ist  $\mathcal{G}_{rest}$  zunächst einmal wohldefiniert. Desweiteren können wir für festes  $(\xi, \phi(\cdot))$  die  $\mathbb{R}^N$ -Komponente der Funktion  $\mathcal{G}_{rest}(t, (\xi, \phi(\cdot)), \varepsilon, c)$  zweimal nach  $c$  differenzieren, da die Abbildung  $\phi(\cdot)$  in  $H^3$  liegt (also ist insbesondere  $\phi''(\cdot)$  immer noch stetig ist). Man beachte, dass wir aufgrund der Definition von  $f^{sk}(\phi(\cdot), \varepsilon, c)$  tatsächlich auch die Abbildung  $\phi(\cdot)$  differenzieren müssen, wenn wir nach  $c$  ableiten. Also können wir  $\mathcal{G}_{rest}$  in dem Raum  $\hat{Y} \times \mathbb{R}^2$  zweimal nach  $c$  ableiten. Ebenso können wir für festes  $c$  die Abbildung  $\varepsilon \rightarrow \mathcal{G}_{rest}(t, (\xi, \phi(\cdot)), \varepsilon, c)$  zweimal ableiten. Damit ist zunächst einmal gezeigt, dass die Abbildung  $\mathcal{G}_{rest}(t, \cdot, \cdot, \cdot) : \hat{Y} \times (-\delta, \delta) \times (-\delta + c_0, c_0 + \delta) \rightarrow \hat{Y} \times \mathbb{R}^2$  eine  $C^2$ -Abbildung ist.

Wir betrachten nun die zu (3.172) assoziierte Fixpunktgleichung:

$$\begin{aligned}
W(t) &= \tilde{\Phi}_+^{cs}(t, 0) W_0^{cs} + \int_0^t \tilde{\Phi}_+^{cs}(t, s) \mathcal{G}_{rest}^{mod}(s, W(s)) ds \\
&+ \int_\infty^t \tilde{\Phi}_+^u(t, s) \mathcal{G}_{rest}^{mod}(s, W(s)) ds,
\end{aligned} \tag{3.175}$$

für  $W(\cdot) \in BC_{erw}^\gamma := BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \hat{Y} \times \mathbb{R}^2)$  und  $W_0^{cs} \in \text{Bild}(\tilde{\Phi}_+^{cs}(0, 0)|_{\hat{Y} \times \mathbb{R}^2})$  und einer modifizierten Nichtlinearität  $\mathcal{G}_{rest}^{mod}$  (bezüglich der  $\varepsilon$ - und  $c$ -Richtung haben wir vorher noch nicht abgeschnitten). Und wieder gilt aufgrund der Regularität der Projektionen  $\tilde{\Phi}_+^{cs}(t, t)$  und  $\tilde{\Phi}_+^u(t, t)$  die Identität

$$\tilde{\Phi}_+^{cs}(t, s) \mathcal{G}_{rest}^{mod}(s, W) \in \hat{Y} \times \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\Phi}_+^u(s, t) \mathcal{G}_{rest}^{mod}(t, W) \in \hat{Y} \times \mathbb{R}^2$$

für jedes  $W \in \hat{Y} \times \mathbb{R}^2$  und  $t \geq s \geq 0$ . Aus diesem Grund definiert die rechte Seite von (3.175) eine wohldefinierte Kontraktion  $\mathcal{K}_{erw}(\cdot, W_0^{cs})$  auf  $BC_{erw}^\gamma$ . Diese induziert eine Abbildung  $\Psi_{erw} : W_0^{cs} \rightarrow \tilde{\Phi}_+^u(0, 0) W_*(0)$ , wobei  $W_*(\cdot)$  den eindeutigen Fixpunkt der Integralgleichung in Abhängigkeit des Parameters  $W_0^{cs}$  bezeichnet.  $\Psi_{erw}$  definiert damit eine

(Lipschitzstetige) Mannigfaltigkeit  $W_{erw}^{cs}$ .

*Differenzierbarkeit der erweiterten Mannigfaltigkeit  $W_{erw}^{cs}$*

Wir kümmern uns nun um die Differenzierbarkeit. Analog zu Vanderbauwhede [54] müssen wir dazu zeigen, dass die rechte Seite von (3.175) als Abbildung von  $BC_{erw}^{\gamma}(\mathbb{R}_+, \hat{Y} \times \mathbb{R}^2)$  nach  $BC_{erw}^{\zeta}(\mathbb{R}_+, \hat{Y} \times \mathbb{R}^2)$  für ein festes  $W_0^{cs}$  und ein beliebiges  $\zeta > \gamma > 0$  differenzierbar ist. Wir beschränken uns dabei auf die Integranden und zeigen exemplarisch, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{Y} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \hat{Y} \times \mathbb{R}^2 \\ W &\mapsto \tilde{\Phi}_+^{cs}(t, s) \mathcal{G}_{rest}(t, W) \end{aligned}$$

stetig differenzierbar ist, wobei  $t \geq s \geq 0$  fest ist (man beachte, dass wir hier ebenfalls die nichtmodifizierte Abbildung  $\mathcal{G}_{rest}$  betrachten. Für die spätere Abbildung von  $BC_{erw}^{\gamma}$  nach  $BC_{erw}^{\zeta}$  muss man dann natürlich die modifizierte Funktion betrachten). Die Stelle, an der wir differenzieren wollen, sei  $W = (V^0, \varepsilon_0, c_0) = ((\xi^0, \phi^0(\cdot)), \varepsilon_0, c_0)$ . Speziell die Richtungsableitungen nach  $c$  und  $\varepsilon$  scheinen nun besonders heikel zu sein und wir betrachten zunächst die Ableitung nach  $c$  (für  $\varepsilon$  argumentiert man dann analog). Betrachte zunächst den Fall  $N = 1$ , d.h. der einzige in (3.174) auftauchende, von null verschiedene Eintrag von  $\mathcal{G}_{rest}(t, (\xi^0, \phi^0(\cdot)), \varepsilon_0, c)$  ist eine  $c$ -abhängige reelle Zahl  $r = r(c)$ , mit

$$\begin{aligned} r(c) &= f^{sk}(h_t^{sk} + \phi^0(\cdot), \varepsilon_0, c) - D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) \phi^0(\cdot) \\ &\quad - f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) - D_2 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) \varepsilon_0 - D_3 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) c \\ &\quad - D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) Dh^{sk}(t + \cdot) \partial_c(1/T(0, c_0)) \cdot c \\ &\quad - D_1 f^{sk}(h_t^{sk}, 0, c_0) Dh^{sk}(t + \cdot) \partial_\varepsilon(1/T(0, c_0)) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Also gilt

$$\mathcal{G}_{rest}(t, (\xi^0, \phi^0(\cdot)), \varepsilon_0, c) = r(c) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und deswegen

$$\tilde{\Phi}_+^{cs}(t, s) \mathcal{G}_{rest}(t, W) = r(c) \cdot \left[ \tilde{\Phi}_+^{cs}(t, s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (3.176)$$

Da nun wegen des ersten Abschnittes dieses Beweises die Abbildung  $\tilde{\Phi}_+^{cs}(t, s)$  Punkte in  $\hat{Y} \times \mathbb{R}^2$  wieder in sich abbildet, als Abbildung von  $\hat{Y}$  nach  $\hat{Y}$  beschränkt ist und der Skalar  $r(c)$  zweimal stetig differenzierbar von  $c$  abhängt, existiert die Richtungsableitung von (3.176) nach  $c$  bzw. nach  $(0, 0, 0, 1)$  in dem Raum  $\hat{Y} \times \mathbb{R}^2$ , d.h. die Ableitung in Richtung  $c$  definiert immer noch ein Element in  $\hat{Y} \times \mathbb{R}^2$ . Analog sieht man, dass auch die Ableitung bezüglich  $\varepsilon$  existiert und die Richtungsableitung nach  $(V, (0, 0)) \in \hat{Y} \times \{0\}$  ist ohnehin unproblematisch, da die Abbildung  $G(t, \cdot, \tilde{\lambda}, c) : \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}$  nach Annahme differenzierbar ist.

Im Fall  $N > 1$  gilt das gleiche, denn wir haben ja bereits gezeigt, dass die Abbildung  $W \mapsto G_{rest}(t, W)$  als Abbildung von  $\hat{Y} \times \mathbb{R}^2$  in sich eine  $C^2$ -Abbildung ist. Ausserdem ist

auch der Operator  $\tilde{\Phi}_+^{cs}(t, s) : \hat{Y} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \hat{Y} \times \mathbb{R}^2$  eine beschränkte lineare Abbildung und deswegen differenzierbar: also ist auch die Abbildung  $W \mapsto \tilde{\Phi}_+^{cs} G_{rest}(t, W)$  als Abbildung von  $\hat{Y} \times \mathbb{R}^2$  in sich eine  $C^2$ -Abbildung.

Da die Abbildung  $c \mapsto [t \mapsto G_{rest}^{mod}(t, W, c, \varepsilon)]$  als Abbildung mit Werten in  $BC^0(\mathbb{R}_+, \hat{Y})$  einmal stetig differenzierbar ist (da  $h(t)$  und  $h'(t)$  für  $t \rightarrow -\infty$  gegen Null konvergiert), ist auch die Abbildung

$$\begin{aligned} BC_{erw}^\gamma &\rightarrow BC_{erw}^\zeta \\ V(\cdot) &\mapsto \mathcal{G}_{rest}^{mod}(\cdot, V(\cdot)) \end{aligned}$$

stetig differenzierbar. Nach Vanderbauwhede [54] (und speziell dem Beweis von Theorem 2) ist nun die rechte Seite von (3.172) eine  $C^2$ -Abbildung von  $BC_{erw}^\gamma$  nach  $BC_{erw}^\zeta$ . Dort wird dann auch gezeigt, dass die Abbildung  $W_0^{cs} \mapsto \tilde{\Phi}_+^u(0, 0)W_*(0)$  eine  $C^2$ -Abbildung ist. Also ist die erweiterte Mannigfaltigkeit  $W_{erw}^{cs}$  eine  $C^2$ -Mannigfaltigkeit und wir können  $W_{\varepsilon, c}^{cs, +}(0)$  durch

$$W_{erw}^{cs} \cap (\hat{Y} \times \{\varepsilon\} \times \{c\}) =: (W_{\varepsilon, c}^{cs, +}(0), \varepsilon, c).$$

definieren, anstatt die Definition (3.171) zu benutzen.

Die restlichen Aussagen des Satzes folgen nun analog zu dem Beweis von Satz 3.17.  $\square$

Wie betrachten nun die Linearisierung von (3.161) in der Null für die Parameter  $(\varepsilon, c) = (0, c_0)$ : Dies ergibt eine *autonome* lineare Gleichung  $\dot{V}(t) = A^{sk}(t)V(t)$  und wir können die Existenz bezüglich  $Y$  abgeschlossener Unterräume  $E_c, E_s, E_u$  mit zugehörigen Projektionen  $\Pi_c, \Pi_s, \Pi_u$  zeigen, auf denen Halbgruppen  $T_c^{sk}(t) : E_c^{sk} \rightarrow E_c, T_s^{sk}(t) : E_s \rightarrow E_s, T_u^{sk}(-t) : E_u \rightarrow E_u$  für  $t \in \mathbb{R}$  bzw.  $t \geq 0$  bzw.  $t \geq 0$  und  $K, \sigma > 0$  existieren, so dass

$$|T_c^{sk}(t)V_0|_Y \leq K|V_0|_Y \quad |T_s^{sk}(t)V_0|_Y \leq Ke^{-\sigma t}|V_0|_Y \quad |T_u^{sk}(-t)V_0|_Y \leq Ke^{-\sigma|t|}|V_0|_Y. \quad (3.177)$$

für ein Konstante  $K > 0$  und einem  $\sigma > 0$  gilt (siehe die analoge Diskussion kurz vor und nach Gleichung (3.116) für die Existenz der Unterräume  $E_s, E_u, E_c$  und Operatoren  $T_s^{sk}(t), T_u^{sk}(t), T_c^{sk}(t)$ ).

### Notation

Wir unterdrücken aber von nun an den Index „sk“ und schreiben kurz  $T_s(t), T_c(t), T_u(t)$ . Ist ein Vektorraum mit einem „Dach“ versehen, so ist er mit der  $\tilde{Y}$ -Norm versehen: also gilt z.B.  $\hat{E}_u := E_u \cap \hat{Y}$ ,  $\hat{E}_s := E_s \cap \hat{Y}$ . Außerdem schreiben wir von nun an oft  $\Gamma^{sk} := \Gamma_{\varepsilon, c}^{sk}(0)$ .

Wir können nun den folgenden Satz zeigen.

### Satz 3.20 (Die instabile Faser des Punktes $\Gamma^{sk}(0)$ )

Für jedes  $(\varepsilon, c)$  mit  $|\varepsilon| \geq 0$  klein genug besitzt Gleichung (3.161) eine instabile Faser  $W^u(\Gamma^{sk}(0)) \subset \hat{Y}$ , die folgende Eigenschaften besitzt:

- $W^u(\Gamma^{sk}(0))$  hat die Gestalt  $W_{\varepsilon, c}^u(\Gamma_{\varepsilon, c}^{sk}(0)) = \text{Graph}(\Psi_{\varepsilon, c}) + \Gamma_{\varepsilon, c}^{sk}(0)$ . Hierbei ist die Abbildung  $\Psi_{\varepsilon, c}(\cdot) : \hat{E}_u \cap \mathcal{U} \rightarrow (\hat{E}_c + \hat{E}_s)$  eine  $C^2$ -Funktion, wobei  $\mathcal{U}$  eine kleine Umgebung der Null darstellt und die Abbildung  $(\varepsilon, c) \mapsto \Psi_{\varepsilon, c}(V) \in \hat{Y}$  ist für festes  $V$  zweimal stetig differenzierbar.
- $W^u(\Gamma^{sk}(0))$  ist bei  $\Gamma_{0, c_0}^{sk}(0)$  und  $(\varepsilon, c) = (0, c_0)$  tangential an  $\hat{E}_u^{sk} := E_u^{sk} \cap \hat{Y}$

- Es existiert ein  $\rho > 0$ , so dass folgendes gilt: Sei  $U_- \in W^u(\Gamma^{sk}(0))$ . Dann existiert eine stetige Funktion  $U(t) : (-\infty, 0] \rightarrow \hat{Y}$  mit  $U(0) = U_-$  und es gilt

$$|U(t) - \Gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(t)| \leq M e^{-\rho|t|} \quad (3.178)$$

für  $t \rightarrow -\infty$ . Ausserdem gilt  $U(t) = (\xi(t), \xi_t)$  mit einer  $H^3$ -Abbildung  $\xi : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , die eine Lösung der Gleichung  $\dot{x}(t) = f^{sk}(x_t, \varepsilon, c)$  ist.

### Beweis

Der Beweis folgt analog zu dem von Satz 3.18: Erneut machen wir den Ansatz  $U(t) = V(t) + \Gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(t)$  für Lösungen  $U(t)$  der abstrakten Gleichung (3.161). In diesem Fall löst  $V(t)$  die Gleichung:

$$\dot{V}(t) = \mathcal{A}_{\varepsilon,c}(t)V(t) + G^{sk}(t, V(t), \varepsilon, c). \quad (3.179)$$

Hierbei ist  $\mathcal{A}_{\varepsilon,c}(t) : X \rightarrow Y$  für  $(\xi, \Phi(\cdot)) \in X$  definiert durch

$$\mathcal{A}_{\varepsilon,c}(t) \begin{pmatrix} \xi \\ \Phi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f^{sk}(\gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(t + \cdot), \varepsilon, c) \Phi(\cdot) \\ \partial_\theta \Phi(\cdot) \end{pmatrix}$$

und  $G^{sk}(t, \cdot, \varepsilon, c) : \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}$  ist  $C^2$  mit

$$G^{sk}(t, (\xi, \varphi), \varepsilon, c) := \begin{pmatrix} f^{sk}(\gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(t + \cdot) + \varphi, \varepsilon, c) - D_1 f^{sk}(\gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(t + \cdot), \varepsilon, c) \varphi - f(\gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(t + \cdot), \varepsilon, c) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben nun die Gleichung (3.179) in einer etwas anderen Form, indem wir den Linearteil  $\mathcal{A}_{\varepsilon,c}(t)$  in der Gestalt  $\mathcal{A}_{\varepsilon,c}(t) = \mathcal{A}_{0,c_0} + B_{\varepsilon,c}(t)$  schreiben, also gilt

$$B_{\varepsilon,c}(t) \begin{pmatrix} \xi \\ \Phi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f^{sk}(\gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(t + \cdot), \varepsilon, c) \Phi(\cdot) - D_1 f^{sk}(0, 0, c_0) \Phi(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

So definiert ist ebenfalls  $B_{\varepsilon,c}(t)$  für jedes feste  $t$  eine beschränkte lineare Abbildung von  $\hat{Y}$  nach  $\hat{Y}$ , so dass  $c \mapsto B_{\varepsilon,c}(t)V$  für ein festes  $V \in \hat{Y}$  zweimal stetig differenzierbar ist (da die Lösungen  $\gamma_{\varepsilon,c}(\cdot)$  sowohl zweimal stetig differenzierbar bezüglich  $c$  als auch bezüglich ihres Argumentes sind). Wir betrachten nun die abstrakte Gleichung

$$\dot{V}(t) = \mathcal{A}_{0,c_0}V(t) + (B_{\varepsilon,c}(t)V(t) + G^{sk}(t, V(t), \varepsilon, c)). \quad (3.180)$$

Man beachte hierbei, dass  $\mathcal{A}_{0,c_0}$  autonom ist und Lösungsoperatoren  $T_s(t)$ ,  $T_u(t)$  und  $T_c(t)$  besitzt (siehe die Bemerkung vor diesem Theorem). Diese Operatoren erfüllen

$$|T_c(t)\Pi_c V_0|_{\hat{Y}} \leq M|V_0|_{\hat{Y}} \quad |T_s(t)\Pi_s V_0|_{\hat{Y}} \leq M e^{-\sigma t}|V_0|_{\hat{Y}} \quad |T_u(-t)\Pi_u V_0|_{\hat{Y}} \leq M e^{-\sigma t}|V_0|_{\hat{Y}}$$

für  $t \in \mathbb{R}$  in der ersten, und  $t \geq 0$  in den beiden anderen Gleichungen (die Projektionen  $\Pi_u, \Pi_s, \Pi_c$  regularisieren wieder; siehe Lemma 3.4). Definiere noch  $T_{cs}(t) : E_c + E_s \rightarrow E_c + E_s$  durch  $T_{cs}(t) := T_c(t)\Pi_c + T_s(t)\Pi_s$  für  $t \geq 0$  und  $\Pi_{cs} := \Pi_s + \Pi_c$ . Außerdem gilt  $|T_{cs}(t)\Pi_{cs} V|_{\hat{Y}} \leq M|V|_{\hat{Y}}$  für alle  $t \geq 0$  und  $V \in \hat{Y}$ .

Wir suchen also  $V(\cdot)$  auf  $\mathbb{R}_-$  als Fixpunkt der Integralgleichung

$$\begin{aligned} V(t) &= T_u(t)V_0^u + \int_0^t T_u(t-s)\Pi_u [B_{\varepsilon,c}(s)V(s) + G_{mod}^{sk}(s, V(s), \varepsilon, c)] ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^t (T_{cs}(t-s)\Pi_{cs}) [B_{\varepsilon,c}(s)V(s) + G_{mod}^{sk}(s, V(s), \varepsilon, c)] ds, \end{aligned} \quad (3.181)$$

wobei  $V(\cdot) \in BC^{-\rho} := BC^{-\rho}(\mathbb{R}_-, \hat{Y})$  ist,  $V_0^u \in \hat{E}_u := E_u \cap \hat{Y}$  und dieser Raum mit der  $\hat{Y}$ -Norm versehen ist. Weiterhin ist in diesem Ausdruck:

$$G_{mod}^{sk}(t, V, \varepsilon, c) := \chi_\delta(\langle V, V \rangle_{\hat{Y}}) G^{sk}(t, V, \varepsilon, c),$$

d.h.  $G^{sk}$  ist mit einer Cut-off-Funktion  $\chi_\delta(\cdot)$  modifiziert, wobei  $\chi_\delta$  kompakten Träger in dem Intervall  $[-\delta, \delta]$  hat.

Die rechte Seite von (3.181) definiert nun eine wohldefinierte Abbildung  $\mathcal{K}$  von  $BC^{-\rho}$  in sich, falls wir  $0 < \rho < \sigma$  und das  $\delta$  der cut-off-Funktion klein genug wählen. Man beachte nun, dass die Operatornorm  $|B_{\varepsilon, c}(t)|_{L(\hat{Y}, \hat{Y})}$  uniform klein bezüglich  $t$  ist und für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $c \rightarrow c_0$  gegen Null konvergiert. Daher brauchen wir diesen Term nicht zusätzlich mit einer cut-off-Funktion zu modifizieren. Ist also  $\varepsilon \approx 0$ ,  $\delta \approx 0$  und  $c \approx c_0$ , so definiert  $\mathcal{K}(\cdot, V_0^u, c, \varepsilon)$  eine uniforme Kontraktion auf  $BC^{-\rho}$ , die zweimal stetig differenzierbar ist (die Nichtlinearität  $G^{sk}(s, \cdot, \tilde{\lambda}, c)$  ist eine  $C^2$ -Abbildung). Nun hängt  $\mathcal{K}$  für festes  $c, \varepsilon$  zweimal stetig differenzierbar von  $V_0^u$  ab und deswegen hängt auch der eindeutige Fixpunkt  $V_*(\cdot) \in BC^{-\rho}$  zweimal stetig differenzierbar von  $V_0^{cs}$  ab.

Als nächstes beobachten wir, dass  $\mathcal{K}$  stetig von  $c$  und  $\varepsilon$  abhängt: Um etwa die Stetigkeit bezüglich  $c$  zu zeigen, benutzen wir die Tatsache, dass die Abbildung  $c \mapsto \gamma_{\tilde{\lambda}, c}^{sk}(\cdot)$  als Abbildung mit Werten in  $BC^0(\mathbb{R}_+, \hat{Y})$  stetig ist. Also gilt für feste  $V \in \hat{Y}, \varepsilon \in (-\delta, \delta)$

$$|B_{\varepsilon, c+h}(s)V - B_{\varepsilon, c}(s)V|_{\hat{Y}} \leq \tilde{\delta}|V|_{\hat{Y}}$$

für ein gegebenes  $\tilde{\delta} > 0$ , falls  $h = h(\varepsilon, c)$  klein genug ist (und  $h$  hängt insbesondere nicht von  $s$  ab!). Deshalb gilt für ein festes  $V(\cdot) \in BC^{-\rho}$  die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} e^{\rho|t|} \left| \int_{-\infty}^t (T_{cs}(t-s)\Pi_{cs})B_{\varepsilon, c+h}(s)V(s)ds - \int_{-\infty}^t (T_{cs}(t-s)\Pi_{cs})B_{\varepsilon, c}(s)V(s)ds \right|_{\hat{Y}} \\ = e^{-\rho t} \left| \int_{-\infty}^t (T_{cs}(t-s)\Pi_{cs}) (B_{\varepsilon, c+h}(s)V(s) - B_{\varepsilon, c}(s)V(s)) ds \right|_{\hat{Y}} \\ \leq e^{-\rho t} \int_{-\infty}^t MC\tilde{\delta}|V(s)|_{\hat{Y}} ds \leq Ke^{-\rho t}\tilde{\delta} \int_{-\infty}^t e^{\rho s}|V|_{BC^{-\rho}} ds \\ \leq Ke^{-\rho t}\tilde{\delta} [e^{\rho s}/\rho]_{-\infty}^t |V|_{BC^{-\rho}} \leq K \cdot \tilde{\delta}|V|_{BC^{-\rho}} \end{aligned}$$

und die rechte Seite wird nach genügend kleiner Wahl von  $h > 0$  beliebig klein. Für die anderen Integralterme gilt eine ähnliche Abschätzung. Damit ist Stetigkeit der Abbildung  $c \rightarrow \mathcal{K}(V, c, \varepsilon)$  gezeigt.

Man beachte, dass die eben gerade vorgeführte Rechnung *falsch* ist, wenn die Abbildung  $c \mapsto B_{\varepsilon, c}(s)V$  nicht stetig als Abbildung mit Werten in  $BC^0(\mathbb{R}_+, \hat{Y})$  ist, was z.B. der Fall ist, wenn wir mit den *unskalierten* Lösungen  $\gamma_{\varepsilon, c}(\cdot)$  arbeiten würden!

Der springende Punkt ist nun die Beobachtung, dass  $\mathcal{K}$  sogar zweimal stetig differenzierbar von den Parametern  $c$  und  $\varepsilon$  abhängt: Nach Konstruktion besitzen alle periodischen Funktionen  $\gamma_{\varepsilon, c}^{sk}(t)$  die gleiche Periode und deswegen ist etwa die Abbildung  $c \mapsto \gamma_{\varepsilon, c}^{sk}(\cdot)$  für ein festes  $\varepsilon \approx 0$  als Abbildung mit Werten in  $BC^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^N)$  zweimal stetig differenzierbar. Zunächst einmal ist nun für festes  $V \in \hat{Y}$  und  $t, \varepsilon$  die Abbildung

$$\begin{aligned} (-\delta + c_0, c_0 + \delta) &\rightarrow \hat{Y} \\ c &\mapsto B_{\varepsilon, c}(t)V \end{aligned}$$

differenzierbar: Um dies einzusehen, schreiben wir diese Abbildung etwas expliziter in der Form

$$c \mapsto B_{\varepsilon,c}(t) \begin{pmatrix} \xi \\ \phi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f^{sk}(\gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(t + \cdot), \varepsilon, c) \phi(\cdot) - D_1 f^{sk}(0, 0, c_0) \phi(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.182)$$

Man sieht nun, dass nur die  $\mathbb{R}^N$ -Komponente des Punktes  $B_{\varepsilon,c}(t)V \in \hat{Y}$  von null verschieden ist. Diese ist zweimal stetig differenzierbar begl.  $c$ , also ist (3.182) zweimal differenzierbar bezüglich  $c$  in dem Raum  $\hat{Y}$ . Die anderen Richtungsableitungen existieren ebenfalls und sind stetig, weswegen die Frechet-Ableitung existiert.

Zusammen mit der Tatsache, dass  $c \mapsto \gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(\cdot)$  für ein festes  $\varepsilon \approx 0$  als Abbildung mit Werten in  $BC^0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^N)$  zweimal stetig differenzierbar ist, folgt, dass auch die Abbildung

$$c \mapsto B_{\varepsilon,c}(\cdot)V$$

für ein festes  $V \in \hat{Y}$  zweimal stetig differenzierbar ist, wenn man sie als Abbildung mit Werten in  $BC^0(\mathbb{R}_+, \hat{Y})$  auffasst. Außerdem ist für ein festes  $V(\cdot) \in BC^{-\rho}$  auch die Funktion

$$\begin{aligned} (-\delta + c_0, \delta + c_0) &\rightarrow BC^{-\rho}(\mathbb{R}_-, \hat{Y}) \\ c &\mapsto \Pi_u B_{\varepsilon,c}(\cdot)V(\cdot) \end{aligned}$$

zweimal stetig differenzierbar und wegen der Kettenregel auch die Funktion

$$\begin{aligned} (-\delta + c_0, \delta + c_0) &\rightarrow BC^{-\rho}(\mathbb{R}_-, \hat{Y}) \\ c &\mapsto \int_0^\bullet T_u(\bullet - s) \Pi_u B_{\varepsilon,c}(s)V(s) ds \end{aligned}$$

Analog zeigt man nun, dass auch die Abbildung  $c \mapsto \int_0^\bullet T_u(\bullet - s) \Pi_u G^{sk}(s, V(s), \varepsilon, c) ds$  als Abbildung nach  $BC^{-\rho}$  zweimal stetig differenzierbar ist. Also sind alle in (3.181) auftauchenden Integralterme als Elemente in  $BC^{-\rho}$  zweimal stetig differenzierbar bezüglich  $c$  und  $\varepsilon$  (die Argumentation hinsichtlich  $\varepsilon$  ist die gleiche). Nach dem Banachschen Fixpunktsatz mit Parametern (siehe [19]) ist auch der Fixpunkt  $V_*(\cdot)$  differenzierbar bezüglich  $c, \varepsilon$  und deswegen auch die Abbildung  $\varepsilon \mapsto \Pi_{cs} V_*(0, \varepsilon) =: \Psi(V_0^u, \varepsilon, c)$  und  $c \mapsto \Pi_{cs} V_*(0, c)$ . Schließlich setzen wir

$$W_{\varepsilon,c}^u(\Gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(0)) := \text{Graph}(\Psi(\cdot, \varepsilon, c)) + \Gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(0).$$

□

## Notation und weitere Mannigfaltigkeiten

- Seien  $\Phi_+^{cs}, \Phi_+^u$  die Lösungsoperatoren einer (Zentrums-) Dichotomie der Gleichung (3.162) auf  $\mathbb{R}_+$ , die den Abschätzungen

$$\|\Phi_+^{cs}(t, s)V\|_Y \leq M e^{\alpha|t-s|} \|V\|_Y \quad \|\Phi_+^u(s, t)V\|_Y \leq M e^{-\beta|t-s|} \|V\|_Y$$

für gewisse  $\alpha, \beta > 0$ ,  $t \geq s \geq 0$  und einem beliebigen  $V \in Y$  genügen, wobei  $\alpha > 0$  beliebig klein gewählt werden kann. Wir setzen nun  $\hat{E}_+^{cs}(0) := E_+^{cs}(0) \cap \hat{Y} := \text{Bild}(\Phi_+^{cs}(0, 0)|_Y) \cap \hat{Y}$ ,  $\hat{E}_+^u(0) := E_+^u(0) \cap \hat{Y} := \text{Bild}(\Phi_+^u(0, 0)|_Y) \cap \hat{Y}$  und beide sind mit der  $\hat{Y}$ -Norm versehen.

- Seien  $\Phi_+^s, \Phi_+^{cu}$  die Lösungsoperatoren einer (Zentrums-) Dichotomie der Gleichung (3.162) auf  $\mathbb{R}_+$ , die den Abschätzungen

$$\|\Phi_+^{cu}(s, t)V\|_Y \leq Me^{\alpha_2|t-s|}\|V\|_Y \quad \|\Phi_+^s(t, s)V\|_Y \leq Me^{-\beta_2|t-s|}\|V\|_Y$$

für gewisse  $\alpha_2, \beta_2 > 0$ ,  $t \geq s \geq 0$  und einem beliebigen  $V \in Y$  genügen, wobei  $\alpha_2 > 0$  beliebig klein gewählt werden kann. Wir setzen nun  $\hat{E}_+^s(0) := E_+^s(0) \cap \hat{Y} := \text{Bild}(\Phi_+^{s,sk}(0, 0)|_Y) \cap \hat{Y}$ ,  $\hat{E}_+^u(0) := E_+^u(0) \cap \hat{Y} := \text{Bild}(\Phi_+^{cs}(0, 0)|_Y) \cap \hat{Y}$  und beide sind mit der  $\hat{Y}$ -Norm versehen.

- Seien  $\Phi_-^{cs}, \Phi_-^u$  die Lösungsoperatoren einer (Zentrums-) Dichotomie der Gleichung (3.162) auf  $\mathbb{R}_-$  mit den Abschätzungen

$$\|\Phi_-^{cs}(t, s)V\|_Y \leq Me^{\alpha_3|t-s|}\|V\|_Y \quad \|\Phi_-^u(s, t)V\|_Y \leq Me^{-\beta_3|t-s|}\|V\|_Y$$

für gewisse  $\alpha_3, \beta_3 > 0$ ,  $t \leq s \leq 0$  und einem beliebigen  $V \in Y$ , wobei  $\alpha_3 > 0$  beliebig klein gewählt werden kann. Wir setze nun  $\hat{E}_-^{cs}(0) := E_-^{cs}(0) \cap \hat{Y} := \text{Bild}(\Phi_+^{cs}(0, 0)|_Y) \cap \hat{Y}$ ,  $\hat{E}_-^u(0) := E_-^u(0) \cap \hat{Y} := \text{Bild}(\Phi_+^u(0, 0)|_Y) \cap \hat{Y}$  und beide sind mit der  $\hat{Y}$ -Norm versehen.

- **Die lokale stark-stabile Mannigfaltigkeit:** Wir bezeichnen mit  $W_{\varepsilon, c}^{ss, loc}(0) = W_{\varepsilon, c}^{ss, loc}(0) \subset \hat{Y}$  die stark stabile Mannigfaltigkeit der Gleichung (3.161) nahe dem Gleichgewicht Null. Diese ist in der Null für die Parameterwerte  $(\varepsilon, c) = (0, c_0)$  tangential an  $\hat{E}_s$  und besteht aus allen Punkten  $0 \approx U_+ \in \hat{Y}$ , zu denen eine Lösung  $U(t)$  für  $t \geq 0$  von (3.161) mit  $U(0) = U_+$  existiert und  $|U(t)|_{\hat{Y}} \leq Me^{-\vartheta t}$  für  $t \geq 0$  und einem bezüglich  $U_+$  uniformen  $\vartheta > 0$  gilt. Die Konstruktion dieser Mannigfaltigkeit folgt analog zu der im letzten Abschnitt von Kapitel 3.4.1.
- **Die lokale zentrumsstabile Mannigfaltigkeit:** Wir bezeichnen mit  $W_{\varepsilon, c}^{cs, loc}(0) = W_{\varepsilon, c}^{cs, loc}(0) \subset \hat{Y}$  die lokale zentrumsstabile Mannigfaltigkeit der Gleichung (3.161) nahe dem Gleichgewicht Null. Diese ist in der Null für die Parameterwerte  $(\varepsilon, c) = (0, c_0)$  tangential an  $\hat{E}_c + \hat{E}_s$ . Die Konstruktion dieser Mannigfaltigkeit folgt analog zu der von  $W_{\varepsilon, c}^{cs, loc}(0)$  aus Kapitel 3.4.1 für die unskalierte Gleichung.
- **Die stark-stabile Mannigfaltigkeit nahe  $H^{sk}(0)$ :** Gelte  $H^{sk}(t) \rightarrow 0$  exponentiell schnell für  $t \rightarrow \infty$ . Dann bezeichnen wir mit  $W^{ss, +}(0)$  die stark-stabile Mannigfaltigkeit der Null nahe  $H^{sk}(0)$ . Diese ist in  $H^{sk}(0)$  für die Parameterwerte  $(\varepsilon, c) = (0, c_0)$  tangential an  $\hat{E}_+^s(0)$  und besteht aus allen Punkten  $U_+ \in \hat{Y}$  mit  $U_+ \approx H^{sk}(0)$ , zu denen eine Lösung  $U(t)$  für  $t \geq 0$  von (3.161) mit  $U(0) = U_+$  existiert und  $|U(t) - H^{sk}(t)|_{\hat{Y}} \leq Me^{-\sigma_2 t}$  für  $t \geq 0$  und einem bezüglich  $U_+$  uniformen  $\sigma_2 > 0$  gilt. Die Konstruktion dieser Mannigfaltigkeit folgt analog zum Beweis von Lemma 3.27.

### 3.6.3 Transversalität der skalierten Mannigfaltigkeiten

Wir suchen nun Lösungen von (3.161), also

$$\dot{U}(t) = \mathcal{F}^{sk}(U(t), \varepsilon, c), \quad (3.183)$$

die für Parameterwerte  $(\varepsilon, c) \neq (0, c_0)$  in Vorwärts- und Rückwärtszeit gegen den Orbit der periodischen Funktion  $\Gamma_{\varepsilon, c}^{sk}$  konvergieren. Für  $(\varepsilon, c) = (0, c_0)$  besitzt (3.183) die homokline

Lösung  $H^{sk}(t)$ . Diese liegt sowohl in  $W^{cs,+}(0)$  als auch in  $W^u(\Gamma^{sk}(0))$  für  $(\varepsilon, c) = (0, c_0)$ , wenn wir gegebenenfalls die homokline Lösung  $\tilde{H}^{sk}(t) := H^{sk}(t + t_0)$  und  $t_0 < 0$  klein genug betrachten.

Die gesuchten Lösungen, sollten also ebenfalls in  $W^{cs,+}(0) \cap W^u(\Gamma^{sk}(0))$  liegen, wobei a priori nicht klar ist, ob es überhaupt einen Schnittpunkt dieser Mannigfaltigkeiten für Parameterwerte  $(\varepsilon, c) \neq (0, c_0)$  gibt.

Um sicherzustellen, dass  $W_{\varepsilon,c}^{cs,+}(0)$  und  $W_{\varepsilon,c}^u(\Gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(0))$  einen Schnittpunkt für  $(\varepsilon, c) \neq (0, c_0)$  und insbesondere  $\varepsilon > 0$  haben, liegt es nahe, wie im vorigen Kapitel ein Transversalitätsargument anzuwenden. Wir betrachten dazu die erweiterten Mannigfaltigkeiten:

$$\begin{aligned}\hat{W}_\varepsilon^u &= \{(U, c) \in \hat{Y} \times \mathbb{R} : |c - c_0| < \delta, \quad U \in W_{\varepsilon,c}^u(\Gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(0))\} \\ \hat{W}_\varepsilon^{cs} &= \{(U, c) \in \hat{Y} \times \mathbb{R} : |c - c_0| < \delta, \quad U \in W_{\varepsilon,c}^{cs,+}(0)\}.\end{aligned}$$

Diese sind  $C^2$ -Mannigfaltigkeiten in  $\hat{Y} \times \mathbb{R}$ . Wir zeigen nun, dass sich diese beiden Mannigfaltigkeiten in  $(\tilde{H}(0), c_0)$  für  $\varepsilon = 0$  transversal schneiden, siehe Abbildung 3.11,

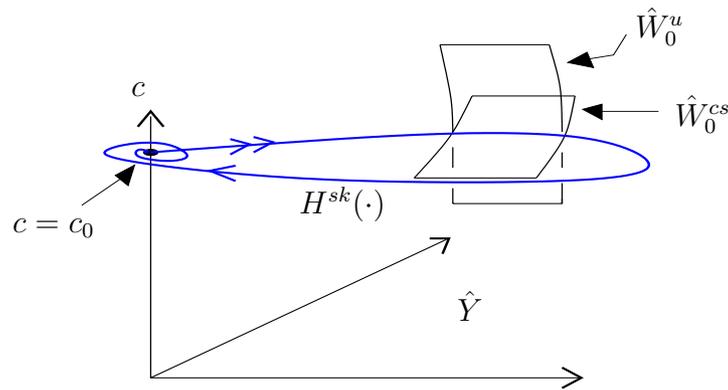


Abbildung 3.11: Die Abbildung zeigt den Schnitt der beiden Mannigfaltigkeiten  $\hat{W}_0^{cs}$  und  $\hat{W}_0^u$  entlang der Lösung  $(H^{sk}(\cdot), c_0)$  im erweiterten Phasenraum  $\hat{Y} \times \mathbb{R}$ .

### Lemma 3.29

Es gilt

$$T_{(H^{sk}(0), c_0)} \hat{W}_0^u + T_{(H^{sk}(0), c_0)} \hat{W}_0^{cs} = \hat{Y} \times \mathbb{R}.$$

### Beweis

Zunächst einmal können wir ganz analog zum Beweis des Lemmas 3.21 zeigen, dass

$$\begin{aligned}T_{(H^{sk}(0), c_0)} \hat{W}_0^{cs,+} &= (\hat{E}_+^{cs}(0) \times \{0\}) + \text{span}\{((H^{sk})'(0), 0)\} + \text{span}\{(\hat{V}_{0,c_0}^{cs,+}(0), 1)\}, \\ T_{(H^{sk}(0), c_0)} \hat{W}_0^{u,-} &= (\hat{E}_-^u(0) \times \{0\}) + \text{span}\{((H^{sk})'(0), 0)\} + \text{span}\{(\hat{V}_{0,c_0}^{u,-}(0), 1)\}\end{aligned}$$

gilt. Weiterhin besitzt der abgeschlossene Vektorraum  $\hat{E}_+^{cs}(0) + \hat{E}_-^u(0) \subset \hat{Y}$  die Kodimension 1: Dies folgt aus Lemma 3.20, angewendet auf die skalierten Operatoren unter Verwendung der Hypothese „Transversalität“, die wegen des Abschnitts „Die Hypothesen „EFE“ und „Transversalität“ für die skalierte Gleichung“ in Kapitel 3.6.1 gültig ist (bis auf das Nichtverschwinden des Melnikovintegrals (3.13)). Man beachte jedoch, dass wir

das Nichtverschwinden des Melnikovterms nicht für die Bestimmung der Kodimension des Unterraumes  $\hat{E}_+^{cs}(0) + \hat{E}_-^u(0) \subset \hat{Y}$  in Lemma 3.20 benötigen.

Die Vektoren  $\hat{V}_{0,c_0}^{cs,+}(0)$ ,  $\hat{V}_{0,c_0}^{u,-}(0)$  repräsentieren Vektoren der Tangentialräume in  $c$ -Richtung und können etwa durch Ableiten der Integralgleichungen (3.167) nach  $c$  für  $V_0^{cs} = 0$  bzw. der Gleichung (3.181) im Punkt  $V_0^u = \Pi_u H^{sk}(0)$  für  $c = c_0$  und  $\varepsilon = 0$  bestimmt werden. Für die Berechnung des Terms  $\hat{V}_{0,c_0}^{cs,+}(0)$  müssen wir die im Integranden auftretende Ableitung

$$\partial_c(\mathcal{G}(s, V(s, c), 0, c))\Big|_{c=c_0}$$

für ein festes  $s \geq 0$  berechnen, wobei  $V(\cdot, c)$  den Fixpunkt der Integralgleichung (3.167) für  $(\varepsilon, c) = (0, c)$  für die  $V_0^{cs}$ -Komponente „0“ bezeichnet und als „Abweichung“ der Lösung vom periodischen Orbit betrachtet werden kann. Schreiben wir  $V(s, c) = (v^c, v(\cdot, c)) \in \hat{Y}$  (und unterdrücken die  $s$ -Abhängigkeit), so gilt zunächst einmal  $V(s, c_0) = (v^{c_0}, v(\cdot, c_0)) = 0$  (da für diesen Parameterwert  $H^{sk}(t)$  selbst die Lösung ist). Wir machen nun auf die verschiedenen Stellen in der Funktion  $\mathcal{G}$  aufmerksam, an denen wir nach  $c$  differenzieren müssen und bezeichnen diese Stellen mit  $c_1, c_2, c_3$ . Vorsichtshalber bezeichnen wir diese Nichtlinearität mit  $\tilde{\mathcal{G}}$ ; dann gilt (vergleiche mit (3.169)):

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{G}}(t, (v^{c_1}, v(\cdot, c_1)), 0, c_2, c_3) = \\ & = T(0, c_3) \left( \begin{array}{c} f(h(t \cdot T(0, c_0) + (\theta \cdot T(0, c_0)/T(0, c_2))) + v(\theta/T(0, c_2), c_1), 0, c_3) \\ 0 \end{array} \right) \\ & - T(0, c_3) \left( \begin{array}{c} D_1 f(h(t \cdot T(0, c_0) + (\theta \cdot T(0, c_0)/T(0, c_2))), 0, c_0 [v(\theta/T(0, c_2), c_1)] \\ 0 \end{array} \right) \\ & - T(0, c_3) \left( \begin{array}{c} f(h(t \cdot T(0, c_0) + (\theta \cdot T(0, c_0)/T(0, c_2))), 0, c_0 \\ 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Wie man nun an dieser Darstellung sieht, gilt zunächst  $\partial_{c_1} \tilde{\mathcal{G}}(t, (v^{c_1}, v(\cdot, c_1)), 0, c_0, c_0)\Big|_{c_1=c_0} = \partial_{c_2} \tilde{\mathcal{G}}(t, (v^{c_0}, v(\cdot, c_0)), 0, c_2, c_0)\Big|_{c_2=c_0} = 0$ , da  $v(\cdot, c_0) = 0$  und sich die Terme, deren Ableitung von Null verschieden sind, in der Differenz aufheben. Deswegen gilt:

$$\begin{aligned} \partial_c \mathcal{G}(t, V(t, c), 0, c)\Big|_{c=c_0} & = \partial_{c_3}(\mathcal{G}(s, (v^{c_0}, v(\cdot, c_0)), 0, c_0, c_3))\Big|_{c_3=c_0} \\ & = T(0, c_0) \cdot \left( \begin{array}{c} \partial_c f(h(t \cdot T(0, c_0) + \theta), 0, c)\Big|_{c=c_0} \\ 0 \end{array} \right) \\ & = T(0, c_0) \cdot \left( \begin{array}{c} \partial_c g(h(t \cdot T(0, c_0) + \theta), 0, c)\Big|_{c=c_0} \\ 0 \end{array} \right), \end{aligned}$$

wobei  $g$  kurz vor Hypothese “Transversalität“ des Kapitels 3.2 definiert wurde. Also gilt:

$$\hat{V}_{0,c_0}^{cs,+}(0) = \int_0^0 \Phi_+^u(0, \xi) \cdot T(0, c_0) \cdot \left( \begin{array}{c} \partial_c g(h(\xi \cdot T(0, c_0) + \theta), 0, c_0) \\ 0 \end{array} \right) d\xi \quad (3.184)$$

und analog

$$\hat{V}_{0,c_0}^{u,-}(0) = \int_{-\infty}^0 \Phi_-^{cs}(0, \xi) \cdot T(0, c_0) \cdot \left( \begin{array}{c} \partial_c g(h(\xi \cdot T(0, c_0) + \theta), 0, c_0) \\ 0 \end{array} \right) d\xi. \quad (3.185)$$

Bezeichne nun wieder mit  $\Psi_*^0 \in Y$  einen Vektor, der bezüglich des  $Y$ -Skalarproduktes

senkrecht auf der Summe  $\hat{E}_+^{cs}(0) + \hat{E}_-^u(0)$  steht. Dann müssen wir nur noch zeigen, dass

$$\begin{aligned} & T(0, c_0) \cdot \left\langle \Psi_*^0, \int_{-\infty}^0 \Phi_-^{cs}(0, \xi) \begin{pmatrix} \partial_c g(h(\xi \cdot T(0, c_0) + \theta), 0, c_0) \\ 0 \end{pmatrix} d\xi \right\rangle_Y \\ & - T(0, c_0) \cdot \left\langle \Psi_*^0, \int_{\infty}^0 \Phi_+^u(0, \xi) \begin{pmatrix} \partial_c g(h(\xi \cdot T(0, c_0) + \theta), 0, c_0) \\ 0 \end{pmatrix} d\xi \right\rangle_Y \neq 0 \end{aligned}$$

gilt. Dies ist aber äquivalent zu

$$T(0, c_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \tilde{\Psi}(\xi) \Psi_*^0, \begin{pmatrix} \partial_c g(h(\xi \cdot T(0, c_0) + \theta), 0, c_0) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_Y d\xi \neq 0, \quad (3.186)$$

wobei wir

$$\tilde{\Psi}(t) = \begin{cases} \Phi_+^u(0, t)^* & : t \geq 0 \\ \Phi_-^{cs}(0, t)^* & : 0 > t \end{cases}$$

gesetzt haben. Und wie wir schon im Beweis des Lemmas 3.21 bemerkt haben, ist die erste Komponente  $\eta(\xi)$  der Funktion  $\tilde{\Psi}(t) \Psi_*^0$  eine beschränkte Lösung der adjungierten (skalierten) Gleichung (3.158), die in Vorwärtszeit exponentiell abklingt. Wir haben im Abschnitt „Die Hypothesen „EFE“ und „Transversalität“ für die skalierte Gleichung“ gezeigt, dass nun  $\eta(\xi) = \rho(\xi \cdot T(0, c_0))$  gilt, und  $\rho(\cdot)$  die eindeutig beschränkte Lösung der adjungierten (unskalierten) Gleichung (3.156) ist, die in Vorwärtszeit exponentiell fällt. Nach Substitution  $\xi_{neu} := \xi \cdot T(0, c_0)$  ist nun der Ausdruck (3.186) wegen der Hypothese „Transversalität“ von null verschieden.  $\square$

Der Beweis des folgenden Korollars ist nun vollständig analog zu dem von Korollar 3.3 und ist im wesentlichen nur eine Anwendung des impliziten Funktionensatzes.

#### Korollar 3.4

$\hat{W}_\varepsilon^{cs,+}$  und  $\hat{W}_\varepsilon^{u,+}$  besitzen für  $\varepsilon > 0$  einen Schnittpunkt  $(U^\varepsilon, c(\varepsilon))$ . Dieser hängt stetig von  $\varepsilon$  ab.

### 3.6.4 Algebraische Konvergenz der homoklinen Lösung

Wir haben mit dem letzten Korollar gezeigt, dass  $\hat{W}_\varepsilon^{cs,+}$  und  $\hat{W}_\varepsilon^{u,+}$  für  $\varepsilon > 0$  einen Schnittpunkt  $(U^\varepsilon, c(\varepsilon))$  besitzen. Die assoziierte Lösung  $U^\varepsilon(\cdot)$  von (3.183) für  $c = c(\varepsilon)$  mit  $U^\varepsilon(0) = U^\varepsilon$  konvergiert dann exponentiell gegen den Orbit von  $\Gamma^{sk} = \Gamma_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^{sk}(\cdot)$  für  $t \rightarrow -\infty$  und  $\Gamma^{sk}(\cdot)$  ist nach Definition der Parameter eine nichttriviale, periodische Lösung. Außerdem ist  $U^\varepsilon$  in  $W_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^{cs,+}(0)$  enthalten. Also konvergiert  $U^\varepsilon(t)$  nach Satz 3.19 für  $t \rightarrow \infty$  entweder gegen das Gleichgewicht oder gegen den Orbit der periodischen Funktion  $\Gamma^{sk}$ . Wir zeigen letztere Alternative:

#### Lemma 3.30

Konvergiere  $H(t)$  in Vorwärtszeit nicht exponentiell gegen Null, d.h. es gilt  $\sup_{t>0} |H(t)|_Y e^{\delta t} = \infty$  für jedes feste  $\delta > 0$ . Dann konvergiert auch  $H^{sk}(t)$  in Vorwärtszeit nicht exponentiell gegen null und es gilt

$$U^\varepsilon(t) \rightarrow \Gamma_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^{sk}(t + \theta_*)$$

für  $t \rightarrow \infty$  und einer asymptotischen Phase  $\theta_* = \theta_*(\varepsilon)$ .

### Beweis

Die für diesen Beweis benötigten Mannigfaltigkeiten sind in Abschnitt 3.6.2 eingeführt worden (man beachte auch den Abschnitt „Notation und weitere Mannigfaltigkeiten“ nach dem Beweis von Satz 3.20).

Es gilt nun  $U^0(0) = H^{sk}(0) \in W_{0,c_0}^{cs,+}(0)$ . Da außerdem  $H(t) \in W_{0,c_0}^{cs,loc}(0)$  für  $t > t_1$  und einem  $t_1 > 0$  groß genug ist, gilt auch  $U^\varepsilon(t_*) \in W_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^{cs,loc}(0)$  und die Differenz  $|H^{sk}(t_*) - U^\varepsilon(t_*)|_{\tilde{Y}}$  ist für ein geeignetes  $t_* > t_1$  und kleines  $\varepsilon > 0$  beliebig klein wählbar. Man beachte nämlich, dass  $U^\varepsilon(0) \in W_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^{cs,+}(0)$  und auf beliebig großen kompakten Intervallen  $[0, t_* + 1]$  ist die Differenz der Funktionswerte  $H^{sk}(t) - U^\varepsilon(t)$  uniform klein, falls nur  $\varepsilon$  klein genug ist.

Außerdem gilt  $H^{sk}(t_*) \notin W_{0,c_0}^{ss,loc}(0) \subset W_{0,c_0}^{cs,loc}(0)$ , da  $H^{sk}(\cdot)$  nach Annahme nur algebraisch (bzw. *nicht* exponentiell) gegen null konvergiert. Wegen der Stetigkeit von  $W_{\varepsilon,c}^{ss,loc}(0)$  bezüglich der Parameter existiert dann ein  $\rho > 0$  klein genug und eine Umgebung  $B_\rho(H^{sk}(t_*))$ , so dass  $U \notin W_{\varepsilon,c}^{ss,loc}(0)$  für alle  $U \in B_\rho(H^{sk}(t_*))$  und  $(\varepsilon, c) \approx (0, c_0)$ . Also ist wegen der Stetigkeit bezüglich  $\varepsilon$  auch  $U^\varepsilon(t_*) \notin W_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^{ss,loc}(0)$ , wenn man  $\varepsilon$  so klein wählt, dass  $U^\varepsilon(t_*) \in B_\rho(H^{sk}(t_*))$ . Damit konvergiert  $U^\varepsilon(t)$  in Vorwärtszeit gegen den Orbit der Funktion  $\Gamma_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^{sk}(\cdot)$ , der für  $\varepsilon > 0$  nichttrivial ist und bezüglich der Dynamik auf der Zentrums-mannigfaltigkeit stabil ist.  $\square$

Wir schreiben nun die zum Schnittpunkt  $(U^\varepsilon, c(\varepsilon))$  assoziierte Lösung  $U^\varepsilon(t)$  von (3.183) für  $t \in \mathbb{R}$  in der Form

$$U^\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} u(t, \varepsilon) \\ u(t + \cdot, \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $u(\cdot, \varepsilon)$  eine Lösung der Gleichung (3.160) auf  $\mathbb{R}$ . Diese konvergiert exponentiell schnell gegen den Orbit der periodischen Lösung  $\gamma_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^{sk}(\cdot)$  für  $t \rightarrow -\infty$  und ebenfalls gegen den Orbit von  $\gamma_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^{sk}(\cdot)$  für  $t \rightarrow \infty$  mit kleiner exponentieller Rate. Wir setzen nun

$$h^\varepsilon(t) := u\left(\frac{t}{T(\varepsilon, c(\varepsilon))}, \varepsilon\right)$$

und bemerken, dass  $h^\varepsilon$  eine Lösung der Gleichung  $\dot{z}(t) = f(z_t, \tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c)$  ist. Also haben wir die gesuchte Familie von Lösungen gefunden.

### 3.6.5 Exponentielle Konvergenz der homoklinen Lösung

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass der Punkt  $U^\varepsilon$  nicht in der stark-stabilen Mannigfaltigkeit  $W_{\varepsilon,c}^{ss,+}(0)$  für  $\varepsilon \neq 0$  liegt. Zusammen mit der Tatsache, dass die dazugehörige Lösung  $U(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  entweder gegen das Gleichgewicht Null oder einen Orbit einer periodischen Funktion konvergiert (nach Satz 3.19), hätten wir damit ebenfalls den Beweis abgeschlossen. Allerdings gilt nun  $U^0 = H^{sk}(0) \in W^{ss,+}(0)$  und wir müssen zeigen, dass die stark-stabile Mannigfaltigkeit  $W_{\varepsilon,c}^{ss,+}(0)$  und die instabile Mannigfaltigkeit  $W_{\varepsilon,c}^{u,loc}(\Gamma_{\varepsilon,c}^{sk}(0))$  keinen Schnittpunkt für  $(\varepsilon, c) \neq (0, c_0)$  besitzen. Die Argumentation in diesem Abschnitt ist im wesentlichen die gleiche wie im Abschnitt „Die erweiterten Mannigfaltigkeiten und Transversalität,“ aus Kapitel 3.5.2.

Wir benötigen folgendes Lemma.

#### Lemma 3.31

Es gilt  $|c(\varepsilon) - c_0| \leq K|\varepsilon|^2$

### Beweis

Zunächst einmal bemerken wir, dass  $c(\varepsilon)$  von der Ordnung  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  ist: dies folgt aus dem impliziten Funktionensatz und der Tatsache, dass die den Schnittpunkt  $(U^\varepsilon, c(\varepsilon))$  charakterisierende Gleichung zweimal stetig differenzierbar bezüglich  $\varepsilon$  ist. Der Beweis des Lemmas folgt nun analog zu dem von Lemma 3.26. Wir machen allerdings auf eine kleine Feinheit aufmerksam. Zum Beweis des Lemmas 3.31 benötigen wir die Entwicklung der zentrumsstabilen Mannigfaltigkeit  $W^{cs,+}(0)$  nahe  $H^{sk}(0)$ , siehe Satz 3.19. Die zentrumsstabile Mannigfaltigkeit wurde mit Hilfe der Integralgleichung

$$\begin{aligned} V(t) &= \Phi_+^{cs}(t, 0)V_0^{cs} + \int_0^t \Phi_+^{cs}(t, s)\mathcal{G}_{mod}(s, V(s), \varepsilon, c)ds \\ &+ \int_\infty^t \Phi_+^u(t, s)\mathcal{G}_{mod}(s, V(s), \varepsilon, c)ds, \end{aligned}$$

konstruiert. Wir bezeichnen die rechte Seite dieser Gleichung für  $t = 0$  mit  $\mathcal{K}(V(\cdot), V_0^{cs}, c, \varepsilon)$ . Also definiert  $\mathcal{K}(V(\cdot), V_0^{cs}, c, \varepsilon) + H^{sk}(0)$  einen Punkt auf  $W^{cs,+}(0)$  und es ist  $V(\cdot) = V(\cdot, \varepsilon, c) \in BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \hat{Y})$ . Speziell sind wir nun an der Entwicklung des Punktes  $U^\varepsilon \in W^{cs,+}(0)$  nach  $\varepsilon$  interessiert. Also bestimmen wir  $\partial_\varepsilon \mathcal{K}(V(\cdot), 0, c_0, \varepsilon)|_{\varepsilon=0}$  für  $V_0^{cs} = 0$  (und deswegen  $V(\cdot, 0, c_0) = 0$ ). Nun ist  $\varepsilon \mapsto \mathcal{K}(V(\cdot), V_0^{cs}, c, \varepsilon)$  differenzierbar und es gilt

$$\partial_\varepsilon \mathcal{K}(0, 0, c_0, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Man beachte dabei, dass man ebenfalls den Term  $V(\cdot)$  nach  $\varepsilon$  differenzieren muss. Dazu bedenke man die Definition von  $\mathcal{G}$  in (3.169), in der z.B. der Term  $f^{sk}(h_t^{sk} + \varphi, \varepsilon, c)$  auftaucht. Ausgeschrieben (mit  $V(t) = (\xi(t), \varphi(t + \cdot))$ ) nimmt dieser Term die Gestalt

$$f^{sk}(h_t^{sk} + \varphi_t, \varepsilon, c) = T(\varepsilon, c)f(h_t^{sk}(\theta/T(\varepsilon, c)) + \varphi_t(\theta/T(\varepsilon, c)), \tilde{\lambda}(\varepsilon, c), c)$$

an. Wegen (3.151) und (3.152) ist die Ableitung dieser Funktion nach  $\varepsilon$  null; die gleiche Argumentation gilt für alle anderen in  $\mathcal{G}$  auftauchenden Terme. Also existieren in der Entwicklung von  $W_{\varepsilon, c}^{cs,+}(0)$  nahe  $H^{sk}(0)$  keine  $\varepsilon$ -Terme, sondern nur  $\varepsilon^2$  oder  $\mathcal{O}(1)$ -Terme. Das gleiche gilt deswegen auch für die erweiterte Mannigfaltigkeit  $\hat{W}_\varepsilon^{cs}$  und analoges gilt für  $\hat{W}_\varepsilon^u$ . Aus dieser Tatsache und dem Beweis von Lemma 3.26 folgt nun der Beweis.  $\square$

Wir wollen nun die Distanz von Punkten auf  $W_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^{ss,+}(0)$  und  $W_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^u(\Gamma_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^{sk}(0))$  abschätzen. Sei dazu  $U^u \in W_{\varepsilon, c}^u(\Gamma^{sk}(0))$ . Dann gilt

$$U^u = A_H \varepsilon + V_0^u + \mathcal{O}(\varepsilon + \varepsilon(|c - c_0| + |V_0^u|) + |V_0^u|^2), \quad (3.187)$$

für  $A_H \neq 0$  und  $V_0^u \in \text{Bild}(\Pi_u)$ , was man aus der Integralgleichung (3.181) schließen kann (siehe die Argumentation kurz vor Gleichung (3.177) für eine Definition von  $\Pi_u$ ).

Wir schätzen nun den Abstand der instabilen Faser  $W^u(\Gamma^{sk}(0)) = W_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^u(\Gamma_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^{sk}(0))$  des Punktes  $\Gamma_{\varepsilon, c}^{sk}(0)$  und der instabilen Mannigfaltigkeit der Null  $W^u(0) = W_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^u(0)$  nahe  $H(0)$  ab.  $W^u$  ist an der Stelle  $0 \in W_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^u(0)$  tangential an  $\hat{E}_u$  für  $(\varepsilon, c) = (0, c_0)$  und für jeden Punkt  $U_- \in W_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^u(0)$  mit  $U_- \approx 0$  existiert eine Lösung  $U(t)$  für  $t \leq 0$  der skalierten Gleichung, die für  $t \rightarrow -\infty$  exponentiell gegen null konvergiert.

Wir betrachten nun die Differenz zweier Punkte in  $W^u(\Gamma^{sk}(0))$  und  $W^u(0)$  mit gleicher Tangentialkomponente  $V_0^u$ . Dazu benutzen wir die Entwicklung (3.187), dann gilt

$$\varepsilon|A_H| - K\varepsilon(|V_0^u| + |c(\varepsilon) - c_0|) \geq \varepsilon|A_H| - K\varepsilon(r + \varepsilon) \quad (3.188)$$

wobei  $r > 0$  den Abstand von  $H^{sk}(0)$  zum Gleichgewicht 0 bezeichnet und wir nicht die  $|V_0^u|^2$ -Terme betrachten müssen, die sich auf  $\varepsilon = 0$  beziehen und wegen  $W_{0,c}^u(0) = W_{0,c}^u(\Gamma_{0,c}^{sk}(0))$  in der Differenz aufheben. Wählen wir  $r$  klein genug (indem wir notfalls  $H^{sk}(t + t_0)$  anstatt  $H^{sk}(t)$  für ein  $t_0 < 0$  klein genug betrachten), so ist die rechte Seite von (3.188) größer als  $\rho\varepsilon$ , für ein  $\rho > 0$ .

Auf der anderen Seite ist der Abstand zweier Punkte in  $W_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^{ss,+}(0)$  und in  $W_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^u(0)$  von der Ordnung  $\varepsilon^2$ . Warum? Dazu betrachten wir den Punkt  $U^\varepsilon$ , projizieren  $U^\varepsilon - H^{sk}(0)$  mit Hilfe der Projektion  $\Phi_+^s(0,0) : Y \rightarrow Y$  auf den Unterraum  $\hat{E}_+^s(0)$  (man beachte, dass  $\Phi_+^s(0,0)$  Punkte in  $\hat{Y}$  wieder nach  $\hat{Y}$  abbildet) und bezeichnen die so konstruierte Komponente mit  $V_\varepsilon^s$ . Außerdem projizieren wir  $U^\varepsilon$  mit Hilfe der Projektion  $\Pi_u : Y \rightarrow Y$  (siehe (3.177) für die Definition dieser Projektion) auf den Unterraum  $\hat{E}_u$  und bezeichnen die so konstruierte Komponente mit  $V_\varepsilon^u$ . Wir wählen nun eine Projektion auf ein Komplement des in  $Y$  abgeschlossenen Unterraumes  $E_+^s(0) + E_u \subset Y$  bezüglich des umgebenden Raumes  $E_+^{cs}(0) + E_u \subset Y$ , der das  $Y$ -Skalarprodukt besitzt (siehe die Auflistung nach dem Beweis von Satz 3.20 für die Definition von  $E_+^s(0), E_+^{cs}(0)$ ); wir bezeichnen diese (nicht eindeutig festgelegte) Projektion mit  $\tilde{P}^c$  (dessen Kern  $E_+^s(0) + E_u \subset Y$  ist).

Nun betrachten wir den Punkt  $V_\varepsilon^s \in \hat{E}_+^s(0)$ . Diesen Tangentialvektor setzen wir in die Entwicklung der Mannigfaltigkeit  $W_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^{ss,+}(0)$  ein; den so erhaltenen Punkt nennen wir  $H_\varepsilon^s$ . Wir erhalten dann:

$$H_\varepsilon^s = H^{sk}(0) + V_\varepsilon^s + \mathcal{O}(|V_\varepsilon^s|^2 + |c(\varepsilon) - c_0| + \varepsilon^2)$$

Analog erhalten wir für den Punkt  $H_\varepsilon^u \in W_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^u(0)$ , der die Tangentialkomponente  $V_\varepsilon^u \in \hat{E}_u$  besitzt:

$$H_\varepsilon^u = U_\varepsilon^u + \mathcal{O}(|U_\varepsilon^u|^2 + |c(\varepsilon) - c_0| + \varepsilon^2).$$

Differenz dieser beiden Punkte und anschließende Projektion auf den Zentrumsanteil via  $\tilde{P}^c$  liefert:

$$\begin{aligned} Z := \tilde{P}^c[H_\varepsilon^u - H_\varepsilon^s] &= \tilde{P}^c[V_\varepsilon^u - V_\varepsilon^s] + \mathcal{O}(|V_\varepsilon^u|^2 + |c(\varepsilon) - c_0| + \varepsilon^2) \\ &= \mathcal{O}(|V_\varepsilon^u|^2 + |c(\varepsilon) - c_0| + \varepsilon^2) \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon \geq 0$  hat der so erhaltene Vektor  $Z$  also die Gestalt  $Z = \varepsilon^2 \cdot \mathcal{O}(\varepsilon^2 + |(c(\varepsilon) - c_0)| + |V_\varepsilon^s| + |V_\varepsilon^u|)$ , da die Tangentialkomponente  $V_\varepsilon^s - V_\varepsilon^u$  nach der Projektion auf den Zentrumsanteil stets verschwindet (diese besitzt eventuell noch ein  $\varepsilon$ -Faktor) und alle anderen Termen in der Entwicklung mit  $\varepsilon^2$  beginnen (man beachte dazu auch den Beweis von Lemma 3.31 für die Entwicklung von  $|c(\varepsilon) - c_0|$ ). Wir bemerken, dass sich alle Terme in der Entwicklung ohne den Vorfaktor  $\varepsilon$  sowieso auf  $\varepsilon = 0$  beziehen; für diesen Parameterwert schneiden sich aber die Mannigfaltigkeiten  $W^{ss,+}(0)$  und  $W^u(0)$ , so dass die Differenz null ist. Zusammengefasst zeigt diese Argumentation, dass die *Zentrumskomponente* vom Abstand des Schnittpunktes zwischen diesen beiden Mannigfaltigkeiten von der Ordnung  $\varepsilon^2$  ist.

Also können sich

$$W_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^{ss,+}(0) \quad W_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^u(\Gamma_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^{sk}(0))$$

nicht nahe  $H(0)$  schneiden. Denn setzen wir die Tangentialkomponente  $V_u^\varepsilon \in \hat{E}_u$  sowohl in die Entwicklung der Mannigfaltigkeit  $W_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^u(0)$  als auch in die Entwicklung der Mannigfaltigkeit  $W_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^u(\Gamma_{\varepsilon, c(\varepsilon)}^{sk}(0))$  ein, so erfüllt die Differenz der so erhaltenen Punkte die Abschätzung (3.188). Auch *nach* Projektion auf ein Komplement des Unterraumes  $E_+^s(0) + E_u \subset Y$  bezüglich des umgebenden Raumes  $E_+^{cs}(0) + E_u^{sk}$  mit Hilfe der Projektion  $\tilde{P}_c$ , kann man die Differenz durch einen Term  $a \cdot \varepsilon$ , mit  $a > 0$ , nach *unten* abschätzen, da der Vektor  $A_H$  nicht in  $E_+^s(0) + E_u$  liegt. Diese Behauptung ist nach dem folgenden Lemma klar. Dieses besagt, dass sich Punkte des Eigenraumes  $E_+^s(0) \subset Y$  dem Vektorraum  $E_s \subset Y$  „annähern“. Für den Beweis des Lemmas erinnern wir daran, dass  $\Phi_+^s(t, s)$  für  $t \geq s \geq 0$  ein Lösungsoperator bezüglich einer Dichotomie der Gleichung  $\dot{V}(t) = \mathcal{A}_{t_0}^{sk}(t)V(t)$  auf  $\mathbb{R}_+$  ist, wobei

$$\mathcal{A}_{t_0}^{sk}(t) = \begin{pmatrix} D_1 f^{sk}(h^{sk}(t + t_0 + \cdot), 0, c_0) \bullet \\ \partial_\theta \bullet \end{pmatrix}$$

gilt. Trotzdem unterdrücken wir im weiteren die  $t_0$ -Abhängigkeit des Operators  $\Phi_+^s$ .

### Lemma 3.32

Sei  $W_* \in E_+^s(0) := \text{Bild}(\Phi_+^s(0, 0)|_Y)$ . Dann gilt  $|W_* - \Pi_s W_*|_Y = |\Phi_+^s(0, 0)W_* - \Pi_s W_*|_Y \leq M(t_0)|W_*|_Y$ , wobei  $M(t_0) \rightarrow 0$  für  $t_0 \rightarrow -\infty$  gilt.

### Beweis

Wie immer beweisen wir nur die Behauptungen für den translatierten Operator  $\mathcal{A}_\mu^{sk}(t)$ , mit

$$\mathcal{A}_\mu^{sk}(t) \begin{pmatrix} \xi \\ \psi(\cdot) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\mu\xi + D_1 f^{sk}(h^{sk}(t + t_0 + \cdot), 0, c_0)[e^{\mu \cdot} \psi(\cdot)] \\ \partial_\theta \psi(\cdot) \end{pmatrix}.$$

Dieser ist hyperbolisch für ein  $\mu > 0$  klein genug und besitzt eine exponentielle Dichotomie auf  $\mathbb{R}_+$ , mit zugehörigen Lösungsoperatoren  $\tilde{\Phi}_+^s$  und  $\tilde{\Phi}_+^u$ . Wir schreiben nun  $\mathcal{A}_\mu^{sk}(t) = \mathcal{A}_\infty + B(t)$  mit

$$\mathcal{A}_\infty \begin{pmatrix} \xi \\ \psi(\cdot) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\mu\xi + D_1 f^{sk}(0, 0, c_0)[e^{\mu \cdot} \psi(\cdot)] \\ \partial_\theta \psi(\cdot) \end{pmatrix}.$$

Die Operatoren der exponentiellen Dichotomie (auf  $\mathbb{R}$ ) der Gleichung  $\dot{U} = \mathcal{A}_\infty U$  nennen wir  $e^{A_\infty^s t}$  für  $t \geq 0$  und  $e^{A_\infty^u t}$  für  $t \leq 0$ , wobei  $|e^{A_\infty^s t} U|_Y \leq M e^{-\beta|t|} |U|_Y$  für  $t \geq 0$  und  $|e^{A_\infty^u t} U|_Y \leq M e^{-\iota|t|} |U|_Y$  für  $t \leq 0$  gilt und  $0 < \beta < \iota$  wählbar ist.

Mittels Integration kann man nun zeigen (siehe auch [47]), dass der Operator  $\tilde{\Phi}_+^s(t, s)$  folgende Integralgleichung für  $t \geq s \geq 0$  erfüllt:

$$\begin{aligned} e^{A_\infty^s(t-s)} W_* &= \tilde{\Phi}_+^s(t, s) W_* + e^{A_\infty^s t} \tilde{\Phi}_+^u(0, s) W_* + \int_0^\infty e^{A_\infty^u(t-\tau)} B(\tau) \tilde{\Phi}_+^s(\tau, s) W_* d\tau \\ &\quad - \int_s^t e^{A_\infty^s(t-\tau)} B(\tau) \tilde{\Phi}_+^s(\tau, s) W_* d\tau + \int_0^s e^{A_\infty^s(t-\tau)} B(\tau) \tilde{\Phi}_+^u(\tau, s) W_* d\tau. \end{aligned}$$

Unter der Beachtung von  $W_* \in E_+^s$  und  $t = s = 0$  ergibt sich

$$\Pi_s W_* = \tilde{\Phi}_+^s(0, 0) W_* + \int_0^\infty e^{A_\infty^u(-\tau)} B(\tau) \tilde{\Phi}_+^s(\tau, 0) W_* d\tau.$$

Die Behauptung ist also bewiesen, falls wir zeigen, dass der Integralterm für  $t_0 \rightarrow -\infty$  gegen Null konvergiert (uniform für  $|W_*|_Y \leq 1$  etwa). Vergessen wir kurz einmal  $B(\tau)$ , so beobachten wir, dass der Integrand exponentiell abklingt und der dominierende Term die Form  $Me^{-\zeta\tau}$  für ein  $\zeta > 0$  besitzt. Wir bemerken nun, dass auch die Operatornorm von  $|B(\tau)|_{L(Y,Y)}$  exponentiell abklingt, falls  $\tau \rightarrow \infty$ . Lediglich auf einem beschränkten Intervall  $[-K, K]$  ist die Operatornorm von der Ordnung 1 (nämlich dort, wo der Homokline nicht nahe der Gleichgewichte ist). Dieses Intervall kann man mit Hilfe von  $t_0 \rightarrow -\infty$  nach *rechts* verschieben, so dass es durch das Abklingverhalten des restlichen Integranden dominiert wird. Damit ist alles gezeigt.  $\square$

Wir zeigen nun, wie man den Beweis abschließt. Dazu betrachte wir den Vektor  $V_s^{t_0} := \Phi_+^{s,sk}(0,0)A_H$ , der von  $t_0 < 0$  abhängt. Wir wollen nun annehmen, dass  $A_H$  keine „Zentrumskomponente“ besitzt, also die Darstellung  $A_H = V_s^{t_0} + V_u^{t_0}$  für ein  $V_u^{t_0} \in \hat{E}_u^{sk}$  hat und einen Widerspruch herleiten. Zunächst einmal ist nun die  $Y$ -Norm des Vektors  $V^{t_0}$  uniform beschränkt bezüglich  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Dies folgt aus den Beweisschritten „Schritt I“ und „Schritt II“ kurz nach Gleichung (3.56). Das obige Lemma besagt dann, dass sich der Punkt  $V_s^{t_0}$  bezüglich der  $Y$ -Norm für  $t_0 \rightarrow -\infty$  dem Punkt  $\Pi_s^{sk}V_s^{t_0}$  nähert. Für die feste Projektion  $\Pi_c : Y \rightarrow Y$  mit Kern  $E_u^{sk} + E_s^{sk} \subset Y$  (siehe Definition (3.177)) und Bild  $E_c^{sk} \subset Y$  gilt nun  $\Pi_c A_H \neq 0$  (siehe Darstellung (3.81) und die explizite Darstellung von  $A_H$  in den Zeilen davor). Andererseits zeigt aber unsere Annahme, dass  $A_H = V_s^{t_0} + V_u^{t_0}$  für  $t_0 \rightarrow -\infty$  einem Punkt des Vektorraumes  $E_u^{sk} + E_s^{sk}$  beliebig nahe kommt und deswegen die  $\Pi_c$ -Komponente verschwinden muss. Dies ist ein Widerspruch.

Damit ist gezeigt, dass  $U^\varepsilon(t)$  in Vorwärtszeit  $t \rightarrow \infty$  gegen den Orbit der periodischen Lösung  $\Gamma_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^{sk}(\cdot)$  konvergiert. Sei nun

$$U^\varepsilon(t) = (u(t, \varepsilon), u(t + \cdot, \varepsilon)).$$

Dann ist  $u(\cdot, \varepsilon)$  eine Lösung der Gleichung (3.160) auf  $\mathbb{R}$ . Diese konvergiert exponentiell schnell gegen den Orbit der periodischen Lösung  $\gamma_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^{sk}(\cdot)$  für  $t \rightarrow -\infty$  und gegen den Orbit von  $\gamma_{\varepsilon,c(\varepsilon)}^{sk}(\cdot)$  für  $t \rightarrow \infty$  mit kleiner exponentieller Rate. Setzen wir noch

$$h^\varepsilon(t) := u\left(\frac{t}{T(\varepsilon, c(\varepsilon))}, \varepsilon\right),$$

so haben wir die gesuchte Familie von Lösungen gefunden.

