3.3 Dichotomien nichtautonomer Gleichungen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Existenz von *Zentrumsdichotomien* für die entlang der homoklinen Lösung $h(t)$ linearisierte Gleichung (3.8) beschäftigen. Grob gesagt, liefern Zentrumsdichotomien die Existenz zweier Unterräume, auf denen man die linearisierte Gleichung in Vor- bzw. Rückwärtszeit lösen kann. Der Unterschied zu *exponentiellen Dichotomien* besteht darin, dass die entsprechenden Lösungen in Vor- und Rückwärtszeit nicht exponentiell abklingen, sondern sogar anwachen dürfen.
Für die Konstruktion von exponentiellen Dichotomien halten wir uns an die Arbeit von Scheel et al [43]. Leider ist die dort betrachtete Klasse linearer Forward-Backward-Delay Gleichungen nicht groß genug. Insbesondere umfasst sie keine Gleichungen der Form $\dot{x}(t) = \int_{-a}^{b} p(s)x_s ds$ mit einer stetigen Funktion $p(s)$. Wir werden deswegen zunächst autonome, lineare Mixed-Type Gleichungen studieren und exponentielle Dichotomien für diese Klasse von Gleichungen konstruieren. Es wird sich als wichtig herausstellen, mit Funktionenräumen lebesque-integrierbarer anstatt mit Funktionenräumen stetiger Funktionen zu arbeiten.

3.3.1 Das Set-up und Definitionen

Da wir in den folgenden Kapiteln Ergebnisse der Arbeit von Scheel et al [43] auf eine grössere Klasse von Operatoren verallgemeinern wollen, wiederholen wir das ganze Setting. Wir betrachten dazu die folgende Gleichung:

$$\dot{x}(t) = L(t)x_t, \tag{3.15}$$

wobei $L(t) : H^1([-a, b], \mathbb{C}^N) \to \mathbb{C}^N$ für $N \in \mathbb{N}$ und festes $t \in \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung ist.

Annahmen an $L(t)$
Wir nehmen an, dass $L(t)$ die Form

$$L(t)\varphi = \int_{-a}^{b} p(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta + \sum_{k=1}^{m} A_k(t)\varphi(r_k), \tag{3.16}$$

mit einer stetigen Funktion $p(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times [-a, b] \to \mathbb{C}^{N\times N}$ hat. Außerdem seien die Funktionen $A_k(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{N\times N}$ beschränkt und stetig. Wir nehmen an, dass $A_1(\cdot)$ und $A_m(\cdot)$ nicht identisch verschwinden und dass $-a = r_1 < \ldots < r_m = b$ gilt. Weiterhin existiere ein j_0 mit $r_{j_0} = 0$.

Die letzte Bedingung ist offensichtlich keine zusätzliche Annahme und lediglich eine Konvention, da man stets $A_0(\cdot) = 0$ setzen kann. Man beachte dass wir in diesem Kapitel Abbildungen $A_k(\cdot)$ zulassen, die auch für $k \neq j_0$ zeitabhängig sind.
Wir benutzen in diesem Kapitel folgende Definition einer Lösung $x(\cdot)$ der Gleichung (3.15) mit Anfangswert $\varphi(\cdot) \in L^2([-a, b], \mathbb{C}^n)$.

Definition 11 (Lösungen mit Anfangswert in L^2)
Wir sagen, $x(\cdot) : [-a, b + t_0] \to \mathbb{C}^N$ ist eine **Lösung von (3.15) auf** $[0, t_0]$ **mit Anfangswert** $\varphi \in L^2([-a, b], \mathbb{C}^N)$*, falls $x_0 = \varphi$, $x(\cdot) \in L^2([-a, b + t_0], \mathbb{C}^N) \cap H^1_{loc}([0, t_0], \mathbb{C}^N)$ und (3.30) für fast alle $t \in [0, t_0]$ gilt.*

Wir betrachten den dicht definierten Operator $\mathcal{L} : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ mit

$$(\mathcal{L}v)(t) = \partial_t v(t) - L(t)v_t. \tag{3.17}$$

Außerdem können wir den adjungierten Operator $\mathcal{L}^* : \mathcal{D}(\mathcal{L}^*) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, $(\mathcal{L}^* v)(t) = -\partial_t v - \tilde{L}(t)v_t$ betrachten. Explizit hat $\mathcal{L}^*$ die Form

$$(\mathcal{L}^* v)(t) = -\partial_t v - \int_{-a}^{b} p^*(t-\theta, \theta) v(t-\theta) d\theta - \sum_{k=1}^{m} A_k^*(t - r_k) v(t - r_k), \tag{3.18}$$

wie sich schnell verifizieren läßt. Außerdem gilt für alle $w(\cdot), v(\cdot) \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{L}v)(t) \cdot w(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \cdot (\mathcal{L}^* w)(t) dt, \tag{3.19}$$

wobei „$\cdot$“ das kanonische Skalarprodukt in $\mathbb{C}^N$ bezeichnet.

Definition 12
Wir nennen (3.15) **asymptotisch konstant***, falls die Limiten $p_\pm(\cdot) := \lim_{t \to \pm\infty} p(t, \cdot)$, $p_\pm(\cdot) \in C^0([-a, b], \mathbb{C}^{N \times N})$ und $A_k^\pm := \lim_{t \to \pm\infty} A_k(t)$ existieren. Gleichung (3.15) heißt* **asymptotisch hyperbolisch***, falls die charakteristischen Gleichungen*

$$det \triangle_\pm (\lambda) := det((\lambda) id - (\int_{-a}^{b} p_\pm(\theta) e^{\lambda\theta} d\theta + \sum_{k=1}^{m} A_k^\pm e^{\lambda r_k})) = 0 \tag{3.20}$$

keine Lösungen auf der imaginären Achse haben, also falls $det \triangle_\pm (is) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt.

Betrachtet man den Operator $\mathcal{L}^*$, so ist auch dieser asymptotisch konstant, falls $\mathcal{L}$ asymptotisch konstant ist. Analog kann man also die charakteristischen Gleichungen bezüglich $\mathcal{L}^*$ mittels

$$\det \triangle^\pm (\lambda) := \det((\lambda) id - (\int_{-a}^{b} p_\pm^*(\theta) e^{-\lambda\theta} d\theta + \sum_{k=1}^{m} (A_k^\pm)^* e^{-\lambda r_k})) \tag{3.21}$$

definieren. Man kann nun auf elementarer Ebene verifizieren, dass

$$\det \triangle^\pm (\lambda) = (-1)^N \overline{\det \triangle_\pm (-\overline{\lambda})} \tag{3.22}$$

gilt. Also ist $\mathcal{L}^*$ genau dann asymptotisch hyperbolisch, wenn $\mathcal{L}$ asymptotisch hyperbolisch ist. Der folgende, wichtige Satz wurde von Mallet-Paret in [32] bewiesen:

Satz 3.3
Falls $\mathcal{L}$ asymptotisch hyperbolisch ist, so ist $\mathcal{L}$ ein Fredholmoperator.

Es sollte hingegen bemerkt werden, dass die Resultate in [32] für $L(t)$ mit $p(\cdot, \cdot) \equiv 0$ aufgeschrieben sind. Alle Resultate, die zum Beweis des Satzes (3.3) benötigt werden sind allerdings so allgemein, dass sie sich wortwörtlich auf unsere Klasse linearer Operatoren $\mathcal{L}$ verallgemeinern lassen. Wir machen nun folgende Annahme, die für den Rest dieses Kapitels gelten soll.

Hypothese 6 (Eindeutige-Fortsetzungs-Eigenschaft (EFE))
Sei $x(\cdot)$ im Kern von $\mathcal{L}$ oder dem Kern des adjungierten Operator $\mathcal{L}^*$ mit $x_\tau = 0$ für ein $\tau \in \mathbb{R}$. Dann ist $x(\cdot)$ identisch Null.

Eine andere Art und Weise, wie man Gleichung (3.15) schreiben kann, ist die folgende:

$$\partial_t V(t) = \mathcal{A}(t)V(t). \tag{3.23}$$

Hierbei ist der lineare Operator $\mathcal{A}(t) : X \subset Y \to Y$ durch

$$\mathcal{A}(t) \begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(t)\varphi \\ \partial_\theta \varphi \end{pmatrix}$$

für $(\xi, \varphi) \in X$ mit $X := \{(\xi, \varphi) \in Y \mid \varphi \in H^1((-a, b), \mathbb{C}^N) \text{ und } \varphi(0) = \xi\}$, $Y := \mathbb{C}^N \times L^2([-a, b], \mathbb{C}^N)$ definiert.
Wir wollen nun definieren, was wir unter einer exponentiellen Dichotomie der Gleichung (3.23) verstehen.

Definition 13 (Dichotomien auf $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}_-$)
Die Gleichung (3.23) besitzt genau dann eine Dichotomie auf dem Intervall J, wobei $J = \mathbb{R}_+$ oder $J = \mathbb{R}_-$, wenn Konstanten $K > 0$ und $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ und eine Famile stark stetiger Projektionen $\mathcal{P}(t) : Y \to Y$, $t \in J$, existieren, so dass folgendes gilt. Für $U \in Y$ und $t_0 \in J$ gilt

- *Es existiert eine stetige Funktion $V^s(\cdot) : [t_0, \infty) \cap J \to Y$, so dass $V^s(t_0) = P(t_0)U$ gilt. Außerdem ist $V^s(t) \in$ Bild$(P(t))$ und $|V^s(t)|_Y \leq Ke^{-\kappa_1|t-t_0|}|U|_Y$ für alle $t \geq t_0$ mit $t, t_0 \in J$.*

- *Es existiert eine stetige Funktion $V^u(\cdot) : (-\infty, t_0] \cap J \to Y$, so dass $V^u(t_0) = (id - P(t_0))U$ gilt. Außerdem ist $V^u(t) \in$ Kern$(P(t))$ und $|V^u(t)|_Y \leq Ke^{-\kappa_2|t-t_0|}|U|_Y$ für alle $t_0 \geq t$ mit $t, t_0 \in J$.*

Ist $P(t_0)U \in X$, so definiert $V^s(t)$ eine starke Lösung von (3.23) im Sinne von Definition 9. Ebenso ist für $(id - P(t_0))U \in X$ die Funktion $V^u(t)$ eine starke Lösung von (3.23). Sei hingegen $U \in Y \cap$ Bild$(P(t_0))$ mit $U = (u^1, \phi(\cdot))$. Dann ist für $t > t_0$ die Abbildung $V^s(t)$ von der Form $V^s(t) = (\xi(t), \xi_t)$, wobei $V^s(0) = U$ gilt und $\xi(\cdot)$ eine starke Lösung von (3.15) zum Anfangswert $\xi_0 = \phi$ ist. Analoges gilt für $V^u(\cdot)$.
Gilt hingegen $\kappa_1 > 0$ und $\kappa_2 \leq 0$ oder $\kappa_1 \leq 0$ und $\kappa_2 > 0$, so nennen wir diese Dichotomie eine Zentrumsdichotomie *oder auch kurz Dichotomie. In diesem Fall klingen also die Funktionen $V^s(\cdot)$ und $V^u(\cdot)$ nicht notwendigerweise ab und können sogar anwachsen.*

Bemerkung
Die entscheidenden Punkte in dieser Definition sind mitunter die *Existenz* von Lösungen $V(\cdot)$ zu Anfangswerten U in Bild$P(t)$ oder Kern$P(t)$ für ein $t \in J$. Ist $U = (u^1, \phi(\cdot))$ nicht in X enthalten, so besagt die obige Definition, dass die erste Komponente $\xi(\cdot)$ von $V(t) = (\xi(t), \xi_t)$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung (3.15) zum Anfangswert $\phi(\cdot)$ ist. Man kann fragen, warum wir dann nicht gleich Dichotomien für die Gleichung (3.15) definieren, ohne den „Umweg“ über die abstrakte Gleichung (3.23) zu gehen. Tatsächlich wurde diese Variante in der Originalarbeit [43] gewählt und wir geben diese Definition kurz nach dieser Bemerkung. Allerdings bietet die abstrakte Formulierung (3.23) den richtigen funktionalanalytischen Rahmen für spätere Anwendungen und erlaubt uns u.a. geeignete

Variation-der-Konstanten Formeln zu erhalten (siehe Kapitel etwa 3.4.1). Wenn wir von einer Dichotomie sprechen beziehen wir uns also stets auf die Definition 13.
Bevor wir das Hauptresultat formulieren, wollen wir noch die Definition einer Dichotomie in den Worten der ursprünglichen Gleichung (3.15) festhalten:

Alternative Definition einer Dichotomie
Sei $J = (c, d)$ entweder $\mathbb{R}$,$\mathbb{R}^+$ oder $\mathbb{R}^-$. Gleichung (3.15) besitzt dann eine *exponentielle Dichotomie* auf J, falls positive Konstanten K,κ_1 und κ_2 existieren und eine Famile stark stetiger Projektionen $\mathcal{P}(t) : L^2([-a, b], \mathbb{C}^N) \to L^2([-a, b], \mathbb{C}^N)$. Für $\varphi \in L^2([-a, b], \mathbb{C}^N)$ und $t \in J$ gilt

- Es existiert eine eindeutige Lösung x von (3.15) auf $[t, d)$ mit $x_t = \mathcal{P}(t)\varphi$. Außerdem ist $x_\tau \in$ Bild$(\mathcal{P}(\tau))$ und $\|x_\tau\|_{L^2} \leq Ke^{-\kappa_1|t-\tau|}\|\varphi\|_{L^2}$ für alle $\tau \geq t$ mit $\tau \in J$.
- Es existiert eine eindeutige Lösung x von (3.15) auf $(c, t]$ mit $x_t = (id - \mathcal{P}(t))\varphi$. Außerdem ist $x_\tau \in$ Kern$(\mathcal{P}(\tau))$ und $\|x_\tau\|_{L^2} \leq Ke^{-\kappa_2|t-\tau|}\|\varphi\|_{L^2}$ für alle $t \geq \tau$ mit $\tau \in J$.

Wir formulieren nun das Hauptresultat dieses Abschnitts.

Satz 3.4
Gelte Hypothese (6). Falls dann $\mathcal{L}$ ein Fredholmoperator ist, so besitzt (3.23) exponentielle Dichotomien auf $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}_-$.

Man kann dieses Resultat noch weiter verschärfen. Dies ist wichtig, wenn man die exponentiellen Raten, bezüglich derer Lösungen bei der Definition von Dichotomien abfallen, scharf wählen will. Man muss dazu folgende Annahme machen

Hypothese 7 (Asymptotisch hyperbolisch + exponentielle Konvergenz)
Sei $\mathcal{L}$ für $t \to \infty$ asymptotisch hyperbolisch, etwa $L(t) \to L_+$ für $t \to \infty$ bezüglich der Operatornorm. Wir nehmen an, diese Konvergenz sei exponentiell mit Rate $\gamma > 0$, also $|L(t) - L_+| \leq Me^{-\gamma t}$ für $t \to \infty$.
Bezeichne mit $det\triangle_+(\cdot)$ die charakteristische Funktion bezüglich L_+. Sei $\beta > 0$ eine positive Zahl, so dass folgendes gilt: Es existiert ein $\lambda_* \in \mathbb{C}$ mit $Re\lambda_* = -\beta$ und $\triangle_+(\lambda_*) = 0$ und alle weiteren Nullstellen λ von $\triangle_+(\lambda)$ mit $Re\lambda < 0$ erfüllen $Re\lambda \leq -\beta$. Seien weiterhin alle Nullstellen λ mit Realteil $-\beta$ einfach.

Unter Annahme dieser Hypothese können wir folgendes, stärkere Resultat beweisen.

Satz 3.5
Gelten Hypothese 6, 7 und sei $\mathcal{L}$ ein Fredholm Operator. Dann existieren exponentielle Dichotomien auf $\mathbb{R}_+$. Desweiteren kann man bei der Definition der Dichotomien $\kappa_1 = \beta$ wählen. Eine analoge Aussage gilt, falls $\mathcal{L}$ asymptotisch für $t \to -\infty$ ist.

Der Satz 3.15 beruht unter anderem auf der Tatsache, dass durch Dichotomien induzierte Halbgruppen autonomer linearer Gleichungen ausschließlich *Punktspektrum* besitzen. Dies ist eine allgemeine Eigenschaft autonomer, linearer Mixed-Type Gleichungen und wird im Beweis eine entscheidene Rolle spielen.
Wir verfahren in den nächsten Kapiteln wie folgt. Zunächst führen wir den Operator $\mathcal{T}$ ein, mit dessen Hilfe wir diesen Satz beweisen werden. Bevor wir uns dann dem Beweis des Satzes widmen, konstruieren wir exponentielle Dichotomien für *autonome* lineare Gleichungen und erhalten dann die gesuchten Dichotomien durch ein Störungsargument.

Wir wollen abschließend noch die folgende Konvention festhalten.

Notation
Elemente des Funktionenraumes $L^2(\mathbb{R}, Y)$ schreiben wir im weiteren stets in der Form $(\xi(\cdot), \phi(\cdot,\cdot))$, obwohl die Darstellung $(\xi(\cdot), [\phi(\cdot)](\cdot))$ wahrscheinlich präziser ist. Allerdings würden die Formeln dann an vielen Stellen unübersichtlich werden.

Der Operator $\mathcal{T}$

Für die Definition des Operators $\mathcal{T}$ benötigen wir das folgende, technische Lemma aus Scheel et al [43].

Lemma 3.1
Sei $I = [-a, b]$ und $(t, \theta) \in \mathbb{R} \times I$. Dann gilt $L^2(\mathbb{R}, L^2(I, \mathbb{C}^N)) = L^2(\mathbb{R} \times I, \mathbb{C}^N)$. Außerdem existiert eine Konstante $C > 0$ mit folgenden Eigenschaften. Sei $\Phi(\cdot,\cdot) \in L^2(\mathbb{R} \times I, \mathbb{C}^N)$, so dass die schwache Ableitung $(\partial_t - \partial_\theta)\Phi(\cdot,\cdot) \in L^2(\mathbb{R} \times I, \mathbb{C}^N)$ existiert. Dann gilt $\Phi(\cdot, k) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ für jedes feste $k \in I$ und $\Phi(0, \cdot) \in L^2(I, \mathbb{R})$. Außerdem gilt

$$\|\Phi(0,\cdot)\|_{L^2(I,\mathbb{C}^N)} + \|\Phi(\cdot,k)\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)} \leq C\|\Phi(\cdot,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}\times I,\mathbb{C}^N)} + C\|(\partial_t - \partial_\theta)\Phi(\cdot,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}\times I,\mathbb{C}^N)}$$

Beweis
Für einen ausführlichen Beweis siehe auch Scheel et al [43]. Wegen Fubini's Theorem gilt zunächst $L^2(\mathbb{R}, L^2(I, \mathbb{C}^N)) = L^2(\mathbb{R} \times I, \mathbb{C}^N)$. Wir betrachten die Variablentransformation $(\tilde{t}, \tilde{\theta}) = (t+\theta, \theta)$ und setzen $\tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{\theta}) := \Phi(\tilde{t} - \tilde{\theta}, \tilde{\theta})$. Also ist $\Phi(t, \theta)$ genau dann ein Element von $L^2(\mathbb{R} \times I, \mathbb{C}^n)$ mit $(\partial_t - \partial_\theta)\Phi(\cdot,\cdot) \in L^2(\mathbb{R} \times I, \mathbb{C}^N)$, wenn $\tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{\theta}) \in L^2(\mathbb{R}, H^1(I, \mathbb{C}^n))$ ist. Insbesondere ist also $\tilde{\Phi}(\cdot, k) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ für jedes feste $k \in I$. Also ist auch $\Phi(t, k) = \tilde{\Phi}(t + k, k) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ und $\Phi(0, k) = \tilde{\Phi}(k, k)$ existiert für fast alle k. Die behaupteten Abschätzungen sind nun mit Hilfe der neuen Koordinaten $(\tilde{t}, \theta)$ klar. □

Definiere nun den dicht definierten, abgeschlossenen Operator $\mathcal{T} : L^2(\mathbb{R}, Y) \to L^2(\mathbb{R}, Y)$ mit

$$\mathcal{T} : V(\cdot) \mapsto \partial_t V(\cdot) - \mathcal{A}(\cdot)V(\cdot) \tag{3.24}$$

oder explizit

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \Phi(t,\cdot) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \partial_t \xi(t) - \int_{-a}^{b} p(t,\theta)\Phi(t,\cdot)d\theta - \sum_{k=1}^{m} A_k(t)\Phi(t, r_k) \\ \partial_t \Phi(t,\cdot) - \partial_\eta \Phi(t,\cdot) \end{pmatrix}$$

auf $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{T}) = \{(\xi, \Phi(\cdot,\cdot)) \in L^2(\mathbb{R}, Y) : \quad & (\partial_t - \partial_\theta)\Phi(\cdot,\cdot) \in L^2(\mathbb{R} \times I, \mathbb{C}^N), \\ & \xi \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N), \Phi(t, 0) = \xi(t)\ \forall t\}. \end{aligned}$$

Wegen des vorigen Lemmas ist dann $\mathcal{T}$ wohldefiniert und abgeschlossen. Das folgende Lemma zeigt den Zusammenhang zwischen dem Kern des Operators $\mathcal{L}$ und des Operators $\mathcal{T}$.

Lemma 3.2
Falls eine Funktion $\xi \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ die Identität $\mathcal{L}\xi = 0$ erfüllt, dann ist $V(t) := (\xi(t), \xi_t)$ zunächst in $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ und es gilt $\mathcal{T}V = 0$. Ist andererseits $V = (\xi, \Phi(\cdot,\cdot)) \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ und $\mathcal{T}V = 0$, dann ist $\xi(\cdot) \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ und es gilt $\mathcal{L}\xi = 0$. Es gilt also Kern$(\mathcal{L}) \cong$ Kern$(\mathcal{T})$.

Beweis
Exakt der gleiche Beweis wie in [43], Lemma 2.2, beweist dieses Lemma. Der Vollständigkeit gehen wir auf die wesentlichen Beweis-Schritte ein und verweisen für eine detailreichere Version auf [43].
Sei also $\xi(\cdot) \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ mit $\mathcal{L}\xi(\cdot) = 0$. Dann ist $\xi(\cdot)$ automatisch eine C^∞-Funktion, da $\xi(\cdot) \in C^k([-l, l], \mathbb{C}^n)$ für alle k und l. Setze also $V(t) := (\xi(t), \xi_t)$, dann ist V eine klassische Lösung von (3.23). Wegen $v(\cdot) \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ ist $V(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}, X)$. Außerdem ist $v(\cdot) \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ im Definitionsbereich der Shiftgruppe auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ und deswegen ist $V(\cdot) \in H^1(\mathbb{R}, Y)$, also gilt $V(\cdot) \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$, wegen $H^1(\mathbb{R}, Y) \cap L^2(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{D}(\mathcal{T})$.
Um die andere Richtung zu zeigen, sei $V(\cdot) = (\xi(\cdot), \Phi(\cdot, \cdot)) \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ mit $\mathcal{T}V = 0$. Also ist $v(t) := \xi(t) = \Phi(t, 0)$ ein wohldefiniertes Element in $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$. Wir zeigen noch, dass $a\big|_{[t-a,t+b]}(\cdot) = \Phi(t, \cdot)$, also $\Phi(t, \theta) = \Phi(t+\theta, 0)$ gilt. Mit Hilfe der Variablentransformation $(\tilde{t}, \tilde{\theta}) = (t+\theta, \theta)$ und $\tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{\theta}) := \Phi(\tilde{t}-\tilde{\theta}, \tilde{\theta})$, kann man nun verifizieren, dass $\tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{\theta}) = \tilde{\Phi}(\tilde{t}, 0)$ zunächst für fast alle $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ und deswegen auch für alle $\tilde{t}$ gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Der adjungierte Operator $\mathcal{T}^*$

Da wir zeigen wollen, dass der Operator $\mathcal{T}$ genau dann ein Fredholmoperator ist, wenn $\mathcal{L}$ ein Fredholmoperator ist, studieren wir in diesem Abschnitt den adjungierten Operator von $\mathcal{T}$. Dies ist notwendig, um die Kodimension des Bildes von $\mathcal{T}$ in $L^2(\mathbb{R}, Y)$ bestimmen zu können.
Wir bezeichnen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} \xi(\cdot) \\ \Phi(\cdot, \cdot) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta(\cdot) \\ \Psi(\cdot, \cdot) \end{pmatrix} \right\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^{b} \Phi(t, \theta) \cdot \Psi(t, \theta) d\theta dt + \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \cdot \eta(t) dt$$

auf $L^2(\mathbb{R}, Y)$.

Notation
Sei $j \in \{1, \ldots, m-1\}$. Ist $\Psi(\cdot, \cdot) \in L^2(\mathbb{R} \times [r_j, r_{j+1}], \mathbb{C}^N)$ mit schwacher Ableitung $(\partial_t - \partial_\theta)\Psi(\cdot, \cdot) \in L^2(\mathbb{R} \times (r_j, r_{j+1}), \mathbb{C}^N)$, dann sind $\Psi(\cdot, r_j)$ und $\Psi(\cdot, r_{j+1})$ in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ nach Lemma 3.1. Wir schreiben im nächsten Beweis $\Psi(\cdot, r_j+) := \Psi(\cdot, r_j)$ und $\Psi(\cdot, r_{j+1}-) := \Psi(\cdot, r_{j+1})$. Außerdem setzen wir $\Psi(\cdot, r_1-) = \Psi(\cdot, r_m+) = 0$.

Lemma 3.3
Der adjungierte Operator $\mathcal{T}^* : \mathcal{D}(\mathcal{T}^*) \subset L^2(\mathbb{R}, Y) \to L^2(\mathbb{R}, Y)$ ist durch

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \Psi(t, \cdot) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\partial_t \xi(t) - A_{j_0}^*(t)\xi(t) + \Psi(t, 0-) - \Psi(t, 0+) \\ -\partial_t \Psi(t, \cdot) + \partial_\eta \Psi(t, \cdot) - p^*(t, \cdot)\xi(t) \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

gegeben, wobei $p^*(t, \theta)$ die zu $p(t, \theta)$ adjungierte Matrix für festes t und θ bezeichnet. Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{T}^*) = \{(b, \Psi) \in L^2(\mathbb{R}, Y); (\partial_t - \partial_\theta)\Psi \in L^2(\mathbb{R} \times (r_j, r_{j+1}), \mathbb{C}^N) \forall j : 1 \leq j < m \\ b \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N), \Psi(t, r_j-) - \Psi(t, r_j+) = A_j^*(t) b(t) \forall t; j \neq j_0\} \end{aligned}$$

Außerdem gilt $\mathcal{T}^*(b, \Psi) = 0$ genau dann, wenn $\mathcal{L}^* b(\cdot) = 0$ gilt und die Kerne beider Operatoren haben die gleiche Dimension.

Beweis
Nach Definition des adjungierten Operators ist

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}^*) = \{(b,\Psi) \in L^2(\mathbb{R},Y) | \quad \exists (b_*,\Psi_*) \in L^2(\mathbb{R},Y) : \langle \mathcal{T}(a,\Phi),(b,\Psi)\rangle = \langle (a,\Phi),(b_*,\Psi_*)\rangle \, \forall (a,\Phi) \in \mathcal{D}(\mathcal{T})\}.$$

In diesem Fall ist $\mathcal{T}^*(b,\Psi) := (b_*,\Psi_*)$. Wir betrachten also folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{b}(\partial_t\Phi(t,\theta)-\partial_\theta\Phi(t,\theta))\cdot\Psi(t,\theta)d\theta dt + \int_{-\infty}^{\infty}(\partial_t a(t) - A_{j_0}(t)a(t))b(t)dt \\ - \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k\neq j_0} A_k(t)\Phi(t,r_k)\right)b(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-a}^{b} p(t,\theta)\Phi(t,\theta)d\theta\right)b(t)dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{b}\Phi(t,\theta)\cdot\Psi_*(t,\theta)d\theta dt + \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\cdot b_*(t)dt.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Setzen wir in dieser Gleichung $a = 0$, also auch $\Phi(\cdot,0) = 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{b}(\partial_t\Phi(t,\theta)-\partial_\theta\Phi(t,\theta))\cdot\Psi(t,\theta)d\theta dt \\ - \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k\neq j_0} A_k(t)\Phi(t,r_k)\right)b(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-a}^{b} p(t,\theta)\Phi(t,\theta)d\theta\right)b(t)dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{b}\Phi(t,\theta)\cdot\Psi_*(t,\theta)d\theta dt.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Wir beschränken uns nun auf Testfunktionen $\Phi(\cdot,\cdot)$ für die $\Phi(t,r_j) = 0$ für alle $j = 1,\ldots,m$ gilt. Man sieht nun in der obigen Gleichung, dass $\Psi_*(t,\theta) = (\partial_\theta - \partial_t)\Psi(t,\theta) - p^*(t,\theta)b(t)$ in $L^2(\mathbb{R}\times(r_j,r_{j+1}),\mathbb{C}^N)$ für alle j mit $1 \le j < m$ ist. Man beachte, dass dies die Funktion Ψ_* bereits eindeutig in $L^2([-a,b],\mathbb{C}^N)$ definiert. Weiterhin erhalten wir (falls $\Phi(t,0) = 0$)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{b}(\partial_t\Phi(t,\theta)-\partial_\theta\Phi(t,\theta))\cdot\Psi(t,\theta)d\theta dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{b}\Phi(t,\theta)\cdot(\Psi_*(t,\theta)+p^*(t,\theta)b(t))d\theta dt + \\ \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k\neq j_0}\Phi(t,r_j)\cdot(\Psi(t,r_j-)-\Psi(t,r_j+))dt.\end{aligned}$$

Wir fest stellen also fest, dass (3.26) genau dann für alle $\Phi(t,0) = 0$ gilt, falls

$$\Psi(\cdot,r_j-) - \Psi(\cdot,r_j+) = A_j^*(\cdot)b(\cdot)$$

in $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ für $j \neq j_0$. Gleichung (3.26) reduziert sich damit auf

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t,0)\,(\Psi(t,0-)-\Psi(t,0+))\,dt - \int_{-\infty}^{\infty}(\partial_t a(t) - A_{j_0}(t)a(t))\,b(t)dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\cdot b_*(t)dt\end{aligned} \tag{3.28}$$

für alle $a(\cdot) \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, da $\Phi(\cdot, 0) = a(\cdot)$ ist für alle $(a, \Phi) \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$. Also ist nach Definition $b(\cdot) \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ und

$$b_*(\cdot) = -\partial_t b(\cdot) - A^*_{j_0} b(\cdot) + \Psi(\cdot, 0-) - \Psi(\cdot, 0+).$$

Wir zeigen nun, dass der Kern von $\mathcal{T}^*$ endlichdimensional ist. Wir nutzen dabei die Tatsache aus, dass nach Annahme die Funktionen $A_1(\cdot)$ und $A_m(\cdot)$ nirgends identisch verschwinden.

Sei also $(b, \Psi) \in$ Kern$(\mathcal{T}^*)$. Aus der Definition von $\mathcal{T}^*$ ergibt sich dann aus der zweiten Zeile

$$0 = -\partial_t \Psi(t, \cdot) + \partial_\eta \Psi(t, \cdot) - p^*(t, \cdot) b(t),$$

dass $\Psi(\cdot, \cdot)$ folgende Form hat:

$$\Psi(t, \theta) = \tilde{\Psi}_j(t + \theta) - \int_{r_j}^{\theta} p^*(t + \theta - \eta, \eta) b(t + \theta - \eta) d\eta \tag{3.29}$$

für $\theta \in (r_j, r_{j+1})$, eine H^1-Funktion $\tilde{\Psi}_j(\cdot, \cdot)$ und $j = 1, \dots m-1$. Außerdem gilt wegen der Definition von $\mathcal{D}(\mathcal{T}^*)$, dass

$$\Psi(t, r_1+) = A_1^*(t) b(t)$$

und ebenso $\Psi(t, r_m-) = A_m^*(t) b(t)$. Keine der beiden Gleichungen verschwindet nach Annahme identisch. Ebenso gilt $\Psi(t, r_j-) = \Psi(t, r_j+) + A_j^*(t) b(t)$ für $j \notin \{0, 1, m\}$. Für $j = m-1$ ergibt sich etwa aus (3.29)

$$\Psi(t, r_m-) = \tilde{\Psi}_{m-1}(t + r_m) - \int_{r_{m-1}}^{r_m} p^*(t + r_m - \eta, \eta) b(t + r_m - \eta) d\eta$$

auf dem Intervall (r_{m-1}, r_m). Zusammen mit $\Psi(t, r_m-) = A_m^*(t) b(t)$ erhalten wir

$$\tilde{\Psi}_1(t + r_m) = A_m^*(t) b(t) + \int_{r_{m-1}}^{r_m} p^*(t + r_m - \eta, \eta) b(t + r_m - \eta) d\eta$$

also

$$\begin{aligned}\Psi(t, \theta) = (A_m^*(t + \theta - r_m) b(t + \theta - r_m) \quad &+ \textstyle\int_{r_{m-1}}^{r_m} p^*(t + \theta - \eta, \eta) b(t + \theta - \eta) d\eta) \\ &- \textstyle\int_{r_{m-1}}^{\theta} p^*(t + \theta - \eta, \eta) b(t + \theta - \eta) d\eta.\end{aligned}$$

Der Übersicht halber behandeln wir nur den Spezialfall $r_1 = -a < r_2 = 0 < r_3 = b$, also $m = 3$. Dann gilt $[r_2, r_3] = [0, b]$ und wir haben nach der eben gerade erhaltenen Formel

$$\Psi(t, 0+) = A_m^*(t - r_m) b(t - r_m) \quad + \textstyle\int_0^b p^*(t - \eta, \eta) b(t - \eta) d\eta.$$

Analog gilt auf $[-a, 0]$ die Identität

$$\Psi(t, 0-) = -(A_1^*(t + a) b(t + a) \quad + \textstyle\int_{-a}^0 p^*(t - \eta, \eta) b(t - \eta) d\eta).$$

Wegen

$$-\partial_t b(t) - A^*_{j_0}(t) b(t) + \Psi(t, 0-) - \Psi(t, 0+) = 0$$

gilt

$$\begin{aligned}-\partial_t b(t) - A^*_{j_0}(t) b(t) \quad &-(A_1^*(t + a) b(t + a) + \textstyle\int_{-a}^0 p^*(t - \eta, \eta) b(t - \eta) d\eta) \\ &-(A_m^*(t - b) b(t - b) + \textstyle\int_0^b p^*(t - \eta, \eta) b(t - \eta) d\eta) = 0\end{aligned}$$

und das ist die Gleichung $\mathcal{L}^*b(\cdot) = 0$. Für zwei $(b, \Psi_1), (b, \Psi_2) \in \text{Kern}(\mathcal{T}^*)$ mit identischer erster Komponente, gilt ebenfalls $(0, \Psi) := (0, \Psi_1 - \Psi_2) \in \text{Kern}(\mathcal{T}^*)$. Dann gilt auch $(\partial_\eta - \partial_t)\Psi = 0$, also $\Psi(t, \eta) = \tilde{\phi}(t + \eta)$ für eine Funktion $\tilde{\phi}(\cdot)$. Deswegen ist $\Psi(\cdot, \cdot) = 0$. Die andere Richtung verläuft analog zu Lemma 3.2. □

Bemerkung
Man beachte, dass $(\mathcal{T}^*V(\cdot)) = \partial_t V(t) + \mathcal{A}^*(t)V(t)$ gilt, wobei $\mathcal{A}^*(t)$ der zu $\mathcal{A}(t)$ adjungierte Opertaor für festes t bezüglich des Y-Skalarproduktes ist. Ein Kernelement $W(\cdot)$ von $\mathcal{T}^*$ löst also die Gleichung $-\partial_t V(t) = \mathcal{A}^*(t)V(t)$ auf $\mathbb{R}$ und hat die Gestalt $W(t) = (b(t), \Psi(t, \cdot))$, wobei $b(\cdot)$ ein Kernelement des adjungierten Operators $\mathcal{L}^*$ ist.

Wir können nun folgendes Resultat zeigen:

Satz 3.6
Ist $\mathcal{L}$ ein Fredholmoperator mit Index i, so ist auch $\mathcal{T}$ ein Fredholmoperator mit Index i.

Beweis
Wir haben in den vorigen Lemmata gezeigt, dass $\text{Kern}(\mathcal{T}) \cong \text{Kern}(\mathcal{L})$ und $\text{Kern}(\mathcal{T}^*) \cong \text{Kern}(\mathcal{L}^*)$. Es bleibt zu zeigen, dass das Bild von $\mathcal{T}$ abgeschlossen ist. Sei dazu $\mathcal{T}(\alpha^n, \Phi^n) \to (\beta, \Psi)$ in $L^2(\mathbb{R}, Y)$ für eine Folge (α^n, Φ^n). Also gilt $(\partial_t - \partial_\theta)\Phi^n(\cdot, \cdot) \to \Psi(\cdot, \cdot)$ bezüglich $L^2(\mathbb{R} \times I, \mathbb{C}^N)$, wobei $I := [-a, b]$.
Mittels der Variablentransformation $(\tilde{t}, \tilde{\theta}) = (t + \theta, \theta)$ und $\tilde{\Phi}^n(\cdot, \cdot)(\tilde{t}, \tilde{\theta}) := \Phi^n(\cdot, \cdot)(\tilde{t} - \tilde{\theta}, \tilde{\theta})$, kann man nun verifizieren, dass

$$\Phi^n(t, \theta) = \alpha^n(t + \theta) + \int_0^\theta (\partial_t - \partial_\theta)\Phi^n(t + \theta - \eta, \eta)d\eta$$

gilt. Zusammen mit der ersten Komponente

$$\partial_t \alpha^n(t) - \int_{-a}^b p(t, \theta)\Phi^n(t, \theta)d\theta - \sum_{k=1}^m A_k(t)\Phi^n(t, r_k) =: \beta^n(t)$$

ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
\partial_t \alpha^n(t) \quad &- \quad \int_{-a}^b p(t, \theta)\alpha^n(t + \theta)d\theta - \sum_{k=1}^m A_k(t)\alpha^n(t + r_k) \\
&+ \quad \int_{-a}^b p(t, \theta) \int_0^\theta (\partial_t - \partial_\theta)\Phi^n(t + \theta - \eta, \eta)d\eta d\theta \\
&+ \quad \sum_{k=1}^m A_k(t) \int_0^{r_k} (\partial_t - \partial_\theta)\Phi^n(t + r_k - \eta, \eta)d\eta \qquad = \beta^n(t).
\end{aligned}$$

In kompakter Form geschrieben, liest sich diese Gleichung

$$\mathcal{L}(\alpha^n) = \mathcal{G}(\beta^n, (\partial_t - \partial_\theta)\Phi^n),$$

wobei $\mathcal{G}$ durch die übrig gebliebenen Terme definiert ist. Da die rechte Seite in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ konvergiert (bezüglich t) und $\mathcal{L}$ abgeschlossen ist, existiert ein $\alpha_\infty \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ mit $\mathcal{L}\alpha_\infty = \mathcal{G}(\beta, \Psi)$. Weiterhin gilt mit

$$\Phi_\infty(t, \theta) = \alpha_\infty(t + \theta) + \int_0^\theta (\partial_t - \partial_\theta)\Phi_\infty(t + \theta - \eta, \eta)d\eta,$$

dass $(\alpha_\infty, \Phi_\infty) \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ und $\mathcal{T}(\alpha_\infty, \Phi_\infty) = (\beta, \Psi)$. Also ist das Bild abgeschlossen. Außerdem haben wir

$$\text{kodim Bild}(\mathcal{L}) = \dim \text{Kern}(\mathcal{L}^*) = \dim \text{Kern}(\mathcal{T}^*) = \text{kodim Bild}(\mathcal{T}).$$

Damit ist alles gezeigt. □

3.3.2 Exponentielle Dichotomien für autonome Mixed-Type Gleichungen im L^2-Setting

Wir betrachten in diesem Abschnitt die autonome lineare Gleichung

$$\dot{x}(t) = Lx_t \tag{3.30}$$

für eine beschränkte lineare Abbildung $L : H^1([-a,b], \mathbb{C}^N) \to \mathbb{C}^N$ der Form

$$L\varphi = \int_{-a}^{b} p(\theta)\varphi(\theta)d\theta + \sum_{k=1}^{m} A_k \varphi(r_k). \tag{3.31}$$

Hierbei sei $p : [-a,b] \to \mathbb{C}^{N\times N}$ eine stetige Funktion und $r_k \in [-a,b]$ mit $r_1 < \ldots < r_m$. Bezeichne nun mit $\det\triangle(\lambda)$ die charakteristische Funktion bezüglich L, wobei

$$\triangle(\lambda) = \lambda - L(e^{\lambda\theta})$$

ist. Wir machen nun folgende Annahme, die für den ganzen Abschnitt gilt

Hypothese 8 (Hyperbolizität)
Es ist $\det\triangle(is) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

Das erste Hauptresultat dieses Abschnitts lautet:

Satz 3.7
Unter der Annahme der Hypothese 8 existieren abgeschlossene Unterräume P, Q mit $P, Q \subset L^2([-a,b], \mathbb{C}^N)$ und $P + Q = L^2([-a,b], \mathbb{C}^N)$, $P \cap Q = \{0\}$. Weiterhin existiert für jedes $\varphi \in P$ eine eindeutige Lösung x von (3.30) auf $\mathbb{R}_+$ mit

$$|x(t)| \leq Me^{-\alpha t}\|\varphi\|_{L^2}$$

$x_0 = \varphi$ und einem $\alpha > 0$. Außerdem existiert für jedes $\varphi \in Q$ eine eindeutige Lösung y von (3.30) auf $\mathbb{R}_-$ mit

$$|y(t)| \leq Me^{\beta t}\|\varphi\|_{L^2}$$

$y_0 = \varphi$ und ein $\beta > 0$.

Dieser Satz kann gleichzeitig als Definition für exponentielle Dichotomien autonomer linearer Gleichungen angesehen werden, da er uns erlaubt, die lineare Gleichung (3.30) auf entsprechenden (abgeschlossenen!) Unterräumen sowohl in Vor- als auch in Rückwärtszeit zu lösen.
Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich stark stetige Semigruppen $T_P(t)$ für $0 \leq t$ und $T_Q(t)$ für $t \leq 0$ bezüglich (3.30) definieren. Man setze nämlich $T_P(t)\varphi := x_t$ füt $t > 0$ mittels der eindeutigen Lösung $x(\cdot)$, deren Existenz durch den Satz gesichert wird. Diese Halbgruppe ist dann exponentiell abklingend. Analog kann man $T_Q(t)$ definieren. Die Tatsache, dass diese Halbgruppen stark stetig sind, folgt nun aus der Approximationseigenschaft einer L^2-Funktion durch stetige Funktionen (bezüglich der L^2-Norm) und dem Satz der majorisierten Konvergenz.
Wir benutzen zum Beweis folgendes Resultat von Mallet-Paret

Satz 3.8
Gelte Hypothese 8. Betrachte den linearen Operator $\mathcal{L} : H^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N) \to L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, *mit* $1 \le p \le \infty$, *definiert durch*

$$(\mathcal{L}w(\cdot))(t) = \dot{w}(t) - L(w_t).$$

Dann ist $\mathcal{L}$ *ein Isomorphismus. Insbesondere ist die Nulllösung die einzige beschränkte Lösung von* $\mathcal{L}$ *für* $p = \infty$.

Wir zeigen zunächst folgenden Satz:

Satz 3.9
Sei $\varphi(\cdot) \in P$ *und* $x(\cdot)$ *eine dazugehörige Lösung, die in Vorwärtszeit beschränkt ist und (3.30) löst. Dann gilt*

$$|x(t)| \le Me^{-\alpha t}\|\varphi\|_{L^2}$$

mit uniformen Konstanten α *und* M. *Insbesondere ist die Lösung* x *mit* $x_0 = \varphi$ *eindeutig. Analoges gilt für* Q.

Beweis
Wir zeigen nur die Behauptungen bezüglich P. Die Behauptungen bezüglich Q können dann analog gezeigt werden. Unser Beweis hält sich an den sehr schönen Beweis von Mallet-Paret und Lunel [31], die dort exponentielle Dichotomien der linearen Gleichung (3.30) auf $C^0([-a, b], \mathbb{C}^N)$ konstruiert hat.
Sei also $\varphi \in P$ und $x(\cdot)$ eine Lösung zu (3.30) auf $\mathbb{R}_+$ mit $x_0 = \varphi$. Wir zeigen dann, dass

- $|x(t)| \le K\|\varphi\|_{L^2}$ für alle $t > \delta$
- $|x(t)| < 1/2 \sup_{(\delta,\infty)}|x(s)|$ für alle $t > \tau > 0$

für uniforme Konstanten M und K gilt, wobei $\tau > 0$ und $0 < \delta < b/2$ ist. Man beachte, dass das Supremum im zweiten Schritt wohldefiniert ist, da nach Definition $x(\cdot) \in H^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ und $x(\cdot)$ deswegen stetig ist.
Sind diese beiden Schritte gezeigt, so haben wir die Existenz eines $\alpha > 0$ bewiesen, so dass für $t > 0$

$$|x(t)| \le Me^{-\alpha t}\|\varphi\|_{L^2}$$

gilt: Sei etwa t groß genug mit $t = n\tau + t_1$,$n \in \mathbb{N}$ und $0 < t_1 < \tau$. Dann gilt für die Lösung $x(\cdot)$:

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |x(n\tau + t_1)| \\ &\le (1/2)^n \sup{}_{(\delta,\infty)}|x(t_1 + s)| \\ &< (1/2)^n \cdot K\|\varphi\|_{L^2}, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass für ein festes $t_* > 0$ die Funktion $t \to x(t_* + t)$ ebenfalls eine Lösung auf $\mathbb{R}_+$ ist.
Wir zeigen zunächst den zweiten Schritt und setzen $\delta := b/2$. Wir argumentieren per Widerspruchsbeweis; dann existiert eine Folge $\varphi_n \in P$ mit

$$\|\varphi_n\|_{L^2} < C$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, eine Folge $\tau_n \to \infty$ und eine Folge beschränkter Lösungen $x^n(t)$ mit

$$\sup_{(\delta,\infty)}|x^n(s)| = 1$$

und

$$|x^n(\tau_n)| = 1/2 \sup_{(\delta,\infty)}|x^n(s)| = 1/2.$$

Ist nämlich $\tilde{x}^n(\cdot)$ irgendeine beschränkte Folge von Lösungen auf $\mathbb{R}_+$, so kann man mittels $x^n(t) := \tilde{x}^n(t)/\sup_{(\delta,\infty)}|\tilde{x}^n(s)|$ eine Folge definieren, die die oberen Bedingungen erfüllt. Setze nun

$$z^n(t) = x^n(t+\tau_n)$$

für alle $-\tau_n + \delta \leq t$. Außerdem gilt

$$|z^n(t)| = \sup_{(\delta,\infty)}|x^n(s)| = 1 \qquad \text{für} -\tau_n + \delta \leq t \tag{3.32}$$

und alle n. Wähle nun $r > 0$ beliebig und n_0 groß genug, so dass $z^n(t)$ auf ganz $[-r,r]$ definiert ist für $n > n_0$. Wir zeigen nun, dass auch auch $\|\dot{z}(\cdot)\|_{L^2([-r,r],\mathbb{C}^N)} < C$ für alle n und einem $C = C(r)$ gilt, das aber uniform in n ist.
Da $z^n(\cdot)$ eine Lösung ist für alle $n > n_0$, gilt

$$\dot{z}^n(t) = \int_{-a}^{b} p(\theta)z^n(t+\theta)d\theta + \sum_{k=1}^{m} A_k z^n(t+r_k). \tag{3.33}$$

Quadriere nun beide Seiten und integriere über $[-r,r]$. Die linke Seite ist dann genau $\|\dot{z}(\cdot)\|^2_{L^2([-r,r],\mathbb{C}^N)}$. Für die rechte Seite ergibt sich folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{r}\Big(\int_{-a}^{b} p(\theta)z^n(s+\theta)d\theta + \sum_{k=1}^{m} A_k z^n(s+r_k)\Big)^2 ds &< C(\sup_{(\delta,\infty)}|x^n(s)|)^2) \\ &+ C(\|\varphi^n\|^2_{L^2} + (\sup_{(\delta,\infty)}|x^n(s)|)^2 \cdot \|\varphi^n\|^2_{L^2})) \\ &< \tilde{C}.\end{aligned}$$

Für die erste Ungleichung haben wir einfach alle Terme ausmultipliziert und dann einzeln abgeschätzt. Man beachte, dass $\tilde{C} = \tilde{C}(r)$ abhängig von der Größe des Intervalls ist, über das integriert wird. Diese Rechnung zeigt, dass $\|\dot{z}(\cdot)\|^2_{H^1([-r,r],\mathbb{C}^N)} < \tilde{K}$ für alle $n > n_0$, da die sup-Norm der $z^n(\cdot)$ auf dem Intervall $[-r,r]$ uniform beschränkt ist und damit auch die L^2-Norm bezüglich dieses Intervalls. Da $H^1([-r,r],\mathbb{C}^N) \hookrightarrow C^{0,\beta}([-r,r],\mathbb{C}^N)$ für ein $\beta > 0$, wobei $C^{0,\beta}$ die Menge aller hölderstetigen Funktionen mit Exponent β bezeichnet, konvergiert nach Arzela-Ascoli eine Teilfolge der $z^n(\cdot)$ für $n > n_0$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $z(\cdot)$. Dies definiert $z(\cdot)$ auf ganz $\mathbb{R}$, da man r beliebig groß wählen kann. Da weiterhin die $z^n(\cdot)$ Lösungen sind, erfüllen sie die Integralgleichung

$$z^n(t) - z^n(-r) = \int_{-r}^{t}\int_{-a}^{b} p(\theta)z^n(s+\theta)d\theta + \sum_{k=1}^{m} A_k z^n(s+r_k)ds \tag{3.34}$$

für $t > -r$ und $n > n_0$. Durch Übergang zum Limes $n \to \infty$ sieht man, dass auch $z(\cdot)$ eine Lösung von (3.30) auf *ganz* $\mathbb{R}$ definiert, die wegen (3.32) beschränkt ist. Außerdem ist wegen (3.32) $z(\cdot)$ nicht identisch Null. Das ist ein Widerspruch zu Hypothese 6 und Satz 3.8.

Nun zum ersten Schritt. Gilt diese Aussage nicht, so existieren beschränkte Lösungen $\tilde{x}^n(\cdot)$ auf $\mathbb{R}_+$ mit $\tilde{x}_0^n =: \varphi^n \in L^2([-a,b],\mathbb{C}^N)$, die (3.30) erfüllen. Außerdem existiert eine Folge $K_n \to \infty$ und $\delta \leq \kappa_n$ mit

$$\sup_{(\delta,\infty)} |\tilde{x}^n(s)| = |\tilde{x}(\kappa_n)| = K_n\|\varphi_n\|$$

für alle n. Wir können wegen des zweiten Schrittes annehmen, dass $\kappa_n < C$ für alle n ist, da die Funktionswerte von Lösungen betragsmäßig abnehmen. Betrachte

$$x^n(t) := \tilde{x}^n(t)/|\tilde{x}(\kappa_n)|$$

für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Dann sind die $x^n(\cdot)$ wieder Lösungen von (3.30), die durch 1 beschränkt sind. Analog wie im zweiten Schritt kann man nun zeigen, dass für ein beliebiges $r > 0$ gilt, dass $\|x^n(\cdot)\|_{H^1([\delta,r],\mathbb{C}^N)} < M$ für ein bezüglich n uniformes M. Also konvergiert eine Teilfolge der $x^n(\cdot)$ auf $[\delta, r]$ gleichmässig gegen eine stetige Funktion $x(\cdot)$, die auf diesem Intervall eine Lösung von (3.30) ist. Diese Prozedur definiert $x(\cdot)$ sogar auf ganz $[\delta,\infty)$. Um $x(\cdot)$ auch geeignet auf $[-a,b]$ zu definieren, beobachten wir, dass für $-a < t < b+\delta$

$$\begin{aligned}
x^n(t) - x^n(\delta) &= \int_\delta^t \int_{-a}^b p(\theta)x^n(s+\theta)d\theta + \sum_{k=1}^m A_k x^n(s+r_k)ds \\
&= \int_\delta^t \int_{-a}^{-s+\delta} p(\theta)\varphi^n(s+\theta)d\theta ds + \int_\delta^t \int_{-s+\delta}^b p(\theta)x^n(s+\theta)d\theta ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \int_\delta^t A_k x^n(s+r_k)ds
\end{aligned}$$

gilt. Man beachte, dass für alle $t \in [-a,\delta]$ gerade $x^n(t) = \varphi^n(t)$ ilt. Also gilt in der letzten Summe: $x^n(s+r_k) = \varphi^n(s+r_k)$, falls $s+r_k \in [-a,\delta]$. Wegen $1 = K_n \cdot \|\varphi^n\|_{L^2}$ und $k_n \to \infty$ folgern wir

$$\|\varphi^n\|_{L^2} \to 0$$

für $n \to \infty$. Betrachten wir also den Limes $n \to \infty$ in der obigen Gleichung, so sehen wir, dass $x(\cdot)$ definiert auf $[-a,\infty)$, mit $x(t) = 0$ für alle $t \in [-a,b]$, eine Lösung von (3.30) definiert. Man setze nun $x(t) := 0$ für $t < -b$. Dies definiert dann trivialerweise eine beschränkte Lösung auf ganz $\mathbb{R}$. Da die κ_n aber in einem beschränkten Intervall liegen und nach Definition $x^n(\kappa_n) = 1$ gilt für alle n, ist auch $x(\kappa) = 1$ mit $\kappa := \lim_{n\to\infty}\kappa_n$. Also ist $x(\cdot)$ nicht identisch Null und somit haben wir wiederum einen Widerspruch zu Hypothese 6 und Satz 3.8 □

Wir definieren nun den (zunächst möglicherweise trivialen) Unterraum $P \subset L^2([-a,b],\mathbb{C}^N)$ als die Menge aller φ, für die eine beschränkte Lösung $x(\cdot)$ von (3.30) auf $\mathbb{R}_+$ mit $x_0 = \varphi$ existiert. Analog betrachten wir $Q \subset L^2([-a,b],\mathbb{C}^N)$ als die Menge aller Funktionen φ, für die eine beschränkte Lösung y von (3.30) auf $\mathbb{R}_-$ mit $y_0 = \varphi$ existiert. Bezeichne nun mit $\pi_P^+ : P \to L^2([0,b])$ die Projektion

$$(\pi_P^+\varphi)(\theta) = \varphi(\theta) \tag{3.35}$$

für $\theta \in (0,b)$. Definiere analog die Projektion $\pi_Q^- : Q \to L^2([-a,0])$ durch

$$(\pi_Q^-\varphi)(\theta) = \varphi(\theta) \tag{3.36}$$

für $\theta \in (-a, 0)$. Wir können nun ein wichtiges Resultat über die Operatoren π_P,π_Q festhalten, das besagt, dass Lösungen von (3.30) glätten. Wir werden später sehen, dass insbesondere $P \neq \{0\}$ und $Q \neq \{0\}$ ist, so dass das nächste Theorem nichttrivial ist.

Satz 3.10
Die Projektionen π_P^+ und π_Q^- sind kompakte Operatoren.

Beweis
Der Beweis dieses Satzes folgt bereits aus dem des vorigen Satzes: man wähle eine beschränkte Folge $\varphi^n(\cdot) \in P$. Dazu wähle eine Folge bschränkter Lösungen $x^n(\cdot)$, die auf $\mathbb{R}_+$ definiert sind. Wieder kann man zeigen, dass die H^1-Norm der $x^n(\cdot)$ auf dem Intervall $[0, b]$ uniform beschränkt ist. Also existiert nach Arzela-Ascoli eine Teilfolge der $x^n(\cdot)$, die gleichmäßig gegen eine L^2-Funktion $x(\cdot)$ auf $(0, b)$ konvergiert. Dies zeigt die Behauptung.
□
Das nächste Theorem zusammen mit den zwei vorigen, schliesst den Beweis von Satz 3.7 ab.

Satz 3.11
Die Unterräume P, Q sind abgeschlossen, erfüllen $Q + P = L^2([-a, b], \mathbb{C}^N)$ und es gilt $P \cap Q = \{0\}$.

Beweis
Wir zeigen zunächst, dass $S := P + Q \subset L^2([-a, b], \mathbb{R}^N)$ dicht ist.
Sei dazu $\varphi(\cdot) \in C^1([-a, b], \mathbb{C}^N)$ beliebig. Erweiter $\varphi(\cdot)$ beliebig zu einer stetig differenzierbaren, beschränkten Funktion $\tilde{x}(\cdot)$ auf ganz $\mathbb{R}$. Wegen Hypothese 6 ist der Operator $\mathcal{L} : H^{1,\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N) \to Ł^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, definiert durch

$$(\mathcal{L}w(\cdot))(t) = \dot{w}(t) - L(w_t),$$

ein Isomorphismus wegen Satz 3.8. Betrachte also $h := \mathcal{L}\tilde{x} \in H^{1,\infty}$. Setze nun

$$h^+(t) = \begin{cases} h(t) & : \quad t > 0 \\ 0 & : \quad t \leq 0 \end{cases}$$

und analog

$$h^-(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t > 0 \\ h(t) & : \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Definiere nun

$$x^\mp(t) := \mathcal{L}^{-1}(h^\pm(\cdot))(t) \tag{3.37}$$

für $t \in \mathbb{R}$. $x^-(\cdot)$ erfüllt dann etwa $\dot{x}^-(t) = L(x_t^-)$ auf $\mathbb{R}_-$, da auf diesem Intervall $h^+(t) = 0$ ist. Ebenso ist $\dot{x}^+(t) = L(x_t^+)$ auf $\mathbb{R}_+$. Nach Definition ist also $x_0^+ \in P$ und $x_0^- \in Q$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}h^+ + \mathcal{L}^{-1}h^- &= \mathcal{L}^{-1}h \\ x^- + x^+ &= \tilde{x} \end{aligned}$$

also $\varphi(\cdot) = x_0^+ + x_0^- \in P + Q = S$. Damit ist $S \subset L^2([-a, b], \mathbb{C}^N)$ dicht, da wir $C^1([-a, b], \mathbb{C}^N) \subset S$ gezeigt haben.
Wir zeigen nun, dass S abgeschlossen ist. Wir bemerken, dass sowohl P als auch Q wegen Satz 3.9 abgeschlossen sind . Sei also $\rho^n(\cdot) = \varphi^n(\cdot) + \psi^n(\cdot)$, mit $\psi^n(\cdot) \in Q$ und $\varphi^n(\cdot) \in P$. Außerdem sei $\rho^n(\cdot) \to \rho(\cdot)$ in L^2. Es ergeben sich zwei Fälle

- $\varphi^n(\cdot)$ und $\psi^n(\cdot)$ sind beschränkte Folgen in L^2 oder
- eine Folge ist unbeschränkt.

Betrachte den ersten Fall. Dann ergibt sich, dass $\pi_P^+\varphi^n(\cdot) \to \varphi(\cdot)$ auf $L^2([0,b],\mathbb{C}^N)$ für eine geeignete Teilfolge, da die Projektion kompakt ist. Ebenso gilt $\pi_Q^-\psi^n(\cdot) \to \psi(\cdot)$ auf $L^2([-a,0],\mathbb{C}^N)$ für eine geeignete Teilfolge. Außerdem ergibt sich

$$\pi_P^+\psi^n(\cdot) \;=\; \pi_P^+(\rho^n(\cdot) - \varphi^n(\cdot)) \to \rho(\cdot) - \varphi(\cdot)$$

bezüglich der $L^2([0,b],\mathbb{C}^N)$-Norm. Ebenso gilt auf $[-a,0]$

$$\pi_Q^-\varphi^n(\cdot) \;=\; \pi_Q^-(\rho^n(\cdot) - \psi^n(\cdot)) \to \rho(\cdot) - \psi(\cdot).$$

Also konvergieren die $\varphi^n(\cdot)$ und $\psi^n(\cdot)$ bereits in $L^2([-a,b],\mathbb{C}^N)$ gegen Funktionen $\varphi(\cdot),\psi(\cdot) \in L^2([-a,b],\mathbb{C}^N)$. Da stets $\varphi^n(\cdot) \in P$ liegt, ist wegen der Abgeschlossenheit von P auch der Grenzwert $\varphi(\cdot) \in P$ und analog $\psi(\cdot) \in Q$ und damit $\varphi(\cdot) + \psi(\cdot) = \rho(\cdot) \in S$.
Betrachte nun den zweiten Fall, in dem $\kappa_n := \|\varphi^n\|_{L^2} + \|\psi^n\|_{L^2} \to \infty$ für $n \to \infty$. Setze

$$\tilde{\varphi}^n(\cdot) := (\kappa^n)^{-1}\varphi^n(\cdot)$$

und

$$\tilde{\psi}^n(\cdot) := (\kappa^n)^{-1}\psi^n(\cdot)$$

und

$$\tilde{\rho}^n(\cdot) := (\kappa^n)^{-1}\rho^n(\cdot).$$

Dann sind die Folgen $\tilde{\varphi}^n(\cdot)$ und $\tilde{\psi}^n(\cdot)$ beschränkt und $\tilde{\rho}^n(\cdot) = \tilde{\varphi}^n(\cdot) + \tilde{\psi}^n(\cdot)$. Da nach Annahme $\rho^n(\cdot) \to \rho(\cdot)$ in $L^2([-a,b],\mathbb{R}^N)$ gilt nun $\tilde{\rho}^n(\cdot) \to 0$. Analog zum ersten Schritt existieren nun $\tilde{\varphi}(\cdot) \in P$ und $\tilde{\psi}(\cdot) \in Q$ mit $\tilde{\varphi}^n(\cdot) \to \tilde{\varphi}(\cdot)$ und $\tilde{\psi}^n(\cdot) \to \tilde{\psi}(\cdot)$ bezüglich $L^2([-a,b],\mathbb{C}^N)$. Also gilt

$$0 = \tilde{\psi}(\cdot) + \tilde{\varphi}(\cdot).$$

Da aber $\|\tilde{\varphi}_n\|_{L^2} + \|\tilde{\psi}^n\|_{L^2} = 1$ für alle n, sind $\tilde{\psi}(\cdot)$ und $\tilde{\varphi}(\cdot)$ nicht identisch Null und P,Q haben einen nichttrivialen Schnitt, was im Widerspruch zu Satz 3.8 ist, da jedes Element im Schnitt von P und Q aufgrund der Definition von P und Q eine nichttriviale, beschränkte Lösung von (3.30) auf $\mathbb{R}$ definiert. Also kann dieser Fall gar nicht auftreten und wir haben alles gezeigt. $\square$

Damit ist ebenfalls eines unser Hauptresultate, nämlich Satz 3.9 gezeigt. Analog zu unserem Kapitel über Zentrumsmannigfaltigkeiten werden wir nun das Theorem 3.9 auf unser $\mathcal{A}$-Setting übertragen, wobei $\mathcal{A} : X \to Y$ durch

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} \xi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi) \\ \partial_\theta\varphi \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

mit $Y := \mathbb{R}^N \times L^2([-a,b],\mathbb{C}^N)$ und $X := \{(\xi,\varphi) \in Y \mid \varphi \in H^1((-a,b),\mathbb{C}^N) \text{ und } \varphi(0) = \xi\}$ definiert ist; siehe Kapitel 2. Weiterhin nehmen wir an, der lineare Operator L habe die Form (3.31). Es gilt das folgende Theorem

Satz 3.12
Nehme Hypothese 8 an. Dann existieren abgeschlossene Unterräume P_* und Q_* von Y mit $P_* + Q_* = Y$ und $P_* \cap Q_* = \{0\}$. Außerdem existieren stark stetige Semigruppen $T_{P_*}(t) : P_* \to P_*$ auf $\mathbb{R}_+$ bzw. $T_{Q_*}(-t) : Q_* \to Q_*$ für $t \geq 0$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \|T_{P_*}(t)\Phi\|_Y &\leq Me^{-\kappa t}\|\Phi\|_Y \qquad \text{für } 0 \leq t \\ \|T_{Q_*}(-t)\Psi\|_Y &\leq Me^{\kappa t}\|\Psi\|_Y \qquad \text{für } t \geq 0 \end{aligned}$$

wobei $\Phi \in P_*$, $\Psi \in Q_*$ und $\kappa > 0$ eine geeignete Konstante ist. Weiterhin ist für $\Phi \in X \cap P_*$ die Abbildung $t \to T_{P_*}(t)\Phi$ als Abbildung nach Y für $0 \leq t$ stark differenzierbar und eine Lösung von $\dot{U} = \mathcal{A}U$. Analoges gilt für $T_{Q_*}(-t)$ und $t \geq 0$.

Beweis
Wir werden dieses Theorem aus Satz 3.9 folgern. Identifiziere im weiteren Verlauf ein Element $\phi(\cdot) \in H^1([-a,b], \mathbb{C}^N)$ mit dem Element $\Phi \in X$ mittels der injektiven Abbildung

$$\mathcal{J} : \varphi(\cdot) \mapsto \Phi(\cdot) := (\varphi(0), \varphi(\cdot)) \tag{3.39}$$

wobei $\varphi(0)$ wohldefiniert ist, wegen $\varphi(\cdot) \in H^1([-a,b], \mathbb{C}^N) \subset C^0([-a,b], \mathbb{C}^N)$. Es liegt also nahe, den Schnitt von P_* mit X mittels $P_* \cap X := \mathcal{J}(P \cap H^1([-a,b], \mathbb{C}^N))$ und P wie in Satz 3.9 zu konstruieren.
Sei also $\Phi = (\varphi(0), \varphi) \in P_* \cap X$. Definiere nun für festes $t \geq 0$

$$T_{P_*}(t)\Phi = (x(t), x_t) \tag{3.40}$$

und x der eindeutigen Lösung auf $\mathbb{R}_+$ von (3.30), die $x_0 = \varphi$ erfüllt. Dann ist die Abbildung $t \to T_{P_*}(t)\Phi$ als Abbildung von $[0,\infty) \to Y$ differenzierbar und löst $\dot{U} = \mathcal{A}U$. Außerdem ist $T_{P_*}(0)\Phi = (x(0), x_0) = (\varphi(0), \varphi) = \Phi$ die Identität. In der Tat ist für $(a, \varphi) \in X \cap P_*$ die Abbildung $t \mapsto T_{P_*}(t)(a, \varphi)$ mit Werten in Y differenzierbar: Nach Definition ist $T_{P_*}(t)(a, \varphi) = (x(t), x_t)$ für die eindeutige Lösung $x(t)$ der Gleichung (3.30), für die $x_0 = \varphi$ ist. Da $\varphi(\cdot) \in H^1([-a,b], \mathbb{C}^N)$ ist, ist $x(t)$ als Lösung von

$$\dot{x}(t) = \int_{-a}^{b} p(\theta)x(\theta + t)d\theta + \sum_{k=1}^{m} A_k x(t + r_k)$$

stetig differenzierbar, da die rechte Seite stetig in t ist. Insbesondere existiert die rechtsseitige Ableitung von $x(t)$ in $t = 0$.
Sei $\Phi = (\xi, \varphi)$ ein beliebiges Element im Abschluss von $P_* \cap X$ bezüglich der $L^2([-a,b], \mathbb{R}^N)$-Norm. Diesen Abschluss nennen wir P_*. Wir setzen nun ebenfalls für $t > 0$

$$T_{P_*}(t)\Phi = (x(t), x_t), \tag{3.41}$$

wobei wieder x die eindeutige Lösung von (3.30) auf $\mathbb{R}_+$ ist, die $x_0 = \varphi$ erfüllt. Für $t = 0$ setzen wir

$$T_{P_*}(0)\Phi = (\xi, \varphi) = \Phi. \tag{3.42}$$

Um zu zeigen, dass $T_{P_*}(t)$ stark stetig ist, reicht es zu zeigen, dass $x(t) \to \xi$ für $t \searrow 0$. Aus Satz 3.9 folgt nämlich $x_t \to \varphi$ für $t \searrow 0$ bezüglich der L^2-Norm. Wähle dazu eine Folge $\varphi^n(\cdot) \in C^1([-a,b], \mathbb{C}^N) \cap P$, mit $\varphi^n(\cdot) \to \varphi(\cdot)$ bezüglich L^2 und mit dazugehörigen Lösungen $x^n(\cdot)$ auf $\mathbb{R}_+$, wobei $x_0^n(\cdot) = \varphi^n(\cdot)$ ist. Gelte weiterhin $x^n(0) \to \xi$ für $n \to \infty$.

Da insbesondere die Folge der $\varphi^n(\cdot)$ in $L^2([-a,b],\mathbb{C}^N)$ beschränkt ist, konvergieren die $x^n(\cdot)$ auf kompakten Teilintervallen von $\mathbb{R}_+$ gegen die Funktion $x(\cdot)$. Also gilt

$$|x(t_0)-\xi| \leq |\xi - x^n(0)| + |x^n(0)-x^n(t_0)| + |x^n(t_0)-x(t_0)| < \varepsilon \tag{3.43}$$

falls t_0 nahe genug an ξ ist, wobei $\varepsilon > 0$ eine feste Zahl ist. Dabei ist der Term $|x^n(0) - x^n(t_0)|$ klein, falls $|t_0|$ klein genug: dies folgt aus der integrierten Form von Gleichung (3.30), siehe Gleichung (3.34), mit $r = 0$,$t = t_0$ und $z^n(\cdot) = x^n(\cdot)$. Also ist $T_{P_*}(t)P_* \to P_*$ wohldefiniert mit Werten in P_* und erfüllt nach Konstruktion und Satz 3.9

$$\|T_{P_*}\Phi\|_Y \quad \leq \quad Me^{-\kappa t}\|\Phi\|_Y \qquad \text{für } 0 \leq t$$

für $\kappa := \alpha$ und α aus Satz 3.9. Analog kann man $T_{Q_*}(t)$ auf $\mathbb{R}_-$ konstruieren. Damit ist der Beweis vollständig. $\square$

Wir benötigen in späteren Kapiteln oft die folgende Regularität der Projektion $\Pi_+ : Y \to Y$, die durch Bild$(\Pi_+) := Q_*$ und Kern$(\Pi_+) := P_*$ definiert ist. Setze dazu $\tilde{Y} := \mathbb{R}^N \times H^1([-a,b],\mathbb{R}^N)$.

Lemma 3.4 (Regularität der Spektralprojektionen)
Gelte Hypothese 8, d.h. der Operator $\mathcal{A}$ ist hyperbolisch. Ist dann $V \in \tilde{Y}$, so gilt auch $\Pi_+ V \in \tilde{Y}$ und die Projektion $P_+ : \tilde{Y} \to \tilde{Y}$ ist beschränkt.

Beweis
Nach [28], Theorem 1.7 existiert folgende, explizite Darstellung für Π_+:

$$\Pi_+ V = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}(\lambda - \mathcal{A})^{-1} d\lambda V,$$

wobei das Integral im Cesaro Sinne zu verstehen ist, d.h. es ist

$$\int_{-i\infty}^{i\infty}(\lambda-\mathcal{A})^{-1}V d\lambda := \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{1}{N}\int_{-l}^{l}(ik-\mathcal{A})^{-1}V dl\ idk. \tag{3.44}$$

Ist $V \in \tilde{Y}$, so gilt nun ebenfalls $\Pi_+ V \in \tilde{Y}$: Dies kann man an der Definition von Π_+ ablesen. Dazu betrachten wir den dicht definierten Operator $\mathcal{A}_{hilf} : Y \to Y$, der durch

$$\mathcal{A}_{hilf}\begin{pmatrix}\xi \\ \varphi(\cdot)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\theta \varphi(\cdot)\end{pmatrix}$$

für $(\xi,\varphi(\cdot)) \in \tilde{Y}$ definiert ist. Dann ist $\mathcal{A}_{hilf} : Y \to Y$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator. Wir bemerken nun, dass der Operator $\mathcal{A}_{hilf}$ mit dem beschränkten Operator $(\mathcal{A}-\lambda)^{-1} : Y \to Y$ kommutiert, falls λ nicht im Spektrum von $\mathcal{A}$ liegt.
Außerdem gilt für die Riemannsummen von (3.44):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{hilf}\sum_{h=1}^{n}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{m}(\eta_{h,j}-\mathcal{A})^{-1}(\eta_{j+1,h+1}-\eta_{j,h})iV \\
&= \sum_{h=1}^{n}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{m}\mathcal{A}_{hilf}(\eta_{h,j}-\mathcal{A})^{-1}(\eta_{j+1,h+1}-\eta_{j,h})iV \\
&= \sum_{h=1}^{n}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{m}(\eta_{h,j}-\mathcal{A})^{-1}(\eta_{j+1,h+1}-\eta_{j,h})i(\mathcal{A}_{hilf}V) \\
&\longrightarrow \int_{-i\infty}^{i\infty}(\lambda-\mathcal{A})^{-1}(\mathcal{A}_{hilf}V)\, d\lambda
\end{aligned}$$

für $n, m \to \infty$. Man beachte, dass der Limes bezüglich der Y-Norm zu verstehen ist und existiert, da wegen $V \in \tilde{Y}$ gerade $\mathcal{A}_{hilf} V \in Y$ gilt und der obige Limes für jedes $\tilde{V} \in Y$ existiert (und hier $\tilde{V} := \mathcal{A}_{hilf} V \in Y$ ist). Da $\mathcal{A}_{hilf}$ abgeschlossen ist, gilt schließlich $\int_{-i\infty}^{i\infty} (\lambda - \mathcal{A})^{-1} V d\lambda \in \tilde{Y}$. Das Argument mit dem Operator $\mathcal{A}_{hilf}$ zeigt nun auch, dass die Riemannsummen tatsächlich in $\tilde{Y}$ konvergieren und die Projektion Π_+ deswegen beschränkt ist. Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Bemerkung
Genauso kann man zeigen, dass für einen Anfangswert $V \in (\mathbb{R}^N \times H^k([-a, b], \mathbb{R}^N))$ auch $\Pi_+ V \in (\mathbb{R}^N \times H^k([-a, b], \mathbb{R}^N))$ für $k \geq 2$ gilt und auch diese Projektion stetig ist.

3.3.3 Fredholmeigenschaften implizieren die Existenz exponentieller Dichotomien

Da der Beweis des Satzes 3.4 allein auf Fredholmeigenschaften des Operators $\mathcal{T}$ und der Existenz exponentieller Dichotomien autonomer, linearer Differentialgleichungen basiert, überträgt sich der Beweis von [43] wortwörtlich auf unseren Fall. Die beiden vorherigen Punkte, insbesondere die Existenz von Dichotomien im Fall autonomer Gleichungen, wurden in den letzten beiden Kapiteln verifiziert. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir den kompletten Beweis und verweisen nur bei einigen Details auf die Orginalarbeiten [43, 44]. Darauf aufbauend beweisen wir dann den schärferen Satz 3.5 unter der Vorraussetzung der Hypothese 7. Da dieser Satz nicht in Scheel et al [43] aufgeführt ist, werden wir hier einen ausführlichen Beweis angeben.
Die wesentliche Strategie des Beweises ist es, die exponentielle Dichotomie des nichtotonemen Operators als Störung eines autonomen zu konstruieren, für den die Existenz exponentieller Dichotomien bereits gezeigt wurde. Wir werden zunächst den Operator $\mathcal{T}$ auf einen größeren Funktionenraum erweitern.

Die Erweiterung $\mathcal{S}$ von $\mathcal{T}$

Wir betrachten den dicht definierten Operator $\mathcal{T} : \mathcal{D}(\mathcal{T}) \subset L^2(\mathbb{R}, Y) \to Ł^2(\mathbb{R}, Y)$ mit

$$\mathcal{T} : V(\cdot) \mapsto \partial_t V(\cdot) - \mathcal{A} V(\cdot),$$

wobei $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ und $\mathcal{A}$ in Kapitel (3.3.1) definiert wurden. Der adjungierte Operator $\mathcal{T}^*$ ist dann mit Domain $\mathcal{D}(\mathcal{T}^*)$ ebenfalls dicht definiert in $L^2(\mathbb{R}, Y)$. Versieht man $\mathcal{D}(\mathcal{T}^*)$ mit der Graph-Norm $\| \cdot \|_{\mathcal{D}(\mathcal{T}^*)}$, d.h. $\|V\|_{\mathcal{D}(\mathcal{T}^*)} := \|V\|_{L^2(\mathbb{R},Y)} + \|\mathcal{T}^* V\|_{L^2(\mathbb{R},Y)}$ für alle $V \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^*)$, dann ist der Operator $\mathcal{T}^*$ von $\mathcal{D}(\mathcal{T}^*)$ nach $L^2(\mathbb{R}, Y)$ ein beschränkter Operator, den wir im weiteren $\hat{\mathcal{T}}^*$ nennen. Bezeichne mit $\mathcal{S}$ den adjungierten Operator $(\hat{\mathcal{T}}^*)^*$ von $\hat{\mathcal{T}}^*$, also

$$\mathcal{S} : L^2(\mathbb{R}, Y) \to \mathcal{D}(\mathcal{T}^*)^*,$$

wobei $\mathcal{D}(\mathcal{T}^*)^*$ der Dualraum des Banachraumes $\mathcal{D}(\mathcal{T}^*)$ ist, der mit der Graph-Norm versehen ist. Nach Definition heißt $\mathcal{S}U = G$, dass $(\mathcal{T}^* W, U) = (W, G)$ für alle $W \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^*)$. Die Klammern stehen dabei für die Dualitätspaarung bezüglich $\mathcal{D}(\mathcal{T}^*)$ und $\mathcal{D}(\mathcal{T}^*)^*$. Expliziter lautet diese Gleichung

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \langle \partial_t W + \mathcal{A}^*(t) W, U \rangle_Y \, dt = (W, G) \tag{3.45}$$

für alle $W \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^*)$. Hierbei bezeichnet $\mathcal{A}^*(t)$ den adjungierten Operator von $\mathcal{A}(t)$ für festes t. Es gilt wie in [43]:

Lemma 3.5
Sei $\mathcal{T}$ ein Fredholmoperator. Dann ist auch $\mathcal{S}$ ein Fredholmoperator vom gleichen Index. Außerdem ist Kern($\mathcal{S}$) = Kern($\mathcal{T}$)

Beweis
Der Beweis ist folgt aus [23], Kapitel III, 5.5, Seite 168 und Kapitel IV, 5.3, Seite 236.

$\mathcal{T}$ invertierbar

Lemma 3.6
Sei $\mathcal{T}$ invertierbar. Für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ und jedes $\tilde{G} \in Y$, definiere $G(t,\eta) := \tilde{G}(\eta)\delta(t-t_0)$, wobei $\delta(\cdot)$ die δ-Distribution bezeichnet, d.h. $\delta(t) = 0$ für $t \neq 0$ und $\delta(0) = id$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $U(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}, Y)$ der Gleichung

$$\mathcal{S}U = G$$

(man siehe die Bemerkung nach diesem Satz für die Aktion von G auf Elementen $W \in \mathcal{D}(T^*)$). Die Einschränkung von $U(\cdot)$ auf $(-\infty, t_0]$ und $[t_0, \infty)$ ist in $C^0((-\infty, t_0], Y)$ und $C^0([t_0, \infty), Y)$. Die Limiten $U_+(t_0) := \lim_{t \searrow t_0} U(t)$ und $U_-(t_0) := \lim_{t \nearrow t_0} U(t)$ existieren und erfüllen die Gleichung $U_+(t_0) - U_-(t_0) = \tilde{G}$. Außerdem gilt

$$\|U\|_{L^\infty(\mathbb{R},Y)} + \|U\|_{L^2(\mathbb{R},Y)} \leq C|\tilde{G}|_Y$$

mit $\tilde{G}$ unabhängiger Konstante C.

Wir bemerken zunächst, dass $G \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^*)^*$ mittels $G(W) = (\tilde{G}, W(0))_Y$ auf Elementen $W \in \mathcal{D}(T^*)$ agiert. Diese Definition ist wegen (3.1) wohldefiniert: für $W = (a, \Phi) \in \mathcal{D}(T^*)$ ist wegen $(\partial_t - \partial_\eta)\Phi(\cdot,\cdot) \in L^2(\mathbb{R} \times (0, r_{j0+1}))$, (man beachte: $r_{j_0} = 0$ nach unserer Konvention) und Lemma 3.1 der Term $\Phi(0,\cdot) \in L^2(I, \mathbb{C}^N)$ wohldefiniert. Also ist $W(0)$ wohldefiniert, da $a(\cdot) \in H^1$ ist. Außerdem kann man schnell verifizieren, dass $|(\tilde{G}, W(0))_Y| \leq K\|W\|_{\mathcal{D}(\mathcal{T}^*)}$ ist und damit G ein beschränktes Funktional auf $\mathcal{D}(T^*)$ definiert. Also ist $\mathcal{S}U = G$ wohldefiniert.

Beweis
Sei ohne Einschränkung $t_0 = 0$. Wir wählen nun eine geeignete Referenzgleichung, d.h. eine lineare Abbildung $L^{ref} : H^1(I, \mathbb{C}^N) \to \mathbb{C}^N$, mit $L^{ref}\varphi = \int_{-a}^b p^{ref}(\theta)\varphi(\theta)d\theta + \sum_{k=1}^m A_k^{ref}\varphi(r_k)$ und einer stetigen Funktion $p^{ref}(\cdot) : I \to \mathbb{C}^{N\times N}$, $A_k^{ref} \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Weiterhin sei

$$\triangle(is) = is - L^{ref}(e^{is\theta}) \neq 0$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Wir wollen also annehmen, dass die Referenzgleichung hyperbolisch ist. Wir setzen

$$\mathcal{A}_{ref}\begin{pmatrix} \xi \\ \Phi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{ref}(\Phi(\cdot)) \\ \partial_\theta \Phi(\cdot) \end{pmatrix}$$

für $\begin{pmatrix} \xi \\ \Phi(\cdot) \end{pmatrix} \in X$. Dann ist ebenfalls $\mathcal{A}_{ref}$ hyperbolisch. Schreibe nun $\mathcal{T}$ in der Form

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{ref} + \mathcal{B}, \tag{3.46}$$

wobei $\mathcal{T}_{ref} = \partial_t - \mathcal{A}_{ref}$ und $\mathcal{B} = \mathcal{B}(t) = \mathcal{A}_{ref} - \mathcal{A}(t)$ ist durch

$$\mathcal{B}(t) \begin{pmatrix} \xi \\ \Phi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{ref}(\Phi(\cdot)) - L(t)(\Phi(\cdot)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Strategie ist nun wie folgt: suche eine Lösung $V(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}, Y)$ der Referenzgleichung $\mathcal{S}_{ref}V = G$ und anschließend eine stetige Lösung $\tilde{U}(\cdot)$ von $\mathcal{S}\tilde{U}(\cdot) = -\mathcal{B}V(\cdot)$. Die Summe $U(\cdot) := \tilde{U}(\cdot) + V(\cdot)$ erfüllt dann

$$\mathcal{S}U(\cdot) = \mathcal{S}(V(\cdot) + \tilde{U}(\cdot)) = \mathcal{S}_{ref}V(\cdot) + \mathcal{B}V(\cdot) + \mathcal{S}\tilde{U}(\cdot) = G(\cdot).$$

Nach Satz 3.12 besitzt die Gleichung

$$\partial_t V(\cdot) = \mathcal{A}_{ref}V(\cdot) \tag{3.47}$$

eine exponentielle Dichotomie. Bezeichne also (wie in dem gerade zitierten Satz) mit $\Pi_{P_*} : Y \to Y$ die Projektion entlang Q_* auf den abgeschlossenen Unterraum P_* aller Anfangszustände, für die (3.47) eine beschränkte Lösung in Vorwärtszeit besitzt. Ebenso besitzen alle Elemente im Bild von $(id - \Pi_{P_*})$, was nach Konstruktion gerade Q_* ist, eine Lösung in Rückwärtszeit. Für $\tilde{G} \in X$ definiere

$$V(t) := \begin{cases} e^{\mathcal{A}_{ref}\Pi_{P_*}t}\Pi_{P_*}\tilde{G} & t > 0 \\ -e^{\mathcal{A}_{ref}(id-\Pi_{P_*})t}(id - \Pi_{P_*})\tilde{G} & t \leq 0 \end{cases} \tag{3.48}$$

Nach Semigruppen-Theorie ist dann die Funktion $V(\cdot)$ differenzierbar für $t \neq 0$. Außerdem existieren die Limiten $V_+^0(t_0) := \lim_{t \searrow t_0} V(t)$ und $V_-^0(t_0) := \lim_{t \nearrow t_0} V(t)$. Sei nun $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, X)$ eine Testfunktion, dann gilt

$$\begin{aligned} -\int_{-\infty}^{\infty} \langle V(t), \partial_t\chi(t) + \mathcal{A}_{ref}^*\chi(t)\rangle_Y \, dt &= -\int_0^\infty \left\langle e^{\mathcal{A}_{ref}\Pi_{P_*}t}\Pi_{P_*}\tilde{G}, \partial_t\chi(t) + \mathcal{A}_{ref}^*\chi(t)\right\rangle_Y dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 \left\langle e^{\mathcal{A}_{ref}(id-\Pi_{P_*})t}(id - \Pi_{P_*})\tilde{G}, \partial_t\chi(t) + \mathcal{A}_{ref}^*\chi(t)\right\rangle_Y dt \\ &= \left\langle e^{\mathcal{A}_{ref}\Pi_{P_*}t}\Pi_{P_*}\tilde{G}, \chi(t)\right\rangle_Y \Big|_{t=0} + \left\langle e^{\mathcal{A}_{ref}(id-\Pi_{P_*})t}(id - \Pi_{P_*})\tilde{G}, \chi(t)\right\rangle_Y \Big|_{t=0} \\ &= V_+^0 - V_-^0 = \left\langle \tilde{G}, \chi(0)\right\rangle_Y \end{aligned}$$

wobei wir partielle Integration und die Tatsache benutzt haben, dass $V(\cdot)$ eine Lösung für $t \neq 0$ ist. Für $\tilde{G} \in X$ erfüllt also $V(\cdot)$ die Gleichung $\mathcal{S}_{ref}V = G$.
Für $\tilde{G} \in Y$ definieren wir eine Lösung $V(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}, Y)$ von $\mathcal{S}_{ref}V = G$ mittels Approximation von $\tilde{G}$ durch eine Folge in X und benutzen dann die Starkstetigkeit der Halbgruppe. Wir lösen nun

$$\mathcal{S}\tilde{U}(\cdot) = -\mathcal{B}V(\cdot), \tag{3.49}$$

wobei $V(\cdot)$ die Lösung der Referenzgleichung ist. Die rechte Seite ist bereits in $L^2(\mathbb{R}, Y)$ enthalten, da die erste Komponente außer bei $t = 0$ stetig ist und exponentiell für $t \to \pm\infty$ fällt. Auf $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ stimmt $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{T}$ überein. Außerdem ist $\mathcal{S}$ invertierbar, da $\mathcal{T}$ nach Annahme invertierbar ist und die Fredholmindizes beider Operatoren übereinstimmen, beide Operatoren injektiv sind. Wir können also (3.49) lösen und erhalten eine eindeutige Lösung $\tilde{U}(\cdot) = (\tilde{a}(\cdot), \tilde{\Phi}(\cdot, \cdot)) \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$. Da die zweite Komponente von $\mathcal{B}$ identisch verschwindet(!), gilt $\tilde{\Phi}(t,\eta) = \tilde{a}(t+\eta)$, mit $\tilde{a}(\cdot) \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$. Insbesondere ist $\tilde{U}(\cdot)$ stetig mit Werten in Y und

$$\|\tilde{U}\|_{H^1(\mathbb{R},Y)} + \|\tilde{U}\|_{L^2(\mathbb{R},X)} \leq C\|V\|_{L^2(\mathbb{R},Y)}.$$

Außerdem erfüllt $U(\cdot) := \tilde{U}(\cdot) + V(\cdot)$ alle Eigenschaften des Lemmas und der „Sprung" von $U(\cdot)$ in $t = 0$ ist genau der Sprung von $V(\cdot)$ in $t = 0$. Also gilt $U_+(0) - U_-(0) = \tilde{G}$. □

Mit Hilfe dieses Lemma können wir nun die Familie der gesuchten Projektionen $P(t)$ definieren. Diese liefern Unterräume, auf denen wir die nichtautonome Gleichung (3.15) lösen können. Dazu betrachten wir die injektive Abbildung $\Pi(t_0) : Y \to Y \times Y$, die durch

$$\Pi(t_0)\tilde{G} = (U_+(t_0), U_-(t_0))$$

definiert ist. Bezeichne nun mit $P_i(t_0) : Y \times Y \to Y$ die kanonischen Projektionen $P_i(t_0)(U_1, U_2) = U_i$ für $i = 1, 2$, dann gilt

$$\tilde{G} = P_1(t_0)\Pi(t_0)\tilde{G} - P_2(t_0)\Pi(t_0)\tilde{G}$$

für alle $\tilde{G} \in Y$. Es gilt nun folgendes Lemma.

Lemma 3.7
Sei $\mathcal{T}$ invertierbar. Die Vektorräume Bild$(P_i(t_0)\Pi(t_0))$ sind dann abgeschlossen und es gilt Bild$(P_1(t_0)\Pi(t_0)) \oplus$ Bild$(P_i(t_0)\Pi(t_0)) = Y$ für alle t_0.

Beweis
Wir zeigen, dass BildΠ abgeschlossen ist. Dies ist allerdings eine Konsequenz aus der Stetigkeit der Linksinversen von Π. Damit ist Π ein Isomorphismus auf sein abgeschlossenes Bild und die erste Aussage des Lemmas ist bewiesen. Der Beweis der anderen Aussagen verläuft wortwörtlich zum Beweis in [43, 44]. □

Man kann nun eine Familie von Projektionen $P(t)$ durch Bild$(P(t)) =$ Bild$(P_1(t)\Pi(t))$ und Kern$(P(t)) =$ Bild$(P_2(t)\Pi(t))$ definieren. Für jedes $U_+ \in$ Bild$(P(t_0)) \cap X$ existiert dann eine starke Lösung $V^s(t)$ von (3.23) für $t > t_0$ mit $V^s(t_0) = U_+$. Analog existiert für jedes $U_- \in$ Kern$(P(t_0)) \cap X$ eine starke Lösung $V^u(t)$ von (3.23) für $t < t_0$ mit $V^u(t_0) = U_-$. Es stellt sich heraus, dass die Projektionen $P(t)$ tatsächlich eine exponentielle Dichotomie induzieren. Dies besagt das folgende Lemma.

Lemma 3.8
Sei $\mathcal{T}$ invertierbar. Dann definiert die Familie der Projektionen zusammen mit den konstruierten Lösungen $V^s(\cdot)$ und $V^u(\cdot)$ eine exponentielle Dichotomie auf $\mathbb{R}$.
Außerdem sind die konstruierten Funktionen $V^s(\cdot)$, $V^u(\cdot)$ differenzierbar bezüglich der Anfangszeit t_0 für einen Anfangswert $V^{s/u}(t_0) = U_\pm \in X$. Genauer bedeutet dies, dass die Abbildung $t_0 \to V^s(t) = V^s(t, t_0)$ mit Werten in Y für festes $t > t_0$ differenzierbar ist, wobei $V^s(t_0) = U_+ \in X$ gilt. Analoges gilt für $V^u(\cdot)$.

Beweis
Der Beweis verläuft wortwörtlich zu dem Beweis in [43, 44]. Wir gehen deswegen nur auf die wesentlichen Punkte ein.
Wir haben bereits die Lösungen $V^s(\cdot)$ und $V^u(\cdot)$ konstruiert. Es bleibt also nur die Invarianz und das uniforme Abklingverhalten der Lösungen zu zeigen. Dazu betrachten wir zunächst den Fall $\kappa = 0$ (diese Größe tritt in der Definition exponentieller Dichotomien

auf und entspricht der exponentiellen Abklingrate der Lösungen; siehe auch den anschließenden Satz). D.h. wir wollen zeigen, dass Lösungen uniform beschränkt bleiben. Dazu beachte man, dass $\tilde{G}\delta(t-t_0)$ als Abbildung nach $\mathcal{D}(\mathcal{T}^*)$ stetig und uniform beschränkt ist. Also ändert sich die Abbildung Π und die Unterräume, die zur Definition der Projektionen benötigt wurden, stetig mit t_0. Außerdem ist die Norm der Abbildung Π uniform beschränkt bezüglich t_0, woraus wir die Existenz einer uniformen Schranke an die Norm der Projektionen erhalten. Ebenfalls aus der Stetigkeit von Π folgt nun die Starkstetigkeit der Projektionen bezüglich t.
Sei nun U_+ ein Anfangswert und setze $\tilde{G} := U_+$. Benutzt man nun, dass die Lösung uniform beschränkt bezüglich ihres „Sprungs“ ist, so erhält man eine uniforme Schranke an die Norm der Lösungen in Abhängigkeit ihres Anfangswertes.
Wir zeigen nun Differenzierbarkeit bezüglich der Anfangszeit t_0. Dazu müssen wir zeigen, dass $\partial_h U^h(t)$ für festes $t > t_0$ existiert, wobei $U^h(t)$ die Gleichung $\partial_t U(t) = \mathcal{A}(t)U(t)$ mit Anfangszeit $t_0 + h$ erfüllt. Setze dazu $\tilde{U}^h(t) := U^h(t+h)$; dann gilt $\partial_t \tilde{U}^h = \mathcal{A}(t+h)\tilde{U}^h$ mit Anfangszeit t_0. Zu zeigen ist also, dass $\partial_h \tilde{U}^h(t-h)$ existiert. Dies folgt nun aus der Tatsache, dass $\mathcal{T}^h := \partial_t - \mathcal{A}(t+h)$ glatt von h abhängt und $\tilde{U}^h(t)$ differenzierbar bezüglich t ist (hier haben wir natürlich benutzt, dass der Anfangswert in X ist).
Als letztes zeigen wir, dass das Abklingverhalten der Lösungen exponentiell und uniform ist. Dazu betrachten wir die Gleichung

$$\partial_t U = (\mathcal{A}(t) + \kappa \cdot \operatorname{sign}(t-t_0))U =: \mathcal{A}_{\kappa,t_0}(t)U$$

für $\kappa > 0$. Der Operator $\mathcal{T}_{\kappa,t_0} = \partial_t - \mathcal{A}_{\kappa,t_0}(t)$ ist stetig in (κ, t_0) und invertierbar, falls κ klein genug ist. Wir können nun die obigen Resultate auf den Operator $\mathcal{T}_{\kappa,t_0}$ anwenden und sehen, dass der Operator $\partial_t - \mathcal{A}_{\kappa,t_0}(t)$ exponentielle Dichotomien mit uniformen Schranken besitzt. Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, dass Lösungen der modifizierten Gleichung $\partial_t \tilde{U} = \mathcal{A}_{\kappa,t_0}(t)\tilde{U}$ durch $\tilde{U}(t) = U(t)e^{\kappa|t-t_0|}$ gegeben sind, wobei $U(t)$ die ursprüngliche Gleichung $\partial_t U = \mathcal{A}(t)$ löst. □
Wir haben also gezeigt:

Satz 3.13 (Exponentielle Dichotomie auf $\mathbb{R}$)
Sei $\mathcal{T}$ invertierbar. Gleichung (3.23) besitzt dann eine exponentielle Dichotomie auf $\mathbb{R}$. D.h. es existieren positive Konstanten K und κ und eine Famile stark stetiger Projektionen $\mathcal{P}(t) : Y \to Y$. Für $U \in Y$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt

- *Es existiert eine stetige Funktion $V^s(\cdot) : [t_0, \infty) \to Y$, so dass $V^s(t_0) = P(t_0)U$ gilt. Außerdem ist $V^s(t) \in$ Bild$(P(t))$ und $|V^s(t)|_Y \le Ke^{-\kappa|t-t_0|}|U|_Y$ für alle $t \ge t_0$.*

- *Es existiert eine stetige Funktion $V^u(\cdot) : (-\infty, t_0] \to Y$, so dass $V^u(t_0) = (id - P(t_0))U$ gilt. Außerdem ist $V^u(t) \in$ Kern$(P(t))$ und $|V^u(t)|_Y \le Ke^{-\kappa|t-t_0|}|U|_Y$ für alle $t_0 \ge t$.*

Ist $P(t_0)U \in X$, so definiert $V^s(t)$ eine starke Lösung von (3.23) im Sinne von Definition 9. Ebenso ist für $(id - P(t_0))U \in X$ die Funktion $V^u(t)$ eine starke Lösung von (3.23). Sei hingegen $U \in Y \cap \mathrm{Bild}P(t_0)$ mit $U = (u^1, \phi(\cdot))$. Dann ist die Abbildung $V^s(t)$ für $t > t_0$ von der Form $V^s(t) = (\xi(t), \xi_t)$, wobei $V^s(0) = U$ gilt und $\xi(\cdot)$ eine starke Lösung von (3.15) zum Anfangswert $\xi_0 = \phi$ ist. Analoges gilt für $V^u(\cdot)$.

$\mathcal{T}$ Fredholm

Wir machen im gesamten Kapitel die Annahme, dass $\mathcal{T}$ ein Fredholmoperator ist und Hypothese 6 gilt. Dann erfüllt auch die Gleichung

$$\mathcal{T}V = 0$$

die letztere Eigenschaft, da aus dieser Gleichung mit $V(t) = (a(t), \Phi(t,\cdot))$ bereits $\Phi(t,\eta) = a(t+\eta)$ und $a(\cdot) \in \mathrm{Kern}(\mathcal{L})$ folgt. Es gilt also: Ist $V(\cdot)$ im Kern von $\mathcal{T}$ und $V(t) = 0$ für ein festes $t \in \mathbb{R}$, so ist $V(\cdot) \equiv 0$. Wir werden uns im nächsten Abschnitt mit der Gültigkeit dieser Hypothese beschäftigen.
Sei nun $\phi^1, \ldots, \phi^k$ eine Basis des Kerns von $\mathcal{T}$. Man kann dann verifizieren, dass der Kern von $\mathcal{T}$ mit dem von $\mathcal{S}$ übereinstimmt, siehe Lemma 3.5. Sei $\psi^1, \ldots, \psi^n$ eine Basis des Kerns von $\mathcal{T}^*$. Dieser Vektorraum ist dann orthogonal zu $\mathrm{Bild}(\mathcal{T})$ und $\mathrm{Bild}(\mathcal{S})$. Aufgrund von Hypothese 6 sind dann die Vektoren $\phi^1(0), \ldots, \phi^k(0)$ als auch $\psi^1(0), \ldots \psi^n(0)$ linear unabhängig und das ist die einzige Stelle, an der wir diese Hypothese benutzen. Sei

$$\mathcal{V}_0 = \mathrm{span}\{\phi^1(0), \ldots \phi^k(0)\}, \qquad \mathcal{W}_0 = \mathrm{span}\{\psi^1(0), \ldots \psi^n(0)\}.$$

Dann gilt (siehe [44], Seite 24, Lemma 5.7):

Lemma 3.9
Es existieren Konstanten $C > 0$ und $\eta > 0$ mit

$$|V(t)|_Y \leq Ce^{-\eta|t|}|V(0)|_Y$$

für alle $V(0) \in \mathcal{V}_0$ und $t \in \mathbb{R}$

Die Gleichung $\mathcal{S}U = G$, wobei $G(\cdot) = \tilde{G}(\cdot)\delta$ wie im vorigen Kapitel definiert ist (siehe die Bemerkung nach Lemma 3.6), hat genau dann eine Lösung, wenn $\{\tilde{G}\}\perp\mathcal{W}_0$ in Y gilt. Die Differenz zweier solcher, bei $t = 0$ ausgewerteten Lösungen liegt dann in $\mathcal{V}_0$. Es gilt folgendes Lemma:

Lemma 3.10
Sei $\mathcal{T}$ ein Fredholmoperator. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ mit folgenden Eigenschaften. Sei $G(\cdot) = \tilde{G}\delta(\cdot)$ für ein $\tilde{G} \in Y$ mit $\{\tilde{G}\}\perp\mathcal{W}_0$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $U(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}, Y)$ von $\mathcal{S}U = G$, die zusätzlich senkrecht auf den Kern von $\mathcal{T}$ bezüglich des $L^2(\mathbb{R}, Y)$-Skalarproduktes steht.
Die Einschränkungen von $U(\cdot)$ auf $\mathbb{R}_\pm$ liegen in $C^0(\mathbb{R}_\pm, Y)$ und sind differenzierbar außer bei $t = 0$. Die Limiten $U_+ := \lim_{t\searrow 0} U(t)$ und $U_- := \lim_{t\nearrow 0} U(t)$ existieren in Y und erfüllen die Gleichung $U_+ - U_- = \tilde{G}$. Außerdem gilt

$$\|U\|_{L^\infty(\mathbb{R},Y)} + \|U\|_{L^2(\mathbb{R},Y)} \leq C|\tilde{G}|_Y$$

Beweis
Wie beim Fall, in dem $\mathcal{T}$ invertierbar ist, lösen wir zunächst die Gleichung $\mathcal{S}_{ref}V = G$. Setzen wir $\mathcal{B} := \mathcal{S} - \mathcal{S}_{ref}$, so erhalten wir

$$\mathcal{S}V(\cdot) = \mathcal{S}_{ref}V(\cdot) + \mathcal{B}V(\cdot) = G(\cdot) + \mathcal{B}V(\cdot)$$

und $\mathcal{B}V(\cdot) \in \mathrm{Bild}(\mathcal{S})$ wegen $G(\cdot) \in \mathrm{Bild}(\mathcal{S})$. Wir können also ganz analog zum Beweis des Lemmas 3.6 fortfahren und erhalten eine eindeutige Lösung $\tilde{U}(\cdot)$ von $\mathcal{S}U(\cdot) = -\mathcal{B}V(\cdot)$ mit

$\tilde{U}(\cdot) \in \text{Kern}(\mathcal{S})^\perp$. Nun projizieren wir die Funktion $V(\cdot)$ entlang $\text{Kern}(\mathcal{S})^\perp$ auf $\text{Kern}(\mathcal{S})$. Nennen wir die resultierende Funktion $\phi(\cdot)$, so ist $U(\cdot) := \tilde{U}(\cdot) + V(\cdot) - \phi(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}, Y)$ und die gewünschte Lösung von $\mathcal{S}U = G$. Die Abschätzungen für $U(\cdot)$ folgen wie im Beweis von Lemma 3.6. □

Wieder definieren wir die Abbildung $\Pi : \mathcal{W}_0^\perp \to Y \times Y$ durch

$$\tilde{G} \to (U_+, U_-).$$

Diese Abbildung ist dann stetig und injektiv. Außerdem gilt

$$\text{Bild}(P_1\Pi) \cap \text{Bild}(P_2\Pi) = \mathcal{V}_0, \qquad \text{Bild}(P_1\Pi) + \text{Bild}(P_2\Pi) = \mathcal{W}_0^\perp.$$

Um die gewünschten Projektionen $P(t)$ etwa auf $\mathbb{R}_+$ definieren zu können, muss man für festes t das Bild und den Kern der Projektion $P(t)$ festlegen. Es stellt sich heraus, dass $\text{Bild}P(t) = \text{Bild}(P_1\Pi)$ gestzt werden kann. Die Definition des Kerns erfordert ein wenig mehr Arbeit und ist nicht eindeutig; man beachte dass Π nicht auf ganz Y definiert ist, so dass man ein geeignetes Komplement von $\mathcal{W}_0^\perp$ in Y konstruieren muss, bezüglich dessen Lösungen in Rückwärtszeit existieren müssen. Dies geschieht in folgendem Lemma.

Lemma 3.11
Es existiert eine Konstante $C > 0$ und Projektionen $P(t_0)$ in $L(Y)$, definiert für $t_0 \leq 0$, mit den folgenden Eigenschaften. Es gilt $\|P(t_0)\| < C$ uniform bezüglich $t_0 \leq 0$. Für jedes Element $U(t_0) \in$ Bild$(P(t_0))$ existiert eine Funktion $U(t)$, definiert für $0 \geq t \geq t_0$, die $|U(t)|_Y \leq C|U(t_0)|_Y$ erfüllt. Diese Funktion ist eine Lösung der Gleichung $\partial_t U(t) = \mathcal{A}(t)U(t)$, wenn der Anfangswert $U(t_0)$ in X liegt.
Außerdem existiert für jedes $U(t_0) \in$ Kern $(P(t_0))$ eine Funktion $U(t)$, definiert für $t \leq t_0$, die $|U(t)|_Y \leq C|U(t_0)|_Y$ erfüllt. Diese Funktion ist eine Lösung der Gleichung $\partial_t U(t) = \mathcal{A}(t)U(t)$, wenn der Anfangswert $U(t_0)$ in X liegt. Weiterhin gilt Kern$(P(t_0)) =$ Bild$(P_2\Pi(t_0))$ für $t_0 \leq 0$.

Beweis
Ein ausführlicher Beweis findet sich in [44] Lemma 5.9, Seite 26. Dieser überträgt sich nahezu wortwörtlich auf unseren Fall. Der Vollständigkeit halber gehen wir auf die wesentlichen Schritte ein.
Wir konstruieren zunächst $\text{Kern}(P(t_0))$. Nach Lemma 3.10 existiert nun ein $C > 0$ mit den folgenden Eigenschaften. Für $G \in \text{Bild}(P_2\Pi(t_0))$ gilt $\Pi(t_0)G = (V_0, G + V_0)$ für ein $V_0 \in \mathcal{V}_{t_0}$ mit $|V_0|_Y \leq C|G|_Y$ (wir haben $\mathcal{V}_{t_0} := \text{span}\{\phi^1(t_0), \ldots, \phi^k(t_0)\}$ und $\mathcal{W}_{t_0} := \text{span}\{\psi^1(t_0), \ldots, \psi^n(t_0)\}$ gesetzt). Außerdem existiert eine Funktion $U(t)$, definiert für $t \leq t_0$, so dass $U(t_0) = G + V_0$ gilt und es gibt ein $V \in \text{Kern}(\mathcal{T})$ mit $V(t_0) = V_0$. Diese Abbildungen erfüllen $|U(t)|_Y \leq C|G|_Y$ für $t < t_0$ und $|V(t)|_Y \leq C|G|_Y$ für $t > t_0$. Da $t_0 < 0$ ist, gilt $|V(0)|_Y < C|G|_Y$. Also gilt weiterhin $|V(t)|_Y \leq C|V(0)|_Y \leq C|G|_Y$ für ein beliebiges $t \in \mathbb{R}$. Deswegen erfüllt die Lösung $U - V$, definiert für $t \leq t_0$ die Gleichung $(U-V)(t_0) = G$ und $|(U-V)(t)|_Y \leq C|G|_Y$. Wir setzen also $\text{Kern}(P(t_0)) := \text{Bild}(P_2\Pi(t_0))$ und haben den ersten Teil des Lemmas gezeigt.
Wir überspringen den Schritt, wie man den Schnitt von $\text{Bild}(P(t_0))$ und $\text{Bild}(P_1\Pi(t_0))$ konstruiert und erklären nur noch, dass man einen geeigneten, transversalen Unterraum zu der Summe $\text{Bild}(P_1\Pi(t_0)) + \text{Bild}(P_2\Pi(t_0))$ finden kann, der für Startwerte $U_- \in X$ in diesem Unterraum eine Lösung $U(\cdot)$ der Gleichung $\partial_t U = \mathcal{A}(t)U$ für $0 \leq t \leq t_0$ liefert. Dabei erfüllt $U(\cdot)$ (auch im Fall $U_- \in Y$) $U(t_0) = U_-$ und $|U(t)|_Y \leq C|U_0|_Y$. Sei $\tilde{G} \in \mathcal{W}_{t_0}$

und wähle ψ in der Form $\psi = \sum_{j=1}^{m} (\psi^j(t_0), \tilde{G})_Y \psi^j(0)$. Dann gilt $|\psi|_Y \leq C|\tilde{G}|_Y$ wegen Lemma 3.9 auf die adjungierte Gleichung. Außerdem wählen wir die rechte Seite der Gleichung $\mathcal{S}U = G$ gemäß

$$G = \tilde{G}\delta(t - t_0) - \psi\delta(t).$$

Nach Konstruktion ist dann die Abbildung G orthogonal zu $\psi^j(t)$ in $L^2(\mathbb{R}, Y)$ für jedes j und definiert deswegen ein Element des Bildes von $\mathcal{S}$. Also können wir eine eindeutige Lösung U von $\mathcal{S}U = G$ konstruieren, die zusätzlich $U \in \text{Kern}(S)^\perp$ erfüllt: dazu lösen wir die Referenzgleichung für die rechte Seite $\tilde{G}\delta(t - t_0)$ und danach für die rechte Seite $-\psi\delta(t)$. Die Summe beider Lösungen hat dann den Sprung $\tilde{G}$ bei $t = t_0$ und $-\psi$ bei $t = 0$. Wir können nun wie oben beschrieben fortfahren, um die gewünschte Lösung zu erhalten. □

Also haben wir die Existenz exponentieller Dichotomien auf $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}_-$ gezeigt.

Der Beweis des Satzes 3.5

In diesem Abschnitt widmen wir uns dem Beweis des Satzes 3.5. Wir nehmen im folgenden an, dass die Hypothesen „EFE“ und „Asymptotisch hyperbolisch + exponentielle Konvergenz“ (siehe Hypothese 6 und 7) erfüllt sind. Desweiteren wollen wir das gleiche Setting und die gleiche Notation wie im Abschnitt „$\mathcal{T}$ Fredholm“ verwenden und gleich den allgemeineren Fall behandeln, in dem $\mathcal{T}$ nur ein Fredholmoperator ist. Wir beginnen zunächst mit einer Verschärfung von Lemma 3.9, dass Auskunft über das asymptotische Abklingverhalten von Lösungen im Kern gibt.

Lemma 3.12
Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$|V(t)|_Y \leq Ce^{-\beta t}|V(0)|_Y$$

für alle $V(0) \in \mathcal{V}_0$ und alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt, wobei β wie in Hypothese „Asymptotisch hyperbolisch + exponentielle Konvergenz“ definiert ist.

Beweis
Sei $V(\cdot) \in \text{Kern}\mathcal{T}$, d.h. $V(t) = (a(t), a_t(\cdot))$ mit $a(\cdot) \in H^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$. Außerdem ist $a(\cdot)$ eine Lösung von

$$\partial_t a(t) = L(t)a_t = L_+ a_t + B(t)a_t, \tag{3.50}$$

mit $B(t) := L(t) - L_+$. Nach Hypothese 7 gilt: $|B(t)| \leq Me^{-\gamma t}$ für $t \to \infty$. Setze $b(t) := B(t)a_t$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da nach Lemma 3.9 bereits $a(\cdot) \in BC^{-\eta}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ ist, gilt

$$b(\cdot) \in BC^{-(\gamma+\eta)}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N), \tag{3.51}$$

d.h. $\sup_{t>0} e^{(\gamma+\eta)t}|b(t)| < \infty$. Da wir angenommen haben, dass $|L(t)|$ bezüglich der Operatornorm beschränkt ist für alle $t \in \mathbb{R}$, ist auch $|B(t)|$ beschränkt für alle t. Also ist $b(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ und $a(\cdot)$ erfüllt:

$$\mathcal{L}_+ a = b, \tag{3.52}$$

wobei $\mathcal{L}_+ : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ durch $(\mathcal{L}_+ v)(t) := \partial_t v(t) - L_+ v_t$ gegeben ist. Da die charakteristische Funktion $\det\triangle_+(\lambda)$ bezüglich L_+ keine rein imaginären Nullstellen besitzt, gilt nach Mallet-Paret [32]

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_*(t - \xi)b(\xi)d\xi \tag{3.53}$$

wobei $G_* : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{N\times N}$ die matrixwertige Greensfunktion

$$G_*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\triangle_+(i\xi))^{-1} e^{it\xi} d\xi$$

bezeichnet, siehe auch (2.58). Nehmen wir nun an, dass die Funktion $G_*(t)$ der Abschätzung

$$|G_*(t)|_{\mathbb{C}^{N\times N}} \leq Ke^{-\beta t} \tag{3.54}$$

für $t > 0$ genügt, so kann man für $t > 0$ folgendes zeigen: es gilt

$$\begin{aligned} |a(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} & |G_*(t-\xi)b(\xi)|d\xi \leq \textstyle\int_{-\infty}^{0} |G_*(t-\xi)b(\xi)|d\xi \\ & + \textstyle\int_0^t |G_*(t-\xi)b(\xi)|d\xi + \int_t^\infty |G_*(t-\xi)b(\xi)|d\xi. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Wir schätzen nun das zweite Integral in (3.55) unter Benutzung von (3.54) ab.

$$\begin{aligned} \int_0^t |G_*(t-\xi)b(\xi)|d\xi \leq & \quad C \textstyle\int_0^t e^{-\beta(t-\xi)} e^{-(\gamma+\eta)\xi} d\xi \\ = & \quad Ce^{-\beta t}\left[e^{(-\gamma-\eta+\beta)\xi}/(\beta-\eta-\gamma)\right]_0^t \\ = & \quad Ce^{-\beta t}\left[e^{(-\gamma-\eta+\beta)t}/(\beta-\eta-\gamma) + 1/(\gamma+\eta-\beta)\right] \\ = & \quad \mathcal{O}(e^{-\beta t}) \end{aligned}$$

für $t \to \infty$, falls wir $\gamma + \eta > \beta$ wählen. Analog kann man die anderen Integrale abschätzen, die in der Tat weniger problematisch sind. Für das erste Integral auf der rechten Seite von (3.55) ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^0 |G_*(t-\xi)b(\xi)|d\xi \leq Me^{-\beta t}\left[e^{(\beta+\eta)\xi}/(\beta+\eta)\right]_{-\infty}^0 = \mathcal{O}(e^{-\beta t})$$

und für das dritte Integral

$$\int_t^\infty |G_*(t-\xi)b(\xi)|d\xi \leq Me^{-\beta t}\left[e^{-(\eta+\gamma)\xi}/(-(\beta+\eta+\gamma))\right]_t^\infty = \mathcal{O}(e^{-\beta t})$$

für $t \to \infty$. Also ist $a(\cdot) \in BC^{-\beta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$, falls die Abschätzung (3.54) gültig ist. Außerdem gilt nach Lemma 3.9

$$|a(t)| \leq |a(t)| + |a_t| \leq |V(t)|_Y \leq Me^{-\eta t}|V(0)|_Y$$

wegen $V(t) = (a(t), a_t)$. Also ist dieser Beweis mit dem nächsten Lemma abgeschlossen, der (3.54) zeigt. $\square$

Lemma 3.13
Gelte Hypothese „Asymptotisch hyperbolisch + exponentielle Konvergenz". Dann gilt für die Greensfunktion $G_*(\cdot)$ bezüglich des Operators $\mathcal{L}_+$ die scharfe Abschätzung

$$|G_*(t)|_{\mathbb{C}^{N\times N}} \leq Ke^{-\beta t}$$

für $t > 0$.

Beweis
Da die charakteristische Funktion bezüglich L_+ keine rein imaginären Nullstellen hat, existieren nach Satz 3.7 abgeschlossene Unterräume P und Q von $L^2([-a,b],\mathbb{C}^N)$ mit $P+Q = L^2([-a,b],\mathbb{C}^N)$. Außerdem existieren stark stetige Halbgruppen $T_P(t) : P \to P$ für $t \geq 0$ bzw. $T_Q(t) : Q \to Q$ für $t \leq 0$. Dabei hat $T_P(t)$ den Generator $\partial_\theta : \mathcal{D}\big|_P \subset L^2([-a,b],\mathbb{C}^N) \to P$. Dieser agiert auf Funktionen eines auf P eingeschränkten Unterraumes $\mathcal{D}$ von L^2 mit $\{\varphi \in C^1([-a,b],\mathbb{C}^N) | \dot{\varphi}(0) = L_+(\varphi)\} \subset \mathcal{D}$. Analog ist $-\partial_\theta : \mathcal{D}\big|_Q \subset L^2([-a,b],\mathbb{C}^N) \to Q$ der Generator bzgl. $T_Q(-t)$ für $-t > 0$. Da wir im folgenden die exakte Charakterisierung des Domains $\mathcal{D}$ nicht benötigen, verzichten wir darauf.
Zerlege nun P in eine direkte, $T_p(t)$ invariante Zerlegung $P = E_{-\beta} + \tilde{P}$, wobei $E_{-\beta}$ der verallgemeinerte Eigenraum aller Eigenfunktionen zu Eigenwerten λ mit Realteil $-\beta$ ist. Für $\tilde{P}$ gilt dann $T_P(t) : \tilde{P} \to \tilde{P}$ und $\|T_{\tilde{P}}(t)\| \leq Me^{(-\beta-\varepsilon)t}$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$, siehe [16], Kapitel 7.6, Theorem 6.1, Seite 214. Man beachte, dass bei diesem Theorem allein die Tatsache wichtig ist, dass $T_P(t)$ ausschließlich Punktspektrum hat. Auf $E_{-\beta}$ hingegen hat $T_P(t)$ die Form

$$T_P(t) = e^{Dt},$$

für eine endlichdimensionale Matrix D mit komplexen Einträgen (genauer entspricht die Matrix e^D der Einschränkung des Generators von $T_P(t)$ auf den endlichdimensionalen Eigenraum $E_{-\beta}$ [in einer geeigneten Basis von $E_{-\beta}$]). Nach Definition von $E_{-\beta}$ ist dann $\mathrm{spec}(D) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda = -\beta\}$. Außerdem sind nach Hypothese 7 alle Eigenwerte einfach. Also gilt

$$|e^{Dt}| \leq Me^{-\beta t}.$$

Insgesamt ergibt sich also auf P, dass

$$\|T_P(t)\|_{L(P,P)} \leq \tilde{M}e^{-\beta t}$$

git. Also klingt jede Lösung $T_P(t)\varphi$ mit Startwert $\varphi \in P$ exponentiell mit Rate $-\beta$ ab.
Nach Mallet-Paret ist außerdem für jeden Einheitsvektor b_i, $i = 1,\dots N$ des $\mathbb{C}^N$ die Abbildung $\Gamma_i(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^N$ definiert durch

$$\Gamma_i : t \to G_*(t)b_i,$$

eine Lösung von $\partial_t v(t) = L_+ v_t$ auf $\mathbb{R}_+$, die unstetig in $t = 0$ und absolut stetig für $t > 0$ ist. Außerdem erfüllt $G_*(\cdot)$ die Abschätzung $|G_*(t)| \leq e^{-\alpha|t|}$ für ein $\alpha > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$, siehe [32], Kapitel 4.
Insbesondere ist also $\Gamma_i(\cdot)$ für jedes $i = 1,\dots,N$ eine beschränkte Lösung von $\partial_t v(t) = L_+ v_t$ auf $\mathbb{R}_+$. Nach Definition von P, als Unterraum aller Anfangszustände in $L^2([-a,b],\mathbb{C}^N)$, die beschränkte Lösungen in Vorwärtszeit induzieren, ist also $\Gamma_i(\cdot) \in L^2([-a,b],\mathbb{C}^N)$ ein Element von P, also gilt

$$\Gamma_i(t+\theta) = (T_P(t)\Gamma_i(\cdot))(\theta).$$

Damit gilt die Behauptung für $\Gamma_i(\cdot)$ für jedes $i = 1,\dots N$ und damit auch für die matrixwertige Funktion $G_*(t)$. □

Wir erinnern, dass die Konstruktion der Dichotomien auf Lemma 3.10 basierte, in dem für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\tilde{G} \in \mathcal{W}_0^\perp$ eine Lösung $U(\cdot)$ von $\mathcal{S}U = \tilde{G}\delta =: G$ in der Form

$$U(\cdot) := \tilde{U}(\cdot) + V(\cdot) - \phi(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}, Y). \tag{3.56}$$

konstruiert wurde. Es steht $U(\cdot)$ senkrecht auf Kern$\mathcal{T}$ und ist mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt. Weiterhin ist $V(\cdot)$ eine Lösung von $\mathcal{S}_{ref}V = G$, wobei $V(\cdot)$ durch (3.166) gegeben ist. $\tilde{U}(\cdot)$ ist dann eine Lösung von $\mathcal{S}\tilde{U}(\cdot) = -\mathcal{B}V(\cdot)$, mit $\tilde{U}(\cdot) \in \text{Kern}(\mathcal{S})^\perp$ und $\phi(\cdot)$ das Bild von $V(\cdot)$ bezüglich der Orthogonalprojektion, deren Bild Kern$(\mathcal{S})$ ist. $U(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}, Y)$ definiert dann durch $U_+(t_0) := \lim_{t\searrow t_0} U(t)$ ein Element in Y. Außerdem wurde gezeigt, dass $\{U_+(t_0)|\tilde{G} \in \mathcal{W}_0^\perp\} \subset Y$ gerade dem Bild der Projektion $P(t_0)$ entspricht; also dem abgeschlossenen Unterraum aller Anfangszustände, für die beschränkte Lösungen bezüglich $t > t_0$ von $\dot{U}(t) = \mathcal{A}(t)U(t)$ existieren. Da wir zeigen wollen, dass diese Lösungen mit exponentieller Rate $-\beta$ für $t > t_0$ abklingen, werden wir nach der Definition von U zeigen, siehe (3.56), dass die Funktionen $\tilde{U}(\cdot), V(\cdot), \phi(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}, Y)$ diese Eigenschaft besitzen (mit uniformen Konstanten bezüglich $t_0 \neq 0$!).

Schritt I

Wir behandeln zunächst den Fall $t_0 = 0$ und zeigen, dass $|U(t)|_Y \leq Me^{-\beta t}|\tilde{G}|_Y$ für alle $t > 0$ gilt.

a)

Wählen wir als Referenzgleichung $\dot{U}(t) = \mathcal{A}_+U(t)$ bezüglich des Operators L_+ (da $\mathcal{L}$ nach Annahme hyperbolisch ist für $t \to \infty$ mit $L(t) \to L_+$), so ergibt sich nach Lemma 3.13 und dessen Beweis, dass $V(\cdot)$ mit Rate $-\beta$ für $t \to \infty$ abklingt. Man beachte die explizite Darstellung von $V(\cdot)$ in (3.166). Außerdem gilt für $t > 0$:

$$|V(t)|_Y \leq Me^{-\beta t}|\tilde{G}|_Y.$$

b)

Da $\phi(\cdot) \in \text{Kern}(\mathcal{S})$ und damit $\phi(\cdot) \in \text{Kern}(\mathcal{T})$, gilt nach Lemma 3.12, dass $\phi(t)$ bezüglich $t > 0$ mit exponentieller Rate $-\beta$ abklingt. Außerdem ist $\phi(\cdot) = \Pi_{\text{Kern}(\mathcal{T})}V(\cdot)$ das Bild der Orthogonalprojektion bezüglich Kern$(\mathcal{T})$ von $V(\cdot)$. Daraus folgt unmittelbar:

$$\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R},Y)} \leq M\|V\|_{L^2(\mathbb{R},Y)},$$

da $\Pi_{\text{Kern}\mathcal{T}} : L^2(\mathbb{R}, Y) \to L^2(\mathbb{R}, Y)$ stetig ist. Weil Kern$\mathcal{T}$ endlichdimensional und gleichzeitig das Bild dieser Orthogonalprojektion ist, kann man etwa die $BC^0(\mathbb{R}, Y)$-Norm auf Kern$\mathcal{T}$ wählen (diese ist wohldefiniert, da alle Elemente in Kern$\mathcal{T}$ für $|t| \to \infty$ abklingen). Dies induziert ebenfalls einen stetigen Operator $\Pi_{\text{Kern}\mathcal{T}} : L^2(\mathbb{R}, Y) \to \text{Kern}\mathcal{T}$, wobei Kern$\mathcal{T}$ mit der BC^0-Norm versehen ist (da diese auf einem endlichen Vektorraum äquivalent sind). Also gilt auch

$$\|\phi\|_{BC^0(\mathbb{R},Y)} \leq K\|V\|_{L^2(\mathbb{R},Y)}.$$

und

$$\|\phi(t)\|_Y \leq Me^{-\beta t}\|\phi(0)\|_Y \leq Ke^{-\beta t}\|V\|_{L^2(\mathbb{R},Y)} \leq Ce^{-\beta t}|\tilde{G}|_Y,$$

wobei sich die letzte Ungleichung aus der Tatsache $\mathcal{S}_{ref}V = \tilde{G}\delta$ und der Definition $\tilde{G}\delta \in (\mathcal{D}(\mathcal{T}^*))^*$ ergibt.

c)

Es bleibt das Abklingverhalten von $\tilde{U}(\cdot)$ als Lösung von $\mathcal{S}\tilde{U}(\cdot) = -\mathcal{B}V(\cdot)$, mit $\tilde{U}(\cdot) \in \text{Kern}(\mathcal{S})^\perp$ zu studieren. Sei $\tilde{U}(t) = (a(t), \Phi(t, \cdot))$, dann ist $\tilde{U}(\cdot) \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$, da $\mathcal{B}V(\cdot) \in \text{Bild}(\mathcal{T})$ und $\mathcal{S}$,$\mathcal{T}$ auf $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ übereinstimmen (die Lösung $\tilde{U}(\cdot)$ mit ihren oben genannten Eigenschaften ist eindeutig). Also löst $\Phi(\cdot, \cdot)$ die Gleichung

$$\partial_t\Phi(t, \theta) = \partial_\theta\Phi(t, \theta)$$

und deswegen gilt $\Phi(t,\cdot) = a(t+\cdot)$. Weiterhin löst $a(\cdot) \in H^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ die Gleichung $\partial_t a(t) = L(t)a_t + \tilde{b}(t)$, mit $(-\mathcal{B}V)(t) = (\tilde{b}(t),0)$. Außerdem haben wir bereits gezeigt, dass $|\tilde{b}(t)| \leq Me^{-\beta t}$ für $t \to \infty$, siehe b). Wir betrachten also wieder

$$\partial_t a(t) = L(t)a_t + \tilde{b}(t) = L_+ a_t + B(t)a_t + \tilde{b}(t) \tag{3.57}$$

wobei $B(t) = L(t) - L_+$ exponentiell schnell in der Operatornorm gegen Null konvergiert für $t \to \infty$ und mit Rate $-\gamma$. Da L_+ hyperbolisch ist, kann man $a(\cdot)$ explizit angeben:

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_*(t-\xi)(c(\xi) + \tilde{b}(\xi))d\xi \tag{3.58}$$

mit $c(t) := B(t)a_t$. Diesen Integralterm kann man nun analog zu (3.54) abschätzen und erhält

$$\begin{aligned} \|a\|_{BC^{-\beta}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^N)} \leq \;& C(\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}_-,\mathbb{C}^N)} + \|c\|_{BC^{-(\eta+\gamma)}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^N)}) \\ &+C(\|\tilde{b}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_-,\mathbb{C}^N)} + \|\tilde{b}\|_{BC^{-\eta}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^N)}). \end{aligned} \tag{3.59}$$

Außerdem gilt nach Scheel et al [43] $|a(t)|_{\mathbb{C}^N} + \|a_t\|_{L^2} \leq Me^{-\eta t}|\tilde{G}|_Y$, da $\tilde{U}(\cdot) = U(\cdot) - V(\cdot) + \phi(\cdot)$ und dies für $U(\cdot), V(\cdot)$ und $\phi(\cdot)$ gilt. Man beachte außerdem, dass $|\tilde{U}|_Y = |a(t)|_{\mathbb{C}^N} + \|a_t\|_{L^2}$ ist. Also folgt aus (3.59) für $t > 0$:

$$\begin{aligned} e^{\beta t}|a(t)| \leq \|a\|_{BC^{-\beta}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^N)} \leq \;& C(\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}_-,\mathbb{C}^N)} + \|c\|_{BC^{-(\eta+\gamma)}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^N)}) \\ &+C(\|\tilde{b}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_-,\mathbb{C}^N)} + \|\tilde{b}\|_{BC^{-\eta}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^N)}) \\ &\leq K|\tilde{G}|_Y \end{aligned} \tag{3.60}$$

für eine geeignete Konstante $K > 0$: Man kann etwa den Term $\|\tilde{b}\|_{BC^{-\eta}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^N)}$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\tilde{b}\|_{BC^{-\eta}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^N)} &= \sup_{t>0} e^{\eta t}|\tilde{b}(t)|_{\mathbb{C}^N} \leq \sup_{t>0} e^{\eta t}C|a_t|_{L^2} \\ &\leq \sup_{t>0} e^{\eta t}C(|a(t)|_{\mathbb{C}^N} + |a_t|_{L^2}) \\ &\leq \sup_{t>0} e^{\eta t}Ce^{-\eta t}|\tilde{G}|_y = C|\tilde{G}|_Y \end{aligned}$$

und ähnlich die anderen Terme. Also folgt aus (3.60)

$$|\tilde{U}(t)|_Y = |a(t)|_{\mathbb{C}^N} + |a_t|_{L^2} \leq M(|a(t)|_{\mathbb{C}^N} + |a_t|_{C^0(I,\mathbb{C}^N)}) \leq Ce^{-\beta}|\tilde{G}|_Y.$$

d)
Zusammen ergibt sich also $|U(t)|_Y \leq |V(t)|_Y + |\phi(t)|_Y + |\tilde{U}(t)|_Y \leq Me^{-\beta}|\tilde{G}|$ für $t > 0$, also ist Schritt I damit gezeigt.

Schritt II
Sei nun $t_0 > 0$. Wir wollen nun zeigen, dass $|U(t)| \leq Ce^{-\beta|t-t_0|}|\tilde{G}|$ für $t > t_0$ gilt und C die gleiche Konstante wie in Schritt I bezeichnet. Wir wollen Schritt II auf den ersten Schritt zurückführen. Sei dazu $\tilde{G} \in \mathcal{W}_{t_0}^\perp \cap X$, (wobei $\mathcal{W}_{t_0} = \mathrm{span}\{\psi_1(t_0), \ldots \psi_n(t_0)\}$), $G(t,\eta) := \tilde{G}(\eta)\delta(t-t_0)$ und $U(t)$ die eindeutige Lösung von

$$\mathcal{S}U = G \tag{3.61}$$

mit $U\perp$ Kern$(\mathcal{S})$. Insbesondere erfüllt dann $U(t)$ für $t > t_0$

$$\dot{U}(t) = \mathcal{A}(t)U(t), \tag{3.62}$$

wegen $\tilde{G} \in X$. Außerdem ist $U_+(t_0) - U_-(t_0) = \tilde{G}$.
Diese Folgerung verdient eine genauere Betrachtung: wir haben behauptet, dass für $\tilde{G} \in \mathcal{W}_0^\perp \cap X$ die konstruierte Lösung $U(\cdot)$ tatsächlich eine klassische Lösung für $t > t_0$ ist. Die Konstruktion von U zeigt aber, dass $V(\cdot)$ eine klassische Lösung von $\dot{V}(t) = \mathcal{A}_{ref}V(t)$ ist, falls $\tilde{G} \in X$ und $t > t_0$: Dies ergibt sich aus Lemma 3.4. Ist $V(\cdot)$ glatt, so ist ebenfalls $\tilde{U}(\cdot)$ glatt (da die zweite Komponente von $\mathcal{B}$ identisch verschwindet) und damit auch $U(\cdot)$, da $\phi(\cdot)$ immer eine glatte Funktion ist. Definiere nun $W(t) := U(t + t_0)$ für $t > 0$. Dann ist $W(\cdot)$ wohldefiniert, differenzierbar und löst

$$\dot{W}(t) = \mathcal{A}(t + t_0)W(t), \tag{3.63}$$

für $t > 0$ und es gilt $W_+(0) - W_-(0) = U_+(t_0) - U_-(t_0) = \tilde{G}$. Bezeichne nun mit $\mathcal{T}_{t_0}$ den Operator:

$$(\mathcal{T}_{t_0}U)(t) = \dot{U}(t) - \mathcal{A}(t + t_0)U(t) \tag{3.64}$$

für $U(\cdot) \in \mathcal{D}(\mathcal{T}) \subset L^2(\mathbb{R}, Y)$. Dann ist trivialerweise $\{W(\cdot)\}\perp$ Kern$\mathcal{T}_{t_0}$, da $\{U(\cdot)\}\perp$ Kern$\mathcal{T}$ und alle Kernelemente von $\mathcal{T}_{t_0}$ sind um t_0 translatierte Kernelemente von $\mathcal{T}$. Desweiteren ist $\mathcal{S}_{t_0}W = \tilde{\mathcal{G}} := \tilde{G}\delta$ (wobei sicht $\mathcal{S}_{t_0}$ auf $\mathcal{T}_{t_0}$ bezieht). Sei $\chi(\cdot)$ eine Testfunktion, dann gilt:

$$\begin{aligned} &- \int_{-\infty}^{\infty} \langle \partial_t \chi(t) + \mathcal{A}(t + t_0)^* \chi(t), W(t) \rangle_Y \, dt \\ = &- \int_{-\infty}^{\infty} \langle \partial_t \chi(t - t_0) + \mathcal{A}(t)^* \chi(t - t_0), U(t) \rangle_Y \, dt \\ &= \tilde{G}\delta(\cdot - t_0)(\chi(\cdot - t_0)) = \left\langle \tilde{G}, \chi(0) \right\rangle_Y . \end{aligned}$$

Also gilt $\mathcal{S}_{t_0}W = \tilde{G}\delta$. Wir wollen nun Schritt I bezüglich des Operators $\mathcal{T}_{t_0}$ anstatt $\mathcal{T}$ und $t_0 > 0$ anwenden. Entscheidend ist, dass die dabei auftretenden Konstanten nicht von t_0 abhängen bzw. für $t_0 \to \infty$ nicht unbeschränkt wachsen. Wir haben dazu in Schritt I nacheinander die zur Konstruktion von $U(\cdot)$ auftretenden Funktionen $V(\cdot), \phi(\cdot)$ und $\tilde{U}(\cdot)$ abgeschätzt. Wie man leicht sieht, sind die Abschätzungen der Kernelemente $\phi(\cdot)$ und $V(\cdot)$ unabhängig von t_0, und zwar *für alle* $t_0 \in \mathbb{R}$: bei der Definition von $V(\cdot)$ setze man anstelle von „t“ die Differenz „$t - t_0$“ ein. Die Kernelemente von $\mathcal{T}_{t_0}$ sind gerade die um t_0 translatierten Kernelemente von $\mathcal{T}$. Hinsichtlich $\tilde{U}(\cdot)$ ist Gleichung (3.59) entscheidend. Geht man nun die gleiche Rechnung für $\mathcal{T}_{t_0}$ anstatt $\mathcal{T}$ durch, so beobachtet man, dass $\tilde{b}(t)$ bezüglich der $\mathcal{T}_{t_0}$-Rechnung nun die Form $\tilde{b}(t) = B(t + t_0)a_t$ annimmt. Man beachte, dass die $BC^{-\zeta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$-Norm von $\tilde{b}(\cdot + t_0)$ für ein $\zeta > 0$ höchstens *kleiner* wird für $t_0 \to \infty$. Die L^∞-Norm auf $\mathbb{R}_-$ von $\tilde{b}(\cdot + t_0)$ bleibt ebenfalls beschränkt, da wir a priori wissen, dass $\tilde{b}(\cdot)$ auf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt ist. Also sind die in Abschätzung (3.60) auftretenden Konstanten unabhängig von $t_0 > 0$.
Bei dem Fall $t_0 < 0$ argumentieren wir vorsichtiger: hier hat der $\tilde{b}(\cdot)$-Term die Form $\tilde{b}(t) = B(t - t_0)a_t$ für $t_0 > 0$. Man kann dann in dem Integralterm $\int_{-\infty}^{\infty} G_*(t - \xi)(\tilde{b}(\xi))d\xi$ über $\tilde{\xi} = \xi - t_0$ integrieren; der Integralterm liest sich dann $\int_{-\infty}^{\infty} G_*(t-(\xi+t_0))(B(\xi)a_{\xi+t_0})d\xi$. Bei dem Term $a_{\xi+t_0}$ tritt jetzt der gerade behandelte Fall auf; man kann also den Integralterm abschätzen und beim Berechnen des Integrals wieder zurück translatieren.
Es gilt also $|W(t)|_Y \leq Me^{-\beta t}|\tilde{G}|$ für $t > 0$ und einer t_0 unabhängigen Konstante M. Also gilt

$$|U(t)|_Y = |W(t - t_0)|_Y \leq Me^{-\beta|t-t_0|}|\tilde{G}|_Y,$$

für $t > t_0$, was zu zeigen war. Ist nun $\tilde{G} \notin X$, so approximiere $\tilde{G}$ durch Elemente in X. Damit ist Schritt II gezeigt.
Nach Konstruktion der Projektionen $P(t_0)$,$t_0 \geq 0$, ist Bild$P(t_0)$ =Bild$P_1\Pi(t_0)$; also Bild$P(t_0) = \{U_+(t_0) : \tilde{G} \in \mathcal{W}_{t_0}^{\perp}\}$. Außerdem ist für $Z \in Y$: $P(t_0)Z = P(t_0)[Z_1 + Z_2] := U_+(t_0) - V(t_0)$. wobei $Z_1 \in$ Bild$P(t_0)$, $Z_2 \in$ Kern$P(t_0)$, $V(\cdot) \in$ Kern$\mathcal{T}$ und $U_+(t_0) = Z_1 + V(t_0)$ ist (siehe [44], Lemma 5.9). Nach dem eben gezeigten, existiert also eine Lösung $U(t)$ für $t > t_0$, die

$$|U(t)|_Y \leq Me^{-\beta|t-t_0|}|Z_1|_Y \leq \tilde{M}e^{-\beta|t-t_0|}|Z|_Y$$

erfüllt. Bei der letzten Ungleichung wurde benutzt, dass $|Z|_Y$ und $|Z_1|_Y + |Z_2|_Y$ äquivalente Normen auf Y definieren. Damit ist der Beweis von Satz 3.5 abgeschlossen. □

3.3.4 Zentrumsdichotomien

Aufbauend auf den Ideen und Methoden des vorigen Kapitels, wollen wir in diesem Abschnitt Dichotomien bezüglich Operatoren $\mathcal{L} : H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ konstruieren, die keine Fredholmoperatoren sind. Dies ist z.B. der Fall, falls

$$(\mathcal{L}x)(t) = \partial_t x(t) - L(t)x_t \tag{3.65}$$

für $x(\cdot) \in H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, wobei $L(t)$ für festes t in der Form (3.66) gegeben ist und $\mathcal{L}$ asymptotisch konstant ist, aber die charakteristischen Gleichungen nicht hyperbolisch sind. Und genau dieser Fall ist für uns wichtig. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dies sei für die asymptotische Gleichung bei $t = \infty$ der Fall. Anstatt einer *exponentiellen* Dichotomie, wo Lösungen mit Startwerten auf einer der beiden Unterräume Bild$P(t_0)$ bzw. Kern$P(t_0)$ für ein $t_0 \in J$ jeweils exponentiell abklingen, werden wir in diesem Fall nur erwarten können, dass Lösungen mit polynomieller Rate *wachsen* können - abhängig von der Dimension des verallgemeinerten Eigenraumes. Der Übersicht halber betrachten wir nur die Konstruktion von Dichotomien auf $\mathbb{R}_+$, der Fall $\mathbb{R}_-$ verläuft dann analog.
Wir wollen von nun an annehmen, dass $L(t)$ in der Form (3.66) gegeben ist; mit gleichen Annahmen an die Glattheit von $p(\cdot, \cdot)$ und der $A_k(\cdot)$. Außerdem wollen wir annehmen, dass $\mathcal{L}$ asymptotisch konstant ist und $L(t) \to L_{nh}$ bezüglich der Operatornorm für ein gewisses $L_{nh} : H^1([-a, b], \mathbb{C}^N) \to \mathbb{C}^N$ und $t \to \infty$ gilt. Wir zeigen den folgenden Satz:

Satz 3.14 (Zentrumsstabile Dichotomien)
Seien die an $\mathcal{L}$ gemachten Annahmen erfüllt und $\mathcal{L}$ asymptotisch konstant, aber nicht asymptotisch hyperbolisch. Dann ist auch $\mathcal{T}$ asymptotisch konstant, aber nicht asymptotisch hyperbolisch. Weiterhin existiert ein $\kappa > 0$ und für jedes $\delta > 0$ eine positive Konstante K und eine Familie stark stetiger Projektionen $Q(t) : Y \to Y$ für $t \in \mathbb{R}_+$, so dass folgendes gilt: Für $U \in Y$ und $t_0 \in \mathbb{R}_+$ gilt

- *Es existiert eine stetige Funktion $V^{cs}(\cdot) : [t_0, \infty) \to Y$, so dass $V^{cs}(t_0) = Q(t_0)U$ gilt. Außerdem ist $V^{cs}(t) \in$ Bild$(Q(t))$ und $|V^{cs}(t)|_Y \leq Ke^{\delta|t-t_0|}|U|_Y$ für alle $t \geq t_0$ mit $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$.*

- *Es existiert eine stetige Funktion $V^u(\cdot) : (0, t_0] \to Y$, so dass $V^u(t_0) = (id - Q(t_0))U$ gilt. Außerdem ist $V^u(t) \in$ Kern$(Q(t))$ und $|V^u(t)|_Y \leq Ke^{-\kappa|t-t_0|}|U|_Y$ für alle $t_0 \geq t$ mit $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$.*

Ist $Q(t_0)U \in X$, so definiert $V^s(t)$ eine starke Lösung von (3.23) im Sinne von Definition 9. Ebenso ist für $(id - Q(t_0))U \in X$ die Funktion $V^u(t)$ eine starke Lösung von (3.23). Sei hingegen $U \in Y \cap BildQ(t_0)$ mit $U = (u^1, \phi(\cdot))$. Dann ist für $t > t_0$ die Abbildung $V^{cs}(t)$ von der Form $V^{cs}(t) = (\xi(t), \xi_t)$, wobei $V^{cs}(0) = U$ gilt und $\xi(\cdot)$ eine starke Lösung von (3.15) zum Anfangswert $\xi_0 = \phi$ ist. Analoges gilt für $V^u(\cdot)$.

Wir können den Satz 3.14 unter einer zusätzlichen Annahme weiter verschärfen. Tritt nämlich der Fall ein, dass $L(t) \to L_{nh}$ für $t \to \infty$ exponentiell, d.h. es gilt $|L(t) - L_{nh}| \leq Me^{-\gamma t}$ für $t > 0$, und die charakteristische Gleichung bezüglich L_{nh} nur *einfache* rein imaginäre Nullstellen besitzt, so gilt folgender Satz.

Satz 3.15
*Gelten die an $\mathcal{L}$ im vorigen Satz gemachten Annahmen und sei $\mathcal{L}$ asymptotisch konstant, aber nicht asymptotisch hyperbolisch. Dann ist auch $\mathcal{T}$ asymptotisch konstant, aber nicht asymptotisch hyperbolisch. Besitzt die charakteristische Gleichung bezüglich L_{nh} nur ein*fache *rein imaginäre Nullstellen, so kann man im Satz 3.14 $\delta = 0$ wählen.*

Der Beweis des Satzes 3.14 ist nicht besonders schwer und wird auf den schon behandelten Fall exponentieller Dichotomien zurückgeführt.

Beweisidee

Wir betrachten also $\mathcal{L}$ definiert durch $(\mathcal{L}x)(t) = \partial_t x(t) - L(t)x_t$ und

$$L(t)\varphi = \int_{-a}^{b} p(t,\theta)\varphi(\theta)d\theta + \sum_{k=1}^{m} A_k(t)\varphi(r_k). \tag{3.66}$$

Wir nehmen an, dass $\mathcal{L}$ asymptotisch konstant ist, aber nicht asymptotisch hyperbolisch. Es gilt also $L(t) \to L_{nh}$ für ein gewisses $L_{nh} : H^1([-a,b], \mathbb{C}^N) \to \mathbb{C}^N$ und $t \to \infty$. Der Index „nh“ soll andeuten, dass der zu L_{nh} assoziierte Operator $\mathcal{A}_{nh}$ *nicht hyperbolisch* ist. Es gelte außerdem $|L(t) - L_{nh}| \leq Me^{-\gamma t}$ für $t > 0$. Bezeichne weiterhin mit $\det\triangle_{nh}(\lambda)$ die charakteristische Funktion bezüglich L_{nh}, mit

$$\triangle_{nh}(\lambda) = \lambda - L_{nh}(e^{\lambda \cdot}) \tag{3.67}$$

und nach Annahme existieren rein imaginäre Nullstellen von $\det\triangle(\lambda)$. Der Übersicht halber wollen wir annehmen, dass null eine einfache Nullstelle ist und es keine weiteren rein imaginären Nullstellen gibt. Unser Beweis überträgt sich dann wortwörtlich auf den allgemeineren Fall.
Sei nun $x(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^N)$ eine Lösung von $\partial_t x(t) = L(t)x_t$. Definiere $y(t) := e^{-\mu t}x(t)$ für ein $\mu > 0$. Dann gilt

$$\partial_t y(t) = -\mu y(t) + L(t)[e^{\mu \cdot} y_t(\cdot)] =: L_{-\mu}(t)y_t. \tag{3.68}$$

Da $L(t) \to L_{nh}$ für $t \to \infty$, konvergiert auch $L_{-\mu}(t)$ für $t \to \infty$ gegen eine lineare Abbildung L_h mit

$$L_h\varphi = -\mu\varphi(0) + L_{nh}(e^{\mu \cdot}\varphi(\cdot)).$$

Ist nun $\mu > 0$ klein genug, so ist der zu L_h gehörige Operator $\mathcal{A}_h$ *hyperbolisch* bzw. die charakteristische Gleichung $\det\triangle_h(\lambda)$ bezüglich L_h besitzt *keine* rein imaginären Nullstellen. Es gilt nämlich folgender Zusammenhang zwischen $\triangle_h(\lambda)$ und $\triangle_{nh}(\lambda)$ (siehe auch 2.54)

$$\triangle_h(\lambda) = \triangle_{nh}(\lambda + \mu). \tag{3.69}$$

Wir haben also das gesamte Spektrum von $\mathcal{A}_{nh}$ um μ nach *links* verschoben. Die Beweisidee liegt also auf der Hand: wir wählen μ_0 klein genug, so dass $\partial_t x(t) = L_\mu x_t$ asymptotisch hyperbolisch ist für $t \to \infty$. Wir können dabei μ_0 so klein wählen, dass auch die charakteristische Gleichung bezüglich des asymptotischen Zustandes für $t \to -\infty$ keine rein imaginären Nullstellen für $0 < \mu < \mu_0$ hat. Für diesen Fall ist dann $\mathcal{L}_\mu = \partial_t - L_{-\mu}(\cdot)$ ein Fredholmoperator und wir können exponentielle Dichotomien auf $\mathbb{R}_+$ konstruieren. Anschließend müssen wir auf geeignete Weise diese Dichotomien, d.h. die Familie stark stetiger Projektionen, die bei der Definition einer exponentiellen Dichotomie auftreten, „zurücktranslatieren".

Beweis von Satz 3.15 und 3.14

Für die translatierte Gleichung $\dot{U}(t) = \mathcal{A}_\mu(t)U(t)$ können wir nach den Ergebnissen des letzten Kapitels exponentielle Dichotomien auf $\mathbb{R}_+$ konstruieren. Bezeichne die dazugehörige Projektion etwa mit $P_\mu(t_0)$, $t_0 > 0$. Wir werden uns nun mit der Frage beschäftigen, wie man die Projektionen bezüglich des nichthyperbolischen Problems $\dot{U}(t) = \mathcal{A}_{nh}(t)U(t)$ bestimmt. Wir haben hier

$$\mathcal{A}_{nh}(t)\begin{pmatrix} \xi \\ \varphi(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{nh}(t)\varphi(\cdot) \\ \partial_\theta\varphi(\cdot) \end{pmatrix}$$

für $\begin{pmatrix} \xi \\ \varphi(\cdot) \end{pmatrix} \in X$ gesetzt. Wir führen nun zunächst etwas Notation ein.

Notation
Mit $\mathbf{e}_\mu^\eta : Y \to Y$ bezeichnen wir die beschränkte lineare Abbildung

$$\mathbf{e}_\mu^\eta\begin{pmatrix} \xi \\ \varphi(\cdot) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^{\eta\mu}\xi \\ e^{\mu(\eta+\cdot)}\varphi(\cdot) \end{pmatrix}. \tag{3.70}$$

Wir definieren nun die gesuchten Projektionen durch $Q(t_0) := \mathbf{e}_\mu^0 P(t_0)\mathbf{e}_{-\mu}^0$. Dies definiert Projektionen von Y nach Y, die ebenfalls stark stetig bezüglich $t_0 \geq 0$ sind. Wir zeigen nun, dass alle Elemente aus dem Bild von $Q(t_0)$ beschränkte Lösungen von $\dot{U}(t) = \mathcal{A}_{nh}(t)U(t)$ induzieren, die für $t \geq t_0$ definiert sind.
Betrachte etwa $U_+ := P(t_0)\mathbf{e}_{-\mu}^0\tilde{G}$, für ein $\tilde{G} \in X$. Dann existiert eine klassische Lösung $U_+(t)$ des hyperbolischen Systems $\dot{U}(t) = \mathcal{A}_\mu(t)U(t)$ für $t \geq t_0$. Außerdem gilt die Abschätzung

$$|U_+(t)| \leq Me^{-\zeta|t-t_0|}|\mathbf{e}_{-\mu}^0\tilde{G}|_Y \tag{3.71}$$

für ein geeignetes $\zeta > 0$ und $t \geq t_0$. Setzen wir $X(t) = U_+(t+t_0)$ für $t > 0$, so ist $X(\cdot)$ eine klassische Lösung des Systems

$$\dot{X}(t) = \mathcal{A}_\mu(t+t_0)X(t) \tag{3.72}$$

für $t \geq 0$ und erfüllt $X(0) = U_+(t_0)$ und

$$|X(t)|_Y = |U_+(t+t_0)|_Y \leq Me^{-\zeta|t+t_0-t_0|}|\mathbf{e}_{-\mu}^0\tilde{G}|_Y \leq Me^{-\zeta t}|\mathbf{e}_{-\mu}^0\tilde{G}|_Y. \tag{3.73}$$

Nun definieren wir $Z(t) := \mathbf{e}_\mu^t X(t)$. Um diese Definition etwas besser zu motivieren, schreiben wir $X(\cdot)$ in der Form $X(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{x}_t(\cdot))$. $Z(t)$ ist dann durch

$$Z(t) = \begin{pmatrix} e^{\mu t}\tilde{x}(t) \\ e^{\mu(t+\cdot)}\tilde{x}_t(\cdot) \end{pmatrix}$$

festgelegt. Und wie wir bereits vorher bemerkt haben, erfüllt die erste Komponente von $Z(\cdot)$ die nichthyperbolische Gleichung

$$\dot{z}(t) = L_{nh}(t + t_0)z_t,$$

für $t \geq 0$ bzw. $Z(\cdot)$ erfüllt

$$\dot{U}(t) = \mathcal{A}_{nh}(t + t_0)U(t)$$

auf $\mathbb{R}_+$ mit der Abschätzung $|Z(t)|_Y \leq Me^{(-\zeta+\mu)t}|\mathbf{e}^{\mathbf{0}}_{-\mu}\tilde{G}|_Y$. Wir haben bei dieser Abschätzung benutzt, dass die gewichtete $L^2([-a,b],\mathbb{C}^N)$-Norm $\|f\|_{gew} := \|e^{\mu\cdot}f(\cdot)\|_{L^2}$ eine äquivalente Norm ist. Nach letzter Translation $W(t) := Z(t-t_0)$ erhalten wir schließlich die gewünschte Lösung zu

$$\dot{U}(t) = \mathcal{A}_{nh}(t)U(t) \tag{3.74}$$

für $t \geq t_0$, die der Abschätzung

$$|W(t)|_Y = |Z(t - t_0)|_Y \leq \tilde{M}e^{(-\zeta+\mu)|t-t_0|}|\tilde{G}|_Y$$

genügt. Außerdem ist $W(t_0) = Z(0) = \mathbf{e}^{\mathbf{0}}_{\mu}X(0) = \mathbf{e}^{\mathbf{0}}_{\mu}U_+(t_0) = \mathbf{e}^{\mathbf{0}}_{\mu}P(t_0)\mathbf{e}^{\mathbf{0}}_{-\mu}\tilde{G} = Q(t_0)\tilde{G}$. Also existiert für jedes Bildelement $Q(t_0)\tilde{G}$ eine Lösung $W(\cdot)$ für $t > t_0$ von (3.74), die $W(t_0) = Q(t_0)\tilde{G}$ erfüllt und der Abschätzung $|W(t)| \leq \tilde{M}e^{(-\zeta+\mu)|t-t_0|}|\tilde{G}|_Y$ genügt. Alle auftretenden Konstanten sind uniform bezüglich $\tilde{G}$ und t_0. Analog definiert man nun eine Funktion $W(t)$ für ein beliebiges $\tilde{G} \in Y$.
Die gleiche Rechnung zeigt, dass für Bildelemente von $(id-Q(t_0))$ Lösungen in Rückwärtszeit für $0 < t < t_0$ existieren, die der Abschätzung $|W_-(t)| \leq Me^{(-\kappa-\mu)|t-t_0|}|\tilde{G}|$ für $0 \geq t \geq t_0$ genügen.
Die Behauptungen über die Wahl der exponentiellen Raten folgt nun aus den Sätzen 3.5 und 3.4. □

Bemerkung
Genauso wie wir den Satz 3.14 bewiesen haben, können wir auch die Existenz einer *zentrumsinstabilen* Dichotomie auf $\mathbb{R}_+$ beweisen. In diesem Fall existieren dann für ein festes $t_0 \geq 0$ und $U \in Y$ Funktionen $V^{cu}(t)$ bzw. $V^s(s)$ für $0 \leq t \leq t_0$ bzw. $0 \leq t_0 \leq s$ mit $V^s(t_0) = (id - P(t_0))U$ und $V^{cu}(t_0) = P(t_0)U$, die die Abschätzung $|V^{cu}(t)|_Y \leq M|P(t_0)U|_Ye^{\delta|t-t_0|}$ bzw. $|V^s(s)|_Y \leq M|(id - P(t_0))U|_Ye^{-\beta|s-t_0|}$ für $\beta, \delta > 0$ erfüllen und $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden kann (mit einem $M = M(\delta)$). Hierbei sind $P(t) : Y \to Y$ beschränkte lineare Abbildungen, die starkstetig sind. Die restlichen Aussagen des Satzes 3.14 übertragen sich dann auf die Funktionen V^{cu}, V^s. Um diese Bemerkung zu beweisen kann man den Beweis des Satzes 3.14 benutzen, wobei man diesmal das Spektrum der asymptotischen Linearisierung $\mathcal{A}_{nh}$ nach *rechts* schieben muss.

3.3.5 Die Eindeutige-Fortsetzungs-Eigenschaft

Wir geben in diesem Abschnitt eine hinreichende Bedingung an, die gewährleistet, dass $\mathcal{L}$ Hypothese „EFE" (also Hypothese 6) erfüllt. Betrachte dazu eine lineare Abbildung $L(t) : H^1([-a,b],\mathbb{C}^N) \to \mathbb{C}^N$, die für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ durch

$$L(t)\varphi = \int_{-a}^{b} p(t,\theta)\varphi(\theta)d\theta + \sum_{k=1}^{m} A_k(t)\varphi(r_k) \tag{3.75}$$

gegeben ist, siehe auch das Setting im Anschluss an Gleichung (3.15). Nehme an, dass die Abbildung $p(t,\cdot) \in C^0([-a,b],\mathbb{C}^{N\times N})$ für jedes feste t kompakten Träger in $(-a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ für ein beliebiges, aber uniformes $\varepsilon > 0$ hat. Nehme weiterhin an, dass $\det A_1(t)$ und $\det A_m(t)$ auf keinem offenen Intervall in $\mathbb{R}$ verschwinden. Dann gilt:

Satz 3.16
Gelten die vorigen Annahmen an $\mathcal{L}$, so ist Hypothese „EFE“ (also Hypothese 6) erfüllt.

Beweis
Sei das obige ε klein genug, so dass $|r_i - r_j| > \varepsilon$ für alle $i \neq j$ und $i,j = 1,\ldots,m$. Sei $\tilde{a}(\cdot) \in \mathrm{Kern}(\mathcal{L})$ mit $\tilde{a}_t = 0$ für ein $t \in \mathbb{R}$, also $\tilde{a}(\tau) = 0$ für $\tau \in [t-a, t+b]$. Wir wollen annehmen, dass $\tilde{a}(\cdot)$ nicht identisch Null ist. Da $\tilde{a}(\cdot)$ als Kernelement eine glatte Funktion ist, nehmen wir an, dass

$$t_1 := \inf\{t \geq t_0 : \tilde{a}(t+b) \neq 0\}$$

existiert und endlich ist. Für alle $t_1 \leq t < t_1 + \varepsilon$ gilt dann

$$\int_{-a}^{b} p(t,\theta)\tilde{a}(t+\theta)d\theta + \sum_{k=1}^{m} A_k(t)\tilde{a}(t+r_k) = A_m(t)\tilde{a}(t+b).$$

Also gilt auf diesem Intervall

$$\dot{\tilde{a}}(t) = A_m(t)\tilde{a}(t+b).$$

Nach Definition von t_1 existiert ein nichtleeres, offenes Intervall $J \subset [t_1, t_1+\varepsilon)$, so dass $\tilde{a}(t+b) \neq 0$. Also folgern wir

$$0 = \dot{\tilde{a}}(t) = A_m(t)\tilde{a}(t+b)$$

im Widerspruch zu $\det A_m(t) \neq 0$ auf J. $\square$