

## 3.4 Hopfverzweigung und invariante Mannigfaltigkeiten

Wir werden uns in diesem Kapitel einem für den Beweis des Hauptresultates 3.1 sehr wichtigen Hilfsmittel widmen: der Existenz invarianter Mannigfaltigkeiten für die abstrakte Gleichung

$$\begin{pmatrix} \partial_t \xi(t) \\ \partial_t \varphi(t, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\varphi(t, \cdot), \tilde{\lambda}, c) \\ \partial_\theta \varphi(t, \theta) \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

mit  $(\xi(t), \varphi(t, \cdot)) \in X = \{(\xi, \phi(\cdot)) \in \mathbb{R}^N \times H^1([-a, b], \mathbb{R}^N) : \phi(0) = \xi\}$ . Eine wichtige Beobachtung ist, dass diese Gleichung die homokline Lösung  $H(t) = (h(t), h_t)$  besitzt. Diese Tatsache wird es uns zusammen mit den Ergebnissen des Kapitels 3.3 ermöglichen, die Existenz invarianter Mannigfaltigkeiten in der Nähe eines Punktes auf dem homoklinen Orbit sicherzustellen. Außerdem zeigen wir in Lemma 3.15, dass Lösungen mit Startwerten in diesen Mannigfaltigkeiten Lösungen der ursprünglichen Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \tilde{\lambda}, c) \quad (3.77)$$

induzieren.

Wir geben nun eine kurze Übersicht über die in Abschnitt 3.4.1 konstruierten Mannigfaltigkeiten. Der Index „+/-“ macht deutlich, ob Lösungen zu Anfangswerten in den entsprechenden Mannigfaltigkeiten in Vorwärts- oder Rückwärtszeit existieren.

- Die Zentrumsstabile Mannigfaltigkeit  $W^{cs,+}(0)$  des Gleichgewichtes Null in der Nähe des Punktes  $H(0)$ .
- Die Zentrumsinstabile Mannigfaltigkeit  $W^{cs,-}(0)$  des Gleichgewichtes Null in der Nähe des Punktes  $H(0)$ .
- Die stark-instabile Mannigfaltigkeit  $W^{u,-}(0)$  des Gleichgewichtes Null in der Nähe des Punktes  $H(0)$ .
- Die lokale stark-stabile Mannigfaltigkeit  $W^{ss,loc}(0)$  in der Nähe des Gleichgewichtes.
- Die lokale stark-instabile Mannigfaltigkeit  $W^{u,loc}(0)$  in der Nähe des Gleichgewichtes.
- Die stark-instabile Faser  $W^{u,loc}(\Lambda)$  bezüglich eines Punktes  $\Lambda$  auf der Zentrumsmanigfaltigkeit. Diese Mannigfaltigkeit konstruieren wir allerdings erst in Abschnitt 3.5.2.

Bevor wir diese Mannigfaltigkeiten konstruieren, kümmern wir uns im nächsten Abschnitt zunächst um die Existenz periodischer Lösungen der Gleichung (3.77), die eine kleine Amplitude besitzen und in der Nähe des Gleichgewichtes Null für Parameterwerte  $(\tilde{\lambda}, c) \approx (0, c_0)$  auftreten.

### Hopfverzweigung

In diesem Abschnitt wollen wir nun die Existenz periodischer Lösungen der Gleichung (3.77) beweisen, die eine kleine Amplitude besitzen. Der Schlüssel zum Erfolg ist wieder einmal die abstrakte Gleichung

$$\begin{pmatrix} \partial_t \xi(t) \\ \partial_t \varphi(t, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f(0, 0, c_0) \\ \partial_\theta \varphi(t, \theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(\varphi(t, \cdot), \tilde{\lambda}, c) - D_1 f(0, 0, c_0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

mit  $(\xi(t), \varphi(t, \cdot)) \in X = \{(\xi, \phi(\cdot)) \in \mathbb{R}^N \times H^1([-a, b], \mathbb{R}^N) : \phi(0) = \xi\}$ . Nach Hypothese „Hopf“ besitzt der Linearteil der Gleichung (3.78) zwei rein imaginäre Eigenwerte  $\pm i\omega$ . Direkte Anwendung des Satzes 2.6 in der Null sichert nun die Existenz einer zweidimensionalen Zentrumsmannigfaltigkeit  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\tilde{\lambda}, c}$ , die glatt von den Parametern  $\tilde{\lambda}$  und  $c$  abhängt. Analog zu Gleichung (1.43) in der Einleitung können wir zu dieser Mannigfaltigkeit eine reduzierte Gleichung

$$\dot{x}(t) = f_{red}(x(t), \tilde{\lambda}, c), \quad (3.79)$$

mit  $x \in \mathbb{R}^2$  assoziieren. Das Vektorfeld  $f_{red}(x, \tilde{\lambda}, c)$  ist in einer kleinen Umgebung des Gleichgewichtes Null definiert und hängt für festes  $x \in \mathbb{R}^2$  differenzierbar von den Parametern  $\tilde{\lambda}, c$  ab. Der Linearteil  $D_1 f_{red}(0, 0, c_0)$  besitzt nun nach Annahme die beiden Eigenwerte  $\pm i\omega$ . Diese Tatsache ermöglicht es uns, eine lokale Koordinatentransformation zu finden, die gewisse Terme zweiter und dritter Ordnung in der Taylorentwicklung des Vektorfeldes  $f_{red}(\cdot, \tilde{\lambda}, c)$  eliminiert. Nach [25] existieren nämlich nahe null definierte, analytische Koordinatentransformationen, die alle Terme in der Taylorentwicklung von  $f_{red}$  eliminieren, die für  $x = (u, v)$  *nicht* von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} (u^2 + v^2)u \\ (u^2 + v^2)v \end{pmatrix}$$

sind. Schreiben wir unser reduziertes Vektorfeld also in komplexen Koordinaten  $z = x + iy$  und  $\bar{z} = x - iy$ , so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Taylorentwicklung von  $f_{red}$  nahe null folgende Gestalt hat:

$$f_{red}(z, \tilde{\lambda}, c) = (b_1(\tilde{\lambda}, c) + i[d_1(\tilde{\lambda}, c)])z + d(\tilde{\lambda}, c)z|z|^2 + \text{h.o.t} \quad (3.80)$$

mit  $b_1(0, c_0) = 0$ ,  $d_1(0, c_0) = \omega$ , siehe auch [25]. Wir bemerken, dass  $f_{red}$  nur für Parameterwerte  $(\tilde{\lambda}, c)$  in der Nähe von  $(0, c_0)$  definiert ist und stets  $f_{red}(0, \tilde{\lambda}, c) = 0$  gilt. Wir können nun das Hauptresultat dieses Abschnittes formulieren:

### Lemma 3.14

Seien die Hypothesen „Hopf“ und „Superkritisch“ aus Abschnitt 3.2 erfüllt. Dann existiert eine Familie periodischer Lösungen  $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) = (\gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t), \gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t + \cdot))$  für  $\tilde{\lambda} \approx 0$  und  $c \approx c_0$ , so dass  $c \mapsto \Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t)$  als Abbildung mit Werten in  $X$  für festes  $t$  zweimal stetig differenzierbar ist und  $\tilde{\lambda} \mapsto \Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t)$  als Abbildung mit Werten in  $X$  für festes  $t$  stetig ist. Diese periodischen Lösungen sind stabil bezüglich der Dynamik auf Zentrumsmannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  in null und besitzen für  $\tilde{\lambda} \geq 0$  die Entwicklung

$$\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) = A_H \sqrt{\tilde{\lambda}} e^{i\omega t} + \mathcal{O}(|c - c_0| \sqrt{\tilde{\lambda}} + |\tilde{\lambda}|). \quad (3.81)$$

für ein  $A_H \in X$  mit  $A_H \neq 0$ . Außerdem ist  $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) \equiv 0$  für  $\tilde{\lambda} = 0$ .

### Beweis

Aufgrund der Präsenz rein imaginärer Eigenwerte des Linearteils  $D_1 f_{red}(0, \tilde{\lambda}, c)$  liegt es nahe, einen Standard-Satz über Hopfverzweigungen für *gewöhnlicher Differentialgleichungen* anzuwenden (siehe etwa das Buch von [28] oder [25]). Welche Voraussetzungen müssen wir dazu überprüfen? Die wichtigste Annahme ist wohl, dass die Eigenwerte  $\pm i\omega$  die imaginäre Achse unter Variation des Parameters  $\tilde{\lambda}$  mit nichtverschwindender Geschwindigkeit kreuzen. Nach Konstruktion der Zentrumsmannigfaltigkeit stimmen aber die Eigenwerte der Linearisierung  $D_1 f_{red}(0, \tilde{\lambda}, c)$  des reduzierten Vektorfeldes mit  $\mu(\tilde{\lambda}, c)$ ,  $\mu(\tilde{\lambda}, c)$

überein, wobei der Balken über  $\mu(\tilde{\lambda}, c) \in \mathbb{C}$  das komplex konjugierte Element bezeichnet. Wir erinnern daran, dass die komplexen Zahlen  $\mu(\tilde{\lambda}, c)$  durch  $\mu(0, c_0) = i\omega$  und  $\det\Delta(\mu(\tilde{\lambda}, c), \tilde{\lambda}, c) = 0$  charakterisiert sind (siehe auch den Abschnitt kurz vor Hypothese „Hopf“). Außerdem stellt die Hypothese „Hopf“ sicher, dass die Eigenwerte  $\mu(\tilde{\lambda}, c), \mu(\tilde{\lambda}, c)$ , die für  $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c_0)$  den Realteil null besitzen, die imaginäre Achse bezüglich  $\tilde{\lambda}$  mit nicht-verschwindender Geschwindigkeit kreuzen. Also liefert das Resultat für Hopfverzweigungen gewöhnlicher Differentialgleichungen die Existenz einer Familie periodischer Lösungen auf der Zentrumsmanigfaltigkeit, die wir mit  $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(\cdot)$  bezeichnen wollen (und wir setzen  $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) \equiv 0$ , falls für die Parameterwerte  $\tilde{\lambda}, c$  kein periodischer Orbit auftritt).

Die Frage, ob diese periodischen Lösungen stabil oder instabil bezüglich der Dynamik der reduzierten Gleichung (3.79) sind, können wir allerdings nicht allein an den Eigenwerten des Linearteils  $D_1 f_{red}(0, \tilde{\lambda}, c)$  ablesen. Wir beweisen nun zunächst das Lemma 3.14 unter der zusätzlichen Annahme, dass das *gesamte* Vektorfeld rotationsäquivalent ist, d.h. es gilt  $f_{red}(e^{i\alpha}z, \tilde{\lambda}, c) = e^{i\alpha}f_{red}(z, \tilde{\lambda}, c)$  für jedes  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \approx 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Man beachte, dass wir aufgrund unserer Koordinatentransformation bereits sichergestellt haben, dass die Taylorentwicklung von  $f_{red}$  inklusive dritter Ordnungsterme rotationsäquivalent ist (man siehe die Darstellung (3.80)).

Um die reduzierte Dynamik (3.79) besser zu verstehen, gehen wir zu Polarkoordinaten  $(r, \alpha)$  über und erhalten die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1(c)\tilde{\lambda}r + \tilde{a}_2(c)r^3 + \mathcal{O}(r^5 + \tilde{\lambda}r^3 + \tilde{\lambda}^2) \\ \omega + \tilde{b}_1(r, c, \tilde{\lambda})\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

Wegen der Rotationsäquivalenz des reduzierten Vektorfeldes  $f_{red}$  sind die Koeffizienten  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$  unabhängig von  $\alpha$ . Aufgrund von Hypothese „Superkritisch“ ist  $\tilde{a}_2(c) < 0$  für  $c \approx c_0$  und  $\tilde{a}_1(c) > 0$ : Also tritt in der  $\dot{r}$ -Gleichung für den Parameterwert  $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c_0)$  eine Pitchfork-Verzweigung auf, die Gleichgewichtslösungen  $r_*$  liefert, mit

$$r_*(\tilde{\lambda}, c) = \sqrt{-\tilde{a}_1(c)/\tilde{a}_2(c)}\sqrt{\tilde{\lambda}} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}). \quad (3.83)$$

Außerdem zeigt (3.83), dass  $r_*$  stetig differenzierbar von  $c$  aber nur stetig von  $\tilde{\lambda}$  nahe  $\tilde{\lambda} = 0$  abhängt. Für  $r(t) := r_*$  kann man also die  $\alpha$ -Gleichung lösen und erhält eine Lösung  $\alpha_* = \alpha_*(\tilde{\lambda}, c)$ . Die gesamte Lösung des reduzierten Vektorfeldes  $f_{red}$  nimmt also die Gestalt

$$\hat{\gamma}_{\tilde{\lambda}, c}(t) = r_*(\tilde{\lambda}, c)e^{i\alpha_*(\tilde{\lambda}, c)t} \quad (3.84)$$

an und diese Lösung ist differenzierbar bezüglich  $c$ .  $\hat{\gamma}_{\tilde{\lambda}, c}$  induziert nun via  $\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) = \hat{\gamma}_{\tilde{\lambda}, c}(t) + \Psi(\hat{\gamma}_{\tilde{\lambda}, c}(t))$  eine periodische Lösung der abstrakten Gleichung (3.78) (wobei die Zentrumsmanigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  durch den Graphen von  $\Psi : E_c \rightarrow E_h$  gegeben ist und  $E_c$  den zweidimensionalen Eigenraum zu den Eigenwerten  $\pm i\omega$  bezeichnet [siehe auch die Diskussion kurz vor und nach Gleichung (1.43) in der Einleitung]). Also ist  $c \mapsto \Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t)$  für festes  $t$  als Abbildung nach  $X$  stetig differenzierbar und es gilt nach Lemma 2.1

$$\Gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t) \\ \gamma_{\tilde{\lambda}, c}(t + \cdot) \end{pmatrix},$$

wobei  $\gamma_{\tilde{\lambda}, c}(\cdot)$  für  $\tilde{\lambda} > 0$  wegen (3.83) eine periodische Lösung von  $\dot{x}(t) = f(x_t, \tilde{\lambda}, c)$  ist. Für  $\tilde{\lambda} = 0$  ist  $\Gamma_{0, c}(t) \equiv 0$ .

Ist das reduzierte Vektorfeld nicht rotationsäquivalent, so tritt in der Gleichung (3.84) noch ein Restterm auf. Der Beweis kann dann mit Hilfe einer Ljapunov-Schmidt-Reduktion

im Raum der periodischen Funktionen analog zu Theorem 1.1 auf Seite 505 in [28] geführt werden.  $\square$

### 3.4.1 Konstruktion invarianter Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Konstruktion invarianter Mannigfaltigkeiten des abstrakten Systems (3.76). Unter anderem wollen wir die Existenz einer invarianten, zentrumsstabilen Mannigfaltigkeit zeigen, die alle Lösungen beinhaltet, die für  $t > 0$  uniform nahe an der homoklinen Lösung bleiben. Anschließend konstruieren wir die stark-instabile Mannigfaltigkeit der Null. Beide Mannigfaltigkeiten sind parameterabhängig und schneiden sich entlang des homoklinen Orbits für die Parameter  $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c_0)$ . Ziel in dem anschließenden Kapitel 3.5 ist es dann, mittels eines Transversalitätsargumentes sicherzustellen, dass sich diese auch für gewisse Parameterwerte  $(\tilde{\lambda}, c) \neq (0, c_0)$  schneiden. Ein wichtiges Hilfsmittel werden dabei die in dem letzten Kapitel konstruierten Dichotomien sein.

#### Die zentrumsstabile Mannigfaltigkeit der Null nahe eines Punktes der homoklinen Lösung

Definieren wir  $H(t) = (h(t), h_t)$ , so ist  $H(\cdot)$  eine auf  $\mathbb{R}$  definierte, homokline Lösung des Systems

$$\dot{U}(t) = \mathcal{F}(U(t), \tilde{\lambda}, c) \quad (3.85)$$

für  $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c_0)$ , wobei  $\mathcal{F}(\cdot, \tilde{\lambda}, c) : X \rightarrow Y$  durch

$$\mathcal{F}((\xi, \Phi), \tilde{\lambda}, c) := \begin{pmatrix} f(\Phi, \tilde{\lambda}, c) \\ \partial_\theta \Phi \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

für  $(\xi, \Phi) \in X$  definiert ist. Wir betrachten nun den Unterraum  $\tilde{Y}$ , mit  $X \subset \tilde{Y} \subset Y$  und

$$\tilde{Y} := \mathbb{R}^N \times H^1([-a, b], \mathbb{R}^N),$$

den wir mit der Norm  $\|(\xi, \phi(\cdot))\|_{\tilde{Y}} := |\xi|_{\mathbb{R}} + \|\phi(\cdot)\|_{H^1([-a, b], \mathbb{R}^N)}$  für  $(\xi, \phi(\cdot)) \in \tilde{Y}$  versehen. Es gilt  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} H(t) = 0 \in X$ . Parametrisieren wir Lösungen  $U(t)$  nahe dem Homoklinen durch  $U(t) = H(t) + V(t)$ , so erfüllt  $V(t)$  die Gleichung

$$\dot{V}(t) = \mathcal{A}_{0, c_0}(t)V(t) + \mathcal{G}(t, V(t), \tilde{\lambda}, c). \quad (3.87)$$

Hierbei ist  $\mathcal{A}_{0, c_0}(t) : X \rightarrow Y$  für  $(\xi, \Phi(\cdot)) \in X$  definiert durch

$$\mathcal{A}_{0, c_0}(t) \begin{pmatrix} \xi \\ \Phi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f(h_t, 0, c_0) \Phi(\cdot) \\ \partial_\theta \Phi(\cdot) \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

und es ist

$$\mathcal{G}(t, V, \tilde{\lambda}, c) := \mathcal{F}(H(t) + V, \tilde{\lambda}, c) - \mathcal{F}(H(t), 0, c_0) - \mathcal{A}_{0, c_0}(t)V.$$

Man beachte, dass sich in diesem Ausdruck die zweiten Komponenten aufheben;  $\mathcal{G}$  besitzt also die Gestalt

$$\mathcal{G}(t, (\xi, \varphi), \tilde{\lambda}, c) := \begin{pmatrix} f(h_t + \varphi, \tilde{\lambda}, c) - D_1 f(h_t, 0, c_0) \varphi - f(h_t, 0, c_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.89)$$

Desweiteren ist  $\mathcal{G}(t, \cdot, \tilde{\lambda}, c)$  als Abbildung von  $\tilde{Y}$  nach  $\tilde{Y}$  wohldefiniert und nach Voraussetzung eine  $C^2$ -Abbildung. Man beachte, dass  $\mathcal{G}(t, 0, 0, c_0) = D_1\mathcal{G}(t, 0, 0, c_0) = 0$  ist.

### Bemerkung

Betrachtet man die erste Komponente  $\mathcal{G}_1$  von  $\mathcal{G}$ , so stellt man fest, dass  $\partial_c \mathcal{G}_1((\varphi, \xi), \tilde{\lambda}, c) = \partial_c g(\varphi + h_t, \tilde{\lambda}, c)$  für  $(\varphi, \xi) \in X$  ist, wobei  $g$  in der Einleitung durch (3.12) definiert wurde.

Nach Hypothese „Hopf“, „Superkritisch“ und „EFE“ kann man Satz 3.15 auf die lineare, nichtautonome Gleichung  $\dot{U}(t) = \mathcal{A}_{0,c_0}(t)U(t)$  anwenden und erhält Dichotomien, die bezüglich einer Familie von Projektionen  $Q(t_0)$  für  $t_0 \geq 0$  charakterisiert sind. Satz 3.15 besagt, dass für alle Elemente  $U_+$  aus  $\text{Bild}(Q(t_0))$  eine Abbildung  $U(t)$  für  $t \geq t_0$  existiert, die  $U(t_0) = U_+$  erfüllt. Außerdem gilt

$$|U(t)|_Y \leq M e^{\rho(t-t_0)} |U_+| \quad (3.90)$$

für alle  $t \geq t_0$ , ein  $M = M(\rho) > 0$  und ein beliebiges  $\rho > 0$ . Wir setzen nun  $\Phi_+^{cs}(t, t_0)U_+ := U(t)$  und definieren analog  $\Phi_+^u(t, t_0)$ , für  $0 \leq t \leq t_0$ . Es existiert dann ein  $\kappa > 0$ , so dass  $|\Phi_+^u(t, t_0)U|_Y \leq M e^{-\kappa|t-t_0|} |U|_Y$  für alle  $0 \leq t \leq t_0$  existiert. Ist  $U_+ \in X$ , so ist  $U(\cdot)$  eine klassische Lösung von  $\dot{U}(t) = \mathcal{A}_{0,c_0}U(t)$  für  $t > t_0$ . Wir setzen nun  $E_+^{cs}(0) := \text{Bild}(Q(0))$  und  $E_+^u(0) := \text{Bild}(id - Q(0)) \subset Y$ .

### Notation

Wir unterdrücken im folgenden oft die Parameterabhängigkeit der konstruierten Mannigfaltigkeiten und machen diese nur explizit deutlich, wenn die Parameterabhängigkeit für die Argumentation entscheidend ist. Außerdem setzen wir von nun an  $\tilde{E}_+^u(0) = E_+^u(0) \cap \tilde{Y}$  und  $\tilde{E}_+^{cs}(0) = E_+^{cs}(0) \cap \tilde{Y}$  und versehen beide mit der  $\tilde{Y}$ -Norm.

### Satz 3.17 (zentrumstabile Mannigfaltigkeit)

Gleichung (3.85) besitzt eine  $C^2$ -Mannigfaltigkeit  $W^{cs,+}(0) = W_{\tilde{\lambda},c}^{cs,+}(0) \subset \tilde{Y}$  nahe  $H(0)$ , die die folgenden Eigenschaften besitzt (siehe Abbildung 3.4):

- $W_{0,c_0}^{cs,+}(0)$  ist bei  $H(0) \in W_{0,c_0}^{cs,+}(0)$  tangential an  $\tilde{E}_+^{cs}(0)$ .
- Die Mannigfaltigkeit enthält alle Punkte  $U_+$ , die bezüglich der  $\tilde{Y}$ -Norm nahe an  $H(0)$  liegen, und zu denen eine Lösung  $U(t)$  von (3.85) auf  $(0, \infty)$  existiert, die uniform nahe an  $H(t)$  bleibt. Also existiert ein  $\vartheta > 0$ , so dass  $U_+ \in W^{cs,+}(0)$ , falls  $|U(t) - H(t)|_{\tilde{Y}} < \vartheta$  für alle  $t \geq 0$  gilt.
- Ist  $U_+ \in W^{cs,+}(0)$ , so existiert eine stetige Funktion  $U : [0, t_*) \rightarrow \tilde{Y}$  mit  $U(t) = (\xi(t), \xi_t)$ , so dass  $U(0) = U_+$  gilt und  $\xi(t)$  (3.77) auf einem Intervall  $t \in (0, t_*)$  löst.
- $W^{cs,+}(0)$  ist lokal invariant, d.h. für jedes  $U_+ \in W^{cs,+}(0)$  existiert ein  $\zeta > 0$ , so dass  $U(t) \in W^{cs,+}(0)$  für alle  $0 \leq t \leq \zeta$  gilt.
- Außerdem ist  $W^{cs,+}(0)$  zweimal stetig differenzierbar bezüglich  $\tilde{\lambda}$  und  $c$ ; d.h. das um die Gleichungen  $\dot{\tilde{\lambda}} = 0, \dot{c} = 0$  erweiterte System (3.85) besitzt eine  $C^2$ -Mannigfaltigkeit  $W_{erw}^{cs,+}(0) \subset \tilde{Y} \times \mathbb{R}^2$  und die Mannigfaltigkeit  $W_{\tilde{\lambda},c}^{cs} := W_{erw}^{cs,+}(0) \cap (\tilde{Y} \times \{\tilde{\lambda}\} \times \{c\})$  besitzt die Eigenschaften a), b), c), d).

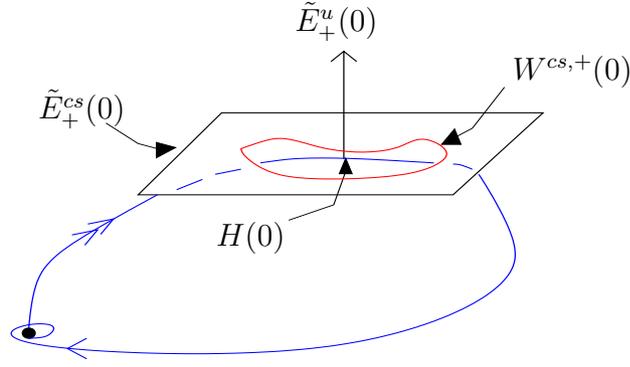


Abbildung 3.4: In der Abbildung ist die zentrumsstabile Mannigfaltigkeit  $W^{cs,+}(0)$  dargestellt.

### Beweis des Satzes

Wir arbeiten von nun an mit einer modifizierten Nichtlinearität  $\mathcal{G}_{mod}$ , indem wir die Funktionswerte  $\mathcal{G}(t, V, \tilde{\lambda}, c)$  mit einer cut-off-Funktion  $\chi_\varepsilon(\langle V, V \rangle_{\tilde{Y}})$  multiplizieren, die für  $|\langle V, V \rangle_{\tilde{Y}}| > \varepsilon$  identisch Null ist. Außerdem unterdrücken wir bei  $\mathcal{G}_{mod}$  von nun an oft die Parameterabhängigkeit. Die folgende Fixpunktgleichung ist nun der Schlüssel zum Beweis:

$$V(t) = \Phi_+^{cs}(t, 0)V_0^{cs} + \int_0^t \Phi_+^{cs}(t, s)\mathcal{G}_{mod}(s, V(s), \tilde{\lambda}, c)ds + \int_\infty^t \Phi_+^u(t, s)\mathcal{G}_{mod}(s, V(s), \tilde{\lambda}, c)ds. \quad (3.91)$$

Die rechte Seite dieser Integralgleichung definiert zunächst ein Element in  $BC^\gamma(\mathbb{R}_+, Y)$  für ein geeignetes, kleines  $\gamma > 0$ , mit  $\kappa > \gamma > 0$ , da  $s \rightarrow \Phi_+^u(t, s)$  für  $s \rightarrow \infty$  exponentiell abklingt.<sup>1</sup> Wir zeigen dies exemplarisch für den ersten Integralterm. Zunächst einmal ist die modifizierte Nichtlinearität eine globale Lipschitzfunktion, die

$$|\mathcal{G}_{mod}(t, V(t))|_Y \leq \delta_0|V(t)|_Y$$

uniform in  $s > 0$  für jedes feste  $t$  und jedes  $V(\cdot) \in BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \tilde{Y})$  erfüllt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\rho|t-s|}|\mathcal{G}_{mod}(s, V(s))|_Y ds &\leq \int_0^t e^{\rho(t-s)}\delta_0|V(s)|_Y ds \\ &\leq \int_0^t e^{\rho(t-s)}\delta_0 C e^{\gamma s} ds \\ &= \delta_0 C e^{\rho t} [e^{(\gamma-\rho)s}/(\gamma-\rho)]_0^t = \mathcal{O}(e^{\gamma t}) \end{aligned}$$

falls für ein festes  $\gamma > 0$  ein  $\rho$  gewählt wird, so dass  $0 < \rho < \gamma$  gilt. Also definiert zunächst der erste Integralterm in (3.91) für jedes  $V(\cdot) \in BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \tilde{Y})$  bezüglich  $t$  ein Element in  $BC^\gamma(\mathbb{R}_+, Y)$ . Da weiterhin die Abbildung  $s \rightarrow \Phi_+^u(t, s)$  für  $s \rightarrow \infty$  exponentiell abklingt, definiert die gesamte rechte Seite ein Element in  $BC^\gamma(\mathbb{R}_+, Y)$ .

<sup>1</sup>und wieder bezeichnet  $BC^\gamma$  für  $\gamma > 0$  die Menge der stetigen Funktionen, die mit exponentieller Rate  $\leq \gamma$  wachsen dürfen; siehe die Definition kurz vor (2.32)

Wir wollen hingegen zeigen, dass die rechte Seite sogar ein Element in  $BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \tilde{Y})$  für jedes  $V_0^{cs} \in \tilde{E}_+^{cs}(0)$  definiert; also insbesondere Werte in  $\tilde{Y}$  für festes  $t$  annimmt, falls  $V(t) \in BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \tilde{Y})$  ist.

Man beachte zunächst, dass  $\mathcal{G}_{mod}(t, \cdot, \tilde{\lambda}, c)$  stets nach  $\tilde{Y}$  abbildet, da die zweite Komponente von  $\mathcal{G}_{mod}$  identisch verschwindet. Wegen der Bemerkung nach (3.62) (man siehe auch den ersten Teil „Regularität der Lösungsoperatoren“ des Beweises von Satz 3.19), ist ebenfalls  $\Phi_+^{cs/u}(t, t)\mathcal{G}_{mod} \in \tilde{Y}$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$  und dieser Operator ist als Abbildung von  $\tilde{Y}$  nach  $\tilde{Y}$  beschränkt.

Außerdem bilden die Operatoren  $\Phi_+^{cs}(t, s)$ ,  $\Phi_+^u(s, t)$  für  $t \geq s \geq 0$  nach Konstruktion Startwerte in  $\tilde{E}_+^{cs}(t)$  bzw.  $\tilde{E}_+^u(s)$  nach  $\tilde{Y}$  ab. Genau *hier* unterscheidet sich die Argumentation von dem Fall einer reinen Delaygleichung! Da dies ein wesentlicher Punkt ist, gehen wir etwas ausführlicher auf diese Tatsache ein. Nach Definition des Lösungsoperators  $\Phi_+^{cs}(t, s)$  gilt für ein  $U = (\xi, \phi) \in \tilde{Y}$  gerade  $\Phi_+^{cs}(t, s)U = (\xi(t), x_t)$ , wobei  $x_s = \phi$  und  $x(t)$  die Lösung einer Forward-Backward-Delay Gleichung ist. Insbesondere ist also  $x(\cdot) \in H_{loc}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N)$ . Ist also  $\phi \in H^1([-a, b], \mathbb{R}^N)$  und  $a, b > 0$ , so gilt wegen  $x_0 = \phi$  ebenfalls  $x(\cdot) \in H_{loc}^1([-a, \infty), \mathbb{R}^N)$  und deswegen ist  $\Phi_+^{cs}(t, s)U = (\xi(t), x_t) \in \tilde{Y}$  für alle  $t > 0$ . Anders ist der Fall  $b = 0$ , wo diese Argumentation nicht mehr gültig und sogar falsch ist, siehe etwa [28]. Wegen  $\Phi_+^{cs}(s, s)\mathcal{G}_{mod} \in \tilde{Y}$  ist also stets  $\Phi_+^{cs}(t, s)\mathcal{G}_{mod} = \Phi_+^{cs}(t, s)\Phi_+^{cs}(s, s)\mathcal{G}_{mod} \in \tilde{Y}$  für  $t \geq s \geq 0$  und analoges gilt für  $\Phi_+^u(s, t)\mathcal{G}_{mod}$ .

Wir zeigen nun, dass die rechte Seite von (3.91) stetig bezgl  $t$  mit Werten in  $\tilde{Y}$  ist und bezüglich der  $BC^\gamma$  Norm beschränkt ist für ein geeignetes  $\gamma > 0$ . Dazu sollten wir zunächst die Operatoren  $\Phi_+^{cs,u}$  studieren, die bisher nur Abschätzungen bezüglich der  $Y$ -Norm erfüllen. Betrachte etwa  $\Phi_+^{cs}(t, s)$  für  $s = 0$ . Es gilt  $|\Phi_+^{cs}(t, 0)V_{cs}|_Y \leq Me^{\rho t}|V_{cs}|_Y$ . Weiterhin gilt nach Konstruktion der Dichotomien, dass  $W(t) := \Phi_+^{cs}(t, 0)V_{cs}$  die Form  $W(t) = (\xi(t), w_t)$  für  $t > 0$  besitzt, wobei  $w(t)$  für  $t > 0$  die Lösung von  $\dot{x}(t) = D_1f(h_t, 0, c_0)x_t$  ist mit  $w_0 = [V_{cs}]_2$ , also der  $H^1$ -Komponente von  $V_{cs} = (d, \varphi) \in \tilde{E}_+^{cs}(0)$ . Um dies einzusehen, betrachte etwa eine Folge von  $W_n \in X$  mit  $W_n \rightarrow W(0) = \Phi_+^{cs}(0, 0)V_{cs} \in \tilde{Y}$  bezüglich der  $Y$  Norm. Dann sind die Funktionen  $\Phi_+^{cs}(t, 0)W_n$  bezüglich  $t \geq 0$  klassische Lösungen der Gleichung  $\dot{Y}(t) = \mathcal{A}_{0,c_0}(t)Y(t)$ . Integriere nun beide Komponenten und betrachte dann den Limes  $n \rightarrow \infty$  (der existiert!). Dies liefert die Zwischen-Behauptung.

Aus

$$\dot{w}(t) = D_1f(h_t, 0, c_0)w_t \quad w_0 \in H^1 \quad (3.92)$$

und  $|w_t|_{L^2} \leq Me^{\rho t}(|d| + |w_0|_{L^2})$  folgt mittels Integration der Gleichung (3.92) über das Intervall  $[-a, b]$  ebenfalls

$$|\partial_\theta w_t|_{L^2} \leq \tilde{M}e^{\rho t}(|d| + |w_0|_{L^2} + |\partial_\theta w_0|_{L^2}).$$

Also gilt bereits

$$|w_t|_{H^1} \leq \tilde{K}e^{\rho t}(|d| + |w_0|_{L^2} + |\partial_\theta w_0|_{L^2}) = \tilde{K}e^{\rho t}(|d| + |\varphi|_{L^2} + |\partial_\theta \varphi|_{L^2}) \leq Ke^{\rho t}\|V_{cs}\|_{\tilde{Y}}$$

und deswegen

$$\|\Phi_+^{cs}(t, 0)V_{cs}\|_{\tilde{Y}} \leq Ke^{\rho t}\|V_{cs}\|_{\tilde{Y}}$$

für alle  $t \geq 0$ . Analoges gilt für den Operator  $\Phi_+^{cs}(t, s)$  für beliebige  $t \geq s \geq 0$  und  $\Phi_+^u(t, s)$  für  $s \geq t \geq 0$ . Man beachte, dass alle Konstanten, die in den eben gemachten Abschätzungen für den Operator  $\Phi_+^{cs}(t, 0)$  aufgetreten sind, uniform bezüglich  $t \geq s \geq 0$  gewählt werden können. Wir haben also gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \|\Phi_+^{cs}(t, s)V_0\|_{\tilde{Y}} &\leq Ke^{\rho(t-s)}\|V_0\|_{\tilde{Y}} \\ \|\Phi_+^u(t, s)V_0\|_{\tilde{Y}} &\leq Ke^{-\kappa|t-s|}\|V_0\|_{\tilde{Y}} \end{aligned} \quad (3.93)$$

für alle  $V_0 \in \tilde{Y}$  und  $t \geq s \geq 0$  in der ersten bzw.  $s \geq t \geq 0$  in der zweiten Abschätzung gilt. Insbesondere sind also die Integranden der rechten Seite der Integralgleichung (3.91) stetig in  $t \geq 0$  mit Werten in  $\tilde{Y}$  und definieren Elemente in  $BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \tilde{Y})$  für ein beliebiges  $\gamma \in (0, \kappa)$ . Um einzusehen, dass auch die Integrale für festes  $t$  in  $\tilde{Y}$  liegen, betrachten wir etwa den Operator  $\mathcal{A}_{hilf} : \tilde{Y} \subset Y \rightarrow Y$  definiert durch  $\mathcal{A}_{hilf}(\xi, \phi) = (\xi, \partial_\theta \phi)$ . Dieser ist abgeschlossen. Da nun die Riemannsummen der Integrale in  $\tilde{Y}$  liegen, in  $Y$  konvergieren, und  $\mathcal{A}_{hilf}$  abgeschlossen ist, liegen die Integrale ebenfalls in  $\tilde{Y}$ ; denn da die Integranden stetige Funktionen mit Werten in  $\tilde{Y}$  sind, sind sie nach (punktweiser) Anwendung von  $\mathcal{A}_{hilf}$  immer noch stetige Funktionen mit Werten in  $Y$ . Deswegen konvergieren die Riemannsummen und das Integral liegt in  $\tilde{Y}$ . Insbesondere konvergieren die Riemannsummen also in  $\tilde{Y}$  (da die Norm  $|U|_Y + |\mathcal{A}_{hilf}U|_Y$  äquivalent zur  $|\cdot|_{\tilde{Y}}$ -Norm ist) und wir sehen, dass die gesamten Integrale (als Funktionen in  $t$ ) Elemente in  $BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \tilde{Y})$  definieren.

Wir gehen nun auf die Regularität der Lösungen  $U(t) = H(t) + V(t)$  ein, wobei  $V(\cdot) \in BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \tilde{Y})$  Fixpunkt von (3.91) ist und bezeichnen im weiteren mit  $\langle V, V \rangle_{\tilde{Y}} = |V|_{\tilde{Y}}^2$  das kanonische Skalarprodukt in  $\tilde{Y}$ . Vorher führen wir noch folgende Notation ein:

### Notation

Von nun an sei  $BC^\gamma := BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \tilde{Y})$ .

### Lemma 3.15

Es existiert ein  $\alpha > 0$ , so dass folgendes gilt. Sei  $U(t) = V(t) + H(t)$  für  $t \geq 0$ , wobei  $V(\cdot) \in BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \tilde{Y})$  ein Fixpunkt von (3.91) ist. Falls  $|V(t)|_{\tilde{Y}}^2 < \alpha$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$  gilt, so hat  $U(t)$  für  $t \geq 0$  die Gestalt

$$U(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \xi_t \end{pmatrix}$$

für eine Funktion  $\xi \in H^1((-a, \infty), \mathbb{R}^N)$  und es gilt  $(\xi(0), \xi_0) = U(0) = V(0) + H(0)$ . Desweiteren ist  $\xi(\cdot)$  eine Lösung der Gleichung (3.77) auf  $\mathbb{R}^+$ .

### Beweis von Lemma 3.15

Wir wählen zunächst  $\alpha := \varepsilon/2$ . Ist dann  $|V(t)|_{\tilde{Y}}^2 < \alpha$ , so stimmt die modifizierte Funktion  $\mathcal{G}_{mod}(t, V(t), \tilde{\lambda}, c) := \chi_\varepsilon(|V(t)|_{\tilde{Y}}^2) \mathcal{G}(t, V(t), \tilde{\lambda}, c)$  mit  $\mathcal{G}(t, V(t), \tilde{\lambda}, c)$  überein, da  $\chi_\varepsilon(\cdot)$  dann 1 ist.

Sei nun  $V_0^{cs} \in \tilde{E}_+^{cs}(0)$  und gelte die Fixpunktgleichung (3.91) für eine Abbildung  $V(\cdot) \in BC^\gamma(\mathbb{R}_+, \tilde{Y})$ . Unsere Strategie das Lemma zu beweisen ist wie folgt: Wir approximieren den Fixpunkt  $V$  der Integralgleichung durch eine  $X$ -wertige Abbildung  $\tilde{V}$ , indem wir die Nichtlinearität  $\mathcal{G}$  durch eine Abbildung mit Werten in  $X$  ersetzen. Desweiteren approximieren wir den zentrumsstabilen Anteil des Anfangswertes  $V_0^{cs}$  durch Elemente in  $X$ . Nehmen wir weiterhin an, dass diese modifizierte Integralgleichung weiterhin einen Fixpunkt  $\tilde{V}$  besitzt, so können wir diese Abbildung differenzieren und erhalten eine Gleichung (3.76) approximierende Gleichung. In dieser können wir dann sowohl die  $\mathbb{R}^N$ -Komponente als auch die  $H^1$ -Komponente integrieren und nach einige a-priori-Abschätzungen zum Limes übergehen, was die Behauptung zeigt. Der Übersicht halber unterdrücken wir von nun an die Parameter  $\tilde{\lambda}$  und  $c$ .

Wir modifizieren nun  $\mathcal{G}$  und definieren  $\mathcal{G}^\delta(\delta, t, \cdot) : \tilde{Y} \rightarrow X$  durch

$$\mathcal{G}^\delta(t, V) := \begin{pmatrix} g(t, V) \\ l(t, V, \delta, \cdot) \end{pmatrix}, \quad (3.94)$$

wobei wir

$$g(t, (\xi, \varphi)) = g(t, (\xi, \varphi), \tilde{\lambda}, c) := f(h_t + \varphi, \tilde{\lambda}, c) - D_1 f(h_t, 0, c_0) \varphi - f(h_t, 0, c_0)$$

für  $V = (\xi, \varphi) \in X$  gesetzt haben. Ausserdem ist  $l(t, V, \delta)(\cdot) \in C^\infty([-a, b], \mathbb{C}^N)$  die „ $\delta$ -Hut“-Funktion, die durch

$$l(t, (\xi, \varphi), \delta)(\theta) := \begin{cases} e \cdot g(t, (\xi, \varphi)) e^{\frac{1}{(\theta/\delta)^2 - 1}} & \theta \in (-\delta, \delta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist. „ $e$ “ bezeichnet hierbei die Eulersche Zahl. Die Funktion  $l$  ist also bezgl.  $\theta$  eine Hutfunktion der Amplitude  $g(t, (\xi, \varphi))$ , deren  $L^2$ -Norm mit  $\delta \rightarrow 0$  gegen Null geht. Der springende Punkt ist die Beobachtung, dass  $l(t, (\xi, \varphi), \tilde{\lambda}, c, \delta, 0) = g(t, (\xi, \varphi), \tilde{\lambda}, c) \in \mathbb{C}^N$  nach Konstruktion gerade mit dem Wert der ersten Komponente der modifizierten Funktion  $\mathcal{G}^\delta$  übereinstimmt und damit ist für jedes  $\delta > 0$  nach Konstruktion  $\mathcal{G}^\delta(t, V) \in X$  für jedes  $V \in \tilde{Y}$ . Ausserdem approximieren wir nun auch noch  $V_0^{cs} \in \tilde{Y}$  durch Elemente  $V_{cs}^\delta \in X$  in der  $Y$ -Norm und betrachten die folgende Fixpunktgleichung

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t) &= \Phi_+^{cs}(t, 0) V_{cs}^\delta + \int_0^t \Phi_+^{cs}(t, s) \mathcal{G}^\delta(s, \tilde{V}(s)) ds \\ &+ \int_\infty^t \Phi_+^u(t, s) \mathcal{G}^\delta(s, \tilde{V}(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Unser erstes Ziel besteht nun darin, einen geeigneten Banachraum  $Z \subset Y$  zu finden, so dass die Gleichung (3.95) auf dem Funktionenraum  $BC^\eta([0, \infty), Z)$  tatsächlich für festes  $V_{cs}^\delta$  und  $\delta > 0$  einen Fixpunkt  $\tilde{V}$  besitzt. Die Wahl  $Z := Y$  wäre zwar wünschenswert, aber dann ist die vektorwertige Funktion  $g(t, (\xi, \varphi))$  im allgemeinen nicht mehr wohldefiniert, da es endlich viele Stellen  $r_1, r_2, \dots, r_m \in [-a, b]$  mit  $m \in \mathbb{N}$  existieren können, an denen der Wert  $\varphi(r_j) \in \mathbb{R}^N$  wohldefiniert sein muss (siehe 3.10). Dies verleitet uns dazu, den Raum  $Z$  in folgender Gestalt zu wählen

$$Z := \mathbb{R}^N \times C^0([-a, b], \mathbb{R}^N).$$

Sei nun  $\delta > 0$  fest gewählt, so gilt für festes  $t > 0$  und  $(\xi, \phi), (\eta, \psi) \in Z$ :

$$\begin{aligned} \|l(t, (\xi, \varphi), \delta) - l(t, (\eta, \psi), \delta)\|_{C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)} &\leq \sup_{\theta \in [-\delta, \delta]} e \cdot e^{\frac{1}{(\theta/\delta)^2 - 1}} \|g(t, (\xi, \phi)) - g(t, (\eta, \psi))\|_{\mathbb{R}^N} \\ &\leq L \cdot \|(\xi, \phi) - (\eta, \psi)\|_Z, \end{aligned}$$

wobei  $L$  die globale Lipschitzfunktion der mit der cut-off-Funktion  $\chi(\|\phi\|_{C^0} + |\xi|_{\mathbb{R}^N})$  modifizierte Funktion  $g(t, (\xi, \phi))$  ist. Ist nun  $L > 0$  klein genug (was durch einen genügend kleinen Träger der cut-off-Funktion  $\chi$  erreichbar ist), so definiert die rechte Seite der Integralgleichung (3.95) eine Kontraktion auf  $BC^\eta([0, \infty), Z)$ , falls  $\eta > 0$  klein genug. Man beachte, dass  $L > 0$  uniform bezgl.  $\delta > 0$  gewählt werden kann. Also existiert ein Fixpunkt  $\tilde{V} = \tilde{V}^\delta \in BC^\eta([0, \infty), Z)$ , der (3.95) löst. Ausserdem können wir nun die Abbildung  $t \rightarrow \tilde{V}(t)$ , aufgefasst als Abbildung mit Werten in  $Y$ , differenzieren und erhalten die Gleichung

$$\tilde{V}(t) = \mathcal{A}_{0, c_0}(t) \tilde{V}(t) + G^\delta(t, \tilde{V}(t)), \quad (3.96)$$

wobei  $\mathcal{G}^\delta$  in (3.94) definiert wurde. Speziell löst also  $\xi(t)$ , mit  $(\xi(t), \phi(t, \cdot)) = \tilde{V}(t)$ , die Gleichung

$$\dot{\xi}(t) = \int_{-a}^b p(t, \theta, 0, c_0) \phi(t, \theta) d\theta + \sum_{k=1}^m A_k(t, 0, c_0) \phi(t, r_k) + g(t, (\xi(t), \phi(t, \cdot))).$$

Integration dieser Gleichung führt zu

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi(0) + \int_0^t \int_{-a}^b p(s, \theta, 0, c_0) \phi(s, \theta) d\theta ds \\ &+ \int_0^t \sum_{k=1}^m A_k(s, 0, c_0) \phi(s, r_k) ds + \int_0^t g(s, (\xi(s), \phi(s, \cdot))) ds. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Man beachte, dass die Funktion  $(\xi(t), \phi(t, \cdot))$  von dem in Gleichung (3.95) auftretenden Parameter  $\delta > 0$  abhängen und nur der Übersicht halber unterdrückt werden. Wir bemerken nun zunächst, dass der Vektor  $V_0^{cs} = (\hat{\xi}, \hat{\phi})$  ohne Einschränkung durch eine Folge  $V_{cs}^\delta \in X$  in  $Y$  approximiert werden kann, die alle die gleiche  $\mathbb{R}^N$ -Komponente besitzen, d.h. es gilt  $\xi(0) = \hat{\xi} = (V_{cs}^\delta)_1$  für alle  $\delta > 0$  (und der Index "1" bezeichnet hierbei die  $\mathbb{R}^N$ -Komponente des Vektors  $V_{cs}^\delta \in Z$ ). Man kann nun durch an der Fixpunktgleichung (3.95) ablesen, dass  $\|\phi(t, \cdot)\|_{C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)}$ , für  $t \in [-a, M]$  und ein beliebiges  $M > 0$ , uniform bezüglich  $\delta > 0$  durch eine Konstante  $C = C(M) > 0$  abgeschätzt werden kann. Also kann man unter Benutzung der Gleichung (3.97) die  $H^1([-a, M], \mathbb{R}^N)$ -Norm für ein beliebiges fest gewähltes  $M > 0$  uniform bezüglich  $\delta \searrow 0$  abschätzen und erhält nach Arzela-Ascoli eine konvergente Teilfolge  $\xi(\cdot) = \xi^{\delta_n}(\cdot)$  auf  $[-a, M]$ , die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion  $\xi^*(\cdot)$  konvergiert.

Wir betrachten schließlich die  $C^0$ -Komponente der Gleichung (3.96); diese lautet

$$\partial_t \phi(t, \theta) = \partial_\theta \phi(t, \theta) + l(t, (\xi, \phi(t, \cdot)), \delta)(\theta)$$

und mit Hilfe der Methode der Charakteristiken erhalten wir für  $t + \theta > 0$  die Identität (man beachte, dass  $(\xi(t), \phi(t, \theta)) \in X$ , also  $\xi(t) = \phi(t, 0)$ ):

$$\phi(t, \theta) = \xi(t + \theta) + \int_0^\theta \tilde{l}(t - s + \theta, \delta)(s) ds, \quad (3.98)$$

wobei wir  $\tilde{l}(t, \delta)(\theta) := l(t, (\xi(t), \phi(t, \cdot)), \delta)(\theta)$  gesetzt haben. Da nun  $\tilde{l}(t, \delta)(\cdot)$  bezüglich der  $L^2([-a, b], \mathbb{R}^N)$  für  $\delta \rightarrow 0$  gegen die Nullfunktion konvergiert (und zwar gleichmäßig in  $t > 0$ ) und  $\xi = \xi^\delta$  für  $\delta \rightarrow 0$  gleichmäßig auf beschränkten Intervallen bezüglich der sup-Norm gegen  $\xi^*$  konvergiert, konvergiert auch  $\phi(t, \cdot) = \phi^\delta(t, \cdot)$  bezüglich der Sup-Norm  $\|\cdot\|_{C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)}$  gegen die Funktion  $\phi^*(t, \cdot) = \xi(t + \cdot)$  konvergiert.

Ähnlich kann man für  $-a < t + \theta < 0$  zeigen, dass  $\phi^\delta(t, \theta) = \phi^\delta(0, t + \theta) + \int_0^t \tilde{l}(s, \delta)(t - s + \theta) ds$  gilt, so dass  $\phi^\delta(t, \cdot)$  bezüglich der  $L^2$ -Norm gegen  $\phi(0, t + \cdot)$  konvergiert. Hierbei ist  $\phi(0, \cdot) \in C^0([-a, b], \mathbb{R}^N)$  natürlich gerade die Funktionalkomponente des Anfangswertes  $V(0)$  unseres ursprünglichen Fixpunktes der nichtmodifizierten Fixpunktgleichung (3.91) (um diese Behauptung einzusehen, betrachte die Fixpunktgleichung (3.95) für festes  $t$  in  $Y$ , setze  $t = 0$  und betrachte den Limes für  $\delta \searrow 0$  in  $Y$ ). Der Einfachheit halber definieren wir nun noch  $\xi^*(t) := \phi(0, t)$  für  $-a \leq t < 0$  und setzen  $\phi^\delta(t, \cdot)$  in die Gleichung (3.97)

ein. Ist nun für  $\theta \in [-a, b]$  und  $t > 0$   $\theta + t > 0$ , so kann man zum Limes  $\delta \searrow 0$  übergehen und erhält die Gleichung

$$\begin{aligned}\xi^*(t) &= \xi(0) + \int_0^t \int_{-a}^b p(s, \theta, 0, c_0) \xi^*(s + \theta) d\theta ds \\ &+ \int_0^t \sum_{k=1}^m A_k(s, 0, c_0) \xi^*(s + r_k) ds + \int_0^t g(s, (\xi^*(s), \xi^*(s + \cdot))) ds.\end{aligned}$$

Allgemeiner (also auch für  $-a < t + \theta < 0$ ) erhalten wir

$$\begin{aligned}\xi^\delta(t) &= \xi(0) + \int_0^t \int_{-a}^b p(s, \theta, 0, c_0) \phi^\delta(s, \theta) d\theta ds \\ &+ \int_0^t \sum_{k=1}^m A_k(s, 0, c_0) \phi^\delta(s, r_k) ds + \int_0^t g(s, (\xi^\delta(s), \phi^\delta(s, \cdot))) ds.\end{aligned}\tag{3.99}$$

Betrachten wir nun beispielsweise den Term  $\int_0^t \sum_{k=1}^m A_k(s, 0, c_0) \phi^\delta(s, r_k) ds$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^t \sum_{k=1}^m A_k(s, 0, c_0) \phi^\delta(s, r_k) ds &= \int_0^t \sum_{k=1}^m A_k(s, 0, c_0) \phi^\delta(0, s + r_k) ds \\ &+ \int_0^t \int_0^s \tilde{l}(\sigma, \delta) (s - \sigma + r_k) d\sigma ds\end{aligned}$$

und die rechte Seite dieser Gleichung konvergiert für  $\delta \searrow 0$  gegen  $\int_0^t \sum_{k=1}^m A_k(s, 0, c_0) \xi^*(s + r_k) ds$ . Ähnlich werden die anderen Terme in (3.99) behandelt.

Zusammenfassend zeigt dies, dass  $\xi^*(t)$  für  $t \geq 0$  eine Lösung der ursprünglichen Gleichung  $\dot{z}(t) = Df_1(t, h_t)z_t + g(t, (z(t), z_t))$  (allerdings noch gegebenenfalls mit einer cut-off-Funktion modifizierten Nichtlinearität  $g$ ) zum Anfangswert  $\xi_0^* = \phi(0, \cdot) = (V(0))_2$  ist, wobei  $V$  den ursprünglichen Fixpunkt der Gleichung (3.91) bezeichnet. Es bleibt zu zeigen, dass  $(\xi^*(t), \xi_t^*) = V(t)$  ist (dies würde dann auch zeigen, dass die modifizierte Nichtlinearität  $g$  entlang  $(\xi^*(t), \xi_t^*)$  mit der nicht modifizierten übereinstimmt.) Dazu betrachten wir erneut die Fixpunktgleichung (3.95), von der  $\tilde{V} = \tilde{V}^\delta$  eine Lösung ist. Halten wir  $t$  fest und betrachten die rechte Seite von (3.95) als Element in  $Y$  (und nicht in  $\tilde{Y}$ !), so können wir zum Limes  $\delta \searrow 0$  übergehen und erhalten

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \xi^*(t) \\ \xi_t^* \end{pmatrix} &= \Phi_+^{cs}(t, 0) V_0^{cs} + \int_0^t \Phi_+^{cs}(t, s) \mathcal{G}_{mod}(s, (\xi^*(s), \xi_s^*)) ds \\ &+ \int_\infty^t \Phi_+^u(t, s) \mathcal{G}_{mod}(s, (\xi^*(s), \xi_s^*)) ds.\end{aligned}$$

Da weiterhin die  $BC^\eta([0, \infty), Z)$ -Norm der Abbildungen  $\xi^\delta$  bezüglich  $\delta$  uniform beschränkt war und die Abbildung  $\xi^*(t)$  stetig ist, gilt schließlich  $V(t) = (\xi^*(t), \xi_t^*)$  wegen der Eindeutigkeit des Fixpunktes. Damit gilt die Behauptung des Lemmas mit  $\xi(t) := h(t) + \xi^*(t)$  für  $-a \leq t$ .  $\square$

Wir widmen uns nun wieder dem Beweis von Satz 3.17.

### Fortführung vom Beweis des Satzes 3.17

Wir wollen nun für jedes  $V_0^{cs} \in \tilde{E}_+^{cs}(0)$  eine Abbildung  $V(\cdot) \in BC^\gamma$  bestimmen, die die Integralgleichung

$$V(t) = \Phi_+^{cs}(t, 0)V_0^{cs} + \int_0^t \Phi_+^{cs}(t, s)\mathcal{G}_{mod}(s, V(s), \tilde{\lambda}, c)ds + \int_\infty^t \Phi_+^u(t, s)\mathcal{G}_{mod}(s, V(s), \tilde{\lambda}, c)ds \quad (3.100)$$

erfüllt. Wir wählen  $0 < \gamma < \kappa$  beliebig, wobei  $\kappa$  in der Definition der Lösungsoperatoren  $\Phi_+^u$  vorkommt; siehe (3.93). Wie schon bemerkt, definiert die Integralgleichung eine Abbildung  $\mathcal{K}$  von  $BC^\gamma$  in sich. Diese ist wohldefiniert und eine parameterabhängige Kontraktion falls  $\varepsilon$  klein genug ist und damit  $\mathcal{G}(t, V, \tilde{\lambda}, c) = 0$  für  $|\langle V, V \rangle| > \varepsilon$  gilt. Ein Parameter ist hierbei ebenfalls  $V_0^{cs} \in \tilde{E}_+^{cs}(0)$ . Lösungen der Fixpunktgleichung sind für uns nur so lange von Interesse, so lange sie in der Sup-Norm klein sind. Tritt dies nicht ein, so stimmt unsere modifizierte Funktion  $\mathcal{G}_{mod}$  nicht mehr mit der ursprünglichen überein und wir erhalten mittels unseres Lemmas 3.15 keine Lösungen unserer ursprünglichen Gleichung (3.4) auf ganz  $\mathbb{R}_+$ .

Nach Vanderbauwhede [54], Theorem 2, existiert nun eine differenzierbare Funktion  $\Psi : \tilde{E}_+^{cs}(0) \rightarrow \tilde{E}_+^u(0)$ , so dass  $V_+ := V_0^{cs} + \Psi(V_0^{cs})$  für jedes  $V_0^{cs} \in \tilde{E}_+^{cs}(0)$  einen Fixpunkt  $V(\cdot)$  der Integralgleichung induziert, und damit  $U(t) := H(t) + V(t)$  eine Lösung ist. Diese erfüllt  $V(0) = V_+$ . Wir setzen also

$$W^{cs,+}(0) := \text{Graph}(\Psi) + H(0). \quad (3.101)$$

Dann ist  $W^{cs,+}(0)$  als Graph einer differenzierbaren Funktion eine differenzierbare Mannigfaltigkeit in  $\dot{Y}$ . Man beachte nämlich, dass  $\text{Graph}(\Psi) = \{(V_0^{cs}, \Psi(V_0^{cs})) : V_0^{cs} \in \tilde{E}_+^{cs}(0)\} \subset \tilde{Y}$  gilt. Da offensichtlich  $V(t) \equiv 0$  eine Lösung der Fixpunktgleichung ist (da  $U(t) = H(t) + 0$  eine klassische Lösung von (3.85) für die Parameterwerte  $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c_0)$  ist), ist  $H(0) \in W_{0,c_0}^{cs,+}(0)$ . Man kann nun mittels der Integralgleichung verifizieren, dass  $D\Psi(0) = 0 \in \tilde{E}_+^u(0)$  ist und deswegen der Tangentialraum an  $W_{\tilde{\lambda},c}^{cs,+}(0)$  bei  $H(0)$  und  $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c_0)$  gerade  $\tilde{E}_+^{cs}(0)$  ist.

### Invarianz von $W^{cs,+}(0)$

Sei zunächst  $V(\cdot)$  eine Lösung der Fixpunktgleichung mit  $|V(t)| < \alpha$  für alle  $t > 0$ . Wir zeigen später, dass diese Bedingung für Lösungen automatisch erfüllt ist, falls  $V(0)$  genügend klein ist.  $V(\cdot)$  löst also  $\dot{V}(t) = \mathcal{A}_{0,c_0}(t) + \mathcal{G}(t, V(t))$  auf  $(0, \infty)$ , wobei wir die Parameter  $\tilde{\lambda}, c$  bei  $\mathcal{G}$  unterdrückt haben. Die Abbildung  $U(t) = V(t) + H(t)$  ist damit auf  $\mathbb{R}_+$  eine klassische Lösung von

$$\dot{U}(t) = \mathcal{F}(U(t)). \quad (3.102)$$

Der springende Punkt ist die Beobachtung, dass (3.102) invariant unter Translation bezüglich  $t$  ist: eine Lösung  $U(\cdot)$  induziert für ein beliebiges  $t_0 > 0$  eine neue Lösung  $U(\cdot + t_0)$  von (3.102). Sei also  $t_0 > 0$ , dann ist  $\tilde{U}(t) := U(t + t_0)$  für alle  $t > 0$  eine klassische Lösung von (3.102). Definiere  $\tilde{V}(t) := \tilde{U}(t) - H(t) = V(t + t_0) + H(t + t_0) - H(t)$ . Ist dann  $t_0$  klein genug, so ist  $|\tilde{V}(t)|_Y < \alpha$  für alle  $t > 0$ . Nach Konstruktion löst weiterhin  $\tilde{V}(\cdot)$  die Gleichung

$$\dot{\tilde{V}}(t) = \mathcal{A}_{0,c_0}V(t) + \mathcal{G}(t, V(t)),$$

da  $\tilde{V}(t) + H(t) = \tilde{U}(t)$  gilt. Als klassische Lösung dieser Gleichung löst also  $\tilde{V}$  auch die milde Formulierung, d.h. die Integralgleichung (3.91). Man beachte hierbei, dass das modifizierte  $\mathcal{G}_{mod}$  mit dem ursprünglichen übereinstimmt. Nach Definition von  $W^{cs,+}(0)$  ist

deswegen  $\tilde{V}(0) + H(0) = \tilde{U}(0) = U(t_0) \in W^{cs,+}(0)$  und damit ist  $W^{cs,+}(0)$  lokal invariant bezüglich klassischer Lösungen, die uniform nahe an  $H(t)$  bleiben. Der Beweis, dass klassische Lösungen tatsächlich uniform nahe an  $H(t)$  bleiben, wird auf später verschoben, da wir vorher noch ein anderes Resultat benötigen.

### Abhängigkeit von den Parametern

Um die glatte Abhängigkeit der Mannigfaltigkeit  $W^{cs,+}(0) = W_{\tilde{\lambda},c}^{cs,+}(0)$  von den Parametern  $\tilde{\lambda}$  und  $c$  zu zeigen, erweitere man das System

$$\dot{V}(t) = \mathcal{A}_{0,c_0}(t)V(t) + \mathcal{G}(t, V(t), \tilde{\lambda}, c)$$

um die zusätzlichen Gleichungen  $\dot{\tilde{\lambda}} = 0$  und  $\dot{c} = 0$ . Dies induziert eine lineare Abbildung für das erweiterte System, dass nun die Form

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{V}}(t) \\ \dot{\tilde{\lambda}}(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{0,c_0}(t)\tilde{V}(t) + D_{\tilde{\lambda},c}\mathcal{G}(t, 0, 0, c_0)(\tilde{\lambda}, c) + \mathcal{G}_{rest}(t, \tilde{V}(t), \tilde{\lambda}, c) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

annimmt, wobei  $\mathcal{G}_{rest} + D_{\tilde{\lambda},c}\mathcal{G} = \mathcal{G}$  gilt. Der neue,  $t$ -abhängige Linearteil des erweiterten Systems besitzt zwei zusätzliche, einfache Eigenwerte 0 für jedes feste  $t$ . Damit gilt dies auch für die asymptotischen linearen Abbildungen bezüglich  $t \rightarrow \pm\infty$ . Es existieren weiterhin Dichotomien auf  $\mathbb{R}_+$  und man kann die gleiche Argumentation verwenden.  $\square$

Wir werden später dieses Ergebnis auf die Lösung  $H(\cdot + t_0)$  von (3.85) für ein  $t_0 \in \mathbb{R}$ , anwenden. Man beachte, dass  $H(\cdot + t_0)$  tatsächlich eine homokline Lösung für jedes  $t_0$  ist. Bezeichnet nun wie oben  $\dot{V}(t) = \mathcal{A}_{0,c_0}(t)V(t)$  das linearisierte System bezüglich  $H(\cdot)$ , so nimmt das bezüglich  $H(\cdot + t_0)$  die Form

$$\dot{V}(t) = \mathcal{A}_{0,c_0}(t + t_0)V(t) \quad (3.104)$$

an. Es wurde bereits im Beweis des Satzes 3.5 gezeigt, dass die zugehörigen Lösungsoperatoren  $\Phi_{t_0}^{+,cs}(t, 0)$  und  $\Phi_{t_0}^{+,u}(0, t)$  *uniforme* Abschätzungen bezüglich  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $t \in \mathbb{R}_+$  erfüllen. Aus diesem Grund ist man nicht gezwungen, den Parameter  $\varepsilon$  der Cut-off-Funktion für  $t_0 \rightarrow -\infty$  kleiner wählen zu müssen, wobei  $\varepsilon$  klein erforderlich ist, damit  $\mathcal{K}$  (gegeben durch (3.91)) eine Kontraktion definiert.

### Lemma 3.16

Sei  $t_0 > 0$  und bezeichne mit  $W_{\tilde{\lambda},c}^{cs,+}(0)$  die zentrumsstabile Mannigfaltigkeit nahe  $H(0)$  für einen festen Parameterwert  $(\tilde{\lambda}, c) \approx (0, c_0)$  mit  $\tilde{\lambda} > 0$ . Dann existiert ein  $R > 0$ , so dass für alle  $U_{cs} \in W^{cs,+}(0) \cap B_R(0)$  eine Lösung  $U(t)$  von (3.85) auf  $\mathbb{R}_+$  existiert, die in Vorwärtszeit  $t \rightarrow \infty$  entweder gegen den durch die Hopfverzweigung entstehenden periodischen Orbit  $\Gamma_{\tilde{\lambda},c}$  nahe null oder gegen das Gleichgewicht  $0 \in W^{cs,+}(0)$  konvergiert.

### Beweis von Lemma 3.16

Wir unterteilen diesen Beweis in mehrere Schritte. Zunächst wollen wir zeigen, dass es eine genügend kleine Umgebung des Anfangswertes  $H(0)$  des Homoklinen in der Mannigfaltigkeit  $W^{cs,+}(0) \subset \dot{Y}$  gibt, so dass alle Lösungen der Integralgleichung (3.91) zu Anfangswerten in dieser Umgebung ab einer gewissen Zeit  $t_* \gg 0$  auf der lokalen zentrumsstabilen Mannigfaltigkeit  $W^{cs,loc}(0)$  liegen.

Danach wollen wir zeigen, dass die Zentrumsmannigfaltigkeit  $W^c(0)$  eine Teilmenge von  $W^{cs,loc}(0)$  ist und der Vorwärtsorbit jedes Punktes  $U_+ \in W^{cs,loc}(0)$  (der insbesondere existiert!) exponentiell schnell gegen einen Orbit auf der Zentrumsmannigfaltigkeit konvergiert.

### Die zentrumsstabile Mannigfaltigkeit $W^{cs,loc}(0)$ nahe der Null

In diesem Schritt zeigen wir, dass diejenigen Lösungen  $U(t)$  der Fixpunktgleichung (3.91), deren Anfangswerte genügend nahe  $H(0)$  sind, für große  $t > 0$  auf der zentrumsstabilen Mannigfaltigkeit  $W_{\tilde{\lambda},c}^{cs,loc}(0)$  liegen. Diese soll genau aus allen Punkten  $U_+ \subset \tilde{Y}$  bestehen, zu denen eine Lösung  $U(t)$  einer geeignet modifizierten Version der ursprünglichen Gleichung

$$\dot{U}(t) = \mathcal{F}(U(t), \tilde{\lambda}, c) \quad (3.105)$$

existiert und  $U(t)$  zusätzlich eine geeignete Wachstumsbeschränkung erfüllt. Mit einer „modifizierten Version“ der Gleichung (3.105) meinen wir natürlich, dass die Nichtlinearität  $\mathcal{F}$  mit Hilfe einer cut-off-Funktion verändert werden muss, damit wir geeignete Integralgleichungen lösen können. Allerdings ist Vorsicht geboten: Betrachten wir nämlich einen Anfangswert  $U(0) \in W^{cs,+}(0)$  nahe  $H(0)$ , so erhalten wir bereits eine auf  $\mathbb{R}_+$  definierte Lösung  $U(t)$  der modifizierten Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= \mathcal{F}_{mod}(U(t), \tilde{\lambda}, c) \\ &= \mathcal{F}(H(t)) + \mathcal{A}_{0,c_0}(t)(U(t) - H(t)) + \mathcal{G}_{mod}(U(t) - H(t), 0, c_0). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Wir leiten nun die Gleichung her, mit der wir weiter arbeiten wollen und zeigen dann, dass wir tatsächlich keine neuen Modifikationen via cut-off-Funktionen benötigen. Dazu betrachten wir  $U(t) = H(t) + V(t)$ , wobei  $U(t)$  die bezüglich  $U(0) \in W^{cs,+}(0)$  assoziierte Lösung von (3.106) ist. Dann löst  $U(t)$  die Gleichung

$$\dot{U}(t) = \dot{H}(t) + \dot{V}(t) = \mathcal{F}(H(t), 0, c_0) + \mathcal{A}_{0,c_0}(t)V(t) + \mathcal{G}_{mod}(t, V(t), \tilde{\lambda}, c).$$

Beachten wir die Definition von  $\mathcal{G}_{mod}$  und setzen  $V(t) = (\eta(t), \eta_t)$ ,  $U(t) = (\xi(t), \xi_t)$ , so gilt

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = \dot{h}(t) + \dot{\eta}(t) &= f(h_t, 0, c_0) + D_1 f(h_t, 0, c_0)\eta_t \\ &+ f_{mod}(\xi_t, \tilde{\lambda}, c) - f_{mod}(h_t, 0, c_0) - D_1 f_{mod}(h_t, 0, c_0)\eta_t. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Wir unterdrücken nun die Parameter und schreiben  $D_1 f(h_t)\eta_t = D_1 f(0)\eta_t + D_1^2 f(0)[h_t, \eta_t] + \tilde{R}(h_t, \eta_t)$ . Außerdem gilt  $f(h_t) = f(0) + D_1 f(0)h_t + R(h_t)$  und wir können (3.107) in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= (D_1 f(0)h_t + D_1 f(0)\eta_t) + f_{mod}(\xi_t, \tilde{\lambda}, c) \\ &- f_{mod}(h_t, 0, c_0) - D_1 f_{mod}(h_t, 0, c_0)\eta_t + R(h_t) + \tilde{R}(h_t, \eta_t) + D_1^2 f(0)[h_t, \eta_t], \end{aligned}$$

also mit  $\eta_t = \xi_t - h_t$ :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= D_1 f(0, 0, c_0)\xi_t + f_{mod}(\xi_t, \tilde{\lambda}, c) \\ &- f_{mod}(h_t, 0, c_0) - D_1 f_{mod}(h_t, 0, c_0)(\xi_t - h_t) \\ &+ R(h_t) + \tilde{R}(h_t, \xi_t - h_t) + D_1^2 f(0)[h_t, \xi_t - h_t]. \end{aligned}$$

Diese Gleichung definiert eine abstrakte, nichtautonome Differentialgleichung

$$\dot{U}(t) = AU(t) + G(t, U(t), \tilde{\lambda}, c), \quad (3.108)$$

wobei  $A : X \rightarrow Y$  und  $G(t, U, \tilde{\lambda}, c) : X \rightarrow Y$  für ein  $U = (\xi, \phi) \in X$  durch

$$A \begin{pmatrix} \xi \\ \phi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f(0, 0, c_0) \phi(\cdot) \\ \partial_\theta \phi(\cdot) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} G(t, (\xi, \phi(\cdot)), \tilde{\lambda}, c) &= \begin{pmatrix} f_{\text{mod}}(\phi(\cdot), \tilde{\lambda}, c) - f_{\text{mod}}(h_t, 0, c_0) - D_1 f_{\text{mod}}(h_t, 0, c_0)(\phi(\cdot) - h_t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} R(h_t) + \tilde{R}(h_t, \phi(\cdot) - h_t) + D_1^2 f(0)[h_t, \phi(\cdot) - h_t] \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

definiert sind. Unser Ziel ist es, die Existenz einer *globalen* zentrumsstabilen Mannigfaltigkeit  $W^{cs,loc}(0)$  für das System (3.108) zu zeigen (man beachte, dass die Nichtlinearität bereits modifiziert ist). Diese soll dann nach Konstruktion bei Null tangential an den verallgemeinerten Eigenraum  $\tilde{E}_{cs}$  von  $A$  sein, auf dem  $A$  nur Spektrum mit nichtpositiven Realteil besitzt.

Entscheidend ist nun zunächst die Beobachtung, dass wir  $t$  groß genug wählen können, so dass die Lipschitzkonstante von  $G(t, \cdot, \tilde{\lambda}, c)$  *global* klein und uniform für große  $t$  ist! Dies ist von Nöten, da wir diese Voraussetzung für die Konstruktion der zentrumsstabilen Mannigfaltigkeit  $W_{\tilde{\lambda},c}^{cs,loc}(0)$  brauchen. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Terme  $\tilde{R}(h_t, \phi(\cdot) - h_t), D_1^2 f(0)[h_t, \phi(\cdot) - h_t]$  in der Definition von  $G$ . Differenzieren nach  $\phi(\cdot)$  an der Stelle  $\Psi(\cdot)$  liefert die Terme

$$\begin{aligned} D_\phi \tilde{R}(h_t, \phi(\cdot) - h_t)|_{\phi=\Psi} \tilde{\phi}(\cdot) &= D_1 f(h_t) \tilde{\phi}(\cdot) - D_1 f(0) \tilde{\phi}(\cdot) - D_1^2 f(0)[h_t, \tilde{\phi}(\cdot)] \\ D_\phi D_1^2 f[h_t, \tilde{\phi}(\cdot) - h_t]|_{\phi=\Psi} \tilde{\phi}(\cdot) &= D_1^2 f[h_t, \tilde{\phi}(\cdot)]. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass diese Terme nicht von der Stelle  $\Psi$ , in der wir linearisieren, abhängen und uniform kleine Abschätzungen erlauben, da für  $t > 0$  groß genug die euklidische Norm  $|h(t)|_{\mathbb{R}^N}$  uniform klein ist. Die anderen in der Definition von  $G$  auftretenden Terme sind bereits durch eine cut-off-Funktion modifiziert. Wir haben also gezeigt, dass  $G(t, \cdot, \tilde{\lambda}, c)$  eine bezüglich  $t$  uniform kleine Lipschitzkonstante besitzt, solange  $t \in (t_*, \infty)$  und  $h(t)$  klein genug auf  $(t_*, \infty)$  für ein  $t_* > 0$  groß genug ist.

Bezeichne nun mit  $\tilde{E}_{cs} \subset \tilde{Y}$  den bezüglich  $\tilde{Y}$  abgeschlossenen Unterraum, so dass  $A : \tilde{E}_{cs} \rightarrow \tilde{E}_{cs}$  gilt (diese Abbildung bezeichnen wir von nun an auch mit  $A_{cs}$ ) und es eine Halbgruppe  $e^{A_{cs}t} : \tilde{E}_{cs} \rightarrow \tilde{E}_{cs}$  gibt, die die Abschätzung

$$\|e^{A_{cs}t} U_0\|_{\tilde{Y}} \leq M e^{\tilde{\nu}t} \|U_0\|_{\tilde{Y}}$$

für ein beliebiges  $\tilde{\nu} > 0$  und einem bezüglich  $t > 0$  uniformen  $M = M(\tilde{\nu}) > 0$  erfüllt. Genauer gilt sogar  $e^{A_{cs}t} = e^{A_c t} + e^{A_s t}$  für  $t \geq 0$  und diese Halbgruppen erfüllen die Eigenschaft

$$\|e^{A_c t} U_0\|_{\tilde{Y}} \leq M \|U_0\|_{\tilde{Y}}, \quad \|e^{A_s t} U_0\|_{\tilde{Y}} \leq M e^{-\beta t} \|U_0\|_{\tilde{Y}}$$

für alle  $t \geq 0$  und ein  $\beta > 0$ .  $e^{A_c t}$  bezeichnet hierbei die Fundamentallösung der linearen Gleichung  $\dot{U}(t) = A_c U(t)$ , wobei  $A_c$  die Einschränkung der Abbildung  $A$  auf den endlichdimensionalen Zentrumseigenraum bezeichnet. Außerdem gilt  $\tilde{E}_{cs} = \tilde{E}_c + \tilde{E}_s$ .

Außerdem bezeichnen wir mit  $\tilde{E}_u \subset \tilde{Y}$  den abgeschlossenen Unterraum, der  $\tilde{E}_u + \tilde{E}_{cs} = \tilde{Y}$  erfüllt und für den eine auf  $\mathbb{R}_-$  definierte Halbgruppe  $e^{A_u t} : \tilde{E}_u \rightarrow \tilde{E}_u$  existiert, so dass

$$\|e^{A_u t} \tilde{U}_0\|_{\tilde{Y}} \leq M e^{\sigma t} \|\tilde{U}_0\|_{\tilde{Y}}$$

für ein  $\sigma > 0$  und  $t \leq 0$  gilt. Alle entscheidenden Fakten zur Existenz dieser Halbgruppen in  $Y$  wurden in Kapitel 3.3.2 zusammengetragen. Dort wird allerdings nur die Konstruktion entsprechender Halbgruppen bezüglich hyperbolischer Operatoren  $A$  gezeigt. Für die Existenz der Halbgruppen im nichthyperbolischen Fall siehe Abschnitt 2.2.1 und speziell den Beweis von Satz 2.4. Schließlich zeigen die Argumente vor und nach (3.93), dass entsprechende Abschätzungen auch in  $\tilde{Y}$  gelten.

### Notation

Bezeichne nun mit  $\Pi_c : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$  bzw.  $\Pi_s : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$  bzw.  $\Pi_u : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$  die durch die Zerlegung  $\tilde{Y} = \tilde{E}_s + \tilde{E}_c + \tilde{E}_u$  definierten Projektionen.

Es sei daran erinnert, dass der Raum  $BC^\nu := BC^\nu((t_*, \infty), \tilde{Y})$  alle stetigen Funktionen  $x$  enthält, die bezüglich der Norm  $|x|_\nu = \sup_{t \geq t_*} e^{-\nu|t|} |x(t)|_{\mathbb{R}^N}$  beschränkt sind. Wir betrachten nun folgende Integralgleichung für  $U_{cs} \in \tilde{E}_{cs}$  und ein  $U(\cdot) \in BC^\nu$  und ein noch zu definierendes  $\nu > 0$ :

$$U(t) = e^{A_{cs}(t-t_*)} U_{cs} + \int_{t_*}^t e^{A_{cs}(t-s)} G(s, U(s), \tilde{\lambda}, c) ds + \int_{-\infty}^t e^{A_u(t-s)} G(s, U(s), \tilde{\lambda}, c) ds. \quad (3.109)$$

Fassen wir erneut  $G(t, \cdot, \tilde{\lambda}, c)$  als Abbildung von  $\tilde{Y}$  nach  $\tilde{Y}$  auf, so ist  $G$  differenzierbar und wohldefiniert. Damit definiert die rechte Seite eine wohldefinierte Abbildung  $K : BC^\nu \rightarrow BC^\nu$ , falls wir die Rate  $\tilde{\nu}$  von  $e^{A_{cs}t}$  kleiner als  $\nu$  wählen, d.h. solange  $0 < \tilde{\nu} < \nu$  gilt. Wir bemerken, dass im speziellen Fall, wo  $A$  nur *einfache*, rein imaginäre Eigenwerte besitzt, ohnehin  $\tilde{\nu} = 0$  gewählt werden kann.

Weiterhin hängt  $K$  hierbei von dem „Parameter“  $U_{cs} \in \tilde{E}_{cs}$  ab. Ist nun die (globale) Lipschitzkonstante von  $G(t, \cdot, \tilde{\lambda}, c)$  uniform klein bezüglich  $t \geq t_*$  (was wir für ein genügend kleines  $\varepsilon > 0$ , das in der Definition der cut-off-Funktion  $\chi_\varepsilon$  auftritt, und ein geeignet großes  $t_* > 0$  erreichen können), so ist  $K$  eine Kontraktion und besitzt für jeden Parameterwert  $U_{cs}$  einen Fixpunkt  $U(\cdot) \in BC^\nu$ . Analog zur Konstruktion von  $W^{cs,+}(0)$  kann man zeigen, dass  $U(t)$  für  $t > t_*$  tatsächlich differenzierbar ist und eine Lösung der Gleichung (3.108) auf  $(t_*, \infty)$  definiert. Weiterhin existiert eine Funktion  $\Psi$ , die für jedes  $W_{cs} \in \tilde{E}_{cs}$  den eindeutigen Punkt  $W_u \in \tilde{E}_u$  zuordnet, so dass  $U(t)$  eine Lösung der Fixpunktgleichung (3.109) für  $U_{cs} := W_{cs}$  ist und  $U(0) = W_{cs} + W_u$  gilt. Schließlich setzen wir

$$W^{cs,loc}(0) := \text{Graph}(\Psi) \subset \tilde{Y}.$$

Ist nun andererseits  $W(t)$  eine Lösung von (3.108), so gilt  $W(t) \in W^{cs,loc}(0)$  für alle  $t > t_*$  (da  $W(\cdot)$  die Fixpunktgleichung (3.109) löst).

Wir betrachten im weiteren nur den Fall  $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c_0)$ . Für diese Parameterwerte gilt  $G(t, 0, 0, c_0) = D_1 G(t, 0, 0, c_0) = 0$  für alle  $t \in (t_*, \infty)$ . Um die Abhängigkeit der Parameter mit einzubeziehen, kann man das System (3.108) mit den beiden zusätzlichen Gleichungen  $\dot{\tilde{\lambda}} = 0$  und  $\dot{c} = 0$  betrachten.

### Die Struktur von $W^{cs,loc}(0)$

Schließlich wollen wir auf die Struktur der Mannigfaltigkeit  $W^{cs,loc}(0)$  eingehen. Genauer wollen wir zeigen, dass die Lösung jedes Startwertes  $U \in W_{0,c_0}^{cs,loc}(0)$  in Vorwärtszeit gegen einen Orbit auf der Zentrumsmannigfaltigkeit konvergiert. Unser Beweis verläuft analog zu dem von Vanderbauwhede (siehe [55] Theorem 5.5) für gewöhnliche Differentialgleichungen.

Sei dazu ein Parameterwert  $(\tilde{\lambda}, c)$  mit  $\tilde{\lambda} > 0$  fixiert und  $|\tilde{\lambda}|$  klein genug gewählt. Zu gegebenem  $U \approx 0$  und  $U \in \tilde{E}_{cs}$  existiert nun eine Lösung  $U(t)$  der Gleichung

$$\dot{U}(t) = A_{cs}U(t) + G_{cs}(t, U(t)) \quad (3.110)$$

auf dem Intervall  $(t_*, \infty)$ , wobei  $G_{cs}(t, U) := (\Pi_c + \Pi_s)G(t, U)$  gilt.

Wir wollen zeigen, dass  $U(t)$  die Darstellung  $U(t) = Z(t) + W(t)$  besitzt, wobei  $Z(t)$  eine Lösung der Gleichung (3.110) ist und  $W(\cdot) \in BC^{-\alpha}((t_*, \infty), \tilde{Y})$  gilt. Zusätzlich konstruieren wir  $Z(t)$  in der Weise, dass der Orbit in einer Zentrumsmannigfaltigkeit enthalten ist.

Für den Beweis ist es wichtig, die Funktion  $G_{cs}(t, U)$  auch auf geeignete Weise für  $t \in (-\infty, t_*)$  zu definieren, so dass  $G_{cs}(t, \cdot)$  eine globale Lipschitzfunktion ist, deren Lipschitzkonstante uniform in  $t \in \mathbb{R}$  ist (und nicht nur uniform in  $t \in (t_*, \infty)$ ). Man beachte, dass in der Definition von  $G_{cs}(t, U)$  für  $t \geq t_*$  eine cut-off-Funktion  $\chi_\delta(|V(t)|_{\tilde{Y}}^2)$  auftritt (mit einer  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  Funktion  $\chi_\delta$ , die kompakten Träger in  $[-\delta, \delta]$  besitzt) und  $V(t)$  durch den Abstand des Punktes  $U$  zu  $H(t)$ , also  $V(t) := H(t) - U$ , charakterisiert ist. Für  $t \in \mathbb{R}$  wählen wir nun die erweiterte cut-off-Funktion:

$$\tilde{\chi}_\delta(|U|_Y, t) := \begin{cases} \chi_\delta(|V(t)|_{\tilde{Y}}^2) & : t \geq t_* \\ \chi_\delta((t - t_* + 1)|V(t)|_{\tilde{Y}}^2 + (-t - t_*)|U|_{\tilde{Y}}) & : t_* - 1 \leq t \leq t_* \\ \chi_\delta(|U|_{\tilde{Y}}) & : t \leq t_* - 1 \end{cases}$$

Diese cut-off Funktion ist nun auf  $\mathbb{R}$  stetig in  $t$  und stimmt mit der ursprünglichen auf  $(t_*, \infty)$  überein. Wir setzen

$$G_{cs}^{mod}(s, U) := \tilde{\chi}_\delta(|U|_{\tilde{Y}}, t) \cdot G_{cs}(s, U)$$

für  $U \in \tilde{Y}$  und  $s \in \mathbb{R}$ , unterdrücken aber von nun an die Bezeichnung „mod“. Ist nun  $U(t)$  eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Lösung von (3.110), die zusätzlich uniform klein ist, so löst  $U(\cdot)$  die ursprüngliche Gleichung (3.105). Die Modifikation der cut-off-Funktion war also notwendig, da die ursprüngliche cut-off-Funktion (die in der Definition von  $G(t, \cdot)$  auftritt) abschneidet, wenn man sich von der homoklinen Lösung  $H(t)$  entfernt.

### Lemma 3.17

Gleichung (3.110) besitzt eine Zentrumsmannigfaltigkeit  $W^c \subset \tilde{Y}$ , die als Graph über dem Zentrumseigenraum  $\tilde{E}_c$  gegeben ist.  $W^c$  enthält alle global definierten Lösungen von (3.110), die uniform beschränkt sind. Für jedes  $U \in W^c$  existiert eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösung  $U(\cdot) \in BC^\nu(\mathbb{R}, \tilde{Y})$  der Gleichung (3.110) mit  $G_{cs}^{mod}$  anstatt  $G_{cs}$ .

*Beweis*

Die gesuchten Lösungen  $U(\cdot) \in BC^\nu(\mathbb{R}, \tilde{Y})$  lassen sich für gegebenes  $U_c \in \tilde{E}_c$  mit Hilfe der folgenden Fixpunktgleichung konstruieren:

$$U(t) = e^{A_c t} U_c + \int_0^t e^{A_c(t-s)} G_{cs}(s, U(s)) ds + \int_\infty^t e^{A_s(t-s)} G_{cs}(s, U(s)) ds.$$

Man beachte, dass wir uns bereits in dem zentrumsstabilen Eigenraum  $\tilde{E}_{cs}$  befinden: es gibt also keinen instabilen Anteil.

Da  $G_{cs}(s, \cdot) = G_{cs}^{mod}(s, \cdot) : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$  eine globale Lipschitzfunktion ist (uniform in  $s \in \mathbb{R}$ ), definiert diese Fixpunktgleichung nun eine Kontraktion in  $BC^\nu(\mathbb{R}, \tilde{Y})$ , falls  $\nu > 0$  klein

genug ist. Also existiert für jeden Wert  $U_c \in \tilde{E}_c$  eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösung  $U(t)$  der Fixpunktgleichung. Wir können nun  $W^c$  als Graphen der Abbildung  $U_c \mapsto (\Pi_s + \Pi_u)U(0)$  definieren.  $\square$

### Notation

Im folgenden setzen wir für ein  $\alpha > 0$ :

$$\begin{aligned} BC_+^{-\alpha} &:= BC^{-\alpha}((t_*, \infty), \tilde{Y}) \\ BC_-^{-\alpha} &:= BC^{-\alpha}((-\infty, t_*), \tilde{Y}) \\ BC^{-\alpha} &:= BC^{-\alpha}(\mathbb{R}, \tilde{Y}) \end{aligned}$$

mit der gewichteten Norm  $\|U(\cdot)\|_{-\alpha} = \sup_{t \in I} e^{\alpha t} |U(t)|_{\tilde{Y}}$  und je nach Fall  $I = (t_*, \infty)$  bzw.  $I = (-\infty, t_*)$  bzw.  $I = \mathbb{R}$ .

Mit  $\tilde{U}(\cdot, U_+)$  für ein  $U_+ \in W^{cs,loc}(0)$  bezeichnen wir von an die auf dem Intervall  $(t_*, \infty)$  existierende Lösung  $\tilde{U}(\cdot) \in BC^\nu$  der Gleichung (3.110) zum Anfangswert  $\tilde{U}(t_*) = U_+$ . Ebenso bezeichnen wir mit  $Z(\cdot, Z_+)$  die zum Anfangswert  $Z_+ \in W^c$  existierende Lösung auf der Zentrumsmanigfaltigkeit  $W^c$ .

Wir benötigen nun das folgende Lemma (siehe auch Lemma 5.6 in [55]):

### Lemma 3.18

Sei  $\Lambda : \mathbb{R} \times \tilde{E}_{cs} \rightarrow \tilde{E}_{cs}$  eine stetige Abbildung mit den Eigenschaften:

- i)  $\Lambda(t, U) = \tilde{U}(t, U)$  für alle  $t \geq t_*$  und  $U \in \tilde{E}_{cs}$
- ii) Auf dem Intervall  $(-\infty, t_*)$  gilt  $\Lambda(\cdot, U) \in BC_-^{-\nu}$ ; insbesondere kann also die Funktion  $\Lambda(\cdot, U)$  mit exponentieller Rate kleiner oder gleich  $\nu$  wachsen, falls  $t \rightarrow -\infty$ .

Sei nun  $U_+ \in \tilde{E}_{cs}$ . Gilt dann

- a)  $W(\cdot) \in BC^{-\nu}$ , so dass  $\Lambda(\cdot, U_+) + W(\cdot)$  eine Lösung von (3.110) auf  $\mathbb{R}$  ist und  $Z_+ = U_+ + W(0)$  erfüllt ist,

so gilt:

- b) es existiert ein  $Z_+ \in W^c$  mit  $\sup_{t \geq t_*} e^{\nu|t|} |Z(t, Z_+) - \tilde{U}(t, U_+)|_{\tilde{Y}} < \infty$

### Beweis

Gelte also a). Dann ist  $\Lambda(\cdot, U_+) + W(\cdot)$  eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösung der Gleichung (3.110) und ein Element von  $BC_+^\nu$ , da  $\Lambda(t, U_+) = \tilde{U}(t, U_+)$  für  $t \geq t_*$  und  $\tilde{U}(\cdot, U_+) \in BC_+^\nu$ . Weiterhin ist  $W(\cdot) \in BC_-^{-\nu}$  und  $\Lambda(\cdot, U_+) \in BC_-^{-\nu}$  wegen i). Zusammen gilt also  $\Lambda(\cdot, U_+) + W(\cdot) \in BC_-^{-\nu}$  und  $\Lambda(\cdot, U_+) + W(\cdot) \in BC_+^\nu$ ; deswegen haben wir bereits  $Z_+ = U_+ + W(0) \in W^c$  und  $Z(\cdot, Z_+) \equiv \Lambda(\cdot, U_+) + W(\cdot)$  gezeigt. Insbesondere gilt weiterhin  $\sup_{t \geq t_*} e^{\nu|t|} |Z(t, Z_+) - \tilde{U}(t, U_+)|_{\tilde{Y}} < \infty$ .  $\square$

Um dieses Lemma benutzen zu können, benötigen wir eine stetige Funktion  $\Lambda(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$  mit den Eigenschaften i) und ii) des vorigen Lemmas. Insbesondere müssen wir die gesuchte Funktion  $\Lambda(\cdot, \cdot)$  auf dem Intervall  $(-\infty, t_*)$  spezifizieren. Wir betrachten dazu die Gleichung

$$\dot{U}_c = A\Pi_c U_c(t) + \Pi_c G_{cs}(t, U_c(t)). \quad (3.111)$$

Da  $\tilde{E}_c$  endlichdimensional ist und  $A\Pi_c : \tilde{E}_c \rightarrow \tilde{E}_c$  die Einschränkung der Abbildung  $A$  auf den Zentrumseigenraum ist, besitzt  $A\Pi_c$  nur Eigenwerte mit Realteil Null. Also induziert die Gleichung (3.111) einen Fluss  $\Phi(t, \cdot) : \tilde{E}_{cs} \rightarrow \tilde{E}_{cs}$  für  $t \in \mathbb{R}$  und es gilt  $\Phi(\cdot, U) \in BC^{-\nu}$  für alle  $U \in \tilde{E}_{cs}$ . Wir definieren nun die gesuchte Abbildung  $\Lambda(\cdot, U)$  für ein  $U \in \tilde{E}_{cs}$  durch

$$\Lambda(t, U) := \begin{cases} \tilde{U}(t, U) & : t \geq t_* \\ \Phi(t, U) & : t \leq t_* \end{cases}$$

Mit dieser Wahl von  $\Lambda(t, U)$  gelten i) und ii) des Lemmas (3.18) und außerdem ist  $\Lambda(\cdot, \cdot)$  stetig. Wir suchen nun ein  $W(\cdot) \in BC^{-\nu}$ , so dass  $\Lambda(\cdot, U) + W(\cdot)$  eine Lösung der Gleichung (3.110) auf  $\mathbb{R}$  ist. Dazu betrachten wir die Integralgleichung

$$\begin{aligned} W(t) &= -\Pi_s \Lambda(t, U) + \int_{-\infty}^t e^{A_s(t-\tau)} \Pi_s G_{cs}(\tau, \Lambda(\tau, U) + W(\tau)) d\tau \\ &\quad - \int_t^{\infty} e^{A_c(t-\tau)} [G_{cs}(\tau, \Lambda(\tau, U) + W(\tau)) - G_{cs}(\tau, \Lambda(\tau, U))] d\tau \end{aligned}$$

für  $W(\cdot) \in BC^{-\nu}$ , also ist  $W(\cdot)$  insbesondere als Funktion auf  $\mathbb{R}$  gesucht. Ist  $W(\cdot)$  ein Fixpunkt dieser Integralgleichung, so löst  $W(t) + \Lambda(t, U)$  die Gleichung (3.110) auf  $\mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{R}_-$  und wegen Fortsetzung in  $t = 0$  auf ganz  $\mathbb{R}$ . Um zu zeigen, dass die rechte Seite der Integralgleichung eine Kontraktion in  $BC^{-\nu}$  definiert, schreiben wir diese in folgender Form:

$$\begin{aligned} W(t) &= -\Pi_s \Lambda(t, U) + \int_{-\infty}^t e^{A_s(t-\tau)} \Pi_s G_{cs}(\tau, \Lambda(\tau, U)) d\tau \\ &\quad + \int_{-\infty}^t e^{A_s(t-\tau)} \Pi_s \hat{G}_{cs}(\tau, U, W(\tau)) d\tau - \int_t^{\infty} e^{A_c(t-\tau)} \hat{G}_{cs}(\tau, U, W(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (3.112)$$

wobei  $\hat{G}_{cs}(\tau, U, W(\tau)) = G_{cs}(\tau, \Lambda(\tau, U) + W(\tau)) - G_{cs}(\tau, \Lambda(\tau, U))$ . Dann gilt  $|\hat{G}(t, U, W)|_{\tilde{Y}} \leq K|W|_{\tilde{Y}}$  mit einer klein wählbaren Konstante  $K > 0$ , die uniform in  $t, U$  ist. Aus diesem Grund induziert die rechte Seite der Gleichung (3.112) eine Kontraktion in  $BC^{-\nu}$ , die uniform im Parameter  $U \in \tilde{E}_{cs}$  ist. Deswegen existiert für jedes  $U \in \tilde{E}_{cs}$  ein Fixpunkt  $W(\cdot) \in BC^{-\nu}$  von (3.112). Wegen Lemma 3.18 ist deswegen  $Z(\cdot) := W(\cdot) + \Lambda(\cdot, U)$  eine Lösung der Gleichung (3.110), die ebenfalls in der Zentrumsmannigfaltigkeit  $W^c$  liegt und es ist  $Z(0) = W(0) + U$ . Ist  $U \approx 0$ , so ist auch  $W(0) \approx 0$  und deswegen  $Z(0) \approx 0$ . Für  $\Pi_c Z(0) \in \tilde{E}_c$  existiert nun eine für  $t \geq t_*$  uniform beschränkte Lösung  $\hat{Z}(\cdot)$  der Gleichung (3.105) (also der nicht modifizierten Gleichung) mit  $\Pi_c \hat{Z}(0) = \Pi_c Z(0)$ : für  $\tilde{\lambda} > 0$  klein genug kennen wir nämlich das auf der Zentrumsmannigfaltigkeit reduzierte Vektorfeld: es existiert ein periodischer Orbit nahe Null und alle anderen Lösungen konvergieren in Vorwärtszeit gegen diesen. Also ist wegen der Eindeutigkeit  $\hat{Z}(t) = Z(t)$  für  $t \geq t_*$ . Also haben wir gezeigt, dass die Lösung jedes Anfangswertes  $U \in \tilde{E}_{cs}$ , der nahe genug an Null liegt, gegen einen Orbit auf der Zentrumsmannigfaltigkeit konvergiert und da alle Lösungen auf der Zentrumsmannigfaltigkeit  $W_c$  entweder gegen den periodischen Orbit oder das Gleichgewicht konvergieren, ist die Behauptung bewiesen.

### Abschluss des Beweises von Lemma 3.16

Es ergibt sich nun folgendes Bild: Betrachten wir einen Punkt  $U_+ \in W^{cs,+}(0)$  mit  $U_+ \in$

$B_R(H(0)) \cap W^{cs,+}(0)$  für ein genügend kleines  $R > 0$ , so existiert eine Lösung  $U(t) = V(t) + H(t)$  der modifizierten Gleichung

$$\dot{U}(t) = \mathcal{F}(H(t), 0, c_0) + \mathcal{A}_{0,c_0}(t)(U(t) - H(t)) + \mathcal{G}_{mod}(t, U(t) - H(t), \tilde{\lambda}, c).$$

Ist  $\|V(t)\|_{\tilde{Y}}$  klein genug für alle  $t > 0$ , so stimmt die rechte Seite der letzten Gleichung mit  $\mathcal{F}(U(t), \tilde{\lambda}, c)$  überein. Allerdings ist nach Konstruktion von  $U(\cdot)$  die Funktion  $V(\cdot)$  nur in einem Raum leicht exponentiell wachsender Funktionen beschränkt. Ist nun  $R$  (definiert in Lemma 3.16) und  $\varepsilon$  klein genug, so ist  $U(t_*)$  nahe  $H(t_*) \approx 0$  für  $t_* > 0$  groß genug und  $U(t)$  wächst für  $t > t_*$  mit höchstens schwacher exponentieller Rate  $\gamma$ . Wir haben nun im Beweisschritt "Die zentrumsstabile Mannigfaltigkeit  $W^{cs,loc}(0)$  nahe der Null" gezeigt, dass  $U(t)$  dann die Gleichung (3.108) löst (die ebenfalls modifiziert ist und bereits eine uniform kleine Lipschitzkonstante in Abhängigkeit von kleinen  $\varepsilon$ -Werten besitzt). Nach Definition liegt damit  $U(t)$  für  $t > t_*$  auf der zentrumsstabilen Mannigfaltigkeit  $W_{\tilde{\lambda},c}^{cs,loc}$ , falls die Rate  $\gamma$  klein genug ist. Haben wir schließlich  $H(t_1)$ , also genauer  $t_*$  so gewählt, dass  $H(t_*)$  genügend nahe an Null ist, so konvergiert die Lösung  $U(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen einen Orbit  $\tilde{\Gamma}$  auf der Zentrumsmanigfaltigkeit, sofern dieser Orbit ganz in einer kleinen Umgebung der Null enthalten ist, die wir vorhin mit  $B_\delta(0)$  bezeichnet haben. Ist aber  $\tilde{\lambda} > 0$ , so kennen wir bereits die Dynamik auf der Zentrumsmanigfaltigkeit in einer kleinen Umgebung der Null: das Gleichgewicht null ist instabil und alle anderen Lösungen konvergieren gegen die periodische Lösung  $\Gamma_{\tilde{\lambda},c}(t)$  für  $t > 0$ . Insbesondere verlässt keine Lösung die Umgebung  $B_\delta(0) \cap W_{\tilde{\lambda},c}^{cs,loc}$ , falls  $\delta > 0$  klein genug ist und der Startwert ebenfalls in dieser Umgebung liegt. Für diesen Fall haben wir also gezeigt, dass Lösungen  $U(t)$  *uniform* beschränkt sind und in Vorwärtszeit  $t > 0$  entweder gegen das Gleichgewicht Null oder einen periodischen Orbit konvergieren. Insbesondere wachsen die Lösungen  $U(t)$  für Startwerte  $U_+$  genügend nahe  $H(0)$  und Parameterwerte  $(\tilde{\lambda}, c)$  mit  $\tilde{\lambda} > 0$  nicht an. Dieses Argument zeigt schließlich, dass  $U(t)$  sogar die ursprüngliche, nicht modifizierte Gleichung

$$\dot{U}(t) = \mathcal{F}(U(t), \tilde{\lambda}, c)$$

löst und der Beweis des Lemmas ist vollständig.  $\square$

### Abschluss des Beweises von Satz 3.17

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass für geeignete Startwerte  $U_+$  nahe  $H(0)$ , die Lösung  $U(t) = H(t) + V(t)$  *uniform* beschränkt bleibt und  $\chi_\varepsilon(\|V(t)\|_{\tilde{Y}}) = 1$  für alle  $t \geq 0$  gilt, falls  $|V(0)|_{\tilde{Y}}$  genügend klein ist.

Diese Behauptung ist nun aber wegen des vorigen Lemmas *trivial* erfüllt. Konvergiert  $U(t)$  nicht gegen Null, so konvergiert  $U(t)$  (also insbesondere auch  $V(t)$ ) gegen den Orbit der periodischen Lösung  $\Gamma_{\tilde{\lambda},c}(t)$ . Dieser hat zu führender Ordnung die Amplitude  $C\sqrt{\tilde{\lambda}}$  für ein  $C > 0$ . Schränkt man sich also auf kleine Parameterwerte  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\varepsilon) > 0$  ein, so ist  $\chi_\varepsilon(\|V(t)\|_{\tilde{Y}}) = 1$ , falls  $|V(0)|_{\tilde{Y}}$  klein genug ist.  $\square$

### Die zentrumsinstabile Mannigfaltigkeit nahe eines Punktes der homoklinen Lösung

Man kann ebenfalls die Existenz einer zentrumsinstabilen  $C^2$ -Mannigfaltigkeit  $W^{cu,-}(0) = W_{\tilde{\lambda},c}^{cu,-}(0)$  in  $\tilde{Y}$  zeigen, die folgende Eigenschaften besitzt:

- i)  $W^{cu,-}(0) \subset \tilde{Y}$  ist lokal invariant. Also existiert für jeden Anfangswert  $U_- \in W^{cu,-}(0)$  eine lokal definierte Abbildung  $U(t) : (-t_*, 0] \rightarrow \tilde{Y}$ , deren Werte  $U(t)$  in der Mannigfaltigkeit  $W^{cu,-}(0)$  sind, die  $U(0) = U_-$  erfüllt und die Darstellung  $U(t) = (\xi(t), \xi_t)$  für eine Lösung  $\xi(t) : [-t_*, 0] \rightarrow \mathbb{R}^N$  von (3.77) besitzt.
- ii)  $W^{cu,-}(0)$  enthält die Anfangswerte  $U_- \in \tilde{Y}$  aller Lösungen der Gleichung (3.85), die für alle Zeiten  $t \leq 0$  bezüglich der  $\tilde{Y}$ -Norm uniform nahe der homoklinen Lösung  $H(\cdot)$  bleiben und  $U_-$  bezüglich der  $\tilde{Y}$ -Norm genügend nahe an  $H(0)$  liegt. Insbesondere gilt  $H(0) \in W_{0,c_0}^{cu,-}(0)$ .
- iii) Die Mannigfaltigkeit  $W_{\tilde{\lambda},c}^{cu,-}$  hängt zweimal stetig differenzierbar von den Parametern  $\tilde{\lambda}$  und  $c$  ab: In unserem Fall bedeutet dies, dass die um die Gleichungen  $\dot{\tilde{\lambda}} = 0, \dot{c} = 0$  erweiterte Gleichung (3.85) eine  $C^2$ -Mannigfaltigkeit  $W_{erw}^{cu,-} \subset \tilde{Y} \times \mathbb{R}^2$  besitzt und  $W_{\tilde{\lambda},c}^{cu,-}(0) := W_{erw}^{cu,-} \cap (\tilde{Y} \times \{\tilde{\lambda}\} \times \{c\})$  die Eigenschaften i), ii) erfüllt.

*Konstruktion:*

Der Schlüssel zur Konstruktion dieser invarianten Mannigfaltigkeit ist erneut die lineare Gleichung

$$\dot{Y}(t) = \mathcal{A}_{0,c_0}(t)Y(t).$$

Diese besitzt nach Satz 3.14 und der Bemerkung am Ende des Abschnittes „Beweis von Satz 3.15 und 3.14“ in Kapitel 3.3.4 eine Zentrumsdichotomie auf  $\mathbb{R}_-$  mit Lösungsoperatoren  $\Phi_-^{cu}(s, t), \Phi_-^s(t, s)$  für  $0 \geq t \geq s$ . Außerdem ist der Operator  $\Phi_-^{cu}(t, s)$  für  $t \leq s \leq 0$  uniform beschränkt, d.h. es gilt  $|\Phi_-^{cu}(t, s)V|_{\tilde{Y}} \leq M|V|_{\tilde{Y}}$  und der Operator  $\Phi_-^s(t, s)$  erfüllt die exponentielle Abschätzung  $|\Phi_-^s(t, s)V| \leq e^{-d|t-s|}$  für ein geeignetes  $d > 0$ .

Für die Konstruktion von  $W^{cu,-}(0)$  machen wir nun wiederum den Ansatz  $U(t) = H(t) + V(t)$  und suchen  $V(t)$  für ein  $V_0^{cu} \in \tilde{E}_-^{cu} := \text{Bild}(\Phi_-^{cu}(0, 0)|_{\tilde{Y}}) \subset \tilde{Y}$  (versehen mit der  $\tilde{Y}$ -Norm) und  $t \leq 0$  als Fixpunkt der Integralgleichung

$$V(t) = \Phi_-^{cu}(t, 0)V_0^{cu} + \int_0^t \Phi_-^{cu}(s, t)\mathcal{G}_{mod}(s, V(s), \tilde{\lambda}, c)ds + \int_{-\infty}^t \Phi_-^s(t, s)\mathcal{G}_{mod}(s, V(s), \tilde{\lambda}, c)ds \quad (3.113)$$

in einem Funktionenraum  $BC^{\tilde{\sigma}}(\mathbb{R}_-, \tilde{Y})$  leicht exponentiell wachsender Funktionen (wobei  $\tilde{\sigma} > 0$ ). Außerdem bezeichnet  $\mathcal{G}_{mod}$  die modifizierte Nichtlinearität (3.89). Fixpunkte  $V(\cdot) = V(\cdot, V_0^{cu})$  dieser Gleichung induzieren dann via  $U(\cdot) := H(\cdot) + V(\cdot)$  eine Lösung der ursprünglichen Gleichung (3.85). Bezeichnen wir die Abbildung  $V_0^u \mapsto \Phi_-^s(0, 0)V(0, V_0^u)$  mit  $\Psi$ , so können wir  $W^{cu,-}(0)$  mittels  $W^{cu,-}(0) := H(0) + \text{Graph}(\Psi)$  definieren. Alle anderen Eigenschaften folgen nun analog zur Konstruktion von  $W^{cs,+}(0)$ .  $\square$

*Bemerkung*

Die Mannigfaltigkeit  $W_{0,c_0}^{cu,-}(0)$  ist an der Stelle  $H(0) \in W_{0,c_0}^{cu,-}(0)$  tangential an  $\tilde{E}_-^{cu}(0)$ .

### Die stark-instabile Mannigfaltigkeit nahe eines Punktes der homoklinen Lösung

Analog zu dem vorigen Abschnitt kann man die Existenz einer lokal invarianten, instabilen  $C^2$ -Mannigfaltigkeit  $W^{u,-}(0) = W_{\tilde{\lambda},c}^{u,-}(0)$  in  $\tilde{Y}$  zeigen, die folgende Eigenschaften besitzt:

- i)  $W^{u,-}(0) \subset \tilde{Y}$  ist invariant. Also existiert für jeden Anfangswert  $U_- \in W^{u,-}(0)$  eine stetige Abbildung  $U(t) : (-\infty, 0] \rightarrow \tilde{Y}$ , so dass  $U(t) \in W^{u,-}(0)$  für ein kleines

Intervall  $(-t_*, 0]$ ,  $U(0) = U_-$  und so dass  $U(t)$  die Darstellung  $U(t) = (\xi(t), \xi_t)$  für eine Lösung  $\xi(t) : [-t_*, 0] \rightarrow \mathbb{R}^N$  von (3.77) besitzt.

- ii)  $W^{u,-}(0)$  besteht genau aus allen Anfangswerten  $U_- \approx H(0)$  mit  $U_- \in \tilde{Y}$ , die folgendes erfüllen: Es existiert eine stetige Funktion  $U(t) : (-\infty, 0] \rightarrow \tilde{Y}$ , so dass  $U(t) = (\xi(t), \xi_t)$  und  $\xi(t)$  eine Lösung der Gleichung (3.77) auf  $\mathbb{R}_-$  ist,  $U(0) = U_-$  gilt und die Abschätzung  $|U(t)|_{\tilde{Y}} \leq M e^{-\beta|t|}$  für alle  $t \leq 0$  und ein  $M = M(U_-) > 0$  erfüllt ist. Hierbei hängt  $\beta > 0$  nicht von  $U_-$  ab.
- iii) Die Mannigfaltigkeit  $W_{\tilde{\lambda},c}^{u,-}(0)$  hängt zweimal stetig differenzierbar von den Parametern  $\tilde{\lambda}$  und  $c$  ab. Dies bedeutet, dass  $W_{\tilde{\lambda},c}^{u,-}(0)$  lokal durch den Graphen einer Funktion  $\Psi(\cdot, \tilde{\lambda}, c)$  in  $\tilde{Y}$  dargestellt werden kann und die Abbildung  $(\tilde{\lambda}, c) \mapsto \Psi(U, \tilde{\lambda}, c)$  mit Werten in  $\tilde{Y}$  und für ein festes  $U \in \tilde{Y}$  zweimal stetig differenzierbar ist.

### Konstruktion

Der Schlüssel zur Konstruktion dieser invarianten Mannigfaltigkeit ist die lineare Gleichung

$$\dot{Y}(t) = \mathcal{A}_{0,c_0}(t)Y(t).$$

Diese Gleichung besitzt nach Satz 3.14 eine Zentrumsdichotomie auf  $\mathbb{R}_-$  mit Lösungsoperatoren  $\Phi_-^u(s, t), \Phi_-^{cs}(t, s)$  für  $0 \geq t \geq s$ . Außerdem erfüllt  $\Phi_-^{cs}(t, s)$  für  $s \leq t \leq 0$  die Abschätzung  $|\Phi_-^{cs}(t, s)V|_{\tilde{Y}} \leq M e^{k|t-s|}|V|_{\tilde{Y}}$  für ein beliebiges  $k > 0$  und ein  $M = M(k)$ . Der Operator  $\Phi_-^u(t, s)$  erfüllt hingegen die exponentielle Abschätzung  $|\Phi_-^u(t, s)V| \leq e^{-\tilde{d}|t-s|}$  für ein geeignetes  $\tilde{d} > 0$ .

Für die Konstruktion von  $W^{u,-}(0)$  machen wir den Ansatz  $U(t) = H(t) + V(t)$  und suchen  $V(t)$  für ein  $V_0^u \in \text{Bild}(\Phi_-^u(0, 0)|_{\tilde{Y}})$  und  $t \leq 0$  als Fixpunkt der Integralgleichung

$$V(t) = \Phi_-^u(t, 0)V_0^u + \int_0^t \Phi_-^u(s, t)\mathcal{G}_{mod}(s, V(s), \tilde{\lambda}, c)ds + \int_{-\infty}^t \Phi_-^{cs}(t, s)\mathcal{G}_{mod}(s, V(s), \tilde{\lambda}, c)ds \quad (3.114)$$

in einem Funktionenraum  $BC^{-\sigma}(\mathbb{R}_-, \tilde{Y})$  exponentiell abfallender Funktionen. Hierbei bezeichnet  $\mathcal{G}_{mod}$  die modifizierte Nichtlinearität (3.89). Fixpunkte  $V(\cdot) = V(\cdot, V_0^{cu})$  der Gleichung (3.114) induzieren dann via  $U(\cdot) := H(\cdot) + V(\cdot)$  eine Lösung der ursprünglichen Gleichung (3.85). Bezeichnen wir die Abbildung  $V_0^u \mapsto \Phi_-^{cs}(0, 0)V(0, V_0^u)$  mit  $\hat{\Psi}$ , so können wir  $W^{u,-}(0)$  mittels  $W^{u,-}(0) := H(0) + \text{Graph}(\hat{\Psi})$  definieren. Außerdem ist die Abbildung  $\Psi$  zweimal stetig differenzierbar bezüglich der Parameter  $(\tilde{\lambda}, c)$ , da dies für den Fixpunkt  $V(\cdot) = V(\cdot, V_0^u, \tilde{\lambda}, c)$  zutrifft (die Kontraktion ist in diesem Fall für ein festes  $Y(\cdot) \in BC^{-\sigma}$  zweimal stetig differenzierbar bezüglich  $(\tilde{\lambda}, c)$ ). Alle anderen Eigenschaften folgen nun analog zur Konstruktion von  $W^{cs,+}(0)$ .  $\square$

### Bemerkung

Die Mannigfaltigkeit  $W_{0,c_0}^{u,-}(0)$  ist an der Stelle  $H(0) \in W_{0,c_0}^{u,-}(0)$  tangential an  $\tilde{E}_-^u(0) = \text{Bild}(\Phi_-^u(0, 0)|_{\tilde{Y}})$ , wobei  $\tilde{E}_-^u(0)$  ein bezüglich  $\tilde{Y}$  abgeschlossener Unterraum ist.

### Die lokale stark-stabile Mannigfaltigkeit $W^{ss,loc}(0)$

Wir konstruieren in diesem Abschnitt die stark-stabile Mannigfaltigkeit  $W^{ss,loc}(0) = W_{\tilde{\lambda},c}^{ss,loc}(0) \subset \tilde{Y}$  der Null. Diese ist eine  $C^2$ -Mannigfaltigkeit mit den folgenden Eigenschaften:

- i)  $W^{ss,loc}(0) \subset \tilde{Y}$  ist invariant und für jeden Anfangswert  $U_+ \in W^{ss,loc}(0)$  existiert eine auf  $\mathbb{R}_+$  definierte, stetige Funktion  $U(t) = (\xi(t), \xi_t)$  mit Werten in  $\tilde{Y}$ , wobei  $\xi(t)$  eine Lösung der Gleichung (3.77) auf  $\mathbb{R}_+$  ist. Es ist  $U(0) = U_+$ ,  $U(t) \in W^{ss,loc}(0)$  für alle Zeiten  $t \geq 0$  und  $U(t)$  konvergiert für  $t \rightarrow \infty$  mit exponentieller Rate  $\sigma > 0$  gegen Null.
- ii) Existiert eine lokal nahe null definierte Lösung  $U(t)$  von (3.85), die auf  $\mathbb{R}_+$  definiert ist und für  $t \rightarrow \infty$  mit exponentieller Rate  $\sigma > 0$  gegen null konvergiert, so gilt  $U(0) \in W^{ss,loc}(0)$ .
- iii) Die Mannigfaltigkeit  $W_{\tilde{\lambda},c}^{ss,loc}(0)$  hängt zweimal stetig differenzierbar von den Parametern  $\tilde{\lambda}$  und  $c$  ab. Dies bedeutet, dass  $W_{\tilde{\lambda},c}^{ss,loc}(0)$  lokal durch den Graphen einer Funktion  $\Psi(\cdot, \tilde{\lambda}, c)$  in  $\tilde{Y}$  dargestellt werden kann und die Abbildung  $(\tilde{\lambda}, c) \mapsto \Psi(U, \tilde{\lambda}, c)$  mit Werten in  $\tilde{Y}$  und für ein festes  $U \in \tilde{Y}$  zweimal stetig differenzierbar ist.

### Konstruktion

Zur Konstruktion dieser Mannigfaltigkeit machen wir folgende Vorbemerkung: wir betrachten die Linearisierung von (3.85) für die Parameter  $(\lambda, c) = (0, c_0)$  in der Null. Dies ergibt eine *autonome* lineare Gleichung  $\dot{V} = AV$  und wir können die Existenz bezüglich  $Y$  abgeschlossener Unterräume  $E_c, E_s, E_u$  mit zugehörigen Projektionen

$$\Pi_c, \Pi_s, \Pi_u : Y \rightarrow Y \quad (3.115)$$

zeigen, auf denen Halbgruppen  $T_c(t) : E_c \rightarrow E_c$ ,  $T_s(t) : E_s \rightarrow E_s$ ,  $T_u(-t) : E_u \rightarrow E_u$  für  $t \in \mathbb{R}$  bzw.  $t \geq 0$  bzw.  $t \geq 0$  existieren. Außerdem gibt es  $K, \sigma > 0$ , so dass die Abschätzungen

$$|T_c(t)V_0|_Y \leq K|V_0|_Y \quad |T_s(t)V_0|_Y \leq Ke^{-\sigma t}|V_0|_Y \quad |T_u(-t)V_0|_Y \leq Ke^{-\sigma|t|}|V_0|_Y.$$

und

$$|T_c(t)V_0|_{\tilde{Y}} \leq \tilde{K}|V_0|_{\tilde{Y}} \quad |T_s(t)V_0|_{\tilde{Y}} \leq \tilde{K}e^{-\sigma t}|V_0|_{\tilde{Y}} \quad |T_u(-t)V_0|_{\tilde{Y}} \leq \tilde{K}e^{-\sigma|t|}|V_0|_{\tilde{Y}} \quad (3.116)$$

mit einer eventuell größeren, aber uniformen Konstanten  $\tilde{K}$  gelten. Ausserdem ist  $A|_{E_s} : E_s \rightarrow E_s$  bzw.  $A|_{E_c} : E_c \rightarrow E_c$  bzw.  $-A|_{E_u} : E_u \rightarrow E_u$  der Generator bezüglich  $T_s(t)$  bzw.  $T_c(t)$  bzw.  $T_u(-t)$  für  $t \geq 0$ . Wir setzen noch  $T_{cu}(t) : Y \rightarrow Y$  für  $t \leq 0$  mit  $T_{cu}(t) := T_u(t)\Pi_u + T_c(t)\Pi_c$ . Um die Existenz dieser Halbgruppen einzusehen, kann man den Satz 3.14 benutzen: Dieser Satz liefert (bezüglich  $Y$ ) abgeschlossene Unterräume  $E_{cs} := \text{Bild}(Q(0))$  und  $E_u := \text{Bild}(id - Q(0))$  (wobei  $Q(t)$  in Satz 3.14 definiert wird). Man beachte, dass in diesem Fall die Projektionen  $Q(t)$  tatsächlich nicht von  $t$  abhängen. Nach gewöhnlicher Semigruppentheorie existiert nun ein Generator auf  $E_{cs}$ , dessen Spektrum in der geschlossenen linken Halbebene enthalten ist (das Spektrum des Generators besteht nämlich nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit und man beachte die Abschätzungen für Lösungen in Satz 3.14 mit Startwerten in  $E_{cs}$ ). Mit Hilfe der Spektralprojektion  $P_c$  bezüglich aller Eigenwerte des Generators mit Realteil Null kann man nun den endlichdimensionalen Zentrumseigenraum  $E_c \subset E_{cs}$  und anschließend den (abgeschlossenen) Unterraum  $E_s$  als das Bild der Projektion  $id_{E_{cs}} - P_c$  definieren (die hier als Abbildung von  $E_{cs}$  in sich aufgefasst wird). Alle Details sind analog zum Beweis von Satz 2.4. Die Abschätzungen in (3.116) bezüglich der  $\tilde{Y}$ -Norm ergeben sich aus denen

bezüglich der  $Y$ -Norm: man beachte, dass die Operatoren  $T_c, T_u, T_s$  auf Lösungen einer Forward-Backward-Delay Gleichung shiften. Also erfüllen auch die Ableitungen dieser Lösungen mittels der Differentialgleichung entsprechende Abschätzungen (siehe für eine analoge Argumentation (3.93)).

Man kann diese Mannigfaltigkeit konstruieren, indem man für gegebenes  $U_0^s \in \tilde{E}_s$ , wobei  $\tilde{E}_s := E_s \cap \tilde{Y}$  ein bezüglich der  $\tilde{Y}$ -Norm abgeschlossener Unterraum ist, einen Fixpunkt der Integralgleichung

$$U(t) = T_s(t)\Pi_s U_0^s + \int_0^t T_s(t-s)\Pi_s G_{mod}(U(s), \tilde{\lambda}, c)ds + \int_{-\infty}^t T_{cu}(s-t)G_{mod}(U(s), \tilde{\lambda}, c)ds \quad (3.117)$$

(die Operatoren  $T_s, T_{cu}$  sind hier als Abbildungen von  $\tilde{E}_s$  bzw.  $\tilde{E}_{cu} := (E_u + E_c) \cap \tilde{Y}$  nach  $\tilde{Y}$  aufzufassen). Hierbei ist  $G(U, \tilde{\lambda}, c)$  durch  $G(U) := \mathcal{F}(U, \tilde{\lambda}, c) - AU$  gegeben, wobei  $A$  die Linearisierung von (3.85) im Gleichgewicht null für die Parameterwerte  $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c_0)$  bezeichnet. Die rechte Seite (3.117) definiert nun eine Kontraktion in dem Raum  $BC^{-\kappa}(\mathbb{R}_+, \tilde{Y})$  für ein beliebiges  $\sigma > \kappa > 0$ , wobei  $\sigma$  in Definition der Halbgruppe  $T_s(t)$  auftritt. Außerdem hängt die Kontraktion zweimal stetig differenzierbar von den Parametern  $(\tilde{\lambda}, c)$  ab. Alle Behauptungen folgen nun analog zu den vorherigen Beweisen.  $\square$

### Bemerkung

Die Mannigfaltigkeit  $W_{0,c_0}^{ss,loc}(0)$  ist also an der Stelle  $H(0) \in W_{0,c_0}^{ss,loc}(0)$  tangential an den in  $\tilde{Y}$  abgeschlossenen Unterraum  $\tilde{E}^s$ .

### Die lokale instabile Mannigfaltigkeit $W^{u,loc}(0)$ der Null

Man kann die Existenz einer lokal invarianten, instabilen  $C^2$ -Mannigfaltigkeit  $W^{u,loc}(0) = W_{\tilde{\lambda},c}^{u,loc}(0)$  in  $\tilde{Y}$  zeigen, die folgende Eigenschaften besitzt:

- i)  $W^{u,loc}(0) \subset \tilde{Y}$  ist invariant und für jeden Anfangswert  $U_- \in W^{u,loc}(0)$  existiert eine auf  $\mathbb{R}_-$  definierte, stetige Funktion  $U(t) = (\xi(t), \xi_t)$  mit Werten in  $\tilde{Y}$ , wobei  $\xi(t)$  eine Lösung der Gleichung (3.77) auf  $\mathbb{R}_-$  ist. Es ist  $U(0) = U_-$ ,  $U(t) \in W^{u,loc}(0)$  für alle Zeiten  $t \leq 0$  und  $U(t)$  konvergiert für  $t \rightarrow -\infty$  mit exponentieller Rate  $\kappa > 0$  gegen Null.
- ii) Existiert eine lokal nahe null definierte Lösung  $U(t)$  von (3.85), die auf  $\mathbb{R}_-$  definiert ist und für  $t \rightarrow -\infty$  mit exponentieller Rate  $\kappa > 0$  gegen null konvergiert, so gilt  $U(0) \in W^{u,loc}(0)$ .
- iii) Die Mannigfaltigkeit  $W_{\tilde{\lambda},c}^{u,loc}(0)$  hängt zweimal stetig differenzierbar von den Parametern  $\tilde{\lambda}$  und  $c$  ab. Dies bedeutet, dass  $W_{\tilde{\lambda},c}^{u,loc}(0)$  lokal durch den Graphen einer Funktion  $\Psi_u(\cdot, \tilde{\lambda}, c)$  in  $\tilde{Y}$  dargestellt werden kann und die Abbildung  $(\tilde{\lambda}, c) \mapsto \Psi_u(U, \tilde{\lambda}, c)$  mit Werten in  $\tilde{Y}$  und für ein festes  $U \in \tilde{Y}$  zweimal stetig differenzierbar ist.

### Konstruktion

Konstruiert wird diese Mannigfaltigkeit mit der Hilfe der folgenden Integralgleichung:

$$U(t) = T_u(t)\Pi_u U_0^u + \int_0^t T_u(t-s)\Pi_u G_{mod}(U(s), \tilde{\lambda}, c)ds \quad (3.118) \\ + \int_{-\infty}^t T_{cs}(s-t)G_{mod}(U(s), \tilde{\lambda}, c)ds,$$

wobei  $U_0^u \in \tilde{E}_u$ ,  $T_{cs}(t) := T_c(t)\Pi_c + T_s(t)\Pi_s$  für  $t \geq 0$  und  $U(\cdot) \in BC^{-\alpha}(\mathbb{R}_-, \tilde{Y})$  für ein geeignetes  $\sigma > \alpha > 0$  gilt (für die Definition von  $\sigma$  siehe (3.116)). Außerdem ist  $G(U, \tilde{\lambda}, c)$  durch  $G(U) := \mathcal{F}(U, \tilde{\lambda}, c) - AU$  gegeben, wobei  $A$  die Linearisierung von (3.85) im Gleichgewicht null für die Parameterwerte  $(\tilde{\lambda}, c) = (0, c_0)$  bezeichnet. Die rechte Seite (3.118) definiert nun eine Kontraktion in dem Raum  $BC^{-\kappa}(\mathbb{R}_+, \tilde{Y})$ , für ein beliebiges  $\sigma > \kappa > 0$ , und diese Kontraktion hängt zweimal stetig differenzierbar von den Parametern  $(\tilde{\lambda}, c)$  ab. Alle Behauptungen folgen nun analog zu den vorherigen Beweisen.  $\square$

